Esercizio

I mesoni K^+ possono essere foto-prodotti secondo la reazione

$$\gamma + p \to K^+ + \Lambda^0.$$

1. Calcolare l'energia minima ($E_{\min}$) che deve avere il fotone nel laboratorio, dove il protone è a riposo, affinché la reazione abbia luogo.

Se si considera il moto del protone nel nucleo (detto "moto di Fermi") la reazione ha luogo anche se il fotone incidente ha un'energia inferiore ad $E_{\min}$.

2. Calcolare l'energia minima ($E_{\min}^{\mathrm{FERMI}}$) che deve avere il fotone nel laboratorio affinché la reazione abbia luogo, sapendo che l'impulso del protone nel nucleo ha modulo 200 MeV/c.

Si consideri il decadimento della Λ^0 in p e π^-:

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-$$

se la velocità della Λ^0 è 0.8 c, determinare nel laboratorio:

3. il massimo impulso, $|\vec{p}^{\max}|$, che può avere il π^-;
4. il massimo valore, $(p_{\pi^-})_\perp^{\max}$, che può assumere la componente dell'impulso del π^- ortogonale alla linea di volo della Λ^0 che decade.

Si usi: $m_p = 938.3\ \mathrm{MeV/c^2}$, $m_{K^+} = 493.7\ \mathrm{MeV/c^2}$, $m_{\Lambda^0} = 1115.7\ \mathrm{MeV/c^2}$, $m_{\pi^-} = 139.6\ \mathrm{MeV/c^2}$.

Soluzione (c = 1)

Il quadrato della massa invariante (nello stato iniziale) è

$$s = \left(E_\gamma + E_p\right)^2 - \left|\overrightarrow{p_\gamma} + \overrightarrow{p_p}\right|^2$$

Il quadrato della massa invariante (nello stato finale) a soglia è

$$s = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2$$

1. Nel caso in cui il protone è fermo, $\vec{p}_p = 0$, quindi $E_p = m_p$, si ha

$$\left(E_\gamma + m_p\right)^2 - \left|\overrightarrow{p_\gamma}\right|^2 = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2$$

Essendo $E_\gamma = \left|\overrightarrow{p_\gamma}\right|$, si ha

$$m_p^2 + 2E_\gamma m_p = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2$$

Da cui

$$E_\gamma = \frac{(m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{(493.7 + 1115.7)^2 - 938.3^2}{2 \times 938.3}\,\mathrm{MeV} = \boxed{911.1\ \mathrm{MeV} = E_{\min}}.$$

2. Nel caso in cui il protone ha $\vec{p}_p = \vec{p}_{\mathrm{FERMI}}$

$$\left(E_\gamma + E_p\right)^2 - \left|\overrightarrow{p_\gamma} + \vec{p}_{\text{FERMI}}\right|^2 = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2$$

Essendo $E_\gamma^2 = \left|\vec{p}_\gamma\right|^2$ e $E_p^2 = |\vec{p}_{\text{FERMI}}|^2 + m_p^2$, si ha

$$m_p^2 + 2E_\gamma E_p - 2\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_{\text{FERMI}} = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2$$

Da cui

$$E_\gamma = \frac{(m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2 + 2\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_{\text{FERMI}}}{2E_p}$$

Essa è minima quando il prodotto scalare ($\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_{\text{FERMI}}$) è minimo, il che si ha quando $\vec{p}_\gamma$ e $\vec{p}_{\text{FERMI}}$ hanno la stessa direzione ma verso opposto, quindi

$$2E_p E_\gamma = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2 - 2E_\gamma p_{\text{FERMI}}$$

$$2E_\gamma\left(E_p + p_{FERMI}\right) = (m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2$$

$$E_\gamma = \frac{(m_{K^+} + m_{\Lambda^0})^2 - m_p^2}{2\left(E_p + p_{\text{FERMI}}\right)} = \frac{(493.7 + 1115.7)^2 - 938.3^2}{2(\sqrt{938.3^2 + 200^2} + 200)}\,\text{MeV} = \boxed{737.4\text{ MeV} = E_{\text{min}}^{\text{FERMI}}}.$$

3. Essendo un decadimento a due corpi, esso è monoenergetico nel c.d.m. e

$$E_{\pi^-}^* = \frac{m_{\Lambda^0}^2 - m_p^2 + m_{\pi^-}^2}{2m_{\Lambda^0}} = 172.0\text{ MeV}.$$

Nel c.d.m. Il modulo del tri-impulso del pione (uguale a quello del protone) è

$$p_{\pi^-}^* = \sqrt{{E_{\pi^-}^*}^2 - m_{\pi^-}^2} = 100.5\text{ MeV}.$$

Per le trasformazioni di Lorentz, p_π è massimo nel laboratorio se $\vec{p}_\pi^{\,*}$ è parallelo alla linea di volo della Λ^0 che decade. Essendo $\beta_{\Lambda^0} = 0.8$ e $\gamma_{\Lambda^0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\Lambda^0}^2}}$,

$$p_{\pi^-}^{\text{max}} = \gamma_{\Lambda^0}(p_{\pi^-}^* + \beta_{\Lambda^0} E_{\pi^-}^*) = \boxed{396.9\text{ MeV} = |\vec{p}^{\,\text{max}}|}.$$

4. Dato che $(p_{\pi^-})_\perp = (p_{\pi^-}^*)_\perp$, il massimo momento trasverso del pione nel laboratorio si ha quando nel c.d.m. i prodotti del decadimento sono emessi a 90° rispetto alla linea di volo della Λ^0 che decade, quindi

$$(p_{\pi^-})_\perp^{\text{max}} = p_{\pi^-}^* = \boxed{100.5\text{ MeV}}.$$