I Bonus di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2017/2018

Maggio 2018

1. Un fascio di mesoni K^+ viene inviato su un bersaglio di neutroni originando la reazione

$$K^+ + n \to \pi^+ + \Lambda$$

Si determini:

a. La minima energia $E_{K^+}^{\min}$ nel laboratorio per il K^+ incidente affinchè la reazione avvenga

b. Se Λ è prodotto a riposo nel laboratorio, l'energia del K^+ incidente

c. La distanza media percorsa dai π^+ del punto (b) nel laboratorio prima di decadere

d. Il pione del punto (b) decade secondo $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Siano θ e θ^* gli angoli rispetto alla linea di volo del pione a cui il neutrino viene emesso rispettivamente nel sistema di riferimento del laboratorio e in quello in cui il pione è in quiete. Determinare il valore di θ^* e θ per cui l'energia del neutrino nel laboratorio è pari alla metà del suo valore massimo.

$m_n = 940\,\mathrm{MeV/c^2}$; $m_\Lambda = 1116\,\mathrm{MeV/c^2}$; $m_{\pi^+} = 140\,\mathrm{MeV/c^2}$; $m_{K^+} = 494\,\mathrm{MeV/c^2}$; $\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$

Soluzione:

a. La somma delle masse nello stato finale è inferiore a quella delle masse nello stato iniziale. Pertanto la reazione è sempre permessa e non esiste una soglia.

b. la massa invariante del sistema è

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_K + m_n)^2 - P_K^2}$$

nello stato iniziale e

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_\pi + m_\Lambda)^2 - P_\pi^2}$$

nello stato finale. Uguagliando le due espressioni si ha

$$(E_K + m_n)^2 - P_K^2 = (E_\pi + m_\Lambda)^2 - P_\pi^2 \tag{1}$$

Per la conservazione del tri-impulso vale $P_K = P_\pi$ pertanto la (1) diventa

$$E_K + m_n = E_\pi + m_\Lambda$$

da cui

$$E_\pi = E_K + m_n - m_\Lambda$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ha

$$E_\pi^2 = E_K^2 + (m_n - m_\Lambda)^2 + 2E_K(m_n - m_\Lambda)$$

da cui si ricava

$$E_K = ((m_n - m_\Lambda)^2 + E_K^2 - E_\pi^2)/(2(m_\Lambda - m_n)) \tag{2}$$

Utilizzando le relazioni

$$E_\pi^2 = m_\pi^2 + P_\pi^2 = m_\pi^2 + P_K^2$$
$$E_K^2 = m_K^2 + P_K^2$$

e sostituendole nella (2) si ottiene

$$E_K = ((m_n - m_\Lambda)^2 + m_K^2 - m_\pi^2)/(2(m_\Lambda - m_n)) = 725.6\ MeV$$

c. L'impulso del π^+ del punto b) vale

$$P_{\pi^+} = P_K = \sqrt{E_K^2 - m_K^2} = 531.5\ MeV$$

La distanza media che percorre prima di decadere è

$$L = \beta\gamma c\tau_0 = \frac{P_\pi}{m_\pi} c\tau_0 = 29.6\ m$$

d. Dall'impulso del π determinato al punto c) si determinano $E_\pi = \sqrt{(P_\pi)^2 + (m_\pi)^2)} = 549.6$ MeV, $\beta_\pi = \frac{P_\pi}{E_\pi} = 0.967$ e $\gamma_\pi = 3.93$.
L'energia del neutrino nel laboratorio è data da

$$E_\nu = \gamma_\pi (E_\nu^* + \beta_\pi E_\nu^* cos\theta^*),$$

avendo indicato con E_ν^* l'energia del neutrino nel sistema di riferimento in cui il pione è in quiete e considerando il neutrino a massa nulla ($E_\nu^* = P_\nu^*$). Tale energia è massima quando $cos\theta^* = 1$ e $\theta^* = 0$, quindi

