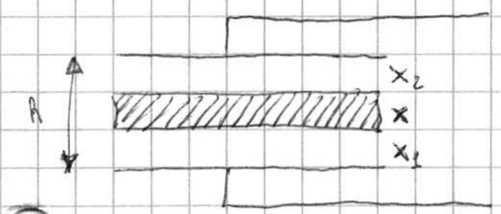
NV 2.10

In un condensatore piano (Σ, h) viene inserita parallelamente alle armature una lastra conduttrice a facce piane e parallele, ciascuna di area Σ e spessa x.

Calcolare di quanto varia la capacità del condensatore e quanto lavoro viene speso per inserire la lastra, nelle due ipotesi che l'inserimento avvenga mantenendo costante la carica sulle armature o costante la d.d.p. tra esse.

$\Sigma = 400\ cm^2$, $h = 1\ cm$, $x = 5\ mm$, $\Delta V = 10^4\ V$



Dopo l'inserimento della lastra, il sistema diventa una serie di condensatori:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 \Sigma} = (x_1 + x_2 = h - x) \Longrightarrow \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h-x} > C_0$$

a) Carica costante

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{\cancel{h}} \cdot E_0^2 h^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma h E_0^2$$

Il sistema resta isolato, per cui la carica depositata sulle armature rimane costante. Il campo resta dunque lo stesso, ma cambiano la d.d.p. e l'energia elettrostatica.

$$\Delta V = \frac{q_0}{C} = \frac{q_0 (h-x)}{\varepsilon_0 \Sigma} = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{E_0 = \frac{\Delta V_0}{h}} (h-x) = \Delta V_0 \frac{h-x}{h} < \Delta V_0$$

$$W' = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma \Sigma)^2 (h-x)}{\varepsilon_0 \Sigma} = W_0 \frac{C_0}{C} < W_0 \quad \left(\text{perché } C > C_0 \Leftrightarrow \frac{1}{C} < \frac{1}{C_0}\right)$$

Il campo è nullo nella lastra, per cui la diff. di pot. tra le armature è diminuita di $E_0 x$ e l'energia è diminuita di

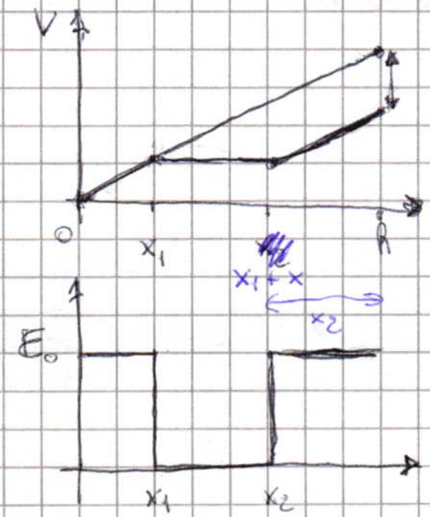
$$W_x = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \Sigma x$$

Infatti,

$$\Delta W = W_0 \frac{C_0}{C} - W_0 = W_0\left(\frac{\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h}}{\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h-x}} - 1\right) = - W_0 \frac{x}{h} =$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma \cancel{h}}_{W_0} \cdot \frac{x}{\cancel{h}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma x$$ ⟹ la lastra viene risucchiata dentro

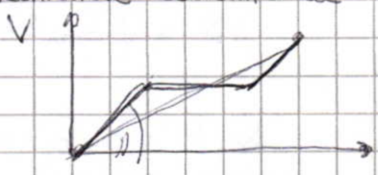
⟹ L'energia è diminuita della quantità originariamente immagazzinata nel volume vuoto che viene riempito dalla lastra. In pratica, dal punto di vista energetico avviene tutto come se la dist. fra le armature fosse diminuita di x.



Il lavoro compiuto dalle forze del campo è

$$L_{q=cost} = -\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma x$$

b) Se invece $\Delta V_0 = cost$, poiché dopo l'inserimento il campo elettrico è nullo all'interno, il generatore deve compiere lavoro per mantenere costante la d.d.p.



$$\Delta V_0 = E_0 h = E'(h-x) \Longrightarrow E' = E_0 \frac{h}{h-x} > E_0$$

corrispondentemente, la densità di carica deve essere aumentata dello stesso fattore.

Si può equivalentem. ragionare sulle capacità:

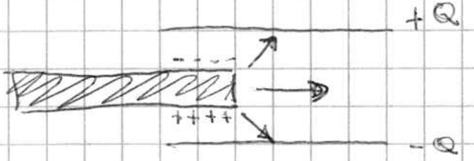
$$C > C_0 \quad , \quad C = \frac{q}{\Delta V_0} \; , \Longrightarrow q > q_0$$ e quindi E aumenta dello stesso fattore.

L'energia nella config. finale è

$$W' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma (h-x) E'^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cdot \Sigma \cdot \frac{h^2}{(h-x)} = W_0 \frac{h}{h-x} > W_0$$

$$\Delta W' = W_0 \left(\frac{h}{h-x} - 1\right) = W_0 \frac{x}{h-x}$$

In questo caso, $W' > W_0$, ma l'induzione assicura che la lastra venga attirata nel condensatore in entrambi i casi:



L'apparente paradosso del caso b (forze del campo che compiono lavoro, ma l'energia elettrostatica aumenta) deriva dal fatto che il sistema non è isolato perché è collegato al generatore che mantiene la ddp tra le armature.

