Perdite di energia per ionizzazione

Jackson
Cap. 13.1

Formule di Bohr con un calcolo classico

$$dE = \Delta E_{tot} = n_e 2\pi b \cdot \overline{\Delta E} \, db\, dx$$

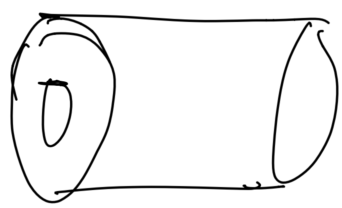
$\overline{\Delta E} \equiv T$
energia cinetica trasferita dal proiettile al singolo elettrone

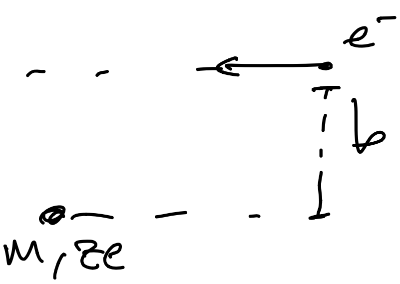
$$\frac{d^2E}{db\,dx} = 2\pi n_e b\, \overline{\Delta E}$$

$$= \underbrace{4\pi m_e c^2 r_e^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2}}_{A} \frac{1}{b}$$

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{d^2E}{db\,dx} = A \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

Stimare
b_{max}
b_{min}



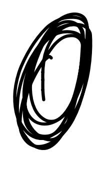


$$\frac{dE}{dx} \propto \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

b_{max}: tempo d'urto $\frac{b}{v} \propto$ tempi di rivoluzione dell'elettrone nell'atomo

trattando e^- come libero

m
$\vec{v}$ lenta



$\beta\gamma$ del proiettile lo stesso per e^-, m_e $\vec{v}_e = -\vec{v}_p$

v troppo veloce

scambio piccolo di impulso.

Per avere scambio di impulso. $\Delta p \propto F \cos t \left(\frac{b}{v}\right)$

$$\frac{b}{v} \simeq \gamma\, t_{riv} = \gamma \frac{1}{\langle\omega\rangle} = \gamma \frac{1}{I/\hbar}.$$

I : energia di ionizz. media.

$$b_{max} \simeq \gamma \frac{v}{\bar{I}/\hbar} = \frac{\gamma \beta c}{\bar{I}/\hbar}$$

b_{min}: principio di indeterminazione

e^- impulso p_e. $m \equiv m_e$

$$\Delta p \cdot \Delta x \simeq \hbar \Rightarrow \Delta x \simeq \frac{\hbar}{p_e}$$

$$b_{min} \simeq \Delta x = \frac{\hbar}{p_e} = \frac{\hbar}{\gamma m v} = \frac{\hbar}{\gamma m \beta c}$$

$$\frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{\gamma \beta c}{\bar{I}/\cancel{\hbar}} \frac{\gamma m \beta c}{\cancel{\hbar}} = \frac{\gamma^2 \beta^2 m_e c^2}{\bar{I}}$$

$$-\frac{dE_{proiett}}{dx} = 4\pi m_e c^2 r_e^2 \frac{z^2}{\beta^2} n_e \ln \frac{\gamma^2 \beta^2 m_e c^2}{\bar{I}}$$

$$n_e = \frac{\rho}{A} N_A \cdot Z_1$$

per molti materiali: $\bar{I} \simeq 10 Z_1$ eV

$$-\frac{dE_{proiett}}{dx} = 4\pi \underbrace{m_e c^2}_{[E]} \underbrace{r_e^2 N_A \rho}_{[L]^{-1}} \frac{Z_1}{A} \frac{z_1^2}{\beta^2} \ln \frac{\gamma^2 \beta^2 m_e c^2}{\bar{I}}$$

$\frac{dE}{dx}$: variazione energia dell'elettrone. energia trasf. all'elettrone dal proiettile.

$$\frac{dE_{proiettile}}{dx} = -\frac{dE}{dx}$$

$\frac{dE}{dx}$: perdita di energia del proiettile

$$C = 4\pi m_e c^2 r_e^2 N_A = 0.3 \frac{\text{MeV}}{\text{g cm}^{-2}}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \underbrace{(0.3 \text{ MeV})}_{C} \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{\bar{I}}$$

