ES PER CASA

$$p + p \to p + p + p + \bar{p}$$

① $E_{soglia} = ?$

s.i., LAB

$$\xrightarrow{p} \overset{p}{\bullet}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{(E+m_p)^2 - p^2} =$$

$$= \sqrt{\underline{E}^2 + m_p^2 + 2E m_p - \underline{p}^2} =$$

$$= \sqrt{2m_p^2 + 2E m_p}$$

s.f., CdM <u>ALLA SOGLIA</u> (= ferme)

$$\begin{pmatrix} 4 m_p \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{s}\Big|_{soglia} = 4 m_p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m_p^2 + 2E_{soglia} m_p} = 4 m_p$$

$$\Leftrightarrow 2m_p^2 + 2E_{soglia} m_p = (4 m_p)^2$$

$$\Leftrightarrow 2E_{soglia} m_p = (4m_p)^2 - 2m_p^2$$

$$\Rightarrow E_{soglia} = \frac{16 m_p^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 7 m_p \sim 6.9 \text{ GeV}$$

$$K_{soglia} = E_{soglia} - m_p = 6 m_p \sim 5.9 \text{ GeV}$$

② e se nel bersaglio $p_F = 240$ MeV?

$$\sqrt{s}\Big|_{s.f.,\,CM,\,soglia} = 4 m_p$$ ← non cambia

dobbiamo ricalcolare $\sqrt{s}\Big|_{s.i.,\,LAB}$

$$\xrightarrow{\vec{p}}\ \overset{\vec{0}}{\cdot} \quad \Longrightarrow \quad \xrightarrow{\vec{p}}\ \overset{\vec{p}_F}{\nearrow \vartheta}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_F \\ \vec{p}_F \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{s}\Big|_{s.i.,\,LAB} = \sqrt{\left(E+E_F\right)^2 - \left|\vec{p}+\vec{p}_F\right|^2} =$$

$$= \sqrt{E^2 + E_F^2 + 2EE_F - p^2 - p_F^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{p}_F}$$

$$= \sqrt{2m_p^2 + 2EE_F - 2pp_F\cos\vartheta}$$

quindi $\sqrt{s}\Big|_{s.i.} = \sqrt{s}(\vartheta)$

$\vec{p}\ \ \vec{p}_F$

MAX per $\vartheta = \pi$ $\quad \longrightarrow \leftarrow$

MIN per $\vartheta = 0$ $\quad \longrightarrow \rightarrow$

lo stato iniziale è un mix di tutti i ϑ

→ quello che ci interessa è il caso MAX $(\vartheta = \pi)$ perché quelle poche volte che succede PERMETTE di creare lo stato finale ⇒ vedremo una minor soglia (abbassa la soglia) in altre parole, fissato $(E, \vec{p})$ del proiettile

$\Rightarrow$ si ha $\sqrt{s}^{MAX}$ nello stato iniziale quando $\vartheta = \pi$

$\Rightarrow$ se questo $\sqrt{s}$ è abbastanza per creare lo stato finale, lo creo

$$\Rightarrow \sqrt{s}\Big|_{s.i., LAB}^{\vartheta=0} = \sqrt{2m_p^2 + 2EE_F + 2pp_F}$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.i., LAB} = \sqrt{s}\Big|_{s.f., p \text{ soglia}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m_p^2 + 2EE_F + 2pp_F} = 4m_p$$

$$\Leftrightarrow 2m_p^2 + 2EE_F + 2pp_F = (4m_p)^2$$

$$\Leftrightarrow 2m_p^2 + 2EE_F - 16m_p^2 = 2p_F\sqrt{E^2 - m_p^2}$$

~~quadro~~

$$\cancel{\Leftrightarrow A = 2m_p^2 - 16m_p}$$

$$2EE_F - 14m_p^2 = 2p_F\sqrt{E^2 - m_p^2}$$

quadro

$$4E^2E_F^2 + (14m_p^2)^2 - 56m_p^2 EE_F = 4p_F^2(E^2 - m_p^2)$$

$$\Leftrightarrow E^2\underbrace{(4E_F^2 - 4p_F^2)}_{A = 4m_p^2} + E\underbrace{(-56m_p^2E_F)}_{B} + \underbrace{(14m_p^2)^2 + 4p_F^2m_p^2}_{C} = 0$$

