$\boxed{EX}$ Un bersaglio di $Li_2B_4O_7$

massa molecolare 169.11 g/mol

$\rho = 2.4\ g/cm^3$ $\quad d = 10\ \mu m$

irraggiato con fascio di protoni con $E = 675\ keV$

e potenza $P = 6.75\ \mu W$

per produrre $\quad p + {}^{11}B \rightarrow {}^{12}C^* \rightarrow 3\ {}^{4}He$

Un rivelatore copre il 30% dell'angolo solido e ottiene 27000 reazioni in un minuto

(a) Numero di protoni che arriva sul bersaglio nell'unità di tempo

$$\phi = \frac{P}{E} = \frac{6.75\ \mu W}{675 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 6.25 \cdot 10^7 \cdot s^{-1}$$

(b) Numero di bersagli ${}^{11}B$ per unità di volume

"quali sono i bersagli?"

in generale $\quad n = \frac{N_A}{A}\rho$

$$[n] = \cancel{}\ cm^{-3} = \frac{[N_A]}{[A]} [\rho] =$$

$$= \frac{mol^{-1}}{g/\cancel{mol}} \cancel{g}/cm^3 = cm^{-3} \text{ OK}$$

ma cosa sto calcolando?

$$\frac{N_A}{A_{Li_2B_4O_7}} \cdot \rho_{Li_2B_4O_7} = \text{numero di \underline{molecole} } Li_2B_4O_7 \text{ per unità di volume}$$

questo numero deve essere moltiplicato per (4) (B_4, quattro atomi B per sito) e per (0.8) (abbondanza isotopica)

$$\Rightarrow n(^{10}B) = 4 \cdot 0.8 \cdot \frac{N_A}{A} \rho = 4 \cdot 0.8 \cdot \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{169.11} \cdot 2.4 =$$

$$= 2.7 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

(c) $\sigma = ?$

Supponiamo che la rate è $\dot{N}_r = \frac{27000}{60} \text{ s}^{-1}$

$$= 450 \text{ s}^{-1}$$

- $$\dot N_r = \sigma \cdot \phi \cdot \underbrace{n_b \cdot V}_{N_b} \cdot \varepsilon$$

efficienza

qui $\varepsilon = 30\%$

- $$\sigma = \frac{\dot N_r}{\phi\, n_b\, V\, \varepsilon} = \frac{\dot N_r}{\dot N_p\, n_b\, d\, \varepsilon} =$$

$\phi = \dot N_p / S$ ← superficie, sezione del fascio

$V = d S$

$$= \frac{450}{6.25\cdot 10^{7} \cdot \underset{cm^{-3}}{2.7\cdot 10^{22}} \cdot \underbrace{10\cdot 10^{-6}}_{\mu m} \cdot \underset{cm}{10^{+2}} \cdot 0.3} = 8.9\cdot 10^{-25}\ cm^2$$

$= 0.89$ barn

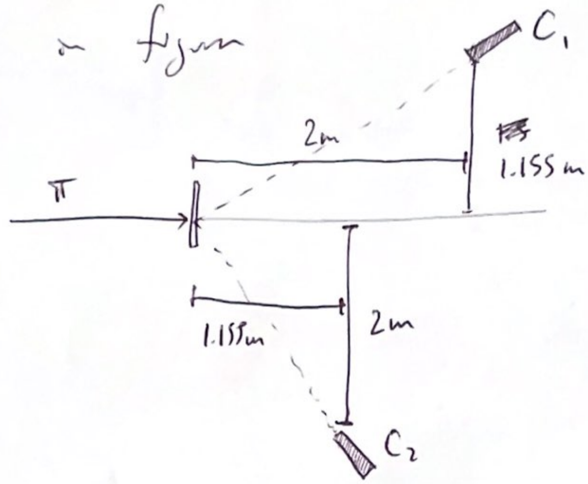
$\boxed{EX/2}$ Fascio di pioni $I = 1\ nA$ e bersaglio di grafite: C, $\rho_c = 2\ g/cm^3$, $Z_c = 6$, $A_c = 12$ di spessore $d = 1\ cm$

Si supponga che la sezione d'urto di produzione di K^+ nell'interazione di π^+ con nuclei di C abbia la forma $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0 (1 + \alpha \cos\vartheta)$

