Prova scritta del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2017/2018

19 Novembre 2018

NOME E COGNOME:	CANALE:

1. Un fascio di pioni incide su un un bersaglio di grafite (C, A=12, Z=6, ρ =2.1 g/cm^3) di spessore d=1 cm e sezione tale da contenere tutto il fascio, producendo mesoni K tramite la reazione $\pi^+ p \to \Sigma^+ K^+$. Al di là del bersaglio è posto un rivelatore di forma circolare di raggio R e spessore trascurabile, posto ad una distanza $D = 1$ m dal bersaglio.

   a. Determinare l'energia minima che i π^+ devono possedere per dar luogo alla reazione.

   b. Determinare il raggio minimo R_{min} del rivelatore affinché tutti i K^+ prodotti siano rivelati, nell'ipotesi che l'energia del fascio di pioni sia pari a 1.2 GeV.

   c. Determinare la corrente del fascio di pioni necessaria a produrre segnali di K^+ nel rivelatore con una frequenza di 1 kHz, assumendo una sezione d'urto $\sigma = 0.1$ mb.

   [$m_p = 938$ MeV/c^2; $m_{\pi^+} = 139.6$ MeV/c^2; $m_{K^+} = 493.7$ MeV/c^2; $m_{\Sigma^+} = 1189$ MeV/c^2].

Soluzione:

a. Per una reazione su bersaglio fisso:

$$E_\pi = \frac{(m_\Sigma + m_K)^2 - (m_p^2 + m_\pi^2)}{2m_p} = 1029.3 \text{ MeV} \tag{1}$$

b. L'energia dei K nel sistema del centro di massa si puó ottenere trattando il processo come il decadimento a due corpi di una particella di massa pari alla massa invariante del sistema:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p E_\pi} = 1775 \text{ MeV} \tag{2}$$

e quindi:

$$E_K^* = \frac{s + m_K^2 - m_\Sigma^2}{2\sqrt{s}} = 558 \text{ MeV} \tag{3}$$

$$p_K^* = \sqrt{E_K^{*2} - m_K^2} = 260 \text{ MeV/c} \tag{4}$$

Nel laboratorio, il centro di massa si muove con $\gamma_{CM} = E_{tot}/\sqrt{s} = (E_\pi + m_p)/\sqrt{s} = 1.205$, e quindi $\beta_{CM} = 0.558$. Poiché $\beta_K^* = p_K^*/E_K^* = 0.466 < \beta_{CM}$, c'è un angolo massimo di emissione pari a:

$$\tan\theta_K^{max} = \frac{\beta_K^*}{\gamma_{CM}\sqrt{\beta_{CM}^2 - \beta^{*2}}} = 1.26 \tag{5}$$

Il rivelatore distante D = 1 m deve essere tale da contenere tutti i K, fino all'angolo massimo. Deve avere un raggio pari ad almeno $R_{min} = 2D\tan\theta_K^{max} = 2.52$ m per raccogliere tutte le particelle prodotte.

c. La frequenza di eventi è data da:

$$R = \Phi_\pi \cdot N_p \cdot \sigma = \frac{I}{e\Sigma} \cdot \rho \frac{N_A}{A} Z\, \Sigma d \cdot \sigma = \frac{I}{e} \cdot \rho \frac{N_A}{A} Z d \cdot \sigma \tag{6}$$

essendo Σ la sezione del fascio, da cui:

$$I = R \cdot e \cdot \frac{1}{\rho \frac{N_A}{A} Z} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\sigma} = 2.5 \text{ pA} \tag{7}$$

2. In un centro di radioterapia un acceleratore lineare accelera elettroni fino ad un'energia di 25 MeV.

   a. Calcolare l'energia che depositano in 1 mm di tessuto umano, assumendo per esso caratteristiche pari a quelle dell'acqua ($\rho = 1.0$ g/cm^3, $I = 80$ eV, $E_C = 78$ MeV, $X_0 = 36.1$ cm, Z/A = 0.56, $\delta/2 = 4.5$).

   b. Volendo costruire un dispositivo in piombo per schermare le radiazioni, calcolare lo spessore di piombo necessario a ridurre l'energia degli elettroni in uscita dall'acceleratore fino al valore dell'energia critica del piombo ($\rho = 11.35$ g/cm^3, $I = 823$ eV, $E_C = 7.4$ MeV, $X_0 = 0.56$ cm, Z/A = 0.40, $\delta/2 = 0.3$), trascurando le perdite di energia per ionizzazione.

   c. Trascurando le perdite di energia per irraggiamento al di sotto dell'energia critica, calcolare lo spessore aggiuntivo di piombo necessario a ridurre alla quiete gli elettroni, assumendo conservativamente che la loro perdita di energia per ionizzazione nel piombo sia costante e pari a quella di un elettrone con $\beta\gamma = 3$.

