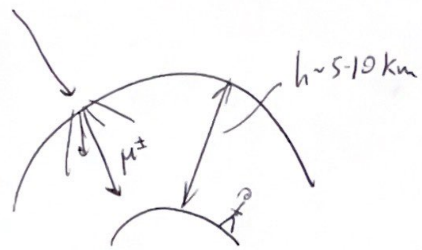
EX PER CASA / 1



$\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}\,s$

$v \sim c$

$\gamma \sim 10$

legge di decadimento esponenziale $P(t) \sim e^{-t/\tau}$

Se in media decade dopo τ, come fa a fare 5-10 km?

MEDIA = τ

Anche se $v = c \Rightarrow c\tau_\mu = 3 \cdot 10^8\,m/s \cdot 2.2 \cdot 10^{-6}\,s \sim \underline{660\,m}$

Se non ci fosse cinematica relativistica sarebbero molto rari i $\mu^\pm$ sulla superficie della Terra.

Ma grazie a dilatazione dei tempi / contrazione delle lunghezze ci arrivano (circa $1/min/cm^2$)

DUE MODI (EQUIVALENTI) DI VEDERLA

(1) $\Delta t = \gamma \tau_\mu$ $\gamma \sim 10$ nel problema

nel SdR della Terra, in cui il $\mu^\pm$ è in moto

$\Rightarrow c\tau_\mu \rightarrow c\gamma\tau_\mu \sim \underline{6.6\ \text{km}}$

Nel SdR della Terra il $\mu^\pm$ vive più a lungo

(2) Nel SdR solidale con il $\mu^\pm$ (in cui è a riposo) la ~~vita~~ vita media è τ_μ

MA si contraggono le lunghezze

$\Rightarrow$ non deve percorrere $5 \cdot 10$ km

ma solo $\dfrac{5 \cdot 10}{\gamma}$ km $\sim$ 500-1000 m

EX PER CASA / 2

Calcolare vita media di π^+ in SdR in cui il pione ha impulso $p(\pi) = 100$ GeV/c

con $m(\pi) = 139.6$ MeV
$\tau_0(\pi) = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

on $E^2 = m^2 + p^2$

$$p = m\gamma v \Rightarrow \frac{m}{p} = \frac{1}{\gamma v} \overset{(c=1)}{=} \frac{1}{\gamma\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2\beta^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2\beta^2+1}{\gamma^2\beta^2}}} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{1+\gamma^2\beta^2}}$$

on $\gamma^2\beta^2+1 = \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} + 1 = \frac{\cancel{\beta^2}+1-\cancel{\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2}} = \beta \qquad \boxed{\frac{p}{E} = \beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{E}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{E^2-p^2}{E^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{E^2}}} = \frac{E}{m}$$

$E^2 = m^2+p^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E}{m} = \gamma}$$

Torniamo all'esercizio

$$p = 100 \text{ GeV} = 100 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

$$m = 139.6 \text{ MeV}$$

$\Rightarrow \quad p \gg m$

$$\Rightarrow \quad E = \sqrt{m^2 + p^2} \sim \sqrt{p^2} = p = 100 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{p}{E} \sim 1$$

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{100 \text{ GeV}}{139.6 \text{ MeV}} = 714$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \tau_0 = 714 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} s \sim 1.8 \cdot 10^{-5} s = 18 \mu s$$

CIFRE SIGNIFICATIVE!

COMPOSIZIONE VELOCITA'

$O'x'y'z'$ ha velocità v_0 rispetto a $Oxyz$

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c} \quad (v_0 // \hat{x}) \quad e \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

in meccanica classica $\begin{cases} v_x' = v_x - v_0 \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$

5

In meccanica relativistica

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\cancel{\gamma_0}\,(\Delta x - \beta_0 c\,\Delta t)}{\cancel{\gamma_0}\,(\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c})} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta_0 c}{1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

ora $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x$ e $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x}} \Leftrightarrow \boxed{\beta_x' = \frac{\beta_x - \beta_0}{1 - \beta_0 \beta_x}}$$