$\pi^+ + C \to K^+ + X$

con θ angolo fra K^+ e direzione del fascio

I K^+ sono rivelati da due contatori C_1, C_2 posti come in figura



I due rivelatori sono cilindrici e hanno sezione circolare di raggio $r = 5$ cm

(a) $\alpha = ?$ Sapendo che il rapporto fra i conteggi

$$R = \frac{N_1}{N_2} = 0.756$$

Allora, entrambi i rivelatori sono alla stessa distanza

$$L = \sqrt{1.155^2 + 2^2} = 2.31 \text{ m}$$

e hanno stessa area $\Rightarrow$ sottendono lo stesso angolo solido

$$\Delta\Omega = \frac{\pi r^2}{L^2} = 0.00147 \text{ sr}$$

$$\rightarrow \quad R = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1+\alpha\cos\vartheta_1}{1+\alpha\cos\vartheta_2}$$

da cui

$$\alpha = \frac{1-R}{R\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1} = -0.5$$

$$\cos\vartheta_2 = \frac{1.155\,\text{m}}{L} = 0.5$$

$$\cos\vartheta_1 = \frac{2\,\text{m}}{L} = 0.866$$

(b) $\sigma_0 = ?$ sapendo che $\dot{N}_1 = 0.5\ K^+/s$

Sezione d'urto integrata sul C_1

$$\sigma_1 \cong \frac{d\sigma}{d\Omega}\Delta\Omega = \sigma_0\,(1+\alpha\cos\vartheta_1)\,\Delta\Omega$$

per $\Delta\Omega \ll 1$

$$\rightarrow \quad \dot{N}_1 = \dot{N}_\pi \; n_b \cdot \sigma_1 \cdot d$$

$$= \dot{N}_\pi \; \frac{N_A}{A_c}\rho_c \cdot \sigma_1 \cdot d = \frac{I_\pi}{e}\,\frac{N_A}{A_c}\rho_c\,\sigma_0\,(1+\alpha\cos\vartheta_1)\,\Delta\Omega\, d$$

"quali sono i bersagli?" C

$$\dot{N}_\pi = \frac{I_\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{\dot{N}_1}{\frac{I_\pi}{e} \cdot \frac{N_A}{A_c} \rho_c (1 + \alpha \cos\vartheta_1) \Delta\Omega\, d} =$$

$\dot{N}_1 \leftarrow 0.5\, s^{-1}$

in cm

$$= \frac{0.5}{\frac{1 \cdot 10^{-9}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{12} (1 - 0.5 \cdot 0.5) \cdot 0.00147 \cdot 1}$$

$$= 0.96\ \mu b / sr$$

(c) $C \longrightarrow H_2$ ($\rho = 0.07\ g/cm^3$)

cambio bersaglio

Assumendo che la sezione d'urto sia la somma di sezioni d'urto per nucleone ($n = p$)

$\Rightarrow$ quale è lo spessore d' per avere stesso rate che grafite?

Sezione d'urto per singolo nucleone $\frac{d\sigma_N}{d\Omega} = \frac{1}{A_c} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{12} \frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\Rightarrow \dot{N}_H = \dot{N}_\pi \cdot n_b \cdot \sigma \cdot d'$$

qual sono i bersagli?

H! $\Rightarrow n_b = \frac{N_A}{A_{H_2}} \cdot \rho_{H_2} \cdot 2$

$A_{H_2} = 2$

$$\Rightarrow \dot N_H = \dot N_\pi \cdot \frac{N_A}{A_H}\cdot \rho_{H_2}\cdot 2\cdot \frac{1}{A_C}\frac{d\sigma}{d\Omega}\cdot d'$$

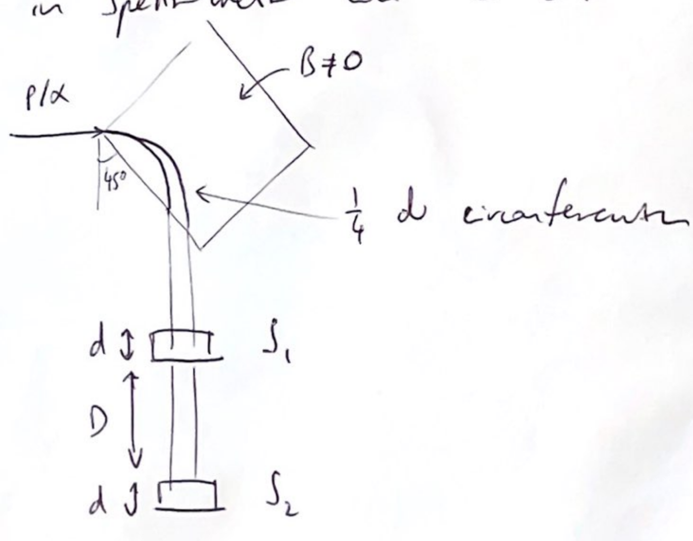
$\uparrow$

vogliamo che questo sia lo stesso di prima in C_1

$$\cancel{\dot N_\pi}\cdot\frac{N_A}{A_H}\cdot\rho_H\cdot 2\,\frac{1}{\cancel{A_C}}\,\cancel{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\cdot d' \stackrel{!}{=} \cancel{\dot N_\pi}\,\frac{\cancel{N_A}}{\cancel{A_C}}\,\rho_C\,\cancel{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\cdot d$$