$$p_F = 240 \text{ MeV} \Rightarrow E_F = \sqrt{m_p^2 + p_F^2} = 1.01 \text{ GeV}$$

$$A = 4 m_p^2 = 3.86 \text{ GeV}^2$$

$$B = -56 m_p^2 E_F = -54.6 \text{ GeV}^3$$

$$C = (14 m_p^2)^2 + 4 p_F^2 m_p^2 = 184 \text{ GeV}^4$$

$$E = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \begin{cases} + \to 8.6 \text{ GeV} \\ - \to 5.5 \text{ GeV} \end{cases}$$

nuova soglia

($\exists$ possibilità di creare questo stato finale con fascio di energia $E = 5.5$ GeV)

(ERA $E_{soglia} = \underline{6.9}$ GeV con $\vec{p} = \vec{0}$)

EX PER CASA

MATERIA OSCURA χ $\quad m_\chi = 100$ GeV $\quad$ s.i., LAB

$$e^+ e^- \to \chi \bar{\chi} \qquad \xrightarrow{e^+} \cdot^{e^-} \qquad \begin{pmatrix} E_+ \\ \vec{p}_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_e \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

① $E_{soglia} = ?$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.i.,LAB} = \sqrt{(E_+ + m_e)^2 - p_+^2} = \sqrt{E_+^2 + m_e^2 + 2E_+ m_e - p_+^2}$$

$$= \sqrt{2m_e^2 + 2E_+ m_e}$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.f.,\,soglia} = 2m_\chi$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2m_e^2 - 2E_+ m_e} = 2m_\chi$$

(LHC = 14 TeV)

$$2m_e^2 - 2E_+ m_e = 4m_\chi^2$$

$$E_{+,\,soglia} = \frac{4m_\chi^2 - 2m_e^2}{2m_e} \sim 2\,\frac{m_\chi^2}{m_e} = 39 \text{ TeV} \quad (!)$$

x1000

(2) se invece collisore?

$$\underset{(E,\vec{p})}{\xrightarrow{e^+}} \ \underset{(E,-\vec{p})}{\xleftarrow{e^-}} \qquad \vec{p}+\vec{p} = \vec{0} \quad (\text{LAB} = \text{CdM})$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{(E+E)^2 + (\vec{p}+\vec{p})^2} = \cancel{\sqrt{4E^2}}$$

$$= 2E$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.i.} = \sqrt{s}\Big|_{s.f.,\,soglia}$$

$$\Rightarrow 2E_{soglia} = 2m_\chi$$

x1000

$$\Leftrightarrow E_{soglia} = m_\chi = 100 \text{ GeV} \quad (\ll 39 \text{ TeV!})$$

FASCIO SU BERSAGLIO : $\sqrt{s}(E) \propto \sqrt{E}$

COLLISORE : $\sqrt{s}(E) \propto E$

EX fascio di K^+ su bersaglio

$$K^+ + n \longrightarrow \pi^+ + \Lambda$$

$m_n = 940$ MeV $m_\Lambda = 1116$ MeV $m_\pi = 140$ MeV

$m_K = 494$ MeV $\tau_0(\pi) = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

(a) energia di soglia = ?

$$\sqrt{s}\Big|_{s.i.} = \sqrt{(E + m_n)^2 - p^2} = \sqrt{m_K^2 + m_n^2 + 2E_K m_n}$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.f.,\,soglia} = m_\pi + m_\Lambda$$

$$\Rightarrow \quad m_K^2 + m_n^2 + 2E_K m_n = (m_\pi + m_\Lambda)^2$$

$$E_K = \frac{(m_\pi + m_\Lambda)^2 - m_n^2 - m_K^2}{2m_n} = 0.24 \text{ GeV}$$

$\uparrow$

$< m_K$??