$$E_\nu^{max} = \gamma_\pi E_\nu^* (1 + \beta_\pi),$$

Per avere $E_\nu = \frac{1}{2}(E_\nu^{max})$ deve valere

$$\gamma_\pi E_\nu^* (1 + \beta_\pi cos\theta^*) = \frac{1}{2}\gamma_\pi E_\nu^* (1 + \beta_\pi)$$

e quindi

$$cos\theta^* = \frac{\beta_\pi - 1}{2\beta_\pi} = -0.017$$

L'angolo θ nel laboratorio vale

$$tan\theta = \frac{sen\theta^*}{\gamma_\pi(\beta_\pi \frac{E_\nu^*}{P_\nu^*} + cos\theta^*)} = 0.26$$

2. Un bersaglio d'oro ($Z = 79$, $A = 197$) di densità superficiale $\rho_S = 0.97$ mg/cm^2 e superficie $S_B = 1$ cm^2 viene colpito da un fascio di particelle α, la cui sezione trasversa è contenuta completamente nell'area del bersaglio. Sul bersaglio impattano $3.7 \times 10^4\ \alpha/s$. La sezione d'urto di diffusione elastica ad un certo angolo θ vale $d\sigma/d\Omega = 1$ barn/sr. Calcolare

   a. la densità di atomi bersaglio per unità di superficie;
   b. il numero di particelle α rivelate in un'ora da un rivelatore di superficie $S_R = 2$ cm^2 posto all'angolo θ e a distanza $D_R = 0.1$ m dal bersaglio;
   c. l'intensità di corrente del fascio.
   d. Il fascio di particelle viene sostituito da una sorgente radioattiva che emette lo stesso numero di particelle α al secondo con distribuzione isotropa su tutto l'angolo solido. La sorgente è posta sulla

stessa linea del fascio a distanza $D_B = 20$ cm dal bersaglio. Assumendo la stessa sezione d'urto di diffusione elastica, quanto tempo è necessario per rivelare con lo stesso rivelatore lo stesso numero di particelle del punto (b)?

Soluzione:

a. la densità di bersagli per unità di superficie è:

$$n_b^S = \rho_S \cdot N_A/A = (0.97\ mg/cm^2 \cdot 6.022 \times 10^{23}/mole)/(197\ g/mole) = 2.97 \times 10^{18}/cm^2$$

b. L'angolo solido sotteso dal rivelatore è $\Delta\Omega = S_R/D_R^2 = 0.02\ sr$. La sezione d'urto differenziale integrata su tale angolo solido è $\sigma^S = \int_S d\sigma/\ d\Omega \times d\Omega = d\sigma/\ d\Omega \times S_R/D_R^2 = 2 \times 10^{-26} cm^2$. Il numero di particelle α rivelate per unità di tempo è

$$dN_r/dt = dN_\alpha/dt \times \sigma^S \times n_b^S = 3.7 \times 10^4/s \cdot 2 \times 10^{-26} cm^2 \cdot 2.97 \times 10^{18}/cm^2 = 0.0022/s$$

e quindi in 1 ora si rivelano 7.9 particelle α

c. le particelle α hanno una carica pari a $2e$, essendo e la carica elementare. L'intensità di corrente è data pertando da

$$I = dN_\alpha/dt \times 2e = 3.7 \times 10^4/s \times 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C = 118 \cdot 10^{-4}\ pA$$

d. Dal momento che l'emissione della sorgente è isotropa, se il bersaglio coprisse l'intero angolo solido il numero di particelle α rivelate per unità di tempo sarebbe lo stesso misurato al punto (b). Il bersaglio sottende invece un angolo solido pari a $\Delta\Omega_B = S_B/D_B^2 = 0.0025\ sr$ rispetto alla sorgente, pertanto il numero di α rivelate in un'ora è $7.9 \times 0.0025/\ 4\pi = 0.0016$. Per rivelare lo stesso numero di particelle del punto precedente occorrono pertanto 5024 ore.