$$\Rightarrow d' = d\,\frac{\rho_C}{\rho_H}\cdot\frac{\cancel{A_H}}{2} = d\,\frac{\rho_C}{\rho_H} = 1\,\text{cm}\cdot\frac{2}{0.07} = 28.6\,\text{cm}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Un fascio di protoni e particelle α con $E = 6$ GeV passa in spettrometro con $B = 2T$



e poi passano in due scintillatori di NaI spessi 2cm e posti a $D = 5$ m l'uno dall'altro

NaI: $\frac{Z}{A} = 0.45$ $\rho = 3.67\ g/cm^3$ $\langle I \rangle = 452\ eV$

$X_0 = 2.59\ cm$

$m_p = 0.938\ GeV$ $m_\alpha = 3.727\ GeV$

ⓐ Calcolare lo spessore minimo degli scintillatori per contenere i due fasci

Ora $p = qRB$

le due particelle faranno traiettorie diverse perché

① hanno E uguale ma m diversa
$\Rightarrow$ hanno p diverse

② hanno carica diversa $(e \neq 2e)$

$$p = qRB \Rightarrow R = \frac{p}{qB}$$

ora
$$p_p = \sqrt{E^2 - m_p^2} = \sqrt{6^2 - 0.938^2} = 5.93\ GeV$$
$$p_\alpha = \sqrt{E^2 - m_\alpha^2} = \sqrt{6^2 - 3.727^2} = 4.70\ GeV$$

$$\Rightarrow R_p[m] = \frac{p_p\,[GeV]}{0.3 \cdot B[T]} = \frac{5.93}{0.3 \cdot 2} = 9.88\ GeV$$

$$R_\alpha[m] = \frac{p_\alpha\,[GeV]}{0.6 \cdot B[T]} = \frac{4.70}{0.6 \cdot 2} = 3.92\ GeV$$

$\Rightarrow \ell = R_p - R_\alpha \sim 6$ m

(b) Calcolare energia depositata nel primo scintillatore

$$-\frac{dE}{dx} = C \boxed{\rho} \boxed{\frac{Z}{A}} \frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2}{\boxed{\langle I\rangle}}\right) - \beta^2\right]$$

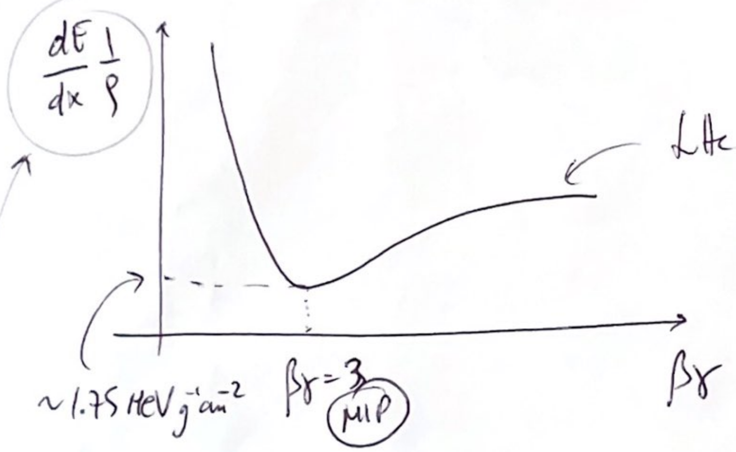
IN GENERALE $\frac{dE}{dx} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{BREM}$ con

$C = 0.307$ MeV g^{-1} cm^{-2}

$\square$ = dipende dal materiale

$\bigcirc$ = dipende dalla particella

PARENTESI



Tutte curve per diversi materiali sono simili

(se $q=1 \Rightarrow z^2=1$

se $q=2 \Rightarrow z^2=4$!)

perché si usa $\frac{dE}{dx}\frac{1}{\rho}$? Perché:

ρ, $\frac{Z}{A}$, $\langle I\rangle$ dipendono dal materiale

MA $\frac{Z}{A} \sim 0.5$ per materiali stabili

$\langle I\rangle \sim Z$ ma sta dentro a log

Quindi $\frac{dE}{dx}\frac{1}{\rho}$ dipende POCO dal materiale

~~Plateau di $\beta\gamma=3$~~ $\beta\gamma = 3$ MIP

$$\beta\gamma < 3 \Rightarrow \frac{dE}{dx}\frac{1}{\rho} \sim \frac{1}{\beta^2}$$

$$\beta\gamma > 3 \to \frac{dE}{dx}\frac{1}{\rho} \sim \text{cost} \sim 1.75 \text{ MeV/cm}^2\text{/g}$$

aumenta lentamente (entro $\times 2$)

Spesso come approssimazione va bene per "MIP" ($\beta\gamma \geq 3$)

Ma in questo caso possiamo fare calcolo preciso

→ servono β/γ

$$\begin{cases} \beta_p = \dfrac{P_p}{E} = \dfrac{5.93}{6} = 0.988 \\ \gamma_p = \dfrac{E}{m_p} = \dfrac{6}{0.938} = 6.10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_\alpha = \dfrac{P_\alpha}{E} = \dfrac{4.70}{6} = 0.783 \\ \gamma_\alpha = \dfrac{E}{m_\alpha} = \dfrac{6}{3.727} = 1.61 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dE}{dx}\right)_p = 0.307 \cdot \underset{\rho}{3.67} \cdot \underset{Z/A}{0.47} \cdot \frac{\overset{z^2}{1}}{0.988^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot \overset{m_e \text{ in eV}}{0.511 \cdot 10^6} \cdot 0.988^2 \cdot 6 \cdot 10^2}{452}\right) + - 0.988^2 \right]$$

$$= 5.4 \text{ MeV/cm}$$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_\alpha = 0.307 \cdot 3.67 \cdot 0.47 \cdot \frac{4}{0.783^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot 0.511 \cdot 10^6 \cdot 0.783^2 \cdot 1.61^2}{452} \right) - 0.783^2 \right]$$

$$= 25 \text{ MeV/cm}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_p = \left(\frac{dE}{dx}\right)_p \cdot d = 5.4 \cdot 2 = 10.8 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_\alpha = \left(\frac{dE}{dx}\right)_\alpha \cdot d = 25 \cdot 2 = 50 \text{ MeV}$$

(c) tempo di volo fra S_1 e S_2 ?

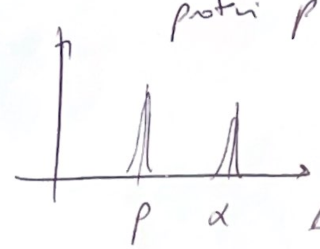
$$\Delta t = \frac{\overbrace{\Delta x}^{= 5\text{ m} = D}}{\beta c}$$

⚠ Per fare le cose per bene bisognerebbe ricalcolare le energie dopo aver perso energia in S_1, ma anche α che perde 50 MeV cambia poco (50 MeV << 6 GeV)

$$\Rightarrow \quad \Delta t_p = \frac{\cancel{\Delta x}\, D}{\beta_p c} = 16.9 \text{ ns}$$

$$\Delta t_\alpha = \frac{D}{\beta_\alpha c} = 21.8 \text{ ns}$$

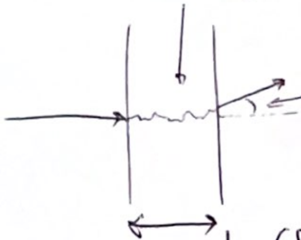
protoni più veloci



per distinguere fra questi due con solo TOF serve risoluzione di ~1 ns

(d) angolo quadratico medio di scattering

scattering Coulombiano (elastico)



angolo di diffusione ϑ

$x = d$ (Si)

$\langle \vartheta \rangle = 0$

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} \equiv \vartheta_{RMS} \sim (21\ \text{MeV})\ \frac{z}{c\beta p}\sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

lunghezza di radiazione

questo è angolo 3D

$\rightarrow$ per avere angolo sul piano $\vartheta^{2D}_{RMS} = \dfrac{\vartheta^{3D}_{RMS}}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$ nel problema

$$\left(\vartheta_{RMS}\right)_p = (21\ \text{MeV})\ \frac{\overset{z=1}{1}}{0.988 \cdot 5.93 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{\overset{d}{2}}{\underset{X_0}{2.59}}} = 0.0032\ \text{rad} = 3.2\ \text{mrad}$$

in MeV!

$$\left(\vartheta_{RMS}\right)_\alpha = (21\ \text{MeV}) \cdot \frac{\overset{z=2!}{2}}{0.983 \cdot 4.7 \cdot 10^3}\sqrt{\frac{2}{2.59}} = 10\ \text{mrad}$$