Appello di Novembre

Fisica Nucleare e Subnucleare I

18 Novembre 2022

Esercizio 1

In un acceleratore circolare di raggio R=50 m scorre un fascio di antiprotoni di impulso $|\vec{p}| = 6\,\mathrm{GeV/c}$ che produce una corrente di intensità pari ad $I = 0.16\,\mathrm{mA}$.

1. Calcolare il numero di antiprotoni che costituiscono il fascio
2. Ad ogni rivoluzione il fascio incontra un bersaglio di idrogeno gassoso di spessore $d = 1\,\mathrm{mm}$ e avente una densità pari a $\rho = 0.15\,\mathrm{mg/cm^3}$. Calcolare la luminosità integrata in un intervallo di tempo $\Delta t = 10\,\mathrm{min}$.
3. Si valuti l'energia di fascio che sarebbe stata necessaria per ottenere la stessa energia nel sistema del centro di massa all'interno di un collisore protoni-antiprotoni.

Soluzione dell'esercizio 1

1. La velocità degli antiprotoni nel fascio è data da:

$$v = \beta c = \frac{pc}{E_{\bar{p}}}$$

L'energia degli antiprotoni è $E_{\bar{p}} = \sqrt{p^2 + m_{\bar{p}}^2}$. L'antiprotone ha la stessa massa del protone, $m_{\bar{p}} = m_p = 0.938\,\mathrm{GeV}$, dunque $E_{\bar{p}} = 6.07\,\mathrm{GeV}$. Quindi la velocità degli antiprotoni ha un valore pari a $v = 0.988c = 2.96 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$. La frequenza di rivoluzione nell'anello dell'acceleratore è quindi data dall'inverso del periodo T:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{L} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{2.96 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{314.1\,\mathrm{m}} = 0.943\,\mathrm{MHz}$$

Da questo si può ottenere il numero di antiprotoni nel fascio. La corrente è infatti data da:

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{e \cdot n_{\bar{p}}}{T} = e \cdot n_{\bar{p}} \cdot \nu$$

da cui si ricava il numero di antiprotoni:

$$n_{\bar{p}} = \frac{I}{e \cdot \nu} = \frac{0.16 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0.943 \times 10^6\,\mathrm{s^{-1}}} = 1.06 \times 10^9\,\text{antiprotoni}$$

2. La luminosità istantanea delle collisioni del fascio con il gas di idrogeno è dato dal prodotto del flusso di antiprotoni e del numero di atomi di idrogeno nel volume di gas incontrato. Quindi:

$$\mathcal{L} = \phi \cdot N_H = \frac{n_{\bar{p}}}{S \cdot T} N_H = n_{\bar{p}} \cdot \nu \cdot \frac{N_H}{S}$$

dove S è la superficie del volume di idrogeno incontrato e n_H è il numero di atomi di idrogeno. Il numero di atomi di idrogeno per unità di superficie si ottiene dalla densità del gas:

$$N_H = \frac{m}{A} \cdot N_A = \frac{\rho \cdot V}{A} \cdot N_A = \frac{\rho \cdot S \cdot d}{A} \cdot N_A$$

da cui

$$\frac{N_H}{S} = \frac{\rho \cdot d}{A} \cdot N_A = \frac{0.15 \times 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 0.1\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{gmol^{-1}}} \cdot 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} = 4.516 \times 10^{18}\,\mathrm{cm^{-2}}$$

Da questo si ricava la luminosità istantanea:

$$\mathcal{L} = 1.06 \times 10^9 \cdot 0.94 \times 10^6\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 4.516 \times 10^{18}\,\mathrm{cm^{-2}} = 4.516 \times 10^{33}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$$

La luminosità integrata in 10 min è quindi:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \mathcal{L} \cdot \Delta t = 4.516 \times 10^{33}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}} \cdot 600\,\mathrm{s} = 2.7 \times 10^{36}\,\mathrm{cm^{-2}} = 2.7 \times 10^{12}\,\mathrm{b^{-1}} = 2.7\,\mathrm{pb^{-1}}$$

dove abbiamo usato l'equivalenza $1\,\mathrm{cm^2} = 1 \times 10^{24}\,\mathrm{b}$.

