Appello di Gennaio

Fisica Nucleare e Subnucleare I

16 Gennaio 2023

Esercizio 1

Un fascio di 4×10^8 muoni al secondo viaggia in un tubo di lunghezza $L = 200\,\mathrm{m}$ con velocità $v = 0.973c$.

1. I muoni decadono attraverso il processo
$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e.$$
Determinare, nel sistema del centro di massa del muone, l'energia massima dei neutrini ν_μ prodotti nel decadimento.
2. Calcolare l'intensità del fascio di muoni, in nA, alla fine del tubo.
3. All'uscita dal tubo è posta una lastra di grafite ($\rho = 2\,\mathrm{g/cm^3}$) spessa $2\,\mathrm{mm}$. Se la sezione d'urto dell'interazione fra neutrini e grafite è
$$\sigma(\nu_\mu + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to \mu^- + X) = 20 \times 10^{-40}\,\mathrm{cm}^2,$$
calcolare il numero di particelle X prodotte in un giorno. Si assuma che tutti (e soli) i neutrini ν_μ prodotti dal decadimento dei muoni interagiscano col bersaglio.

Soluzione dell'esercizio 1

I muoni hanno $\beta = 0.973$, perciò $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 4.33$ ($\beta\gamma = 4.22$) ed energia e impulso valgono $E = m\gamma = 457.5\,\mathrm{MeV}$ e $p = \sqrt{E^2 - m^2} = 445.2\,\mathrm{MeV}$ ($c = 1$).

- L'energia massima si ha quando il neutrino ν_μ è emesso da una parte e elettrone e neutrino $\overline{\nu}_e$ viaggiano con la stessa velocità dall'altra. Questa configurazione è equivalente a quella di un decadimento a due corpi, dove un corpo è il ν_μ e l'altro corpo ha massa pari alla somma delle masse di elettrone e neutrino $\overline{\nu}_e$, per cui
$$E^*_{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_{\nu_\mu}^2 - (m_e + m_{\overline{\nu}_e})^2}{2m_\mu} = 52.8\,\mathrm{MeV}.$$
- L'intensità all'inizio del tubo è pari a
$$I(x=0) = q\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times 4 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1} = 6.4 \times 10^{-11}\,\mathrm{A} = 0.064\,\mathrm{nA}.$$
Alla fine del tubo, cioè dopo aver percorso una lunghezza L, il fascio si sarà attenuato a causa del decadimento dei muoni, che hanno un tempo proprio di $\tau = 2.2\,\mu\mathrm{s}$ e dunque una lunghezza propria di $\beta\gamma c\tau = 2782\,\mathrm{m}$:
$$I(x=L) = I(0)e^{-\frac{t}{\gamma\tau}} = I(0)e^{-\frac{\beta ct}{\beta\gamma c\tau}} = I(0)e^{-L}\beta\gamma c\tau = 0.064\,\mathrm{nA} \times 0.931 = 0.0596\,\mathrm{nA},$$
che corrisponde a un flusso di muoni di $4 \times 10^8\,\mathrm{Hz} \times 0.931 = 3.724 \times 10^8\,\mathrm{Hz}$.
- Il flusso di neutrini ν_μ non è altro che
$$\frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t} = 4 \times 10^8\,\mathrm{Hz} \times (1 - 0.931) = 0.276 \times 10^8\,\mathrm{Hz}.$$
Il numero di interazioni nell'unità di tempo è pari a
$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \sigma\frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t}n_b d,$$
dove la densità volumetrica dei bersagli vale
$$n_b = \rho\frac{\mathcal{N_A}}{A} = 1 \times 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3},$$

per cui

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \sigma \frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t} n_b d = 20 \times 10^{-40}\,\mathrm{cm}^2 \times 0.276 \times 10^8\,\mathrm{Hz} \times 1 \times 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3} \times 0.2\,\mathrm{cm} = 1.1 \times 10^{-9}\,\mathrm{Hz},$$