Soluzione:

a. Gli elettroni depositeranno energia nel tessuto sia per ionizzazione che per irraggiamento. La perdita di energia per irraggiamento varrà:

$$\Delta E_{rad} = E_0(1 - e^{-x/X_0}) = 0.07 \text{ MeV} \tag{8}$$

La perdita di energia per ionizzazione viene calcolata, in modo approssimato, con la formula standard di Bethe-Bloch. Gli elettroni avranno $\beta = p/E = 0.99979$ e $\beta\gamma = p/m = 48.91$. Considerata la correzione di densità $\delta/2 = 4.5$,

$$\frac{dE}{dx} = 0.307 \text{ MeV} g^{-1} cm^2 \cdot 1.0\ gcm^{-3} \cdot 0.56 \frac{1}{0.99979^2} \cdot \tag{9}$$

$$\cdot \left[\log\left(\frac{2 \cdot 0.511 \text{ MeV} \cdot 48.91^2}{0.08 \times 10^{-3} \text{ MeV}}\right) - 0.999792^2 - 4.5\right] \sim 2.0 \text{ MeV}/cm \tag{10}$$

quindi depositano 0.20 MeV per ionizzazione in un millimetro di tessuto. Come atteso, al di sotto dell'energia critica (78 MeV per l'acqua), le perdite per ionizzazione sono dominanti. L'energia totale depositata in un millimetro di tessuto sarà quindi pari a 0.27 MeV.

b. Nel piombo, elettroni da 25 MeV che attraversano uno spessore x hanno una energia finale, considerando solo l'energia persa per irraggiamento, pari a $E(x) = E_0 e^{-x/X_0 0}$ con $X_0 =$ 0.561 cm. Per ridurli all'energia critica, dobbiamo ridurli da 25 MeV a 7.4 MeV. Si trova $x = -X_0 \log(E(x)/E_0) = -0.561 \text{ cm} \cdot \log(7.4/25) = 0.68$ cm.

c. Al di sotto di questa soglia, consideriamo solo le perdite di energia per ionizzazione, si ha che, se gli elettroni hanno $\beta\gamma = 3$, $\beta = 0.9487$ e:

$$\frac{dE}{dx} = 0.307 \text{ MeV} g^{-1} cm^2 \cdot 11.35 \ gcm^{-3} \cdot 0.40 \frac{1}{0.9487^2} \cdot \tag{11}$$

$$\cdot \left[\log\left(\frac{2 \cdot 0.511 \text{ MeV} \cdot 3^2}{0.823 \times 10^{-3} \text{ MeV}}\right) - 0.9487^2 - 0.3\right] \sim 12.6 \text{ MeV}/cm \tag{12}$$

da cui $\Delta X = (7.4 \text{ MeV} - 0.511 \text{ MeV})/(12.6 \text{ MeV/cm}) = 0.55$ cm.

3. Stabilire quali delle reazioni e decadimenti sotto indicati sono permessi e quali sono proibiti. Per quelli proibiti, indicare tutti i numeri quantici (o le leggi di conservazione) che sono violati. Per quelli permessi, indicare la forza che media l'interazione.

a) $\mu^- + p \to \nu_\mu + n$

b) $\pi^+ + p \to \Sigma^+ + \overline{K}^0$

c) $\bar{p} + p \to \gamma\gamma\gamma$

d) $p + p \to \Sigma^+ + n + K^0 + \pi^+$

e) $\pi^- + p \to \pi^0 + \bar{\Lambda} + K^0$

f) $\bar{p} + p \to \pi^0 + \Lambda + K^0$

g) $\Sigma^+ \to \Lambda + \pi^0$

h) $\Xi^0 \to \Lambda + \gamma$

i) $\pi^0 \to \mu^- + e^+$

l) $\Sigma^- \to \Lambda + \pi^-$

m) $\Omega^- \to \Lambda + \pi^-$

n) $K^- \to \pi^0 + e^- + \nu_e$

Soluzione:

a) Si, debole

b) No, Q, $\Delta S = 2$

c) Si, EM

d) Si, forte

e) No, B, $|\Delta S|$=2

f) No, B

g) No: Q, m$_f$ >m$_i$

h) Si, debole

i) No, L_μ, L_e

l) No, massa

m) no: $|\Delta S| = 2$

n) no: Le, $|\Delta S| = 1$