

Prova Scritta del Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2 - AA 2018/2019

6 Settembre 2019 - Versione 4

| | |
|-----------------|---------|
| NOME E COGNOME: | CANALE: |
| | |

1. Nel 1966, due anni dopo la scoperta della radiazione cosmica di fondo (CMB per *Cosmic Microwave Background*), Kenneth Greisen, Vadim Kuzmin e Georgiy Zatsepin, teorizzarono l'esistenza di un limite massimo di energia che possono raggiungere protoni nell'universo per la loro interazione con il CMB.

Le due reazioni possibili sono

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi^0 \quad (i)$$

$$p + \gamma \rightarrow n + \pi^+ \quad (ii)$$

- a. Calcolare l'energia di soglia del protone nella reazione (i), assumendo che l'energia dei fotoni è di $E_\gamma = 3kT$ dove $T = 2.7$ K e $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.
- b. Dimostrare che data l'energia del centro di massa \sqrt{s} nella reazione (i), l'energia iniziale (E_p^i) e finale (E_p^f) del protone nel centro di massa hanno la seguente espressione:

$$E_p^i = \frac{s + m_p^2}{2\sqrt{s}}$$
$$E_p^f = \frac{s + m_p^2 - m_\pi^2}{2\sqrt{s}}$$

- c. Assumendo che la reazione (i) avvenga a soglia, calcolare il valore dell'energia iniziale e finale del protone nel centro di massa.
- d. Calcolare la frazione di energia persa dal protone nel riferimento del laboratorio, assumendo sempre che la reazione (i) avvenga all'energia di soglia.
- e. Nella Figura 1 è mostrata la sezione d'urto per il processo $p + \gamma \rightarrow X$ in funzione di \sqrt{s} . Quali potrebbero essere le risonanze prodotte nelle reazioni (i) e (ii)?
- f. Calcolare il cammino libero medio di un protone nel universo in Megaparsec (1 pc = 3.26 anni luce) per la reazione (i) e energie prossime alla risonanza principale nella Figura 1 per una densità di fotoni del CMB di 400 fotoni/cm³?

Si è mostrato in questo problema che i protoni di alta energia che viaggiano su lunghe distanze intergalattiche avranno la loro energia limitata dal meccanismo di fotoproduzione di pioni, scomparendo del tutto nella reazione (ii) e avendo la loro energia ridotta tramite la reazione (i). Questo fenomeno è noto come effetto GZK.

Dati $m_{\pi^\pm} = 140$ MeV/c², $m_{\pi^0} = 135$ MeV/c², $m_p = 938$ MeV/c², $m_n = 940$ MeV/c² e la massa del Barione $\Delta^+ = 1232$ MeV/c².

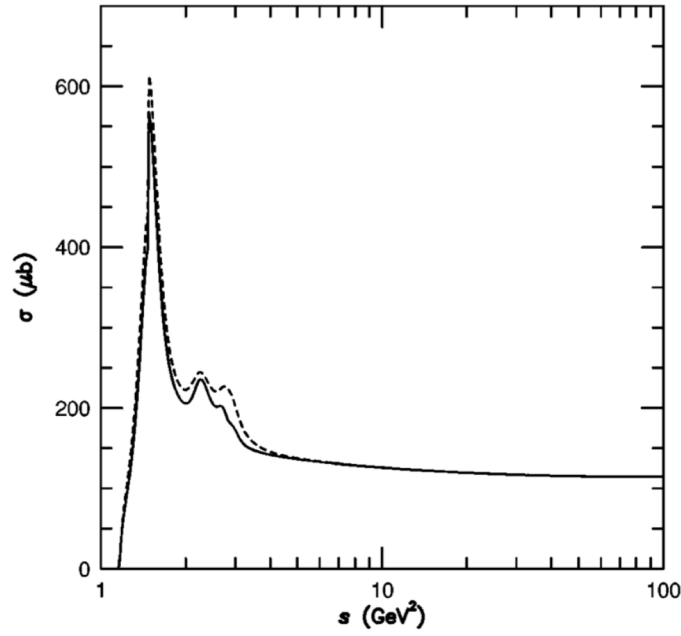


Figura 1: Sezione d'urto del processo $p\gamma$.

Soluzione:

- a. La soglia in energia della reazione si calcola assumendo che nel referenziale del centro di massa il protone e il pione dello stato finale sono al riposo, dunque:

$$\sqrt{s} = m_p c^2 + m_\pi c^2$$

Mentre per lo stato iniziale l'invariante relativistico \sqrt{s} si esprime nel referenziale del laboratorio (prendendo $c = 1$):

$$s = (E_p + E_\gamma)^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\gamma)^2$$

Dunque

$$s = E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - p_p^2 - p_\gamma^2 - p_p p_\gamma \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra gli impulsi del fotone e il protone incidente dunque (pprozzimando $E_p \sim p_p c$) :

$$s = m_p^2 + 2E_p E_\gamma (1 - \cos \theta)$$

La soglia sarà dunque definita dà

$$s = m_p^2 + 2E_p E_\gamma (1 - \cos \theta) > (m_p + m_\pi)^2$$

Dunque:

$$E_p > \frac{m_\pi(2m_p + m_\pi)c^4}{4E_\gamma}$$

Tenendo conto del fatto che il minimo è ottenuto per $\cos \theta = \pi$.

