I Esonero di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2018/2019

3 Maggio 2019

1. Si consideri la reazione:
$$p + p \to n + p + \pi^+$$
per un fascio di protoni su un bersaglio fisso.
   a. Si determini l'energia cinetica minima del protone incidente affinché la reazione possa avere luogo.
   b. Si dimostri che il protone ed il π^+ non possono essere prodotti entrambi a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio.

   Si assuma ora che l'energia cinetica dei protoni incidenti sia pari a 1.25 GeV, e che la coppia $p\pi^+$ sia prodotta nello stato risonante Δ^{++} con massa pari a 1232 MeV/c^2, cioè il processo sia $p + p \to n + \Delta^{++}$ con $\Delta^{++} \to p + \pi^+$. Si determinino, nel sistema di riferimento del laboratorio:
   c. l'energia minima del neutrone;
   d. l'angolo minimo tra il neutrone e lo stato risonante.

   [$m_n = 940$ MeV/c^2; $m_p = 938$ MeV/c^2; $m_{\pi^+} = 140$ MeV/c^2]

Soluzione:

a. L'energia cinetica di soglia è data da:
$$K_{thr} = \frac{(m_n + m_p + m_\pi)^2 - 4m_p^2}{2m_p} = 295 \text{ MeV} \tag{1}$$

b. Procedendo per assurdo, nell'assunzione che sia il protone che il pione nello stato finale siano prodotti a riposo, dalla conservazione dell'energia e dell'impulso abbiamo:
$$\begin{cases} E_p + m_p = E_n + m_p + m_\pi \\ |\vec{p}_p| = |\vec{p}_n| \end{cases} \tag{2}$$
da cui:
$$m_n^2 = E_n^2 - |\vec{p}_n|^2 = E_p^2 + m_\pi^2 - 2E_p m_\pi - |\vec{p}_p|^2 = m_p^2 + m_\pi^2 - 2E_p m_\pi \tag{3}$$
e quindi:
$$E_p = \frac{m_p^2 + m_\pi^2 - m_n^2}{2m_\pi} < m_p \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

c. Il protone incidente ha energia totale $E_p = K_p + m_p$. Lo stato finale è equivalente a quello del decadimento a due corpi in $n + \Delta^{++}$ di una particella di massa pari all'energia nel centro di massa:
$$\sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_p m_p} = 2422 \text{ MeV} \tag{6}$$

Il centro di massa si muove con $\gamma_{CM} = |E_p + m_p|/\sqrt{s} = 1.29$, $\beta_{CM} = 0.632$. Nel centro di massa, il neutron e la Δ^{++} hanno energia ed impulso pari a:

$$E_n^* = \frac{s + m_n^2 - m_\Delta^2}{2\sqrt{s}} = 1080 \text{ MeV} \tag{7}$$

$$|\vec{p}_n^*| = \sqrt{E_n^{*2} - m_n^2} = 532 \text{ MeV/c} \tag{8}$$

L'energia minima nel sistema di laboratorio si ottiene quando, nel centro di massa, il neutrone è emesso all'indietro:

$$E_n^{min} = \gamma_{CM}\left(E_n^* - \beta_{CM}|\vec{p}_n^*|\right) = 960 \text{ MeV} \tag{9}$$

d. Nel centro di massa, il neutrone e la Δ^{++} si muovono con velocità:

$$\beta_n^* = \frac{|\vec{p}_n^*|}{E_n^*} = 0.492 \tag{10}$$

$$\beta_\Delta^* = \frac{|\vec{p}_n^*|}{\sqrt{|\vec{p}_n^*|^2 + m_\Delta^2}} = 0.396 \tag{11}$$

Poiché $\beta_n* < \beta_{CM}$ e $\beta_\Delta^* < \beta_{CM}$, quando le due particelle sono emesse lungo la direzione del moto del centro di massa, sono entrambe emesse in avanti nel laboratorio, e quindi l'angolo minimo è pari a zero.