sempre verificata $\Rightarrow$ NON C'È SOGLIA

la reazione può sempre avvenire

si potevano evitare i calcoli e osservare che

$$\sum_f m_f = m_\pi + m_\Lambda = 1.256 \text{ GeV}$$

$$\sum_i m_i = m_K + m_n = 1.434 \text{ GeV} > \sum_f m_f$$

$\Rightarrow$ stato finale è sempre accessibile

(c'è sempre abb. energia in s.i.)

(b) Se Λ è prodotta a riposo nel LAB $\Rightarrow E_K = ?$ $\boxed{7}$

s.i., LAB $\qquad\qquad$ s.f. LAB

$$\begin{pmatrix} E_K \\ \vec{p}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_n \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} m_\Lambda \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\pi \\ \vec{p}_\pi \end{pmatrix}$$

tutto il 4 momento totale energia-impulso si deve conservare

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_K = \vec{p}_\pi \quad \Leftrightarrow \quad E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + p_K^2}$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.i.,LAB} = \cancel{\sqrt{m_K^2 + m_n^2 + 2E_K m_n}} = \sqrt{(m_n + E_K)^2 - p_K^2}$$

$$//$$

$$\sqrt{s}\Big|_{s.f.,LAB} = \sqrt{(m_\Lambda + E_\pi)^2 - p_\pi^2} = \cancel{\sqrt{m_\Lambda^2 + E_\pi^2 + 2m_\Lambda E_\pi - p_\pi^2}}$$

$$= \cancel{\sqrt{m_\Lambda^2 + m_\pi^2 + 2m_\Lambda E_\pi}}$$

~~uguaglio e quadro~~

$$\cancel{\Rightarrow m_K^2 + m_n^2 + 2E_K m_n = m_\Lambda^2 + m_\pi^2 + 2m_\Lambda E_\pi}$$

ma sappiamo che $p_K = p_\pi$

$$\Rightarrow \quad m_n + E_K = m_\Lambda + E_\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad E_\pi = E_K + m_n - m_\Lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad E_\pi^2 = E_K^2 + (m_n - m_\Lambda)^2 + 2E_K(m_n - m_\Lambda)$$

$$\Leftrightarrow \quad E_K = \frac{E_\pi^2 - E_K^2 - (m_n - m_\Lambda)^2}{2(m_n - m_\Lambda)}$$

e visto che $E_\pi^2 = m_\pi^2 + p_K^2$

$$E_K^2 = m_K^2 + p_K^2$$

$$\Rightarrow \quad E_\pi^2 - E_K^2 = m_\pi^2 - m_K^2$$

$$\Rightarrow \quad E_K = \frac{m_\pi^2 - m_K^2 - (m_n - m_\Lambda)^2}{2(m_n - m_\Lambda)} = 726 \text{ MeV}$$

(c) La distanza media dei pioni del punto (b) prima di decadere

$$E_K = 726 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad p_K = \sqrt{E_K^2 - m_K^2} = 532 \text{ MeV}$$

$$(p_\pi = p_K)$$

$$\Rightarrow E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + p_K^2} = 550 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_\pi = \frac{p_\pi}{E_\pi} = \frac{532}{550} = 0.967$$

$$\gamma_\pi = \frac{E_\pi}{m_\pi} = \frac{550}{140} = 3.93$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_\pi = \beta_\pi \gamma_\pi c \tau_\pi = 0.967 \cdot 3.93 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} =$$

$$= 29.6 \text{ m}$$

(d) il pione del punto b decade secondo

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Determinare ϑ e ϑ^* del neutrino t.c. l'energia del neutrino nel LAB è metà del suo valore massimo