CASO LIMITE: $\beta_x = 1$ $(v = c)$

$$\Rightarrow \beta_x' = \frac{1-\beta_0}{1-\beta_0} = 1 \Leftrightarrow \text{se } \beta_x = 1 \Rightarrow \beta_x' = 1$$

$\forall \beta_0 \Leftrightarrow \forall$ SdR

E se invece l'oggetto si muove lungo y (con sempre boost lungo x)?

$$v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma_0 (\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c})} = \frac{\overbrace{\Delta y/\Delta t}^{v_y}}{\gamma_0 (1 - v_0 v_x)} = \frac{v_y}{\gamma_0 (1 - v_0 v_x)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_y' = \frac{\beta_y}{\gamma_0 (1 - \beta_0 \beta_x)}$$

PER CASA

EX Fascio di pioni π^+ : 10^{12} pioni/s

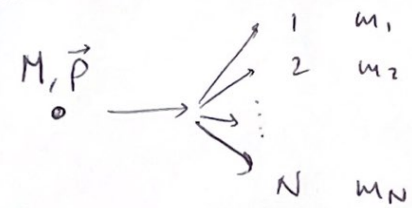
tutti con impulso $p = 2$ GeV

Qual è intensità del fascio (in Ampère) dopo che hanno viaggiato per 120 m nel vuoto?

$$m(\pi^+) = 140 \text{ MeV} \qquad Q(\pi^+) = +e$$
$$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

DECADIMENTO IN DUE CORPI

IN GENERALE



Nel SdR solidale con la particella

stato iniziale

stato finale

Conservazione del 4-impulso

$$P^{tot}_{s.i.} = \sum_i^{p.lle} P^i_{s.i.} = P^{tot}_{s.f.} = \sum_i^{p.lle} P^i_{s.f.}$$

$$P^{tot} = \begin{pmatrix} E^{tot} \\ \vec{p}^{\,tot} \end{pmatrix} \leftarrow$$ si conservano tutte le componenti (Energia e impulso)

di uno stato

stato iniziale: nel SdR solidale con M

$$P^{tot}_{s.i.} = P^{M}_{s.i.} = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E = \sqrt{M^2+p^2} = M$

$\vec{p} = \vec{0}$

stato finale:

CdM

$$P^{tot}_{s.f.} = \sum_i^{p.lle} P^{i}_{s.f.} = \sum_i \begin{pmatrix} E_i^* \\ \vec{p}_i^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{tot}_{s.i.} = P^{tot}_{s.f.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = \sum_i E_i^* \\ \vec{0} = \sum_i \vec{p}_i^* \end{cases}$$

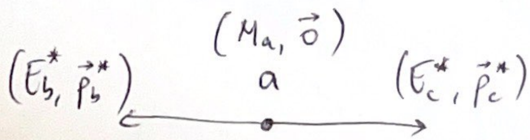
$$M = \sum_i E_i^* = \sum_i \sqrt{m_i^2 + |\vec{p}_i^*|^2} \geq \sum_i m_i$$

$\Leftrightarrow \sum_i m_i \leq M$ se no viola energia!

Ora consideriamo $a \longrightarrow b + c$

$M_a \quad m_b \quad m_c$

Mettiamoci nel SdR solidale con a



$$\begin{pmatrix} M_a \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b^* + E_c^* \\ \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \end{pmatrix}$$

$$M_a = E_b^* + E_c^*$$

$$\vec{0} = \vec{p}_b^{\,*} + \vec{p}_c^{\,*} \iff \vec{p}_b^{\,*} = -\vec{p}_c^{\,*} \equiv \vec{p}^{\,*}$$ BACK-TO-BACK

$$M_a = \sqrt{m_b^2 + (p^*)^2} + \sqrt{m_c^2 + (p^*)^2}$$

$$\iff M_a - \sqrt{m_b^2 + (p^*)^2} = \sqrt{m_c^2 + (p^*)^2}$$ e quadro!