$\frac{Z}{A} \simeq \frac{1}{2}$ $\qquad \ln I^{-1} \simeq \ln Z^{-1}$

$Z \quad 7 \rightarrow 100$

$\ln$ cambia poco.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = \frac{(0.3\,MeV)}{2}\,\frac{z^2}{\beta^2}\,\ln\frac{\beta^2\gamma^2 m_e c^2}{I}$$

Formula di Bohr (1915)

- funzione universale per tutti materiali
- $\frac{dE}{dx}$ non dipende dalla massa del proiettile

  vale per $M \gg m_e$ abb. pesanti

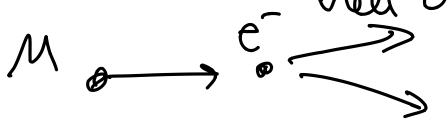
  verificata con p, α

Per tener conto di
- MQ
- relatività

Bethe-Bloch hanno calcolato con QED

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = (0.3\,MeV)\,\frac{Z}{A}\,\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\frac{2m_e\beta^2\gamma^2c^2\,W_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right]$$

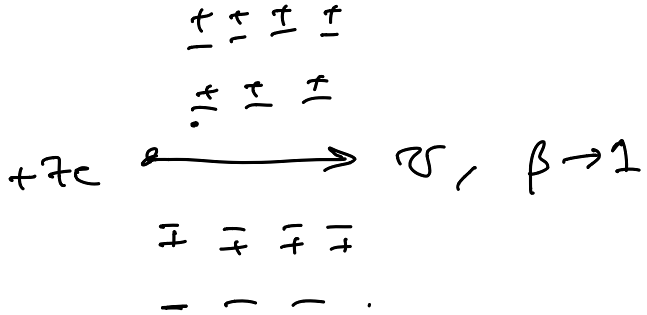
W_{max} = en. cin. max trasf. all'elettrone nell'urto.



$W_{max} = T_e^{max} \simeq 2 m_e c^2 \beta^2\gamma^2$

$-\beta^2$: correzione relativistica.

$\frac{\delta(\beta\gamma)}{2}$: correzione dovuta a effetti di densità e polarizzazione del mezzo.



Correzioni dovute a effetti di schermatura.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = (0.3\ \text{MeV})\,\frac{Z}{A}\,\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\frac{2m_e\beta^2\gamma^2c^2\,W_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right]$$

- β piccoli: $\propto \frac{1}{\beta^2}$
- c'è un minimo.
- risalita relativistica

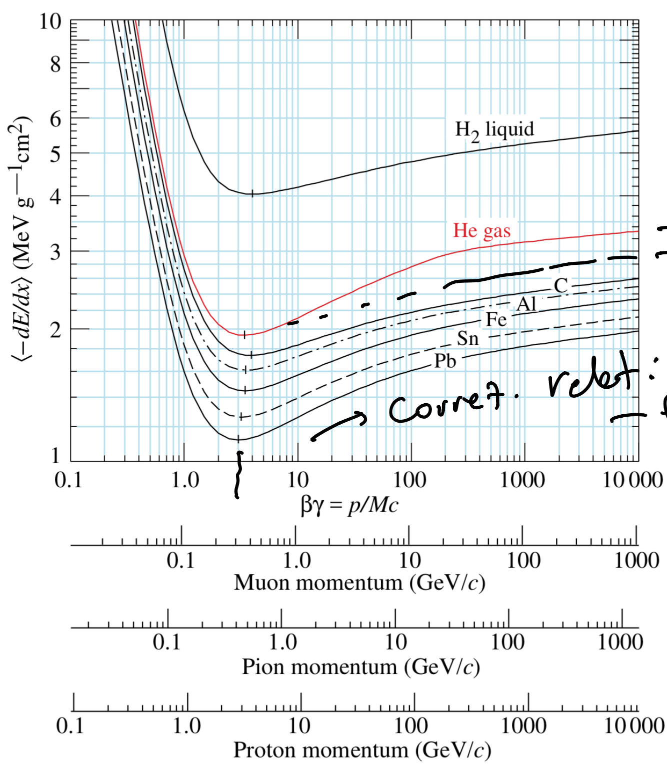
Minimo $\simeq$ $\beta\gamma \simeq 3$

$Z = 7$ $\quad \beta\gamma|_{min} \simeq 3.$

$Z = 100$ $\quad \beta\gamma|_{min} = 3.5$

funzione universale per tutti i materiali

- scala log per $\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}$ per $\beta\gamma$



Bethe-Bloch

$-\frac{\delta(\beta\gamma)}{2}$

$I \to$ poco dip. dal materiale.