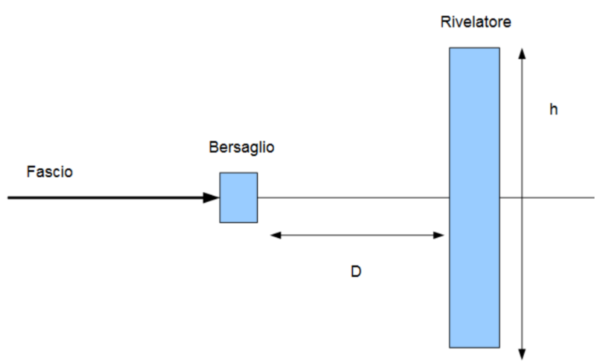
I bonus del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2015/2016

18-19 Aprile 2016

NOME e COGNOME: CANALE:

1. Con un fascio di pioni in un esperimento a bersaglio fisso si osserva la reazione $\pi^+ p \to \Sigma^+ K^+$. Nell'esercizio si trascuri l'impulso di Fermi dei protoni.
   (a) Calcolare l'energia minima che i π^+ devono possedere per dar luogo alla reazione.
   (b) Calcolare l'energia massima di K e Σ prodotti con un fascio di pioni di energia superiore del 10% rispetto a quella di soglia: E_K^{max} e E_Σ^{max}.
   (c) Con il fascio del punto b, si pone un rivelatore a $D = 0.8$ metri dal bersaglio, di dimensioni trascurabili. Calcolare l'altezza h del rivelatre affinche' possa rivelare tutti i K^+ prodotti.

$m_{\pi+} = 139.6$ MeV/c^2
$m_{K+} = 493.7$ MeV/c^2
$m_{\Sigma+} = 1189$ MeV/c^2



Soluzione:

Nella soluzione si pone $c = 1$. A soglia si ha

$p_{tot}^{iniziale,LAB} = (E_\pi + m_p, p_\pi)$
$p_{tot}^{*,finale} = (m_\Sigma + m_K, 0)$
da cui
$E_\pi^2 + m_P^2 + 2E_\pi m_p - p_\pi^2 = (m_\Sigma + m_K)^2$
e quindi
$E_\pi = \frac{(m_\Sigma+m_K)^2-(m_p^2+m_\pi^2)}{2m_p} = 1029.3$ MeV.

Nel caso di pioni con $E' = 1.1E_{soglia}$
$p_{tot}^{iniziale,LAB} = (E'_\pi + m_K, p_\pi)$
$p_{tot}^{*,finale} = (E^*_\Sigma + E^*_K, 0)$
$\sqrt{s} = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2 \cdot m_p E'_\pi}$ =1739.1 MeV.

Valgono inoltre $p^*_K = p^*_\Sigma = p^*$ e $\sqrt{s} = E^*_\Sigma + E^*_K$.

Si ha quindi
$(\sqrt{s})^2 = s = E^{*2}_\Sigma + E^{*2}_K + 2E^*_\Sigma E^*_K = m^2_\Sigma + m^2_K + 2p^{*2} + 2E^*_K(\sqrt{s} - E^*_K) =$
$= m^2_\Sigma + m^2_K + 2p^{*2} + 2E^*_K\sqrt{s} - 2E^{*2}_K = m^2_\Sigma + m^2_K + 2p^{*2} + 2E^*_K\sqrt{s} - 2p^{*2} - 2m^2_K$
da cui
$E^*_K = \frac{s+m^2_K-m^2_\Sigma}{2\sqrt{s}} = 533.2$ MeV e $E^*_\Sigma = \sqrt{s} - E^*_K = 1205.9$ MeV
e $p^* = \sqrt{E^{*2}_K - m^2_K} = 201.4$ MeV.