$$\Rightarrow M_a^2 + m_b^2 + \cancel{(p^*)^2} - 2M_a\sqrt{m_b^2 + (p^*)^2} = m_c^2 + \cancel{(p^*)^2}$$

$$\iff M_a^2 + (m_b^2 - m_c^2) = 2M_a\sqrt{m_b^2 + (p^*)^2}$$ e quadro!

$$\Rightarrow M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2M_a^2(m_b^2 - m_c^2) = 4M_a^2\left(m_b^2 + (p^*)^2\right)$$

$$\iff M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + \underline{2M_a^2 m_b^2} - 2M_a^2 m_c^2 = \underline{4M_a^2 m_b^2} + 4M_a^2 (p^*)^2$$

$$\iff M_a^2 + (m_b^2 - m_c^2)^2 - 2M_a^2(m_b^2 + m_c^2) = 4M_a^2 (p^*)^2$$

$$\Rightarrow p^* = \sqrt{\frac{M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 - 2M_a^2(m_b^2 + m_c^2)}{4M_a^2}}$$

MONOCROMATICO!

e quindi anche $E_{b/c}^* = \sqrt{m_{b/c}^2 + (p^*)^2}$

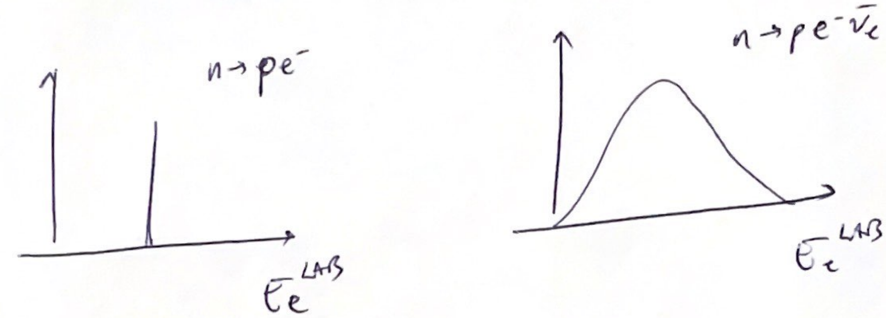
$\boxed{\text{EX}}$ RICAVARE

$$E_b^* = \sqrt{m_b^2 + (p^*)^2} = \frac{M_a^2 + (m_b^2 - m_c^2)}{2M_a}$$

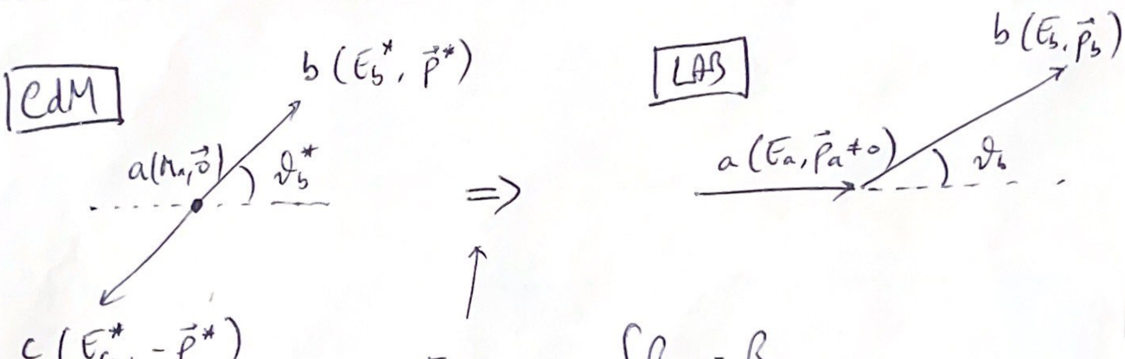
$$E_c^* = \sqrt{m_c^2 + (p^*)^2} = \frac{M_a^2 + (m_c^2 - m_b^2)}{2M_a}$$