Min $\beta\gamma \simeq 3$

$\beta\gamma = \frac{p}{m}$

minimo a p diversi per masse diverse.

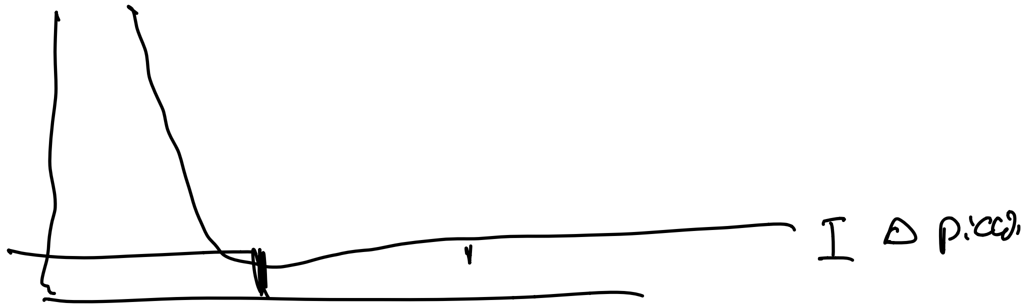
crescita relativ dopo il minimo piccola.

al max $\simeq 50\%$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\bigg|_{min} \simeq 1-2\ \text{MeV}/g\,cm^2$$

H_2O: $\rho = 1\ g/cm^3$

$$-\frac{dE}{dx}\Big|_{min} \simeq 1-2\ MeV/cm$$



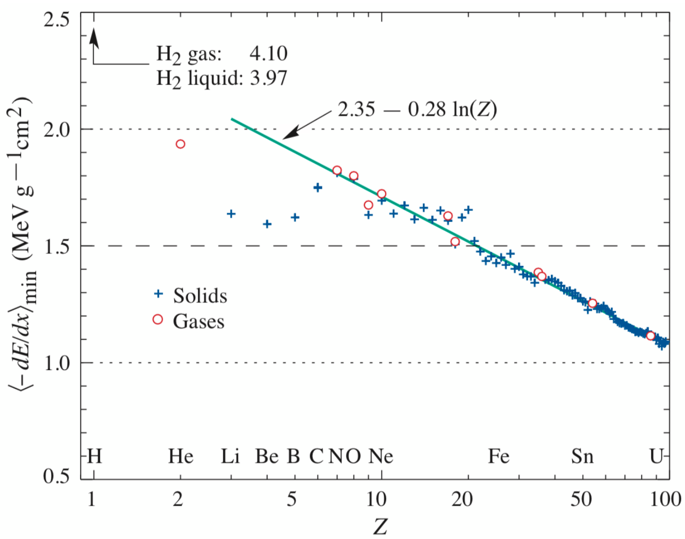
particelle al minimo di ioniz. $\beta\gamma = \frac{p}{m} = 3$

MIP: minimum ionizing particle.

protone $\beta\gamma = 5 \Rightarrow p = 5 \cdot m \simeq 5$ GeV.

