Verifica di Fisica Nucleare e Subnucleare (canale A-D)- AA 2019/20

24 Aprile 2020

1. Si ha un collisore asimmetrico, nel quale si fanno collidere frontalmente, con una luminosità istantanea di $10^{33}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, elettroni con impulso p_e e positroni di impulso 1 GeV. Si vuole studiare la reazione: $e^+e^- \to J/\psi + J/\psi$ di cui si conosce la sezione d'urto totale $\sigma(e^+e^- \to J/\psi + J/\psi) = 100$ nb.
   - Calcolare l'impulso minimo degli elettroni p_e^{soglia} affinché la reazione sia permessa;
   - Mettersi nella condizione $p_e = 50$ GeV e verificare che tutte le J/ψ sono prodotte in avanti nel laboratorio;
   - Nel caso del punto precedente, quanto deve essere il raggio R minimo di un rivelatore circolare posto perpendicolarmente al fascio ad una distanza di 1.5 m dal punto di collisione, affinché tutti le J/ψ prodotte colpiscano il rivelatore?
   - Se il suddetto rivelatore è in grado di rivelare J/ψ con un'efficienza di 85% per J/ψ, quanto deve durare la presa dati per raccogliere 1 milione di eventi in cui entrambi le J/ψ sono rivelate?

Soluzione:

- Calcolo il $\sqrt{s}$ nello stato iniziale:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_+ + E_-)^2 - |\vec{p}_+ + \vec{p}_+|^2} = \sqrt{2m_e^2 + 2E_-E_+ + 2p_-p_+} \approx \sqrt{4E_-E_+}$$

  Dove si è usato $E >> m$. Il minimo $\sqrt{s}$ per creare lo stato finale è pari a $2m_{J/\psi}$. Quindi si ha:

$$\sqrt{4E_-E_+} > 2m_{J/\psi}$$

$$\to E_-^{soglia} = \frac{m_{J/\psi}^2}{E_+} = 9.92 \text{ GeV}$$

- Per verificare che tutte le J/ψ sono prodotte in avanti basta verificare che le J/ψ prodotte con $\theta^* = 180°$ sono prodotte in avanti, il che corrisponde a richiedere $\beta_{cm} > \beta^*_{J/\psi}$. Nel caso in questione, abbiamo che:

$$\sqrt{s} = \sqrt{4E_-E_+} = 14.1 \text{ GeV}$$

  E la velocità del centro di massa:

$$\beta_{cm} = \frac{\vec{p}^{TOT}}{E^{TOT}} = \frac{|E_- - E_+|}{E_- + E_+} = \frac{49}{51} = 0.96$$

$$\gamma_{cm} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{cm}^2}} = 3.57$$

  Per $\beta^*_{J/\psi}$ invece si ha che:

$$E^*_{J/\psi} = \frac{\sqrt{s}}{2} = 7.05 \text{ GeV}$$

  Quindi:

$$p^*_{J/\psi} = \sqrt{(E^*_{J/\psi})^2 - m^2_{J/\psi}} = 6.31 \text{ GeV}$$

E dunque: Siamo nel caso $\beta_{cm} > \beta^*_{J/\psi}$ quindi tutte le J/ψ sono prodotte in avanti nel laboratorio.

- L'angolo massimo a cui può venire prodotta una J/ψ nel laboratorio è dato da:

$$\tan\theta_{max} = \frac{\beta^*_{J/\psi}}{\gamma_{cm}(\beta^2_{cm} - (\beta^*_{J/\psi})^2)} = 1.92$$

ovvero:

$$\theta_{max} = 1.09 \text{ rad}$$

Se il rivelatore è posto a una distanza di $D = 1.5$ m, allora il raggio necessario è dato da:

$$R = D\tan\theta = 2.88 \text{ m}$$

- Prima si ottiene il numero di coppie di J/ψ prodotte nell'unità di tempo:

$$\dot{N}_{J/\psi} = L\sigma = 1 \times 10^{33} \cdot 100 \times 10^{-9} \times 10^{-24} = 100 \text{ s}^{-1}$$