2. In un esperimento a bersaglio fisso, un fascio di pioni di corrente $I = 1$ nA incide su un bersaglio di grafite (C, $\rho_C = 2$ g/cm^3, $Z_C = 6$, $A_C = 12$) di spessore $d = 1$ cm. Si supponga che la sezione d'urto differenziale per la produzione di mesoni K^+ nell'interazione dei π^+ con un nucleo di carbonio possa essere scritta come:

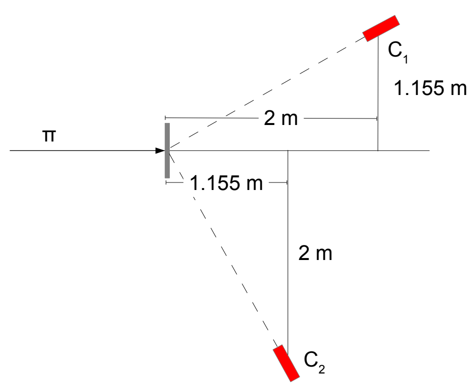
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0(1 + \alpha\cos\theta) \tag{12}$$

essendo θ l'angolo che il K^+ forma con la direzione del fascio. I K^+ sono rivelati da due contatori C_1 e C_2 disposti come in figura, di sezione circolare e raggio $r = 5$ cm.

   a. Si determini il valore di α, assumendo che il rapporto tra i conteggi nei due rivelatori sia pari a $R = N_1/N_2 = 0.756$.

   b. Si determini il valore di σ_0, assumendo che il primo rivelatore conti in media 0.5 K^+ al secondo.

   c. Si supponga di voler sostituire il bersaglio di grafite con un bersaglio di idrogeno liquido (H_2, $\rho = 0.07$ g/cm^3). Assumendo che la sezione d'urto di Eq. (12) sia la somma delle sezioni d'urto su singolo nucleone, uguali per neutrone e protone, quale sarà lo spessore d' necessario ad avere nei rivelatori la stessa rate di conteggi ottenuta col bersaglio di grafite?



Soluzione:

a. Entrambi i rivelatori sono alla stessa distanza dal bersaglio, $L = \sqrt{(2\text{ m})^2 + 1.155\text{ m}^2} = 2.310$ m e quindi, avendo le stesse dimensioni, coprono lo stesso angolo solido $\Delta\Omega = \pi r^2/L^2 = 0.00147$ sr. Il rapporto tra i conteggi nei due rivelatori sarà quindi semplicemente:

$$R = \frac{N_1}{N_2} = \frac{(1 + \alpha \cos\theta_1)}{(1 + \alpha \cos\theta_2)} \tag{13}$$

da cui:

$$\alpha = \frac{1 - R}{R \cos\theta_2 - \cos\theta_1} = -0.5 \tag{14}$$

avendo considerato che $\cos\theta_1 = 2\text{ m}/L = 0.866$ e $\cos\theta_2 = 1.155\text{ m}/L = 0.5$.

b. La sezione d'urto integrata sulla superficie del rivelatore 1 è data da:

$$\sigma_1 = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Delta\Omega = \sigma_0(1 + \alpha\cos\theta_1)\Delta\Omega \tag{15}$$

La rate di eventi attesi sarà d'altronde:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_\pi}{dt} \cdot \rho_C \frac{N_A}{A_C}\sigma_1 \cdot d \tag{16}$$

con $\frac{dN_\pi}{dt} = I/e$, e quindi:

$$\sigma_0 = \frac{\frac{dN_1}{dt}}{\frac{I}{e} \cdot \rho_C \frac{N_A}{A_C} d} \frac{1}{(1 + \alpha\cos\theta_1)\Delta\Omega} = 0.96\ \mu\text{b/sr} \tag{17}$$

c. La sezione d'urto differenziale per singolo nucleone è:

$$\frac{d\sigma_N}{d\Omega} = \frac{1}{A_C}\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{18}$$

Per l'idrogeno avremo quindi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_\pi}{dt} \cdot \rho_H \frac{N_A}{A_H} \cdot A_H \frac{1}{A_C}\frac{d\sigma}{d\Omega}\Delta\Omega \cdot d' = \frac{dN_1}{dt}\frac{\rho_H}{\rho_C}\frac{d'}{d} \tag{19}$$

e quindi, per avere la stessa rate nei due casi, $d' = d \cdot \rho_C/\rho_H = 28.6$ cm.