Appello Invernale

Fisica Nucleare e Subnucleare I

6 Febbraio 2023

Esercizio 1

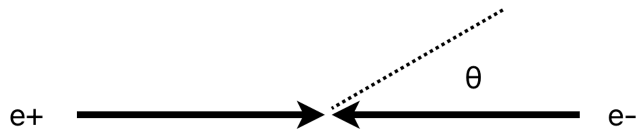
Un collisore asimmetrico e^+e^- ha l'energia del fascio di positroni fissa a $E_+ = 3.1$ GeV, mentre l'energia E_- degli elettroni è variabile. Si vuole studiare la seguente reazione in cui si produce un mesone $\Upsilon(4s)$:

$$e^+ + e^- \to \Upsilon(4s)$$

in cui la particella $\Upsilon(4s)$ decade istantaneamente nel canale:

$$\Upsilon(4s) \to B^+ + B^-$$

Per comodità sia θ l'angolo polare, definito in modo che il fascio di positroni punti nella direzione $\theta = 0$ e il fascio di elettroni nella direzione $\theta = \pi$ come mostrato in figura.



1. Determinare l'energia E_- necessaria per produrre la $\Upsilon(4s)$.
   (Utilizzare il valore di E_- ottenuto al primo punto per i seguenti punti dell'esercizio.)
2. Stabilire se i due mesoni B dello stato finale possono essere emessi ad un angolo di apertura $\Delta(\theta) = \pi$ nel sistema di riferimento del laboratorio.
3. Se il B^+ viene prodotto a $\theta = 0$, determinare l'energia del B^- nel laboratorio.
4. I mesoni B^- sono instabili e decadono con una vita media $\tau_B = 1.64$ ps. Determinare la distanza di volo media per i mesoni B^- rispetto al punto di collisione nel laboratorio per gli angoli di uscita specificati nella domanda 3.

Soluzione dell'esercizio 1

1. Lo stato intermedio (la $\Upsilon(4s)$) ha massa definita, quindi per poterlo creare lo stato iniziale deve soddisfare $\sqrt{s} = \Upsilon(4s)$. Lo stato iniziale è descritto dai due 4-vettori dell'elettrone e del positrone: $(E_+, \vec{E}_+)$ e $(E_-, \vec{E}_-)$, dove abbiamo usato l'approssimazione $E \approx p$, visto che le energie in gioco sono tre ordini di grandezza più grandi di m_e. In questa approssimazione si ha che:

   $$\sqrt{s} = \sqrt{(E_+ + E_-)^2 - (E_+ - E_-)^2} = 2\sqrt{E_+ E_-}$$

   Quindi per poter creare la $\Upsilon(4s)$ deve essere:

   $$E_- = \frac{m(\Upsilon(4s))^2}{4E_+} = 9.0 \text{ GeV}$$

2. Per capire se i mesoni B possono essere emessi ad un angolo di apertura $\Delta(\phi) = \pi$ nel sistema di riferimento del laboratorio, bisogna confrontare la velocità del centro di massa β_{cm} con la velocità dei due mesoni B nel sistema di riferimento del centro di massa β^*_μ. Nel sistema del centro di massa si deve avere che $E^*_B = m(\Upsilon(4s))^2)/2 = 5.29$ GeV, e quindi che $p^*_B = \sqrt{(E^*_B)^2 - m_B^2} = 0.34$ GeV. Ovvero $\beta^*_B = \frac{p^*_B}{E^*_B} = 0.064$. Per calcolare β_{cm}, invece, bisogna partire dal 4-momento totale dello stato iniziale $(E_{tot}, \vec{p}_{tot})$, che, scritto in termini delle energie di elettrone e positrone, corrisponde a

   $$E_{tot} = E_+ + E_- = 12.1 \text{ GeV}$$

$$|p_{tot}| = E_- - E_+ = 5.9 \text{ GeV}$$

e quindi

$$\beta_{cm} = \frac{|p_{tot}|}{E_{tot}} = 0.49$$

Dato che $\beta_B^* < \beta_{cm}$, allora il *boost* del centro di massa è in grado di invertire l'impulso dei mesoni quando sono emessi indietro. Quindi non è possibile ottenere la configurazione per cui l'angolo massimo è π.

