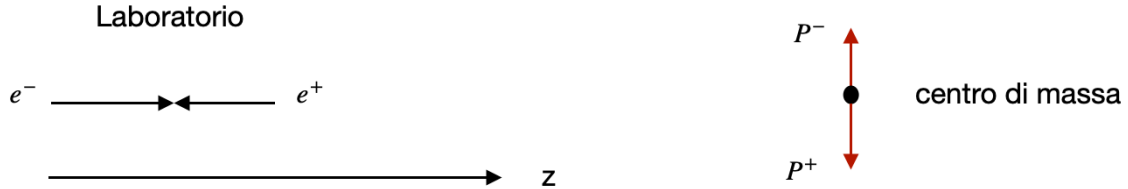


Prova di Fisica Nucleare e Subnucleare

11 Luglio 2025

Esercizio 1

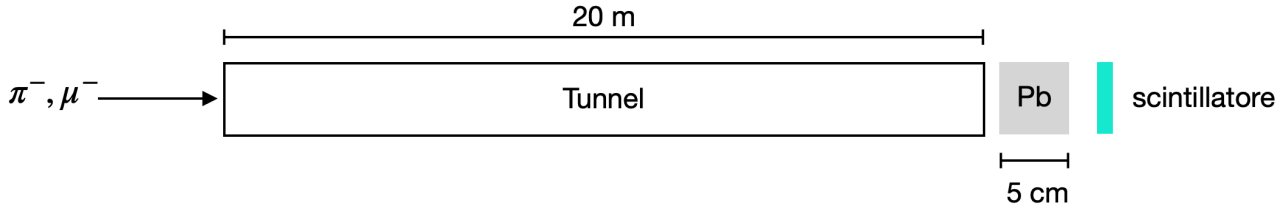
Un fascio di elettroni di energia $E = 205$ MeV collide con un fascio di positroni di energia $E = 75$ MeV lungo l'asse z e si vogliono studiare alcuni stati finali con sole due particelle prodotte perpendicolarmente alla direzione dei fasci nel riferimento del centro di massa, come mostrato nella figura.



1. Dire quali delle seguenti reazioni **non** possono avvenire e motivarlo
 - (a) $e^- + e^+ \rightarrow K^+ + K^-$
 - (b) $e^- + e^+ \rightarrow e^+ + \mu^-$
 - (c) $e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
 - (d) $e^- + e^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
2. Per le reazioni che avvengono, calcolare l'impulso delle particelle nel laboratorio e dire quale particella (carica positiva o negativa) ha l'impulso maggiore;
3. Per poter studiare le sole particelle positive, è necessario fermare le particelle di carica negativa facendole interagire con uno strato di spessore D di uno dei due materiali nella tabella.
 - (a) indicare il meccanismo di perdita di energia
 - (b) dire quale dei materiali riportati nella tabella consente di fermarla con lo spessore D minore, motivando la risposta
 - (c) calcolare lo spessore D del materiale in centimetri (con 2 cifre decimali), assumendo una perdita di energia costante nel mezzo.

	densita` [g/cm ³]	<I> [eV]	E _c [MeV]	Lunghezza di radiazione X ₀ [cm]	Lunghezza d'interazione X ₁ [cm]	Z/A	δ
PbWO4	8.30	601	9.64	0.89	20.27	0.413	0
Nal	3.67	452	13.37	2.59	42.16	0.427	0

Esercizio 2



Un fascio di pioni e muoni con impulso di 200 MeV attraversa un tunnel vuoto, lungo 20 m, prima di raggiungere uno strato di piombo spesso $D = 5$ cm, seguito poi da un sottile scintillatore. Il pione decade in volo nello stato finale $\mu^- \bar{\nu}_\mu$, mentre il muone decade nello stato finale $e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$.