Applicazione numerica: $E_\gamma = 3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 2.7 \times 1.6 \times 10^{-19}$ eV e dunque le soglie saranno:

$$(i) \quad E_p = 9.72 \times 10^{19} \text{ eV}$$

Cioè energie altissime che corroborano l'ipotesi fatta.

b. Nel sistema di riferimento del centro di massa, prima della reazione:

$$E_\gamma^i = p_p^i$$

e dunque

$$\sqrt{s} = E_p^i + E_\gamma = E_p^i + \sqrt{E_p^{i2} - m_p^2}$$

cioè

$$\sqrt{s} - E_p^i = \sqrt{E_p^{i2} - m_p^2}$$

dunque elevando al quadrato:

$$s - 2E_p^i\sqrt{s} = E_p^{i2} - m_p^2$$

si ottiene:

$$E_p^i = \frac{s + m_p^2}{2\sqrt{s}}$$

Per l'energia del protone nello stato finale si ottiene da $p_p = p_\pi$:

$$\sqrt{s} = E_p^f + E_\pi = E_p^f + \sqrt{E_p^{f2} - m_p^2 + m_\pi^2}$$

e dunque si ottiene

$$\sqrt{s} - E_p^f = \sqrt{E_p^{f2} - m_p^2 + m_\pi^2}$$

Che si semplifica in:

$$E_p^f = \frac{s - m_\pi^2 + m_p^2}{2\sqrt{s}}$$

c. Alla soglia si ha $\sqrt{s} = m_p + m_\pi$ e dunque:

Si ritrova:

$$E_p^f = 938 \text{ MeV}$$

e si ottiene:

$$E_p^i = 947 \text{ MeV}$$

- d. Dato che alla soglia entrambi il protone e il pione nello stato finale sono al riposo $E_p = m_p$ e $E_\pi = m_\pi$, possiamo passare al sistema di riferimento del laboratorio con un boost γ per entrambi il protone e il pione dello stato finale a:

$$(E_p^{lab})^f = \gamma m_p$$

$$(E_\pi^{lab})^f = \gamma m_\pi$$

Per conservazione dell'energia si ha nel sistema del laboratorio che:

$$(E_p^{lab})^f + (E_\pi^{lab})^f = (E_p^{lab})^i + (E_\pi^{lab})^i$$

Dove l'energia del fotone è completamente trascurabile. Dunque

$$(E_p^{lab})^i = \gamma(m_p + m_\pi)$$

dunque l'energia persa dal protone iniziale sarà:

$$\Delta E^{lab} = \gamma m_\pi$$

e la frazione si semplificherà in:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{m_\pi}{m_p + m_\pi} \sim 10\%$$

La frazione di energia persa nella reazione è dunque tipicamente del 10% (un valore non trascurabile).

- e. Dalla figura si può notare un picco vicino alla risonanza Δ^+ ed è una reazione ragionevole dal punto di vista delle leggi di conservazione.
- f. Alla risonanza, la sezione d'urto è di circa $600 \mu\text{b}$, cioè $0.6 \times 10^{-27} \text{ cm}^2$. Il libero cammino medio è dato da:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n}$$

Dunque:

$$\lambda = 1.4 \text{ Mpc}$$

Questa grande distanza rimane ragionevolmente piccola in confronto a distanze inter-galassie, dunque protoni di energie sopra la soglia di foto produzione di pioni viaggiando grandi distanze intergalattiche avranno un taglio in energia.

2. Il calorimetro elettromagnetico di CMS, uno dei due grandi esperimenti a scopo generico del LHC, è basato sulla tecnologia di cristalli di Piombo-Tungsteno PbWO_4 ed è formato da 75,000 unità di cristalli. Questi cristalli di alta densità e trasparenti sono scintillanti. I segnali sono raccolti da foto-rivelatori sensibili.

Le dimensioni di ogni cristallo (nella zona centrale del rivelatore) sono di $2.2 \times 2.2 \times 23 \text{ cm}$.