$m_\nu = 0$
$\Rightarrow E_\nu = p_\nu$

in generale $\quad E_\nu = \gamma_\pi \left(E_\nu^* + \beta_\pi p_\nu^* \cos\vartheta^* \right) =$

$$= \gamma_\pi \left(E_\nu^* + \beta_\pi E_\nu^* \cos\vartheta^* \right)$$

MAX quando $\cos\vartheta^* = 1 \Leftrightarrow \vartheta^* = 0$

$$E_\nu^{MAX} = \gamma_\pi \left(E_\nu^* + \beta_\pi E_\nu^* \right) = \gamma_\pi E_\nu^* (1 + \beta_\pi)$$

Per invece avere $\quad E_\nu = \frac{1}{2} E_\nu^{MAX}$:

$$\gamma_\pi E_\nu^* \left(1 + \beta_\pi \cos\vartheta^* \right) = \gamma_\pi E_\nu^* \frac{(1+\beta_\pi)}{2}$$

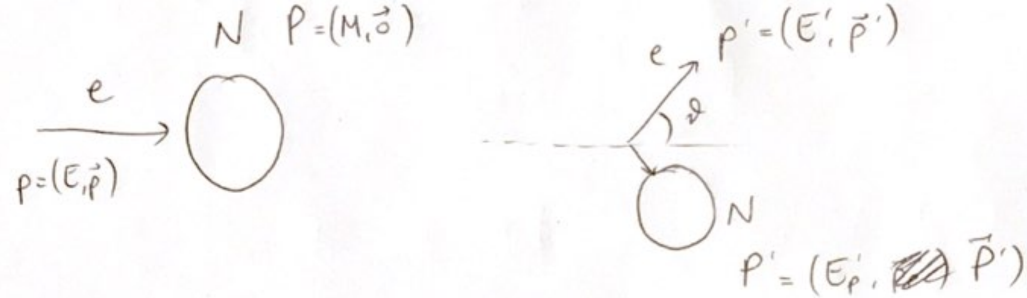
$$\Leftrightarrow \quad 1 + \beta_\pi \cos\vartheta^* = \frac{1}{2}(1 + \beta_\pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\vartheta^* = \frac{\beta_\pi - 1}{2\beta_\pi} = -0.017 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta^* = 1.59$$

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma_\pi \left(\beta_\pi / \beta_\nu^* + \cos\vartheta^* \right)} = 0.26$$

SCATTERING ELASTICO

elettrone su nucleo



urto <u>elastico</u> ⇒ particelle di stato iniziale e finale sono le <u>stesse</u>

$$\Leftrightarrow \quad m_e^2 = p^2 = E^2-\vec{p}^2 = p'^2 = E'^2-\vec{p}'^2$$

$$M^2 = P^2 = P'^2 = E_P'^2 - \vec{P}'^2$$

conservazione del 4-impulso:

$$p+P = p'+P'$$

$$\Leftrightarrow \quad (p+P)^2 = (p'+P')^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2+P^2+2p\cdot P = p'^2+P'^2+2p'\cdot P'$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{m_e^2}+\cancel{M^2}+2p\cdot P = \cancel{m_e^2}+\cancel{M^2}+2p'\cdot P'$$

$$\Leftrightarrow \quad p\cdot P = p'\cdot P'$$

Sperimentalmente è difficile misurare il rinculo del nucleo (si misura solo l'elettrone nello s.f.) $\boxed{S2}$