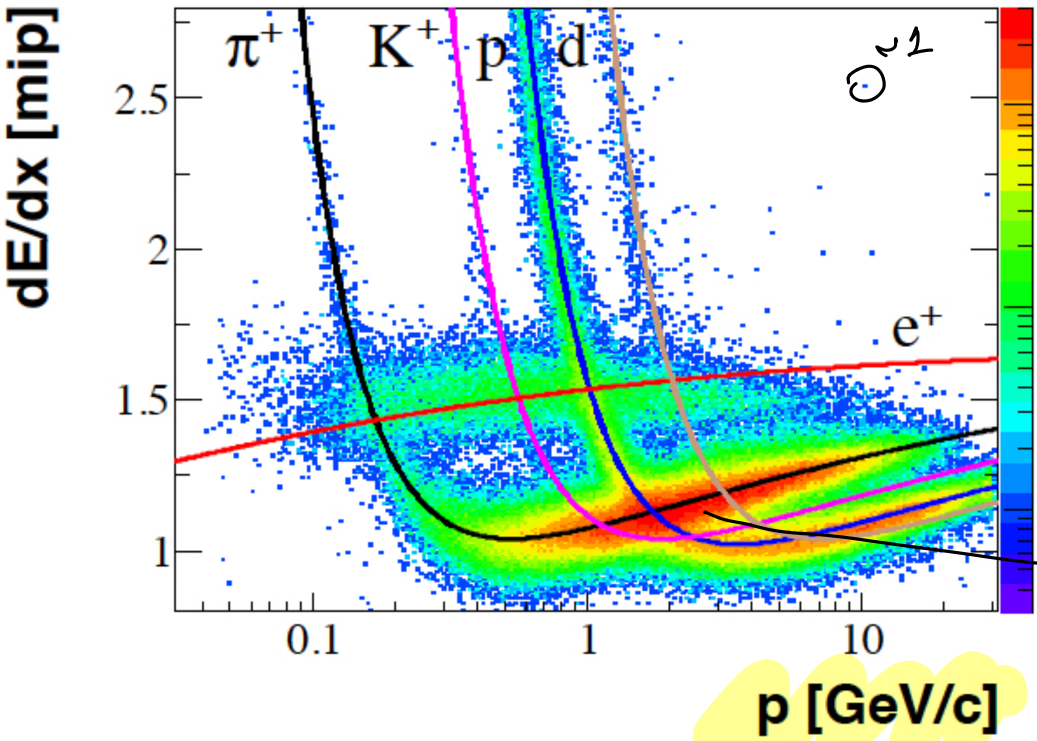
perde ~ 1 MeV/cm in H_2O

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\Big|_{min} \longrightarrow$$



assunzione di $1.5\ MeV/g\ cm^{-2}$

p impulso del met



Dati sperim.

Colori = # punti

$\sim 10^2$
10^3

impulso proiettile
non $\beta\gamma$

$M_e = 0.5$ MeV
$m_\pi = 135$ MeV

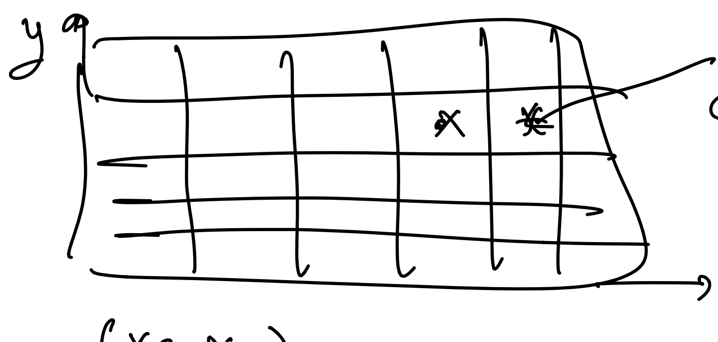
e^- con $p = 1$ GeV. $\beta\gamma = \frac{p}{m} = \frac{1000 \text{ MeV}}{0.5 \text{ MeV}}$

$= 2000$

Minimo di $\frac{dE}{dx}$ per p molto piccolo.

misura indip. di $\left(\frac{dE}{dx}, p\right) \Rightarrow$ Stimare la massa del proiettile.

