francesco.pandolfi@roma1.infn.it

skype: francesco_pandolfi

STANZA 245B (2° piano VEM)

RICEVIMENTO

VEN 14-16

(o quando volete)

0

4-vettori

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

$$\left(= (a_t, a_x, a_y, a_z)\right) \equiv (a_t, \vec{a})$$

$$A \cdot B = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad \text{(spazio Minkowski)}$$

$$\equiv a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

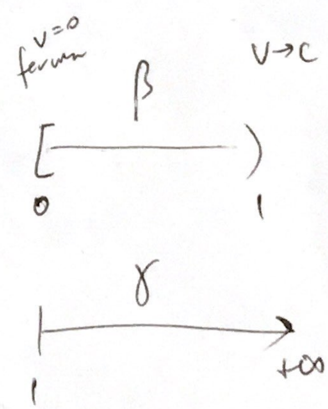
Due SdR $Oxyz \leftrightarrow O'x'y'z'$

in moto relativo fra di loro lungo x

con velocità V_x

$$\beta = \frac{v}{c} \equiv \frac{V_x}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



TRASFORMAZIONE DI LORENTZ

$$\boxed{A \text{ in } Oxyz} \xrightarrow{L} \boxed{A' \text{ in } O'x'y'z'}$$

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow A' = (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

4-vettore posizione: $X = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

se $\beta \ll 1$ ($\frac{v}{c} \ll 1$ ... $v \ll c$ limite classico)

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \overset{\beta \ll 1}{\simeq} 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$x' \simeq \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)(x-\beta ct) = x - \beta ct + \cancel{\frac{\beta^2}{2}x - O(\beta^3)}$$ $\boxed{2}$

$$\simeq x - \frac{v}{c}ct = x - v_x t$$

trasformazione di Galileo

e

$$ct' = \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)(ct-\beta x) = \cancel{ct - \beta x + \frac{\beta^2}{2}ct + O(\beta^2)}$$

$$= ct - \beta x + \frac{\beta^2}{2}ct + \cancel{O(\beta^3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad t' = t - \frac{\beta}{c}x + \frac{\beta^2 t}{2} = t - \beta\overset{=\beta}{\left(\frac{v}{c}\right)}\frac{x}{v} + \frac{\beta^2 t}{2}$$

$$= t \underbrace{- \beta^2\frac{x}{v} + \beta^2\frac{t}{2}}_{O(\beta^2)} \sim t$$

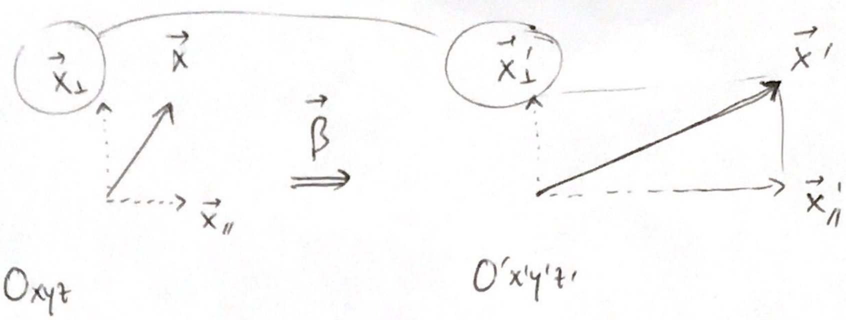
IN GENERALE TdL in direzione generica

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

$x_{\parallel}$ parallela al boost

$x_{\perp}$ perp. al boost

$\Rightarrow$ $\vec{x}_{\perp}$ e' un invariante per TdL lungo $x_{\parallel}$



allineando β lungo x

TRASF. DI LORENTZ $\quad L = L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(L(\beta)) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \beta^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$$

$\rightarrow$ è una ~~rotaz~~ rotazione nello spazio-tempo

Le rotazioni non cambiano la norma dei 4-vettori

infatti $\quad |A|^2 = A\cdot A \qquad |A'|^2 = A'\cdot A'$

in generale vediamo ~~A~~ come trasforma prodotto scalare di due 4-vettori

$$A\cdot B \xrightarrow{?} A'\cdot B'$$

$$O \qquad\qquad O'$$

$$A' \cdot B' = a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3'$$

$$= (\gamma a_0 - \beta\gamma a_1)(\gamma b_0 - \beta\gamma b_1) - (\gamma a_1 - \beta\gamma a_0)(\gamma b_1 - \beta\gamma b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 (a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2 (a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \left(a_0 b_0 - \cancel{\beta a_0 b_1} - \cancel{\beta a_1 b_0} + \beta^2 a_1 b_1 - a_1 b_1 + \cancel{\beta a_1 b_0} + \cancel{\beta a_0 b_1} - \beta^2 a_0 b_0 \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \left(a_0 b_0 (1-\beta^2) - a_1 b_1 (1-\beta^2) \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 (1-\beta^2) \left(a_0 b_0 - a_1 b_1 \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

ma $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\Rightarrow$ $= \underbrace{a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3}_{\equiv A \cdot B}$

