francesco.pandolfi@roma1.infn.it

STANZA 245B (II piano VEM)

RICEVIMENTO: quando volete

4-vettori $\quad A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$= (a_t, a_x, a_y, a_z) \equiv (a_t, \vec{a})$$

$$A \cdot B = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad \text{(spazio Minkowski)}$$

$$= a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Due SdR $\quad O_{xyz} \longleftrightarrow O'_{x'y'z'}$

moto relativo lungo x : $\quad \vec{V} = V_x \hat{x}$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{V_x}{c} \qquad \overset{V=0}{\underset{0}{[}} \xrightarrow{\quad \beta \quad} \overset{V \to c}{\underset{1}{)}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \overset{V=0}{\underset{1}{[}} \xrightarrow{\quad \gamma \quad} \overset{V \to c}{\underset{+\infty}{)}}$$

Trasformazione di Lorentz

TdL con parametri (β, γ) con $\beta = \frac{V_x}{c}$

$$A \text{ in } O_{xyz} \xrightarrow{L} A' \text{ in } O'x'y'z'$$

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) \rightarrow A' = (a_0', a_1', a_2', a_3')$$

Boost lungo x

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

4-vettore posizione nello spazio-tempo $X = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

se $\beta \ll 1$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$\Rightarrow \quad x' \cong \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)(x-\beta c t) = x - \beta c t + \cancel{\frac{\beta^2}{2}x} - O(\beta^2)$$

TRASCURIAMO

$$\Rightarrow \quad x' \simeq x - \beta c t = x - \frac{v}{c} c t = \underline{x - vt}$$

limite classico

ok (Galileo)

stessa cosa per ct:

$$ct' \cong \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)(ct - \beta x) = ct - \beta x + \cancel{\frac{\beta^2}{2} ct} + O(\beta^2)$$

$$\Rightarrow \quad t' = t - \frac{\beta x}{c} = t - \beta \underbrace{\left(\frac{v}{c}\right)}_{= \beta} \frac{x}{v} = t - \cancel{\beta^2 \frac{x}{v}}$$

anche questo β^2

$$\Rightarrow \quad \underline{t' = t} \qquad \underline{\text{ok}}$$

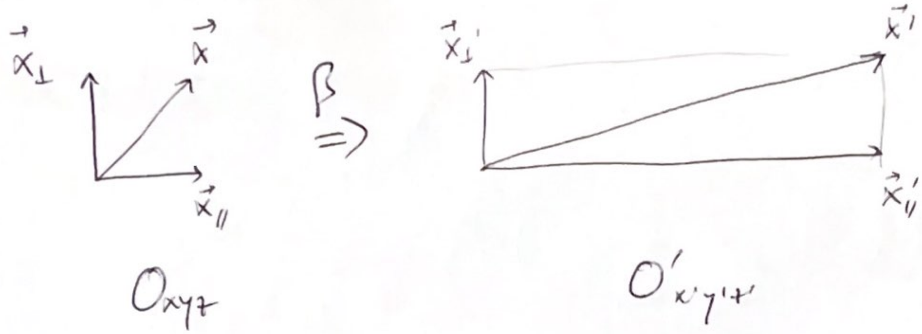
Notare come con boost lungo x abbiamo $\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$

In *generale* per TdL in direzione generica

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta c t) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

$x_{\parallel}$ parallelo al boost

$\vec{x}_{\perp}$ perp



---

ruotando assi t.c. $\beta \parallel \hat{x}$

$$L = L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(L(\beta)) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 (1-\beta^2) = 1 \qquad \forall \beta!$$

$\Rightarrow$ è una rotazione nello spazio-tempo !