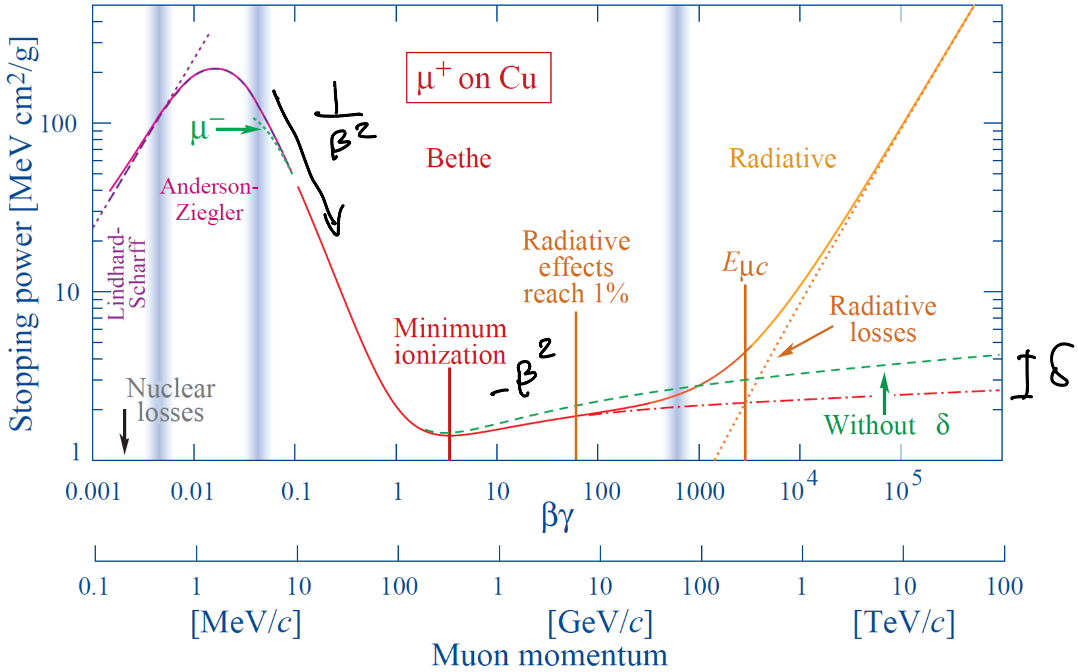
$\Rightarrow$ identificare il proiettile.



Colore = conteggio nel bin.

(x_1, y_2) (x_2, y_2)

Validità di Bethe-Bloch $\qquad \beta\gamma : 0.1 \longrightarrow 1000$



Curva universale per materiali:
e dipende da $\beta\gamma$

$$\beta\gamma = 2 \qquad \beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(\beta\gamma)^2(1-\beta^2) = \beta^2$$

$$\beta^2\left(1+(\beta\gamma)^2\right) = (\beta\gamma)^2$$

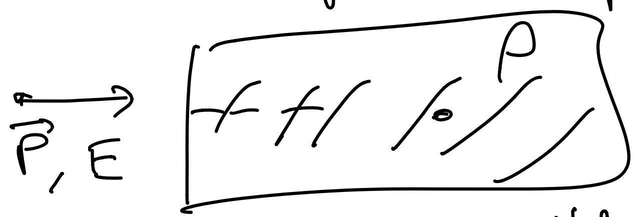
$$\beta = \frac{(\beta\gamma)}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}}$$

$\beta\gamma = 2 \implies$ fissata anche β

P, m

Percorso residuo (Range)

quanto cammina un proiettile prima di fermarsi?

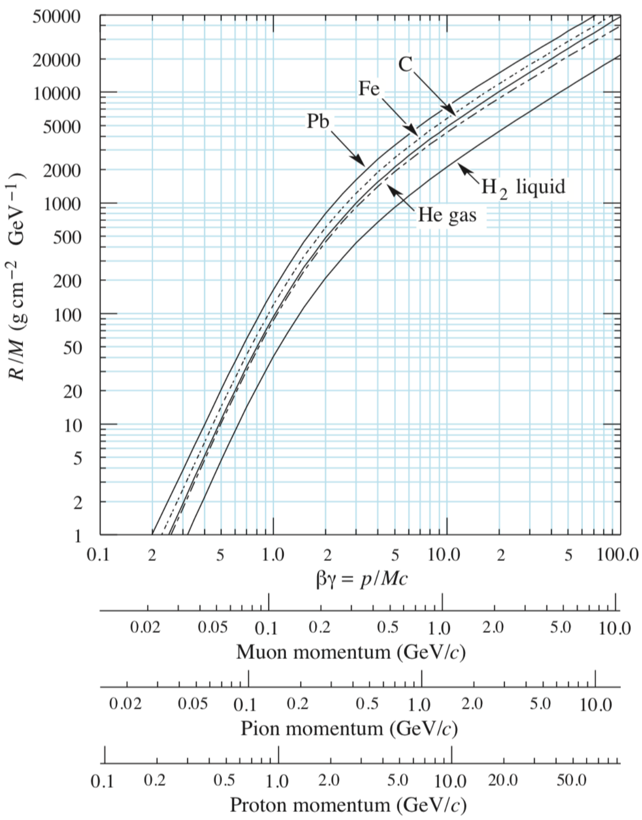


Range: cammino in cui proiettile perde tutta l'energia cinetica.