1. Calcolare la frazione di pioni e muoni che decadono prima di raggiungere lo strato di piombo
2. Stimare l'energia dei pioni e dei muoni (che non decadono nel tunnel) dopo che hanno attraversato lo strato D di piombo, considerando una perdita di energia costante nel materiale
3. Determinare se gli elettroni prodotti nel decadimento dei muoni possono raggiungere lo scintillatore

	Densità [g/cm ³]	$\langle I \rangle$ [eV]	E_c [MeV]	Lungh. Radiazione X_0 [cm]	Lungh. Interazione X_I [cm]	Z	A	δ
Pb	11.35	823	7.4	0.56	17.59	82	207	0.6

Dati utili:

velocità della luce: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

$m_\mu = 106$ MeV, $m_e = 511$ keV, $m_\pi = 140$ MeV, $m_K = 494$ MeV

$\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s, $\tau_\pi = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

Formula di Bethe-Bloch per l'energia persa per ionizzazione:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = C \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e(\beta\gamma)^2}{\langle I \rangle} \right) - \beta^2 \right]$$

Costante C : $0.307 \text{ MeV/g} \times \text{cm}^2$

Energia persa per Bremsstrahlung: $E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$

Energia persa per interazione nucleare: $E(x) = E_0 e^{-x/X_I}$

Soluzione dell'esercizio 1

1. Le masse dell'elettrone e del positrone sono trascurabili rispetto all'energia del fascio. Il quadrimpulso dell'elettrone è $\underline{P}_{e^-} = (205, 0, 0, 205)$ MeV e quello del positrone $\underline{P}_{e^+} = (75, 0, 0, -75)$ MeV. I fasci hanno energie diverse per cui il centro di massa non è fermo e si muove rispetto al sistema di riferimento del laboratorio lungo l'asse z . Il quadrimpulso del riferimento del centro di massa è $\underline{P}_{CM} = (280, 0, 0, 130)$ da cui si ottiene l'energia totale nel centro di massa $\sqrt{s} = \sqrt{280^2 - 130^2} = 248$ MeV.

Delle quattro reazioni possibili:

- (a) KK non può avvenire perché $\sqrt{s} < 2m_K = 988$ MeV;
- (b) $e\mu$ viola la conservazione del numero leptonico elettronico e muonico e non avviene pur essendo possibile energeticamente;
- (c) $\mu\mu$ avviene perché $\sqrt{s} > 2m_\mu = 212$ MeV;
- (d) $\pi\pi$ non avviene perché $\sqrt{s} < 2m_\pi = 280$ MeV;

Dunque l'unica reazione possibile è $e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.

2. I due muoni hanno la stessa massa e nel centro di massa sono prodotti perpendicolarmente alla direzione del boost pertanto avranno lo stesso impulso anche nel riferimento del laboratorio.

Nel centro di massa i due muoni hanno l'energia $E^* = \sqrt{s}/2 = 124$ MeV e quindi un impulso $p^* = \sqrt{E^{*2} - m_\mu^2} = 64.3$ MeV solo lungo l'asse x perpendicolare al fascio.

I parametri del boost per il centro di massa rispetto al laboratorio sono $\beta\gamma = p_{CM}/\sqrt{s} = 130/248 = 0.5242$ e $\beta = p_{CM}/E_{CM} = 130/280 = 0.4643$, e $\gamma = E_{CM}/\sqrt{s} = 280/248 = 1.1290$.

Utilizzando la trasformazione di Lorentz, otteniamo l'energia del muone nel laboratorio $E = \gamma E^* = 140$ MeV. L'impulso totale del muone nel laboratorio è $p_\mu = \sqrt{E^2 - m_\mu^2} = 91$ MeV.

Per completezza (anche se qui non serve) ricordiamo che per il muone nel laboratorio $p_z = \beta\gamma E^* = 65$ MeV mentre $p_x = p_x^* = 64$ MeV, da cui il tri-impulso totale del muone nel laboratorio è $\vec{p} = (64, 0, 65)$ MeV, con $|\vec{p}| = 91$ MeV.