$\Rightarrow$ conviene riscrivere $P' = p + P - p'$

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p' \cdot p + p' \cdot P - p'^2$$
$$= p' \cdot p + p' \cdot P - m_e^2$$

e svolgendo i prodotti:

$$\begin{cases} p \cdot P = E \cdot M \\ p' \cdot p = E'E - \vec{p}' \cdot \vec{p} \\ p' \cdot P = E'M \end{cases}$$

$$\to \quad EM = E'E - \vec{p}' \cdot \vec{p} + E'M - m_e^2$$
$$= E'E - p'p\cos\vartheta + E'M - m_e^2$$

ora mettiamoci nell'approssimazione ~~[illegible]~~ $\Leftrightarrow E \gg m_e$ o $\Leftrightarrow (m_e \sim 0)$

$$\Rightarrow \quad EM = E'E - E'E\cos\vartheta + E'M - \cancel{m_e^2}$$

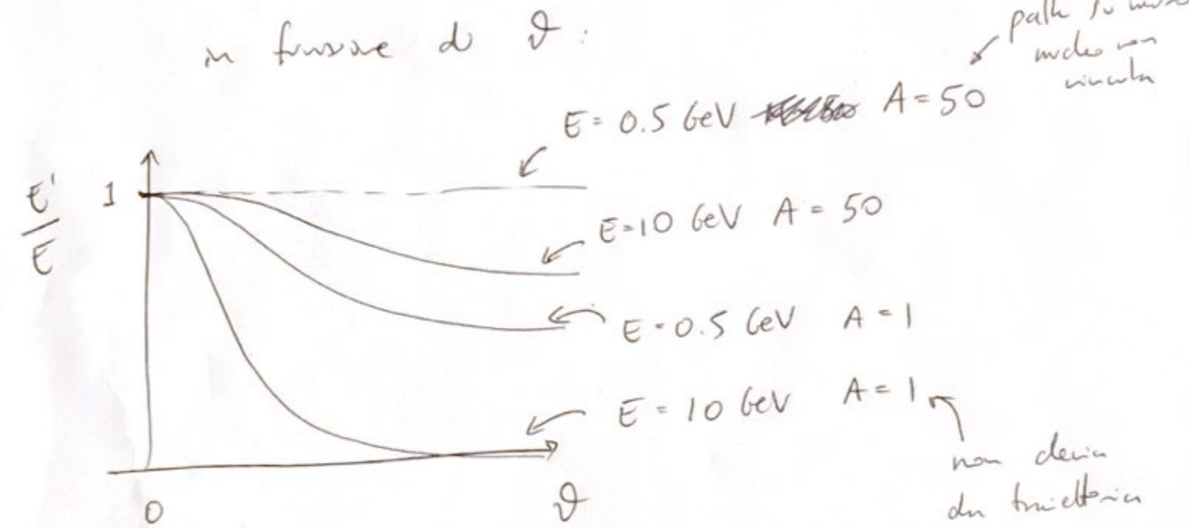
$$E'\left(E(1-\cos\vartheta) + M\right) = EM$$

divido per M: $E'\left(\frac{E}{M}(1-\cos\vartheta) + 1\right) = E$

$$\Leftrightarrow \quad E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M}\left(1 - \cos\vartheta\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{M}\left(1 - \cos\vartheta\right)}$$

Quindi: fissato il bersaglio (M) e l'energia dell'elettrone incidente (E), l'energia uscente avrà uno spettro in funzione di ϑ:

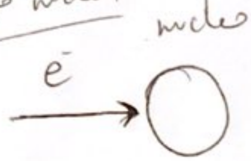


<u>ORA</u> questo era il caso elettrone contro nucleo e era tutto esatto fino al punto in cui abbiamo trascurato la massa dell'elettrone

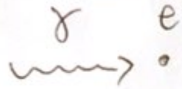
→ lo stesso risultato si applica a fotoni che, interagendo nella materia diffondono su elettroni

$\boxed{54}$

$\boxed{\text{elettrone contro nucleo}}$



$\boxed{\text{FOTONE + ELETTRONE}}$



"Scattering COMPTON"

se $E_e \gg m_e$

→ $m_e \sim 0$

$m_\gamma = 0$

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1-\cos\vartheta)}$$

con $M = M_{nucleo}$ se $e+N$

$M = m_e$ se $\gamma + e$

SCATTERING COMPTON

s.i.

s.f.