$$R(E) = \int_E^0 dx = \int_E^0 \frac{dE}{\left(-\frac{dE}{dx}\right)} = \int_0^E \frac{dE}{\left(dE/dx\right)}$$

Bethe-Bloch

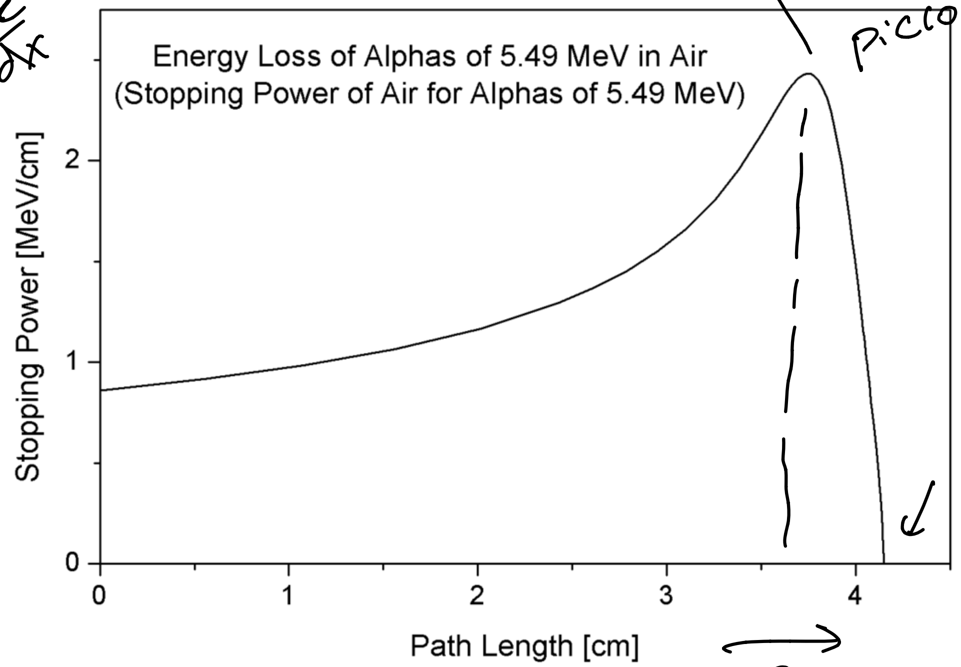
$\beta\gamma$ piccoli: perdo tante energia.



