francesco.pandolfi@roma1.infn.it

STANZA 245B (II piano VEM)

RICEVIMENTO: VEN 14-16 (o quando volete)

4-vettori $\quad A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$= (a_t, a_x, a_y, a_z) \equiv (a_t, \vec{a})$$

$$A \cdot B = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad \text{(spazio Minkowski)}$$

$$\equiv a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Due SdR $\quad Oxyz \leftrightarrow O'x'y'z'$

moto relativo lungo x : $\vec{V} = V_x \hat{x}$

$$\to \beta = \frac{V_x}{c}$$

$v=0 \quad \beta \quad v \to c$

$[0 \longrightarrow 1)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

γ

$[1 \longrightarrow +\infty)$

TRASFORMAZIONE DI LORENTZ

INDIVIDUATO DAI PARAMETRI DEL BOOST (β, γ)

$$A \text{ in } Oxyz \xrightarrow{L} A' \text{ in } O'x'y'z'$$

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) \longrightarrow A' = (a_0', a_1', a_2', a_3')$$

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

4-vettore posizione nello spaziotempo $X = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' = \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

vediamo se con $\beta \ll 1$ torna limite classico

$\beta \ll 1 \quad \left(\frac{v}{c} \ll 1 \Leftrightarrow v \ll c \right)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$\Rightarrow x' \simeq \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)\left(x - \beta c t\right) = x - \beta c t + \frac{\beta^2}{2} x - O(\beta^3)$$

trascuro

$$\Rightarrow x' \simeq x - \beta c t = x - \frac{v}{c} c t = \underline{x - vt}$$

OK

(Galileo)

stessa cosa per ct:

$$ct' = \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)\left(ct - \beta x\right) = ct - \beta x + \frac{\beta^2}{2} ct + O(\beta^3)$$

trascuro

$$\Leftrightarrow \quad t' = t - \frac{\beta x}{c} = t - \beta\left(\frac{v}{c}\right)\frac{x}{v} = t - \beta^2 \frac{x}{v}$$

β

anche questo β^2

$$\rightarrow \underline{t' = t} \quad \text{OK}$$

notare come con boost lungo x abbiamo

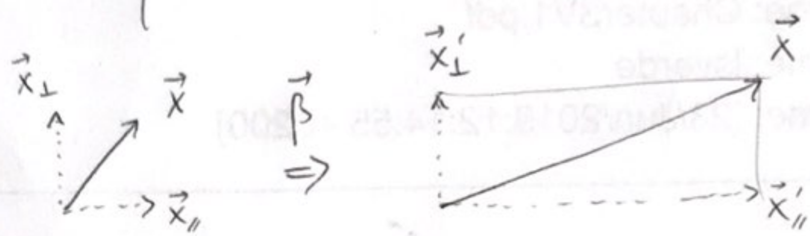
$$y'=y \quad e \quad z'=z$$

in generale per TdL in direzione generica

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

$x_{\parallel}$ parallelo al boost

$x_{\perp}$ perp.



Oxyz $\qquad$ O'x'y'z'

ruotando assi t.c. $\beta \parallel \hat{x}$

$$L = L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(L(\beta)) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 (1-\beta^2) = 1 \quad \underline{\underline{\forall \beta}}!$$

$\Rightarrow$ è una rotazione nello spaziotempo!

le rotazioni <u>NON</u> cambiano la norma dei vettori

$$\Leftrightarrow \quad |A'|^2 = A' \cdot A' = |A|^2 = A \cdot A$$

vediamo invece come trasforma $A' \cdot B'$

$$A \cdot B \xrightarrow{?} A' \cdot B'$$

$$A' \cdot B' = a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3' =$$

$$= (\gamma a_0 - \beta \gamma a_1)(\gamma b_0 - \beta \gamma b_1) - (\gamma a_1 - \beta \gamma a_0)(\gamma b_1 - \beta \gamma b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \left(a_0 b_0 - \cancel{\beta a_0 b_1} - \cancel{\beta a_1 b_0} + \boxed{\beta^2 a_1 b_1} - \boxed{a_1 b_1} + \cancel{\beta a_1 b_0} + \cancel{\beta a_0 b_1} - \beta^2 a_0 b_0 \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \left(a_0 b_0 (1-\beta^2) - a_1 b_1 (1-\beta^2) \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 (1-\beta^2) \left(a_0 b_0 - a_1 b_1 \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