Quindi in un intervallo di tempo Δt si produrranno $\dot{N}_{J/\psi}\Delta t$ coppie. Il numero di eventi in cui entrambe le J/ψ sono rivelate è dato da questo moltiplicato per il quadrato dell'efficienza di rivelazione ϵ, dunque:

$$\Delta t = \frac{1\,\text{M}}{\epsilon^2 \dot{N}_{J/\psi}} = 13840 \text{ s} = 3.84 \text{ ore}$$

2. I fotoni della radiazione cosmica di fondo, che ha una temperatura di 2.7 K, possono collidere con i protoni liberi nello spazio e dare luogo alla reazione $\gamma + p \to \pi^0 + p$.
   - Calcolare l'energia minima di un protone libero affinché tale reazione possa avvenire.
   - Se volessimo accelerare dei protoni sulla Terra per portarli alla stessa energia, disponendo di un campo elettrico di 1 MV/m, quanto dovrebbe essere lungo il nostro acceleratore?

3. Il Large Hadron Collider può accelerare protoni e nuclei pesanti fino a energie di 6.5 TeV. Facendo uso dell'approssimazione nella quale i nuclei sono sfere di raggio $R = R_0 A^{1/3}$, calcolare:
   - la densità del protone (MeV/fm^3) nel sistema di riferimento del centro di massa.
   - la densità del protone nel sistema di riferimento del laboratorio.
   - la densità nel laboratorio per un nucleo di piombo ($^{208}_{82}$Pb) che viaggia con la stessa energia.
   - quale dei due subisce una variazione percentuale maggiore ($\frac{\delta_{\text{LAB}} - \delta_{\text{cdm}}}{\delta_{\text{cdm}}}$) tra il suo sistema di riferimento a riposo e quello del laboratorio?

4. Un rivelatore per pioni è fatto di un susseguirsi di strati, ognuno composto da 1 cm di Tungsteno ($Z = 74$, $A = 184$, $\rho = 19.3$ kg/dm^3), seguito da 1 cm di quarzo (SiO_2, $Z_{\text{Si}} = 14$, $A_{\text{Si}} = 28$, $Z_{\text{O}} = 8$, $A_{\text{O}} = 16$, $\rho = 2.65$ kg/dm^3). I pioni possono essere assorbiti sia tramite la loro interazione con i protoni che con i neutroni del mezzo. Assumiamo $\sigma(\pi^+ p) = \sigma(\pi^+ n) = 10$mb. Di quanti strati (tungsteno+quarzo) ho bisogno per assicurarmi che il 95% dei pioni siano assorbiti nel rivelatore?

Dati:

$m_{e^\pm} = 0.511\,\text{MeV} \quad m_{J/\psi} = 3097\,\text{MeV} \quad m_{\pi^0} = 135\,\text{MeV} \quad m_p = 938\,\text{MeV} \quad m_n = 940\,\text{MeV}$

$\hbar c = 197\,\text{MeV fm} \quad K = 1.380649 \times 10^{-23}\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Soluzione: Il numero di reazioni (assorbimenti) di pioni nell'unità di tempo nell'attraversare un rivelatore fatto di M strati è dato da:

$$\dot{N}_r = \dot{N}_\pi \sigma (n_Z d_Z M + n_{SiO_2} d_{SiO_2} M) = \dot{N}_\pi \sigma (n_Z + n_{SiO_2}) M d$$

Dal momento che $d_Z = d_{SiO_2} = d$. Possiamo calcolarci le densità dei bersagli:

$$n_Z = A_Z \frac{N_A \rho_Z}{A_Z} = N_A \rho_Z = 6.022 \times 10^{23} \cdot 19.3 = 1.16 \cdot 10^{25}$$

dove si è usato che $\text{kg}/\text{dm}^3 = \text{g}/\text{cm}^3$, e il fatto che i pioni possono essere assorbiti sia dai protoni che dai neutroni con la stessa sezione d'urto, quindi i bersagli del processo sono tutti i nucleoni A.