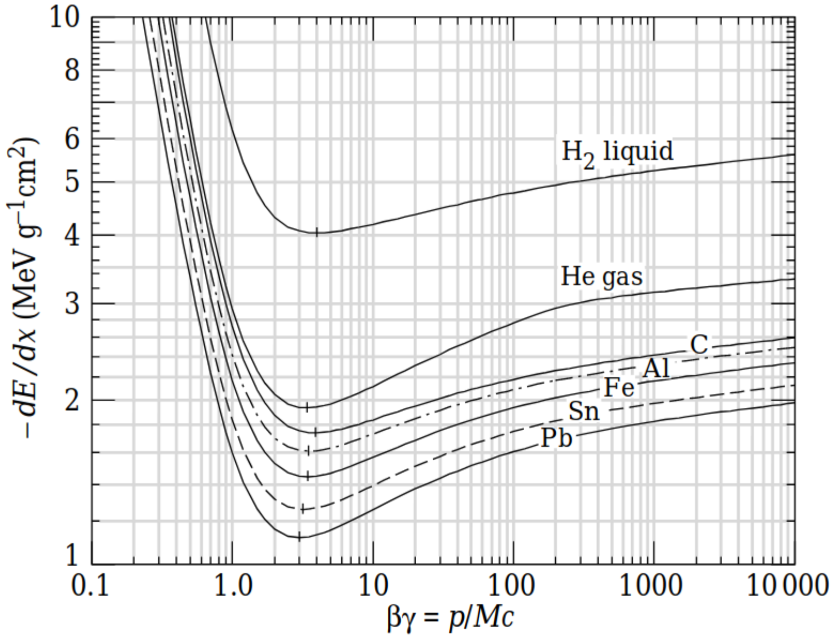
che corrisponde in un giorno a un numero di interazioni, e dunque di particelle X, pari a

$$N_i = \int_{\mathrm{giorno}} \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} dt = 1.1 \times 10^{-9}\,\mathrm{Hz} \times 3600 \times 24 = 9.5 \times 10^{-5}.$$

Esercizio 2

Dei kaoni e dei pioni carichi, aventi impulso massimo pari a $p = 700\,\mathrm{MeV/c}$ vengono fatti passare attraverso un misuratore di tempo di volo (TOF) che viene utilizzato per discriminare in massa le particelle cariche. Il misuratore di tempo di volo è composto da due lastre di scintillatore (composto principalmente di carbonio ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, densità $\rho = 0.91\,\mathrm{g/cm}^3$) identiche, ciascuna spessa $d = 5\,\mathrm{cm}$ e poste a una distanza L=1 m, che misurano i tempi dei passaggi t_0 e t_1 (TOF=$t_1 - t_0$), aventi una precisione di misura temporale pari a σ_t.

1. Calcolare quale valore di σ_t devono possedere i due rivelatori affinché sia possibile discriminare in massa i kaoni dai pioni quando questi possiedono il massimo dell'impulso. Si consideri significativa una differenza in tempo di volo se essa è maggiore di $3 \times \sqrt{2}\sigma_t$.
2. Stimare l'energia persa nel passaggio tra i due scintillatori da pioni e kaoni di impulso $p = 700\,\mathrm{MeV/c}$, usando il grafico della perdita di energia per ionizzazione riportato di seguito.



3. Quando i kaoni e pioni carichi impattano sui protoni presenti nei nuclei delle lastre di scintillatore, possono produrre altre particelle. Stabilire se sono possibili le seguenti reazioni, dandone la motivazione:
   - $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$
   - $\pi^- + p \to \pi^0 + \pi^0$
4. (Facoltativo) Qualora si avessero a disposizione due rivelatori con $\sigma_t = 800\,\mathrm{ps}$, quanto dovrebbero essere distanti le due lastre affinché sia possibile discriminare in massa i kaoni dai pioni a un impulso $p = 700\,\mathrm{MeV/c}$?

Soluzione dell'esercizio 2

1. Il tempo di volo minimo per le due particelle si ha in corrispondenza dell'impulso massimo, $p = 700\,\mathrm{MeV/c}$. Calcoliamo l'energia dei pioni e kaoni:

$$\begin{aligned} E_\pi &= \sqrt{m_\pi^2 + p^2} = \sqrt{139.6^2 + 700^2}\mathrm{MeV} = 713.8\,\mathrm{MeV} \\ E_K &= \sqrt{m_K^2 + p^2} = \sqrt{493.7^2 + 700^2}\mathrm{MeV} = 856.6\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Per calcolare il tempo di volo delle due particelle bisogna calcolarne la velocità, quindi β:

$$\begin{aligned}\beta_\pi &= \frac{cp}{E_\pi} = 0.981 \\ \beta_K &= \frac{cp}{E_K} = 0.817\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\mathrm{TOF}_\pi &= \frac{L}{\beta_\pi c} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0.981 \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 3.40\,\mathrm{ns} \\ \mathrm{TOF}_K &= \frac{L}{\beta_K c} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0.817 \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 4.08\,\mathrm{ns}\end{aligned}$$

quindi la differenza di tempo di volo tra le due particelle è:

$$\Delta t_{\mathrm{TOF}} = 0.68\,\mathrm{ns}$$

Per risolvere le due ipotesi di massa si deve quindi avere:

$$\Delta t_{\mathrm{TOF}} \geq 3 \times \sqrt{2}\sigma_t$$

dove $\sqrt{2}\sigma_t$ è la precisione necessaria sul tempo di volo $\Delta t_{\mathrm{TOF}} = t_1 - t_0$, ottenuta come somma in quadratura della precisione della misura temporale nella singola lastra, σ_t (essendo le due lastre identiche). Quindi:

$$\sigma_t \leq \frac{\Delta t_{\mathrm{TOF}}}{3\sqrt{2}} = \frac{0.68\,\mathrm{ns}}{3\sqrt{2}} = 160\,\mathrm{ps}$$

2. La perdita di energia per ionizzazione per una particella carica dipende dal suo impulso, e in particolare dal fattore cinematico $\beta\gamma$. Calcoliamolo per le due ipotesi di particella:

$$\begin{aligned}\beta\gamma|_\pi = p/m_\pi = 5.0 \\ \beta\gamma|_K = p/m_K = 1.4\end{aligned}$$

Quindi un pione di quell'impulso è circa una m.i.p., mentre un kaone ha una perdita di energia per ionizzazione maggiore. Prendiamo l'intercetta della curva per il carbonio ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ nel grafico, da cui si può stimare una perdita di energia media:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\bigg|_\pi &\approx 1.7\,\mathrm{MeVg^{-1}cm^2} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\bigg|_K &\approx 2.2\,\mathrm{MeVg^{-1}cm^2}\end{aligned}$$

e quindi calcoliamo la perdita di energia per ionizzazione moltiplicando per la densità e il percorso nelle due lastre:

$$\begin{aligned}\Delta E^\pi_{\mathrm{ion}} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\bigg|_\pi\right) \cdot \rho \cdot 2d = 1.7\,\mathrm{MeVg^{-1}cm^2} \cdot 0.91\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 15.5\,\mathrm{MeV} \\ \Delta E^K_{\mathrm{ion}} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\bigg|_K\right) \cdot \rho \cdot 2d = 2.2\,\mathrm{MeVg^{-1}cm^2} \cdot 0.91\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 20.0\,\mathrm{MeV}\end{aligned}$$

3. Le reazioni considerate sono dovute all'interazione forte, pertanto si devono conservare i numeri quantici di: carica elettrica C, numero barionico B, numero leptonico L, stranezza S ed isospin (totale I e terza componente I_3). Quindi:

   - $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$ conserva tutte le quantità, quindi è permessa
   - $\pi^- + p \to \pi^0 + \pi^0$ non è permessa, perché viola la conservazione del numero barionico B (iniziale: 1 per la presenza del protone, finale: 0).

4. Se si ha a dispoizione un rivelatore che ha una precisione temporale di $\sigma'_t = 800\,\mathrm{ps}$, la condizione sul nuovo tempo di volo minimo necessario per discriminare le due ipotesi di massa, $\Delta t'_{\mathrm{TOF}}$, diventa:

$$\begin{aligned}\Delta t'_{\mathrm{TOF}} = k \times \Delta t_{\mathrm{TOF}} &\geq 3\sqrt{2}\sigma'_t \\ k \times 0.68\,\mathrm{ns} &\geq 3\sqrt{2} \cdot 0.8\,\mathrm{ns} \\ k &\geq 3\sqrt{2} \times 0.8/0.68 = 4.99\end{aligned}$$

Quindi la nuova distanza tra le due lastre deve essere:

$$L' = kL = 4.99\,\mathrm{m}$$

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
$\overline{K}^0$	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha(^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}
Ω^-	1672.5	0	0	$3/2^+$	1	-3	8.21×10^{-11}
J/ψ	3096.9	0	0	1^{--}	0	0	7.2×10^{-21}

Tabella 1: Massa (M), isospin (I, e sua terza componente I_3), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media (τ) di diverse particelle adroniche.

Part.	M [MeV/c^2]	τ [s]
e^-	0.511	stabile
μ^-	105.6	2.2×10^{-6}
τ^-	1776	2.9×10^{-13}
$\nu_{e/\mu/\tau}$	0	stabile

Tabella 2: Massa (M) e vita media (τ) dei leptoni.

Costanti utili:

- $\hbar c = 197\,\text{MeV fm}$
- costante di normalizzazione per $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ di ionizzazione: $C = 0.307$ MeV g^{-1} cm^2

Formule utili:

- Energia della particella B prodotta in un decadimento a due corpi $A \rightarrow B + C$, con A fermo:

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$