Il generatore sposta una carica Δq tra un'armatura e l'altra, tra le quali mantiene ΔV_0. Compie quindi il lavoro:

$$L_{gen} = \Delta q \cdot \Delta V_0 = (q' - q_0)\Delta V_0 = (C' - C_0)\Delta V_0^2 = 2(W' - W_0) = 2 W_0 \frac{x}{h-x}$$

$$L_{\substack{lastra \\ V=cost}} = L_{gen} - \Delta W' = W_0 \frac{x}{h-x} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma h \frac{x}{h-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma x \cdot \frac{h}{h-x} =$$

$$= L_{q=cost} \cdot \frac{h}{h-x} > L_{q=cost}$$

Ma ricordiamo che tutto vale nel solo caso di induzione completa e trascurando gli effetti di bordo.

$C_0 = 35.4\ pF$, $C = 2C_0 = 70.8\ pF$

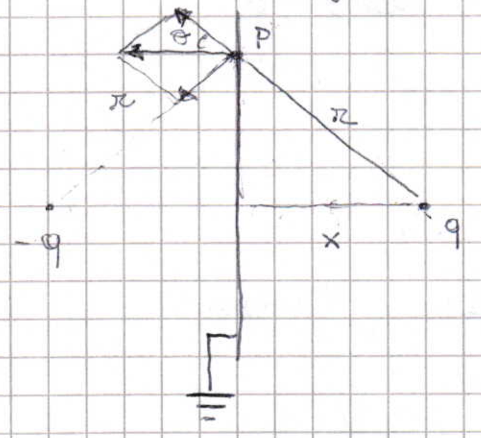
$L_{q=cost} = 8.85 \cdot 10^{-4}\ J$

$L_{V=cost} = 17.70 \cdot 10^{-4}\ J$

NV 1.14

Una carica puntiforme positiva q si trova a distanza x da un piano conduttore indefinito a potenziale zero.

Calcolare la forza con cui la carica è attirata dal piano.



È ancora un problema di induzione completa (piano indefinito) per cui sappiamo che la densità di carica σ indotta sul piano si integrerà a $-q$.

Poiché il potenziale generato da q è non nullo sul piano, la distribuzione di carica indotta dovrà essere tale da generare un potenziale che sovrapposto a quello della carica, mantenga nullo il potenziale totale del piano.

Perciò sappiamo che, se r è la distanza di q da un punto del piano, varrà

$$V_i = -V_q(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Cioè come se ci fosse una carica $-q$ disposta a distanza r dallo stesso punto, e posta in posizione simmetrica rispetto a q.

[N.B. si può anche citare la soluzione banale che annulla il potenziale ovunque e mantiene $-q$ a distanza r dal punto sul piano, cioè quando $-q$ coincide con q.]

La forza di attrazione su q sarebbe allora $F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2x)^2}$

Il campo, come evidente dalla figura, è normale al piano con modulo

$$E = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

e orientato verso le x decrescenti. Con riferimento alla figura:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \implies E = \frac{qx}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

e <u>se</u> questo è il campo che risolve il problema anche in presenza del piano, allora la densità di carica è

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{-qx}{2\pi(x^2+y^2)^{3/2}}$$

il "-" discende dal fatto che $\vec{E}$ è entrante ($\Longleftrightarrow$ antiparallelo alla normale "uscente" usata nel T. di Coulomb: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$)

quindi, a x fissato, σ è massima nel punto proiez. di q sul piano e decresce radialmente rispetto a tale punto.

Inoltre, verifichiamo che:

$$\int_{piano} \sigma \, d\Sigma = \int_0^{\infty} \frac{-qx}{2\pi(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{2\pi y \, dy}_{area} =$$

$$= -qx \left. \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|_0^{\infty} = -q$$

Integrando la forza con cui questa distribuzione attrae q, troviamo:

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \, d\Sigma}{r^2} \underbrace{\cos\theta}_{\text{per consideraz. di simmetria}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi y \, dy}{(x^2+y^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sigma =$$

$$= \frac{q^2 x^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{2y \, dy}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\int_0^{\infty} dF = -\frac{1}{2} \frac{q^2 x^2}{8\pi\varepsilon_0} \left. \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \right|_0^{\infty} = \frac{q^2 x^2}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2x)^2}$$ come nel caso della carica puntiforme.

⇒ La soluzione calcolata sostituendo al piano la carica fittizia $-q$ è consistente con le condizioni al contorno di questo problema. La carica $-q$ si chiama "carica immagine" di q.

In generale, se abbiamo n cariche e una sup. equipot. Σ (V_Σ) che separa m di queste dalle restanti $n-m$, il conduttore coincidente con Σ vincolato al potenziale V_Σ non modifica nulla perché i potenziali sono rimasti invariati ovunque. Se la sup. è abbastanza estesa da poter parlare di induzione completa, il conduttore presenterà due densità di cariche opportune per rispettare le condizioni imposte dal potenziale. Eventualmente le cariche di uno dei due semispazi possono anche esser lasciate libere di muoversi fino a neutralizzarsi sulla sup. ma dall'altra parte non cambia ancora nulla perché il conduttore funge da schermo elettrostatico (ricordare esercizio sfere). Allo stesso modo il conduttore potrebbe essere pieno, e ancora nulla cambierebbe nell'altra porzione di spazio.

⇒ Calcolare campo e potenziale in una regione con un sistema di cariche e un conduttore è un problema riconducibile a quello di determinare le cariche immagine necessarie a mantenere a un certo potenziale una superficie coincidente con quella del conduttore. Più rigorosamente, il teorema di unicità della soluzione dell'eq. di Poisson assicura che la soluzione del problema con i conduttori e con le cariche immagine è la stessa nella porzione di spazio