3. (a) il muone perde energia solo per ionizzazione attraversando i due materiali
 (b) dato che $PbWO_4$ ha una densità maggiore, ferma i muoni con uno spessore minore rispetto a NaI
 (c) Per calcolare lo spessore, serve conoscere l'energia e l'impulso totale del muone nel laboratorio.

Il muone ha l'energia cinetica totale $T_\mu = E - m_\mu = 34$ MeV.

L'impulso totale del muone nel laboratorio è $p_\mu = 91$ MeV.

Si ha quindi $\beta = p/E = 91/140 = 0.65$ e $\beta\gamma = p/m_\mu = 91/106 = 0.8585$ e utilizzando la formula di Bethe-Bloch si ottiene $(dE/dx)_{PWO} = 16.56$ MeV/cm. Lo spessore del materiale, assumendo una perdita di energia costante, è pari a $D = T_\mu/(dE/dx)_{PWO} = 2.053$ cm.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Il numero di particelle con una vita media propria τ sopravvissute dopo aver percorso una distanza L è $N(L) = N(0) \times e^{-L/\beta\gamma c\tau}$. La frazione di particelle sopravvissute è dunque $e^{-L/\beta\gamma c\tau}$.

I muoni e pioni hanno lo stesso impulso $p = 200$ MeV ma masse diverse per cui per i pioni: $\beta_\pi\gamma_\pi = p/m_\pi = 1.42857$ e $\beta_\pi = p/E_\pi = 0.81923$ mentre per i muoni $\beta_\mu\gamma_\mu = p/m_\mu = 1.88679$ e $\beta_\mu = p/E_\mu = 0.88357$.

Si ha che la frazione di pioni decaduti è 83.4% mentre la frazione dei muoni decaduti è solo 1.59%.

2. Le particelle sopravvissute raggiungono il piombo con lo stesso impulso iniziale che corrisponde a $E_\pi = 244$ MeV e l'energia cinetica $T_\pi = 244 - 140 = 104$ MeV per i pioni, mentre per i muoni $E_\mu = 226$ MeV e l'energia cinetica $T_\mu = 226 - 106 = 120$ MeV.

Muoni:

I muoni perdono energia solo per ionizzazione. Assumendo una perdita di energia costante nel piombo, si ottiene una perdita di energia $dE_\mu = (dE/dx)_\mu \cdot D = 64.0$ MeV inferiore all'energia cinetica dei muoni che quindi riescono ad attraversare il piombo con un'energia finale $E_\mu = 226 - 64 = 162$ MeV.

Pioni:

I pioni perdono energia sia per ionizzazione che per interazione nucleare nel piombo.

La perdita di energia per ionizzazione è $dE_{\pi,ion} = 70.6$ MeV simile a quella per i muoni.

La variazione dell'energia dei pioni a causa dell'interazione nucleare in funzione dello spessore attraversato è $E_\pi(D) = E_\pi(0)e^{-D/X_{I,Pb}}$ che corrisponde alla variazione totale di energia pari a $dE_{\pi,nucl} = E_\pi(1 - e^{-D/X_{I,Pb}}) = 60.4$ MeV.

L'energia persa totale dei pioni nel piombo è $dE_\pi = dE_{\pi,ion} + dE_{\pi,nucl} = 131$ MeV superiore alla loro energia cinetica iniziale. Dunque i pioni vengono fermati nel piombo e non raggiungono lo scintillatore.

3. Gli elettroni possono avere al massimo lo stesso impulso dei muoni nel laboratorio, $p_e = 200$ MeV molto superiore alla loro massa, per cui $E_e \simeq 200$ MeV e l'energia cinetica $T_e \simeq 199.5$ MeV.

L'energia critica del piombo è $E_c = 600/82 = 7.3$ MeV per cui gli elettroni perdono energia principalmente per Bremsstrahlung. L'energia degli elettroni dopo aver percorso un tratto D nel piombo è $E_e(D) = E_e e^{-D/X_0} = 0.030$ MeV, inferiore alla massa dell'elettrone. Quindi gli elettroni vengono fermati nel piombo e non possono raggiungere lo scintillatore.