Le rotazioni <u>NON</u> cambiano la norma dei vettori

$$\Leftrightarrow \quad |A'|^2 = A'\cdot A' = |A|^2 = A\cdot A$$

Vediamo come trasforma $A'\cdot B'$

$$A\cdot B \xrightarrow{?} A'\cdot B'$$

$$A' \cdot B' = a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3'$$

$$= (\gamma a_0 - \beta\gamma a_1)(\gamma b_0 - \beta\gamma b_1) - (\gamma a_1 - \beta\gamma a_0)(\gamma b_1 - \beta\gamma b_0)$$

$$- a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \Big(a_0 b_0 - \cancel{\beta a_0 b_1} - \cancel{\beta a_1 b_0} + \boxed{\beta^2 a_1 b_1} - \boxed{a_1 b_1} + \cancel{\beta a_1 b_0} +$$

$$+ \cancel{\beta a_0 b_1} - \beta^2 a_0 b_0 \Big) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 \left(a_0 b_0 (1-\beta^2) - a_1 b_1 (1-\beta^2) \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$

$$= \gamma^2 (1-\beta^2) \left(a_0 b_0 - a_1 b_1 \right) - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

ma $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$! $\Rightarrow$ $= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$

$\equiv A \cdot B$!

$\Leftrightarrow \quad A' \cdot B' = A \cdot B \quad \forall$ SdR

Il prodotto scalare fra due 4vettori è

<u>invariante</u> di Lorentz

<u>ES</u> Una sbarra solidale con SdR $O'x'y'z'$ disposta in direzione x. $O'x'y'z'$ si muove con velocità $v = v_x \hat{x}$ rispetto a $Oxyz$

Lunghezza della sbarra in O': $L' = x_2' - x_1'$

Applico TdL $L' = x_2' - x_1' = (\gamma x_2 - \beta\gamma c t_2) - (\gamma x_1 - \beta\gamma c t_1)$

$$= \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma c(t_2 - t_1)$$

In O la sbarra si muove $\Rightarrow$ per misurarla bisogna misurare x_1 e x_2 <u>allo stesso tempo</u>

$$\Rightarrow t_2 = t_1 \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \frac{L'}{\gamma}$$

$\Rightarrow$ ~~L'oggetto~~ la lunghezza dell'oggetto che si muove è <u>CONTRATTA</u> $(\gamma > 1 \text{ se } v > 0)$

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

OS Due eventi in $O'x'y'z'$ accadono nello stesso punto spaziale ma a tempi diversi

$$(ct_1, x, y, z) \qquad (ct_2, x, y, z)$$

distanza temporale in O': $\Delta t' = t_2' - t_1'$

Un osservatore in O misura

sempre $\beta = \frac{V_x}{c}$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (\gamma t_2' - \beta\gamma x) - (\gamma t_1' - \beta\gamma x)$$
$$= \gamma (t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

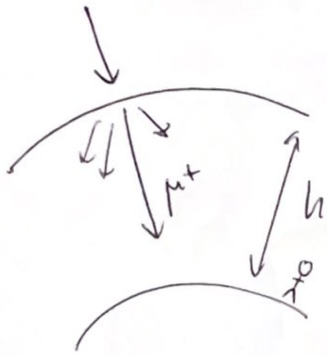
$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' \qquad (\gamma > 1 \text{ se } v > 0)$$

DILATAZIONE DEI TEMPI

Tempo misurato in SdR solidale con $\underbrace{\text{oggetto in moto}}_{\text{es. particella}}$ è detto tempo proprio. In ogni altro SdR il tempo è dilatato (le cose durano di più)

$$\tau \le t' = \gamma \tau$$
$$(\gamma > 1)$$

EX PER CASA



$\mu^\pm$ prodotti da interazione di raggi cosmici con atmosfera

Muone è particella instabile

$$\tau \sim 2.2\,\mu s = 2.2 \cdot 10^{-6}\,s$$

Calcolare cammino medio di un muone prodotto con $v \sim c$ e $\gamma \sim 10$ con e senza dilatazione tempi / contrazione lunghezze

EX 2 PER CASA

Calcolare la vita media di un pione π^+ in un SdR in cui il pione ha impulso

$$p(\pi^+) = 100\ GeV/c$$

sapendo che $m(\pi^+) = 139.6\ MeV/c^2$

$\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}\,s$

$\uparrow$ vita media propria