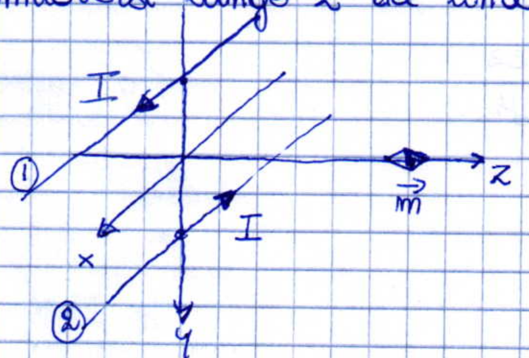
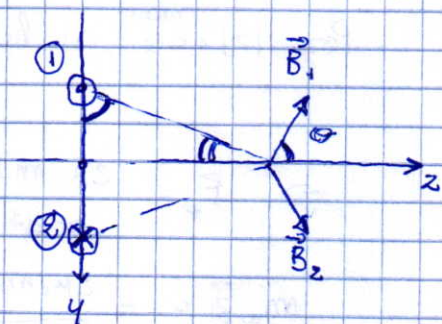
Esonero 16/05/2014, es. 2

Due fili infinitamente lunghi sono posti parallelamente all'asse $\hat{x}$ nel piano $z=0$, a $y=1.0$ cm $=d$ e $y=-d$. Sono percorsi da una corrente $I=2.5$ A in versi opposti (v. figura).
Si determini:

a) il campo di induzione magnetica B_0 nei punti dell'asse z, e si calcoli il valore del modulo per $z=0.5$ cm;
b) l'energia potenziale di un aghetto magnetico, con orientamento fissato, di momento $\vec{m}=m\hat{z}$, con $m=2\cdot10^{-7}$ A m^2 vincolato a muoversi lungo l'asse z;
c) dove l'energia potenziale dell'aghetto è minima e se ne calcoli il valore;
d) la componente z della forza agente sull'aghetto magnetico in funzione della sua posizione z e se ne calcoli il valore del modulo per $z=0.5$ cm.

Facoltativamente, si calcoli altresì il periodo delle piccole oscillazioni dell'aghetto di massa $m_a=1$ mg, quando viene lasciato libero di muoversi lungo z da una distanza $|z|\ll d$ dall'origine degli assi.





$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d^2+z^2)^{1/2}}$$

$$B_{1y} = -B_{2y}$$

$$B_{1z} = B_{2z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 \parallel \hat{z}$$

$$B_0 = \cancel{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{\cancel{2}\pi(d^2+z^2)^{1/2}}\cdot\cos\theta = \frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2+z^2)} \quad ; \quad B_0(z=0.5\text{ cm}) = 8\cdot10^{-5}\text{ T}$$

$$\cos\theta = \frac{d}{(d^2+z^2)^{1/2}}$$

b) Analogam. al caso elettrico, si ha:

$$U(z) = -\vec{m}\cdot\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0 m I d}{\pi(d^2+z^2)}$$

c) $$\frac{dU}{dz} = \frac{\mu_0 m I d}{\pi} \frac{2z}{(d^2+z^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dz} = 0 \quad \text{in } z=0 \quad (\text{è un minimo})$$

$$U(z=0) = -2.0 \cdot 10^{-11}\,J$$

d) $$\vec{F} = \underbrace{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla})}_{m\frac{\partial}{\partial z}} \vec{B}_0 \qquad (0, 0, B_{0z})$$

$$\Rightarrow F_z = -\frac{\mu_0 m I d}{\pi} \frac{2z}{(d^2+z^2)^2}$$

$$F_z(z=0.5\,cm) = -1.29 \cdot 10^{-9}\,N$$

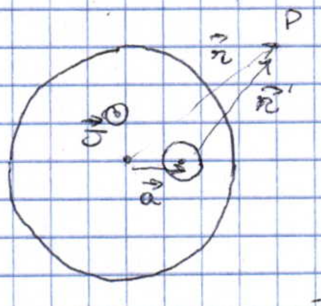
Per $|z| \ll d$, si ha $\frac{2z}{(d^2+z^2)^2} \simeq \frac{2z}{d^4}$

$$\Rightarrow F_z = -\frac{2\mu_0 m I z}{\pi d^3} \propto z$$

$$m_a \ddot{z} = -\frac{2\mu_0 m I}{\pi d^3} z$$

$$\omega = \left(\frac{2\mu_0 m I}{\pi d^3 m_a}\right)^{1/2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 9.9\,s$$