MA $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$!

$$\rightarrow \quad = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \equiv A \cdot B$$

$$\Rightarrow \quad A' \cdot B' = A \cdot B \quad \forall \text{ SdR} \quad (\text{quindi anche } A \cdot A)$$

IL PRODOTTO SCALARE FRA DUE 4-VETTORI E' UN <u>INVARIANTE</u> DI LORENTZ

EX

Una sbarra solidale con SdR $O'x'y'z'$ disposta parallela a x. ~~[illegible]~~ SdR $O'x'y'z'$ si muove con velocità $v = v_x$ rispetto a $Oxyz$

Lunghezza della sbarra in O': $L' = x_2' - x_1'$

applico TdL $\quad L' = x_2' - x_1' = (\gamma x_2 - \beta\gamma c t_2) - (\gamma x_1 - \beta\gamma c t_1)$

$$= \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma c(t_2 - t_1)$$

Ora, in O la sbarra si muove $\Rightarrow$ per misurarla bisogna misurare x_1 e x_2 <u>allo stesso tempo</u>

$$\Rightarrow t_2 = t_1 \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{L'}{\gamma}$$

lunghezza di oggetto che si muove è <u>contratta</u>

($\gamma > 1$ se $v > 0$)!

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

$\boxed{EX}$ Due eventi in $O'x'y'z'$ accadono nello stesso punto spaziale ma a tempi diversi

$$(ct_1,\ x, y, z) \qquad (ct_2,\ x, y, z)$$

distanza temporale in O': $\Delta t' = t_2' - t_1'$

Un osservatore in O misura

abbiamo sempre $\beta = \frac{v_x}{c}$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (\gamma t_2' - \beta\gamma x) - (\gamma t_1' - \beta\gamma x)$$
$$= \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' \qquad \begin{matrix}(\gamma > 1)\\ (\text{se } v>0)\end{matrix}$$

DILATAZIONE DEI TEMPI

~~In qualunque SdR in moto ($v>0$, $\gamma>1$) gli eventi hanno durata maggiore~~

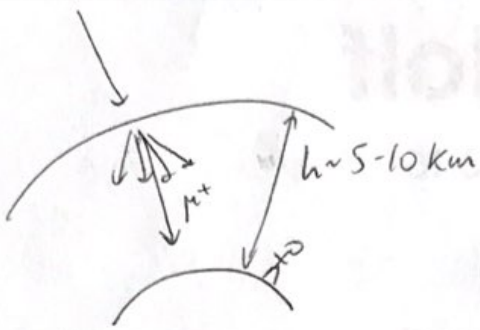
es. particelle

Tempo misurato in SdR solidale con oggetto in moto è detto tempo proprio. In ogni altro SdR il tempo è dilatato (le cose durano di più)

$$\tau \le t' = \gamma\tau$$

EX. DECADIMENTO DEL MUONE

$\mu^\pm$ prodotti da interazione di raggi cosmici con atmosfera terrestre



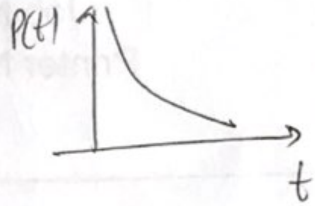
muone è p.lla instabile

ha vita media $\tau_\mu \sim 2.2\,\mu s$
$= 2.2 \cdot 10^{-6}\, s$

legge di decadimento esponenziale

$P(t) \approx e^{-t/\tau}$

prob. che sia ancora viva dopo tempo t



MEDIA = τ

PROBLEMA: se μ in media decade dopo tempo τ come fa a raggiungere superficie terrestre se prodotto a $h \sim 5$-$10\,km$?

anche se andasse a $v = c \Rightarrow c\tau_\mu = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} s \sim 660\, m$

se non ci fossero dilatazione tempi / contrazione delle lunghezze ne arriverebbero molti meno!!