perdite di energia $-\frac{dE}{dx}$

massimo di $\frac{dE}{dx}$

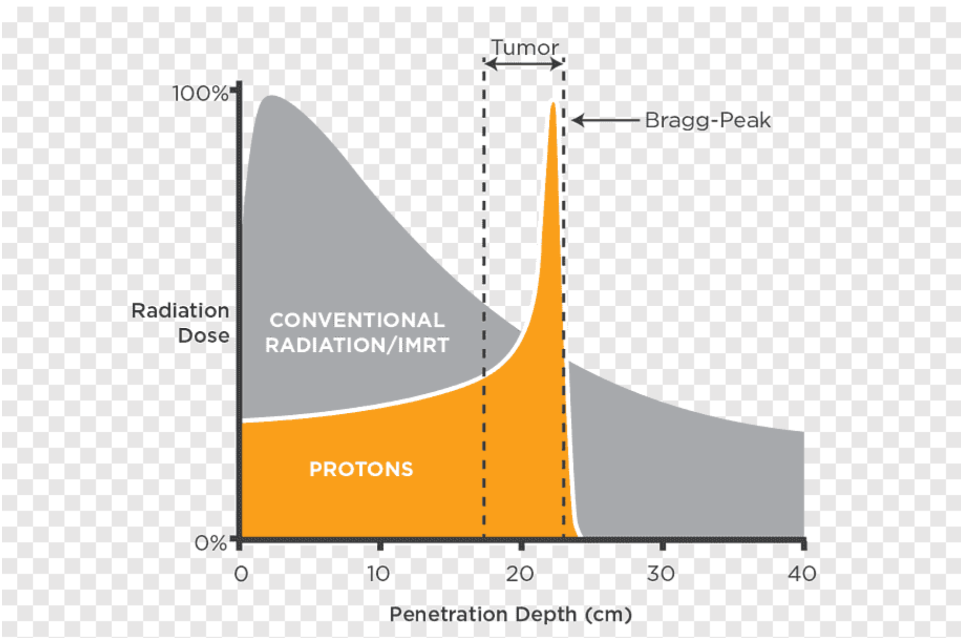
picco di Bragg



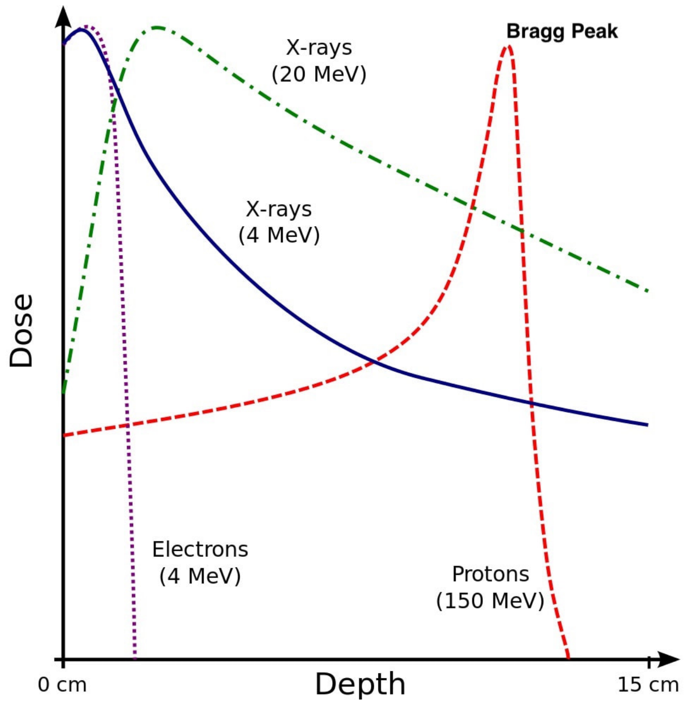
finita l'energia del proiett.

Cammino nel mezzo.

Dose: en. rilasciata nel tessuto.



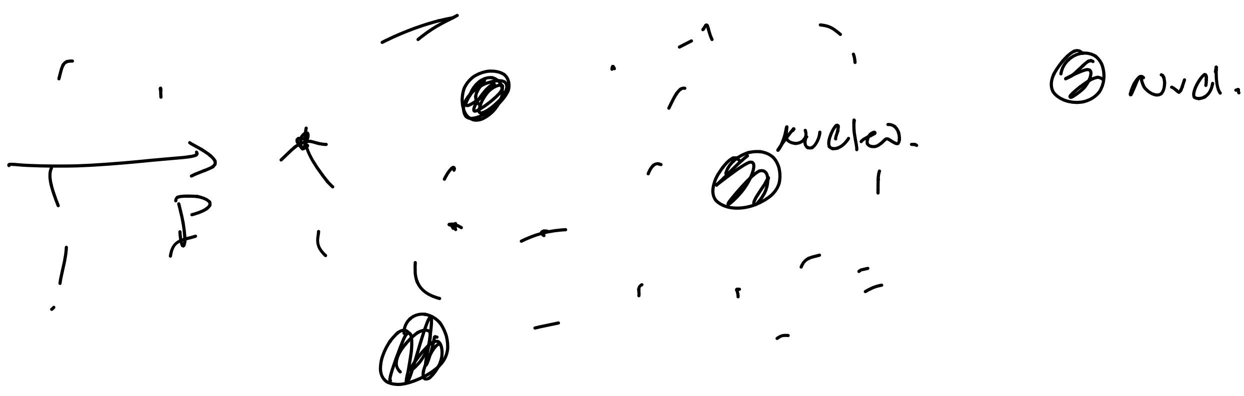
Adroterapia: P, ^{12}C



adroterapia: rilascia grande e localizzato di energia vicino al tumore.