- a. Usando i dati di frazioni di massa seguenti:

Calcolare il Z effettivo del PbWO_4 e calcolare l'energia critica per gli elettroni.

| Elemento | Z | Frazione di massa |
|----------|----|-------------------|
| Pb | 82 | 0.455 |
| W | 74 | 0.404 |
| O | 8 | 0.140 |

- b. Quale processo principale governa la perdita di energia di un elettrone di energia 50 GeV nel cristallo? Calcolare l'energia persa nel cristallo per un elettrone di tale energia ed incidente perpendicolarmente sulla faccia del cristallo, come nella Figura 2.
- c. Calcolare la profondità massima dello sciame dovuto all'elettrone del punto (b). Spiegare se in base a queste informazioni, questi cristalli sono un rivelatore adatto per la misura dell'energia di elettroni di tale energia.

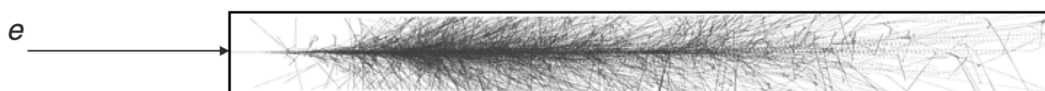


Figura 2: Illustrazione di sciame elettromagnetico in un cristallo dell'esperimento CMS.

- d. Per un muone di energia 50 GeV, calcolare l'energia depositata nel calorimetro elettromagnetico di CMS, dato che l'energia critica per un muone è di 170 GeV nel PbWO_4 .

Dati Per il PbWO_4 $Z/A = 0.41$, $X_0 = 0.9 \text{ cm}$, $\rho = 8.3 \text{ g/cm}^3$, e $\langle I \rangle = 600 \text{ eV}$.

Soluzione:

- a. Il Z effettivo per il PbWO_4 è la media ponderata dalle masse rispettive dei Z degli elementi che lo compongono, cioè:

$$Z_{eff} = 0.455 \times Z_{\text{Pb}} + 0.404 \times Z_{\text{W}} + 0.140 \times Z_{\text{O}} = 68.3$$

L'energia critica è data dalla formula:

$$E_c = \frac{800 \text{ MeV}}{Z + 1.2} = 11.5 \text{ MeV}$$

- b. Il processo principale di perdita di energia è per Bremstrahlung dato che l'elettrone è indubbiamente sopra la soglia di energia critica. L'energia persa si può dunque calcolare tramite:

$$\frac{\Delta E}{E} = (E - E \times e^{-x/X_0})/E = (1 - e^{-23/0.9}) \sim 1$$

L'elettrone perde praticamente tutta la sua energia.

- c. Lo sviluppo dello sciame dell'elettrone è dettato dalla lunghezza di massimo sviluppo x_{max} quando l'energia media degli elettroni e positroni raggiunge l'energia critica, dove il numero di elettroni e positroni raddoppia ad ogni lunghezza di radiazione, cioè:

$$x_{max} = \frac{\left(\ln \frac{E}{E_c}\right)}{\ln 2} \times X_0 = 10.9 \text{ cm}$$

Lo sciame è dunque ampiamente contenuto nel cristallo, i cristalli di CMS sono ottimi per la misura calorimetrica dell'energia degli elettroni in un ampio range di energie.

- d. Per un muone di 50 GeV ha un $\beta\gamma = 473.2$ (con un $\beta \sim 1$), il processo di perdita di energia sotto la soglia critica è l'ionizzazione. Applicando la formula di Bethe-Bloch si ottiene che:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= 0.307 [\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2] 8.3 [\text{gcm}^{-3}] 0.413 \frac{1}{\beta^2} \left(\ln \left(\frac{2 \times 0.511 \times \beta^2 \gamma^2}{601 \times 10^{-6}} \right) - \beta^2 \right) \\ &= 19.74 \text{ MeV/cm} \end{aligned}$$

Dunque in 23 cm di cristallo la perdita di energia sarà di circa 450 MeV.

3. Stabilire quali delle reazioni e decadimenti sotto indicati sono permessi e quali sono proibiti. Per quelli proibiti, indicare tutti i numeri quantici (o le leggi di conservazione) che sono violati. Per quelli permessi, indicare la forza che media l'interazione.

- | | |
|--|--|
| a) $K^- + p \rightarrow K^0 + n$ | g) $K^- + n \rightarrow \Sigma^0 + \pi^-$ |
| b) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$ | h) $\Omega^- \rightarrow \Sigma^0 + \pi^-$ |
| c) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ | i) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ |
| d) $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu + \pi^-$ | l) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$ |
| e) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^0$ | m) $\pi^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ |
| f) $p + \bar{p} \rightarrow \Sigma^+ + \bar{K}^0 + \pi^+$ | n) $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ |

Soluzione:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) sì, forte | g) sì, forte |
| b) sì, forte | h) no, $\Delta S = 2$ |
| c) no, massa | i) sì, debole |
| d) sì, debole | l) no, L |
| e) sì, forte | m) no, massa |
| f) No, $\Delta S = 2$ | n) sì, debole |