DUE MODI DI VEDERLA: (1) O solidale con la Terra
O' solidale con μ

$\Delta t = \gamma t_\mu$ con $\gamma \gg 1$ $(v_\mu \sim c)$

$\Rightarrow \Delta t \gg t_\mu$ in O il muone vive molto più a lungo di τ_μ

$\Rightarrow$ ha più tempo per coprire distanza

② in O' solidale con μ, muone decade in media dopo τ_μ (MA) si contraggono le lunghezze 19

⇒ non deve percorrere 5-10 km ma $\frac{10km}{\gamma}$

ha meno tempo ma il tragitto per raggiungere la terra è più breve

---

COMPOSIZIONE DELLE VELOCITA'

O'x'y'z' ha velocità $\vec{V_0}$ rispetto a Oxyz

$$\beta_0 = \frac{V_0}{c} \quad (V_0 \parallel \hat{x}) \quad e \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

in meccanica classica
$$\begin{cases} V_x' = V_x - V_0 \\ V_y' = V_y \\ V_z' = V_z \end{cases}$$

in meccanica relativistica

$$V_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\cancel{\gamma_0}(\Delta x - \beta_0 c \Delta t)}{\cancel{\gamma_0}(\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c})} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta_0 c}{1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

ora $\frac{\Delta x}{\Delta t} = V_x$ e $\beta_0 = \frac{V_0}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{V_x' = \frac{V_x - V_0}{1 - V_0 V_x}} \iff \boxed{\beta_x' = \frac{\beta_x - \beta_0}{1 - \beta_0 \beta_x}}$$

CASO LIMITE $\beta_x = 1$ $(v = c)$

$$\Rightarrow \beta_x' = \frac{1-\beta_0}{1-\beta_0} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{se } \beta_x = 1 \Rightarrow \beta_x' = 1$$

$\forall \beta_0 \Leftrightarrow \forall$ sdR

E se invece l'oggetto si muove lungo y?
(con sempre boost lungo x)

$$\Rightarrow v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma_0\left(\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c}\right)} = \frac{\overbrace{\Delta y/\Delta t}^{= v_y}}{\gamma_0(1 - v_0 v_x)} = \frac{v_y}{\gamma_0(1-v_0 v_x)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta_y' = \frac{\beta_y}{\gamma_0(1-\beta_0\beta_x)}}$$

Ex Calcolare la vita media di un pione π^+ in un SdR in cui il pione ha impulso $p(\pi^+) = 100\,\text{GeV}/c$

$m(\pi^+) = 139.6\ \text{MeV}/c^2$

$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}\,s$

τ vita media propria (la misura $\forall$ SdR)

ora $E^2 = m^2 + p^2$

$$p = m\gamma v \rightarrow \Rightarrow \frac{m}{p} = \frac{1}{\gamma v} \overset{(c=1)}{=} \frac{1}{\gamma\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2\beta^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2\beta^2+1}{\gamma^2\beta^2}}} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2\beta^2+1}}$$

on $\gamma^2\beta^2 + 1 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \dfrac{\cancel{\beta^2}+1-\cancel{\beta^2}}{1-\beta^2} = \dfrac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2}} = \beta \qquad \boxed{\beta = \frac{p}{E}}$$

p.lh can (p, E)

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{E^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{E^2-p^2}{E^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{E^2}}} = \frac{E}{m}$$

$E^2 = m^2 + p^2$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{E}{m}}$$

torniamo all'ex

$$p = 100 \text{ GeV} = 100 \cdot 10^3 \text{ MeV} \quad \Big| \quad m = 139.6 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow p \gg m$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2 + p^2} \sim \sqrt{p^2} = p = 100 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{p}{E} \sim 1$$

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{100 \text{ GeV}}{139.6 \text{ MeV}} = 714$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \tau_0 = 714 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \sim 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 18 \, \mu\text{s}$$

EX PER CASA

Fascio di pioni π^+ : 10^{12} pioni/s

tutti con impulso $p = 2$ GeV

Qual è intensità del fascio (in Ampère) dopo che hanno viaggiato per 120 m nel vuoto?

$$m(\pi^+) = 140 \text{ MeV}$$

$$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$Q(\pi^+) = +e$$