MS V.17



$R_1 > R_2$

$$I \Rightarrow J = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$$

p. di sovrapp.

un cavo cilindrico ha campo:

$$B(r) = \mu_0 \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} J}{2\cancel{\pi} \cancel{r}} = \frac{\mu_0 J}{2} \cdot r \qquad r < R$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 R^2 J}{2} \cdot \frac{1}{r} \qquad r > R$$

diretto come $\vec{J} \times \vec{r}$.

In particolare, possiamo scrivere $\vec{B}(r)$ in questo modo:

$$\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r}$$

$$\vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 R^2}{2 r^2} \vec{J} \times \vec{r}$$

Nel nostro caso, per il p. di sovrapp., il campo del cilindro cavo è la somma dei campi di un cilindro pieno percorso da corrente di densità $\vec{J}$ e un cilindro pieno, traslato con asse in posiz $\vec{a}$ rispetto all'asse del primo e percorso da corrente $-\vec{J}$. Indicando con $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ le posizioni di un generico punto P rispetto ai due assi, si ha

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} + \frac{\mu_0}{2} (-\vec{J}) \times \vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{a}$$

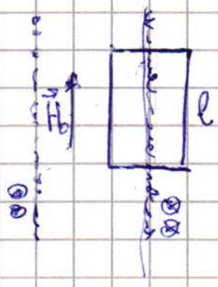
(nella cavità)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} + \frac{\mu_0 R_2^2}{2 r'^2} (-\vec{J}) \times \vec{r}\,' \qquad \text{(nel materiale)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R_1^2}{2 r^2} (\vec{J} \times \vec{r}) + \frac{\mu_0 R_2^2}{2 r'^2} (-\vec{J} \times \vec{r}\,')$$

MS E.VI.2

Solenoide molto lungo con materiale all'interno. Calcolo di $\vec{H}$, $\vec{J}_v$ e $\vec{J}_s$



Possibilità per le linee di forza (data la simmetria)

① • circolari, concentriche al solenoide e ortogonali all'asse

② • radiali

• rettilinee parallele al solenoide

① e ② no perché un cammino chiuso che concatena corrente dell'avvolgimento avrebbe circuitaz. nulla.

$\Rightarrow$ ③.

Il modulo deve essere costante all'interno, altrimenti circuitaz. non nulla su un cammino chiuso interno che non concatena correnti.

Ma fuori deve essere lo stesso $\Rightarrow H(r) = H_0$ per $r < R$, $H(r > R) = 0$

non può essere $\neq 0$ fino all'infinito

Calcoliamo H_0 dal teorema di Ampere:

$N(l)\, i = H_0 \cdot l$

$H_0 = n \cdot i$

$\hookrightarrow$ spire per un. di lungh.

$\vec{M} \parallel \vec{H}$, $\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$

Poiché H è uniforme, $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{J}_v = 0$

$\vec{J}_A = \vec{M} \times \hat{u}_n = (\mu_r - 1)\vec{H} \times \vec{u}_n \Rightarrow \vec{J}_A$ sulla sup del cilindro è disposto come la corrente di conduzione nel solenoide

$|\vec{J}_A| = (\mu_r - 1)\, n\, i$ $\qquad |\vec{J}_c| =$ ~~...~~ di $\frac{Ni}{l} = ni$

$\Rightarrow \frac{|\vec{J}_A|}{|\vec{J}_c|} = \mu_r - 1$, tipicamente molto grande per un ferromagnetico.