$\Leftrightarrow$ $\gamma^2 = \dfrac{1}{(1-\beta^2)}$

$$\Rightarrow \quad A' \cdot B' = A \cdot B$$

$$\forall \ \text{TdL} \ / \ \text{SdR}$$

IL PRODOTTO SCALARE FRA DUE 4-VETTORI E' UN INVARIANTE DI LORENTZ quindi in particolare anche

$$A \cdot A = |A|^2 \quad \text{è } \underline{\text{invariante}}$$

($\Leftrightarrow L(\beta)$ è un rotatore)

$\boxed{EX}$ Una sbarra solidale con SdR $O'x'y'z'$ disposta parallela a x. Il SdR O' si muove con $V = V_x$ rispetto a $Oxyz$

La lunghezza della sbarra in O' è

$$L' = x_2' - x_1'$$

applicando TdL:

$$L' = (\gamma x_2 - \beta\gamma c t_2) - (\gamma x_1 - \beta\gamma c t_1)$$

$$= \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma c(t_2 - t_1)$$

espressa in coordinate di O

Ora, in O la sbarra si muove, quindi per misurare la sua lunghezza bisogna farlo ad entrambi i lati allo stesso istante di tempo

$$\Rightarrow t_2 = t_1 \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

ovvero

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

$\uparrow$ $\mathcal{L}$

la lunghezza di un oggetto che si muove

è contratta $\left(\frac{L'}{\gamma} < L' \text{ visto che } \gamma > 1\right)$ se $v > 0$

rispetto alla sua lunghezza a riposo L'

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

EX

Due eventi in $O'x'y'z'$ accadono nello stesso punto ma a tempi diversi

$$(ct_1, x, y, z) \quad (ct_2, x, y, z)$$

$\Delta t' = t_2' - t_1' \leftarrow$ distanza temporale misurata in O'

Un osservatore in O misura

sempre $\beta = \frac{v_x}{c}$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (\gamma t_2' - \beta\gamma x) - (\gamma t_1' - \beta\gamma x)$$
$$= \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

DILATAZIONE DEI TEMPI

In un qualunque SdR in moto ($v>0, \gamma>1$)
~~[illegible]~~ gli eventi hanno durata maggiore

Il tempo misurato con un SdR solidale con un oggetto in movimento è detto il tempo proprio

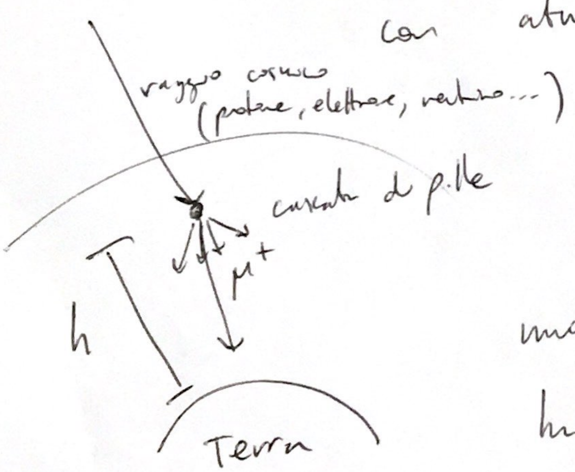
es. particella

$= \tau$

$\Rightarrow \tau \le t' = \gamma\tau$

DECADIMENTO DEL MUONE

$\mu^\pm$ prodotti da interazioni di raggi cosmici con atmosfera terrestre



$h \sim 5$ kilometri

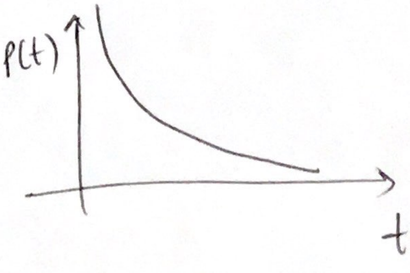
muone è una p.lla instabile

ha una vita media $\tau_\mu \simeq 2.2\,\mu s$
$= 2.2 \cdot 10^{-6}\,s$

legge di decadimento esponenziale

$$P(t) \sim e^{-t/\tau}$$

prob che sia ancora vivo dopo tempo t



PROBLEMA: se in media μ decade dopo τ $\boxed{8}$

come fa a raggiungere superficie terrestre se è

prodotto a $h \sim 5\,Km$?