Perdite di energia per ionizz. dominante.

interazione fra proiettile ed elettroni

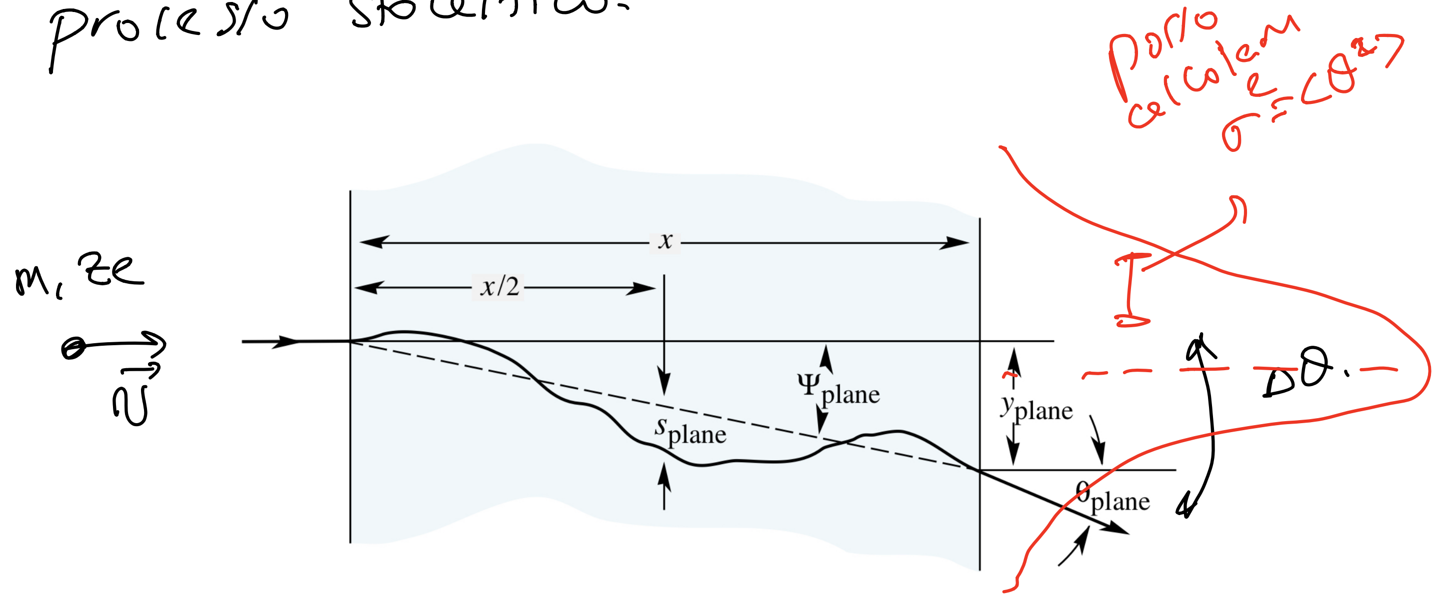


$\frac{dE}{dx}$ per urti con nuclei: trascurabile
elastici

urti contro nucleo ΔE trascurabile.
$\Delta \vec{p}$ grande

nell'urto Rutherford con nuclei $\Rightarrow$ $\Delta \vec{p}$ grande.
$\Rightarrow$ deviazione angolare.

processo stocastico.



Se spessore grande $\to$ teorema di Limite Centrale.

$$f(\Delta\theta) \propto G\left(\langle\theta\rangle = 0, \sigma = \sqrt{\langle\theta^2\rangle}\right)$$

$$\langle\theta^n\rangle = \frac{\int \theta^n \overbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}^{} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.}$$

sez. d'urto di Rutherford $\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$

$$f(\Delta\theta) \propto \frac{1}{\sqrt{\overline{\theta^2}}} e^{-\frac{\Delta\theta^2}{\sqrt{\overline{\theta^2}}}}$$

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \sin\theta \, d\theta.$$
$$\simeq 2\pi \theta \, d\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{d\sigma}{d\theta}$$

prob. di avere urto in $[\theta, \theta + d\theta]$

Diffusione coulombiana multipla (dovuta ai nuclei)

$\langle \theta \rangle = \emptyset$

$$\langle \theta^2 \rangle = 21\ \mathrm{MeV}\ \frac{z}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

β, p, z: del proiettile.

x: spessore percorso in cm. (fissato e)

X_0: lunghezza di radiazione caratteristica del mezzo.

$$[X_0] = \frac{cm}{g/cm^3} = \frac{1}{g\,cm^{-2}}$$

$$\frac{1}{X_0} = 4 r_e^2 \alpha \rho \frac{N_A}{A} Z^2 \ln(183\, Z^{-1/3})$$

Il significato sarà chiaro quando tratteremo passaggio di e^-, γ nel mezzo