3. Se il $B+$ viene emesso a $\theta = 0$ allora l'energia del $B-$ (il cui angolo di uscita è quindi concorde con quello del CM) nel sistema di riferimento del laboratorio sarà data da:

$$E_{B^-} = \gamma_{cm}(E_B^* + \beta_{cm} p_B^*) = 6.3 \text{ GeV}$$

dove si è usato $\gamma_{cm} = 1/\sqrt{1-\beta_{cm}^2} = 1.1$ e si è usato il fatto che il μ^- viene emesso a $\theta = \pi$ per determinare il segno nella trasformazione di Lorentz.

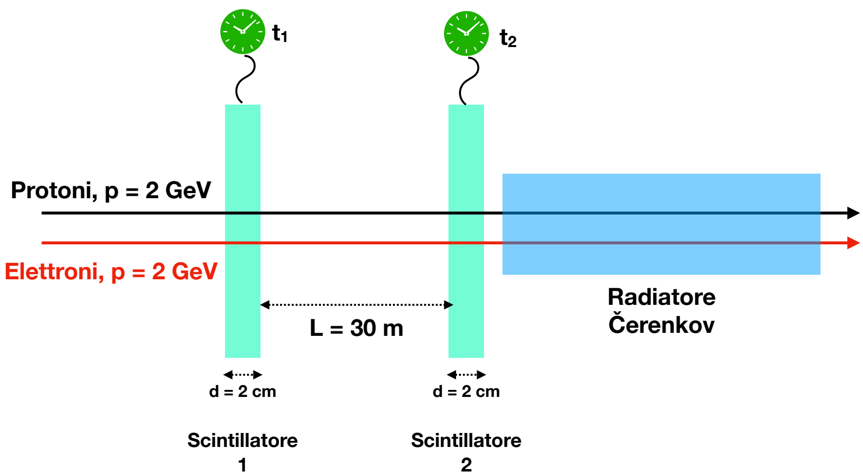
4. Il cammino medio percorso dal mesone B^- prima di decadere, nel sistema di riferimento del laboratorio, è dato da:

$$\lambda_{B^-} = \beta\gamma_{B^-} c\tau_{B^-} = 0.31 \text{ mm}$$

ove si è usato $\beta\gamma_{B^-} = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{E_{B^-}^2}{m_B^2} - 1} = 0.64.$

Esercizio 2

Un fascio contiene elettroni e protoni di momento $p = 2\,\text{GeV}$, e attraversa due scintillatori di spessore $d = 2\,\text{cm}$ e di lunghezza di radiazione $X_0 = 20\,\text{cm}$ posti ad una distanza $L = 30\,\text{m}$ l'uno dall'altro. Si considerino costanti le perdite di energia per ionizzazione negli scintillatori, pari rispettivamente a $2\,\text{MeV/cm}$ per i protoni e $2.5\,\text{MeV/cm}$ per gli elettroni.



1. calcolare l'energia persa dalle due particelle in ciascuno dei due contatori
2. quale deve essere la risoluzione temporale dei due scintillatori se si vuole discriminare a $3\sqrt{2}\sigma$ i due diversi tipi di particelle? (si trascuri l'energia persa nei rivelatori)
3. posto dopo il secondo scintillatore un cristallo trasparente con indice di rifrazione $n = 1.4$, stabilire se viene emessa luce Čerenkov per i due fasci di particelle e calcolare nei due casi l'eventuale angolo di emissione.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Il $\beta\gamma$ per i protoni di quell'energia vale:

$$\beta\gamma = \frac{p}{m} = \frac{2\,\text{GeV}}{0.938\,\text{GeV}} = 2.1,$$

quindi perdono energia solo per ionizzazione, mentre per gli elettroni bisogna tener conto anche dell'irraggiamento. Quindi l'energia persa dai due tipi di particella nell'attraversare il primo scintillatore di spessore d sarà:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{p,ion} \times d = 2\,\mathrm{MeV\,cm^{-1}} \times 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{MeV} \\
\Delta E_e &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{e,ion} \times d + E_{0,e}\left(1 - e^{-\frac{d}{X_0}}\right) = 2.5\,\mathrm{MeV\,cm^{-1}} \times 2\,\mathrm{cm} + 2.0\,\mathrm{GeV} \times 0.095 \\
&= 5\,\mathrm{MeV} + 190\,\mathrm{MeV} \approx 195\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

Nel secondo scintillatore i protoni perderanno altri 4 MeV. Per gli elettroni, bisogna considerare che $E'_{0,e} = 2000\,\mathrm{MeV} - 195\,\mathrm{MeV} = 1805\,\mathrm{MeV}$, e quindi si otterrà:

$$\begin{aligned}
\Delta E_e(\text{scint. 2}) &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{e,ion} \times d + E'_{0,e}\left(1 - e^{-\frac{d}{X_0}}\right) \\
&= 2.5\,\mathrm{MeV\,cm^{-1}} \times 2\,\mathrm{cm} + 1805\,\mathrm{MeV} \times 0.095 = 5\,\mathrm{MeV} + 172\,\mathrm{MeV} = 177\,\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

2. Se si trascura l'energia persa nel primo scintillatore, il tempo di volo tra i due rivelatori è dato da:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{\beta c} = \frac{LE}{cp}$$

per il protone con impulso p, l'energia è:

$$E_p = \sqrt{p^2 + m_p^2} \approx 2.21\,\mathrm{GeV}$$

e quindi il tempo di volo sarà:

$$t_p = \frac{30\,\mathrm{m} \times 2.21\,\mathrm{GeV}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 2\,\mathrm{GeV}} = 1.1 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 110\,\mathrm{ns}$$

Per l'elettrone possiamo approssimare $\beta \approx 1$, e quindi:

$$t_e = \frac{L}{c} = \frac{30\,\mathrm{m}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{ns}$$

Quindi la differenza di tempi di volo tra le due particelle è:

$$\Delta T = t_e - t_p = 10\,\mathrm{ns}$$

A questo punto deve essere $3\sqrt{2}\sigma < \Delta T$, da cui

$$\sigma < \frac{\Delta T}{3\sqrt{2}} = 2.3\,\mathrm{ns}.$$

3. L'emissione di radiazione Čerenkov si ha quando la velocità della particella è superiore a quella della propagazione della luce nel mezzo, quindi quando

$$\beta > \frac{c}{n}$$

le velocità sono quelle usate nel punto precedente, $\beta_p = 0.905$ e $\beta_e = 1$, quindi si ha emissione di luce Čerenkov se l'indice di rifrazione é maggiore, rispettivamente per protoni ed elettroni, a:

$$\begin{aligned}
n_p &> \frac{1}{\beta_p} = 1.11 \\
n_e &> \frac{1}{\beta_e} = 1.00
\end{aligned}$$

quindi per entrambi i fasci di particelle viene emessa luce Čerenkov. L'angolo di emissione corrisponde a

$$\theta_p = acos(\frac{1}{n\beta_p}) = 1.11$$
$$\theta_e = acos(\frac{1}{n\beta_e}) = 0.66$$

Quantità	Valore
Massa mesone $\Upsilon(4s)$	10.58 GeV
Massa mesoni $B^{\pm}$	5279 MeV
Vita media mesoni $B^{\pm}$	1.64 ps
$<$Z/A$>$ dell'acqua	0.555
Energia critica dell'acqua	78 MeV
Energia di ionizzazione media dell'acqua	80 eV

Tabella 1: Quantità utili