Anche se andasse a $v=c$ $\qquad c\tau_\mu = 3\cdot10^8 \frac{m}{s}\, 2.2\cdot10^{-6} s$

$\sim 660\, m$

Se non ci fossero dilatazione tempo e contrazione lunghezze

ne vedremmo molti di meno!

Invece: nel sistema O solidale con la terra

O' solidale con muone

$\Delta t = \gamma \tau$

$\gamma >> 1 \quad (v_\mu \sim c)$

$\Rightarrow \Delta t >> \tau$ in O il muone vive per

un tempo molto maggiore di τ

$\Rightarrow$ ha più tempo per coprire

distanza

Se invece ci mettiamo in O' solidale con μ

il muone vive sempre secondo t_μ^* (in media t_μ^*)

MA si contraggono le lunghezze

$\Rightarrow$ ha meno tempo ma è anche più

corto il tragitto per raggiungere la

superficie terrestre

COMPOSIZIONE VELOCITA'

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c} \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

$O'x'y'z'$ ha velocità v_0 (lungo x) rispetto a $Oxyz$

in meccanica classica
$$\begin{pmatrix} V_x' = V_x - V_0 \\ V_y' = V_y \\ V_z' = V_z \end{pmatrix}$$

in meccanica relativistica

$$V_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\cancel{\gamma_0}\left(\Delta x - \beta_0 c \Delta t\right)}{\cancel{\gamma_0}\left(\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c}\right)} = \frac{\Delta x/\Delta t - \beta_0 c}{1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

ora $\frac{\Delta x}{\Delta t} = V_x$ e $\beta_0 = \frac{V_0}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{V_x' = \frac{V_x - V_0}{1 - \frac{V_x V_0}{c^2}}} \quad \& \quad \boxed{\beta_x' = \frac{\beta_x - \beta_0}{1 - \beta_0 \beta_x}}$$

composizione delle velocità in meccanica relativistica

CASO LIMITE: $\beta_x = 1$ $(v = c)$

$$\Rightarrow \beta_x' = \frac{1-\beta_0}{1-\beta_0} = 1$$

$\forall \beta_0$ $\beta_x' = 1$ se $\beta_x = 1$

$\forall$ boost $\Rightarrow$ $\forall$ SdR!

E se invece l'oggetto si muove lungo y ?

(ma comunque boost lungo x)

$$v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma_0\left(\Delta t - \beta_0 \frac{\Delta x}{c}\right)} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\gamma_0\left(1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

$$= \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - v_0 v_x/c^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_y' = \frac{\beta_y}{\gamma_0\left(1 - \beta_0\beta_x\right)}$$

EX Calcolare la vita media di un pione π^+ in un SdR in cui il pione ha impulso

$p(\pi^+) = 100$ GeV

$m(\pi^+) = 139.6$ MeV $/c^2$

$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

↑ vita media propria

Quindi vogliamo trovare relazione fra β, γ e p

visto ieri $\left.\begin{array}{l} E^2 = m^2 + p^2 \\ p = m\gamma v \end{array}\right\}$ dimostrazione formale prossima volta

$\boxed{11}$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{p} = \frac{1}{\gamma v} \overset{c=1}{=} \frac{1}{\gamma\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2\beta^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2\beta^2+1}{\gamma^2\beta^2}}} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2\beta^2+1}}$$

ora $\gamma^2\beta^2 + 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \frac{\cancel{\beta^2}+1-\cancel{\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{E} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2}} = \beta$$

$$\boxed{\beta = \frac{p}{E}}$$ ← di una particella con p, E

e quindi

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{E^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{E^2-p^2}{E^2}}} = \frac{E}{\sqrt{E^2-p^2}} = \frac{E}{m}$$

$E^2 = p^2 + m^2$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{E}{m}}$

quindi nell'EX $\quad p = 100\ \text{GeV} \quad m = 139.6\ \text{MeV}$

$= 100 \cdot 10^3\ \text{MeV}$

$\Rightarrow E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx 100\ \text{GeV} = \left(= 100000.1\ \text{MeV} \right)$

$\Rightarrow \beta \simeq \frac{p}{E} \sim 1$

$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{100\ \text{GeV}}{139.6\ \text{MeV}} = 714$

$\Rightarrow \Delta t = \gamma \tau = 714 \cdot 2.6 \cdot 10^{-8}\ \text{s} \sim 1.8 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$

$= 18\ \mu\text{s}$

$\boxed{\text{EX PER CASA}}$

~~[illegible]~~

Fascio di pioni π^+: 10^{12} pioni/s

tutti con impulso $p = 2\ \text{GeV}$

Qual è l'intensità del fascio (in Ampère) dopo che hanno viaggiato per 120 m nel vuoto?

$m(\pi^+) = 140\ \text{MeV} \qquad Q(\pi^+) = +e$

$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$