Per quanto riguarda il quarzo invece:

$$n_{SiO_2} = N_A \rho_{SiO_2} = 6.022 \times 10^{23} \cdot 2.65 = 1.60 \cdot 10^{24}$$

Quindi esplicitando M:

$$M = \frac{(\dot{N}_r / \dot{N}_\pi)}{d\sigma (n_Z + n_{SiO_2})} = \frac{0.95}{1 \cdot 10 \times 10^{-3} \times 10^{-24} (1.16 \cdot 10^{25} + 1.60 \cdot 10^{24})} = 65.4$$

Visto che gli strati non possono essere prodotti frazionati, è necessario costruirne 66.

Esercizio 2

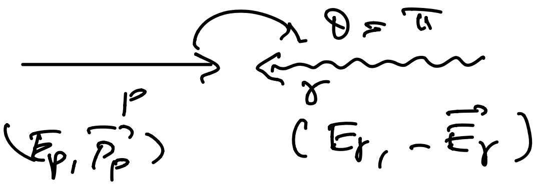
$$E_\gamma = KT = 3.73 \times 10^{-23}\ J = 2.35 \times 10^{-4}\ eV = 2.3 \times 10^{-13}\ GeV$$

per trovare l'energia di soglia si pone $\vec{P}_{\pi^0} = \vec{P}_p' = \emptyset$.

$$S_{in} = (E_p + E_\gamma)^2 - (\vec{P}_\gamma + \vec{P}_p)^2 = \cancel{E_\gamma^2 - P_\gamma^2} + E_p^2 - P_p^2 +$$

$$+ 2E_pE_\gamma - 2\vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}_p$$

$$= m_p^2 + 2E_\gamma E_p + 2E_\gamma P_p$$



$$E_\gamma = P_\gamma$$

$$S_{fin}^{soglia} = (m_{\pi^0} + m_p)^2.$$

$$m_p^2 + 2E_\gamma(E_p + P_p) = (m_{\pi^0} + m_p)^2$$

$$\Rightarrow (E_p + P_p) = \frac{(m_{\pi^0} + m_p)^2 - m_p^2}{2E_\gamma}$$

$$\simeq 6 \times 10^{11}\ GeV. \gg m_p.$$

protoni ultrarelativistici:

$$E_p \simeq P_p \Rightarrow E_p^{soglia} \simeq 3 \times 10^{11}\ GeV.$$

Esercizio 3

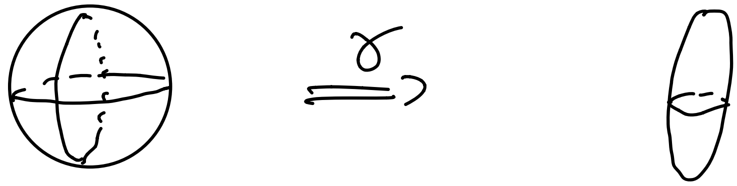
$R_0 \simeq 1$ fm. $m \simeq 1000$ MeV

Densità $\rho =: \frac{m}{V} = \frac{m}{R_0^3 A \frac{4\pi}{3}}$

Nel caso del protone: $\rho = \frac{1000\ MeV}{fm^3 \cdot A \cdot \frac{4\pi}{3}} \simeq 250 \frac{MeV}{fm^3}$.

nel laboratorio si ha la contrazione delle lunghezze lungo la direzione del volo.

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{6.5\ TeV}{1000\ MeV} = \frac{6500\ GeV}{1\ GeV} = 6500.$$



Contrazione lungo direzione volo.

$$V_{LAB} = \frac{4\pi}{3} R^2 \frac{R}{\gamma} = \frac{V_{c.d.m}}{\gamma} .$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{LAB} = \frac{m}{V_{LAB}} = \frac{m}{V_{c.d.m}} \gamma$$

$$\simeq 6500 \times \rho_{c.d.m} \gg \rho_{c.d.m.}$$

Raggio lungo direzione del volo è $R' = \frac{R}{\gamma} = \frac{1}{6500}$ fm.

Per il piombo bisogna tenere conto di $A = 208$

e $\gamma \simeq \frac{E}{m_p} \simeq \frac{1}{A} \frac{E}{m_p} \simeq \frac{1}{A} \gamma_{protone} \simeq 31$

Quindi pur essendo relativistico, la contrazione è molto minore.