

I esame 20/02/2004 ex. 2

2) Una sfera conduttrice, carica e isolata, avente raggio $R = 50.0 \text{ cm}$ è al potenziale $V_1 = -500 \text{ V}$ rispetto a terra.

A grande distanza dalla sfera è situato un condensatore sferico isolato con l'armatura esterna a potenziale zero e quella interna a potenziale

$$V_2 = 2.00 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

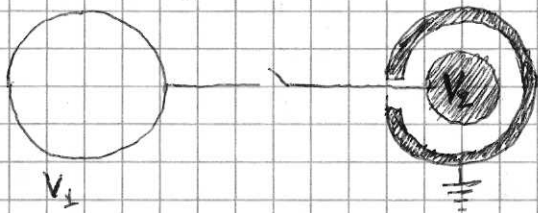
La sfera conduttrice e l'armatura interna del condensatore sferico vengono poi collegate mediante un sottile filo metallico avente capacità trascurabile.

Sia $V_0 = 1.95 \cdot 10^3 \text{ V}$ il nuovo valore assunto dal potenziale della sfera rispetto a terra.

Calcolare:

- il valore della capacità del condensatore sferico;
- la variaz. di energia elettrostatica del condensatore tra prima e dopo il collegamento.

(trascurare induzione tra i due sistemi e considerare la loro distanza molto maggiore delle loro dimensioni)



Prima:

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R V_1$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2$$

Dopo:

$$Q'_1 = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

$$Q'_2 = C_2 \cdot V_0$$

Sistema isolato: conservaz. della carica.

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

$$4\pi\epsilon_0 R V_1 + C_2 V_2 = 4\pi\epsilon_0 R V_0 + C_2 V_0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 R (V_0 - V_1)}{V_2 - V_0} = 2.72 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

Energia:

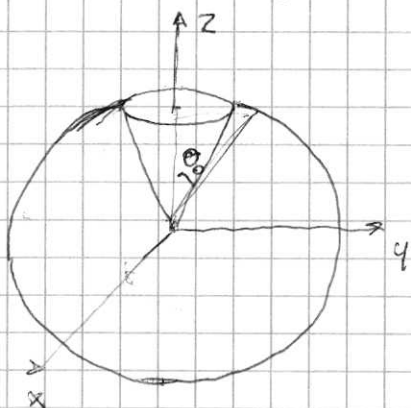
$$W_f - W_i = \frac{1}{2} C_2 (V_0^2 - V_2^2) = \frac{4\pi\epsilon_0 R (V_1 - V_0)}{V_0 - V_2} (V_0^2 - V_2^2) = 4\pi\epsilon_0 R (V_1 - V_0) (V_0 + V_2)$$

$$= -2.7 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

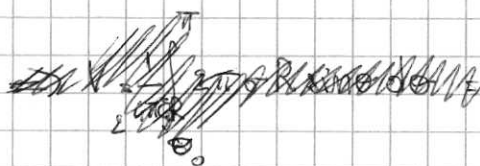
Da una superficie sferica isolante di raggio $R = 4 \text{ cm}$ carica con densità superficiale $\sigma = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ viene asportata simmetricamente rispetto all'asse z una calotta il cui bordo ha coordinata $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

Determinare:

- il valore del potenziale V al centro della superficie sferica;
- il campo elettrico \vec{E} al centro;
- la velocità asintotica raggiunta da una particella con $\frac{q}{m} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$ posta inizialmente al centro della superficie sferica con velocità nulla.



a) $dq = \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ come sempre, ma
 $\theta_0 < \theta < \pi$



~~$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\theta_0}^{\pi} 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta =$~~

$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} (-\cos\theta) \Big|_{\theta_0}^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} (1 + \cos\theta_0) = 8.43 \cdot 10^3 \text{ V}$

b) Per simmetria ci serve la sola componente lungo z .

$dE_z = - \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta$

$E_z = - \frac{1}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{\theta_0}^{\pi} \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2\theta \right) \Big|_{\theta_0}^{\pi} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \sin^2\theta_0 =$
 $1.41 \cdot 10^4 \text{ V/m}$

c) Conservaz. energia:

$\frac{1}{2} m v^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \approx 2.60 \text{ m/s}$

I semestre, 24/02/2006 - Esercizio 2

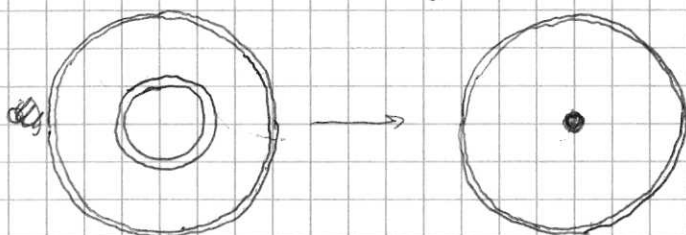
Due bolle di sapone sferiche, conduttrici, concentriche hanno spess. $\delta = 2.0 \cdot 10^{-5}$ cm, $R = 4.0$ cm, $r_2 = 2.0$ cm (raggi interni)

La bolla esterna è complessivamente neutra, mentre la bolla interna ha Q tale che la bolla esterna ha potenziale rispetto all'infinito $V_0 = 200$ V.

Ad un certo istante la bolla interna si rompe collassando in una goccia sferica di raggio r_1 .

Considerando l'acqua saponata conduttrice, calcolare:

- la carica Q ;
- il potenziale della bolla interna prima dello scoppio;
- il potenziale della goccia;
- la variaz. di energia elettrostatica in seguito allo scoppio.



- a) Induz. completa: sulla faccia esterna della bolla grande compare la carica Q . Il potenziale è

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R+\delta} = V_0 \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 V_0 (R+\delta) = 8.9 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

- b) Princ. di sovrapp. per calcolare il potenziale della bolla interna

$$V_g = V_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (\frac{R}{2} + \delta)} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 4.0 \cdot 10^2 \text{ V}$$

- c) Raggio goccia:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi [(r_2 + \delta)^3 - r_2^3] \rightarrow r_1 = 6.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$V_g = V_0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 1.3 \cdot 10^4 \text{ V}$$

- d) L'energia all'esterno resta la stessa. All'interno, il condensatore sferico ha cambiato d.d.p.:

$$U_1 = \frac{1}{2} Q (V_g - V_0) \quad U_2 = \frac{1}{2} Q (V_g - V_0) \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} Q (V_g - V_0) = 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$