Quindi un decadimento in due corpi è **MONOCROMATICO** nel SdR del centro di massa. PAULI E LA SCOPERTA DEL NEUTRINO

$(n \to p e^- \bar{\nu}_e)$



VEDIAMO IL CASO IN CUI LA PARTICELLA CHE DECADE HA VELOCITA' $\neq 0$ NEL LAB

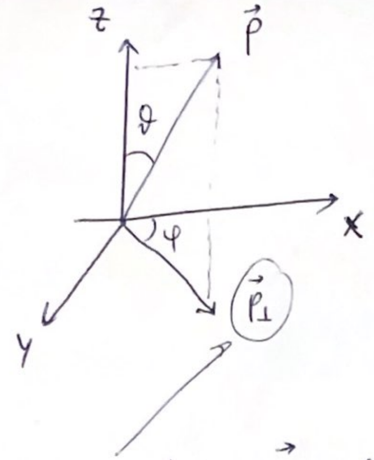


TdL con $\begin{cases} \beta_{cm} = \beta_a \\ \gamma_{cm} = \gamma_a \end{cases}$ ← lungo le z

LAB — tutto riferito a b ma tolgo pedice senza implicito — (CdM)

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ |\vec{p}|\sin\vartheta\cos\varphi \\ |\vec{p}|\sin\vartheta\sin\varphi \\ |\vec{p}|\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ |\vec{p}^*|\sin\vartheta^*\cos\varphi^* \\ |\vec{p}^*|\sin\vartheta^*\sin\varphi^* \\ |\vec{p}^*|\cos\vartheta^* \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\beta_{cm} \Uparrow$



supponiamo che $\vec{p}_\perp$ è invariante sotto TdL

$\Rightarrow \quad p_\perp = p_\perp^*$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{(p_x^*)^2 + (p_y^*)^2}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + p^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi} = \sqrt{p^{*2} \sin^2\vartheta^* \cos^2\varphi^* + p^{*2} \sin^2\vartheta^* \sin^2\varphi^*}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 \sin^2\vartheta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} = \sqrt{p^{*2} \sin^2\vartheta^*}$

$\Leftrightarrow \quad p \sin\vartheta = p^* \sin\vartheta^*$

Sostituendo in $\circledast$ ottengo

$$p \sin\vartheta \cos\varphi = p^* \sin\vartheta^* \cos\varphi^*$$

$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \cos\varphi^*$

e $\quad \sin\varphi = \sin\varphi^*$ $\quad \forall\, \varphi, \varphi^* \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi^*}$

Invece per ϑ, in $(*)$ divido (y) per (z)

$$\frac{p_y}{p_z} = \frac{p \sin\vartheta \sin\varphi}{p\cos\vartheta} = \frac{p^* \sin\vartheta^* \sin\varphi^*}{\beta_{cm}\gamma_{cm} E^* + \gamma_{cm} p^* \cos\vartheta^*}$$

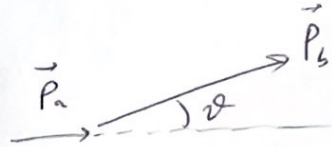
$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma_{cm}\left(\beta_{cm}\frac{E^*}{p^*} + \cos\vartheta^*\right)}$$

con $\frac{p^*}{E^*} = \beta^*$ velocità di b in CdM

$$\Rightarrow \boxed{\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\gamma_{cm}\left(\beta_{cm}/\beta^* + \cos\vartheta^*\right)}} \quad (1)$$

CASI $\boxed{\beta_{cm} > \beta^*}$ $\Rightarrow$ denominatore sempre > 0 $(\forall \vartheta^*)$

$\Rightarrow 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$



$\Rightarrow$ b è prodotta in avanti nel Lab sempre $(\forall\vartheta^*)$

ORA noto che $\vartheta^* = 0$ (MIN) $\Rightarrow \vartheta = 0$

e $\vartheta^* = \pi$ (MAX) $\Rightarrow \vartheta = 0$

$\Rightarrow \exists\, \vartheta^*$ t.c. ϑ è MAX