Per ottenere le grandezze in laboratorio bisogna calcolare $\beta_{CM} = |p^{tot}_{LAB}|/E^{tot}_{LAB} = 0.5426$ e $\gamma_{CM} = E^{tot}_{LAB}/\sqrt{s} = 1.191$
L'energia massima si ottiene per particelle emesse in avanti, per le quali
$E^{max}_K = \gamma_{CM}(E^*_K + \beta_{CM}p^*) = 765$ MeV
e $E^{max}_\Sigma = \gamma_{CM}(E^*_\Sigma + \beta_{CM}p^*) = 1566$ MeV.

Per i K vale $\beta^*_K = p^*/E^*_K =< \beta_{CM}$ e quindi esiste un angolo massimo di emissione pari a
$tan\theta^{max}_K = \frac{\beta^*_K}{\gamma_{CM}\sqrt{\beta^2_{CM} - \beta^{*2}}} = 0.814$
mentre per le Σ si trova $tan\theta^{max}_\Sigma = 0.272$.

Il rivelatore distante $D = 0.8$ metri deve quindi essere tale da contenere tutti i K, fino all'angolo massimo. Deve essere alto $2 \cdot D \cdot tan\theta^{max} = 1.30$ m per raccogliere tutte le particelle prodotte.

2. LHC utilizza fasci di protoni da 6.5 TeV, composti da 2808 pacchetti (bunch) di protoni che viaggiano a velocita' vicina a c nei 27 km di circonferenza dell'acceleratore. I fasci hanno un'area trasversale approssimabile a $A = 256$ μm^2.
A tali energie e' prevista teoricamente una sezione d'urto di produzione per il bosone di Higgs pari a $\sigma(pp \to H) = 55.7$ pb.
La sezione d'urto totale per urti anelastici protone-protone e' $\sigma(pp \to X) = 80$ mb.

   (a) Calcolare la luminosita' istantanea necessaria a ottenere una rate di produzione di bosoni di Higgs pari a 0.3 Hz
   (b) Calcolare il numero di urti anelastici protone-protone al secondo che si ottengono a tale luminosita'.
   (c) Assumendo che tutti i bunch di protoni siano composti dallo stesso numero di particelle, calcolare quanti protoni ci devono essere in un bunch per ottenere la luminosita' richiesta.
   (d) Calcolare la corrente di uno dei due fasci di protoni.

Soluzione:
Si ha $dN/dt = \mathcal{L}\sigma$ da cui $\mathcal{L} = (dN/dt)/\sigma = 0.3\ Hz/(55.7 \cdot 10^{-12}b) = 0.3/s/(55.7 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-24}cm^2) = 5.4 \cdot 10^{33}cm^{-2}s^{-1}$.
A questa luminosita' si ottengono $(dN/dt) = 5.4 \cdot 10^{33}cm^{-2}s^{-1} \cdot 80 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-24}cm^2 = 431 \cdot 10^6$ interazioni inelastiche al secondo.
I pacchetti di protoni viaggiano per 27 km a una velocita' approssimabile a c, quindi hanno una frequenza di rivoluzione pari a $f = (3 \cdot 10^8 m/s)/27 \cdot 10^3 m = 0.111 \cdot 10^5/s$
La luminosita' di un esperimento a fasci incrociati vale
$\mathcal{L} = f \cdot n_{bunch} \cdot N_1 \cdot N_2/A$ ma $N_1 = N_2$ in questo caso, da cui

$N = \sqrt{\frac{\mathcal{L} \cdot A}{f \cdot n_{bunch}}} = 2.1 \cdot 10^{11}$ protoni per bunch.

In uno dei due fasci ci sono 2808$\cdot 2.1 \cdot 10^{11}$ protoni, ognuno con carica $1.6 \cdot 10^{-19} C$ che compiono una rivoluzione completa in un tempo pari a $t = 1/f = 9 \cdot 10^{-5}$ s da cui la corrente di uno dei due fasci e'
$I = Q/t = 2808 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C/(9 \cdot 10^{-5} s)$ =1.0 A.