3. Per ottenere l'energia di fascio necessaria nel caso di un collider con fasci di protoni e antiprotoni, per disporre nel centro di massa della stessa energia ottenibile nel caso di bersaglio gassoso sopra citato, ricordiamo che la massa invariante s è un invariante relativistico, che nel caso del bersaglio fisso (nuclei di idrogeno, quindi protoni di massa m_p) è data da:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= |(\vec{p}_{\bar{p}}, E_{\bar{p}} + m_p)| = \sqrt{E_{\bar{p}} + m_p^2 + 2m_p E_{\bar{p}} - p^2} \\ &= \sqrt{m_{\bar{p}}^2 + m_p^2 + 2E_{\bar{p}} m_p} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_{\bar{p}} m_p} \\ &= 3.63\,\mathrm{GeV}\end{aligned}$$

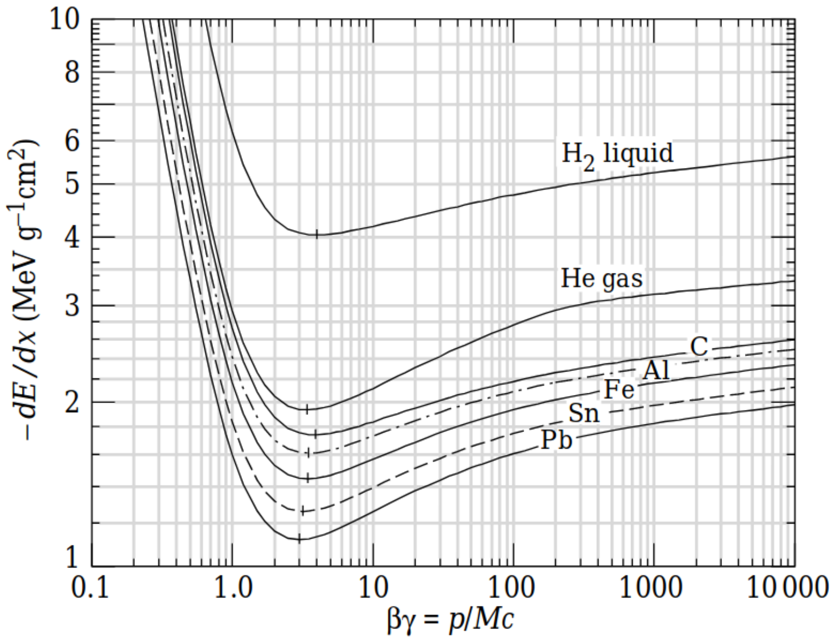
Nel caso di un collider, invece, $\sqrt{s} = 2E_{\mathrm{coll}}$, dove E_{coll} è l'energia sia delle particelle del fascio di protoni, sia di quello di antiprotoni. Quindi:

$$E_{\mathrm{coll}} = \frac{\sqrt{s}}{2} = 1.81\,\mathrm{GeV}$$

Esercizio 2

Un fascio di elettroni di energia 23 MeV passa attraverso una lastra di ferro ($^{56}_{26}$Fe, $\rho = 7.87\,\mathrm{g/cm^3}$, $X_0 = 13.84\,\mathrm{g/cm^2}$, $\langle I_{ion}\rangle = 286\,\mathrm{eV}$).

1. Trovare lo spessore di ferro necessario affinché gli elettroni perdano in media il 10% della loro energia iniziale per irraggiamento.
2. Sapendo che l'energia critica del ferro è proprio $E_c = 23\,\mathrm{MeV}$, stimare l'energia totale persa nella lastra di assorbitore
3. Se la lastra fosse investita da muoni di impulso $p_\mu = 100\,\mathrm{MeV}$, quale sarebbe l'energia persa nello stesso spessore di ferro? Si usi la perdita di energia calcolabile con la formula del $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ di ionizzazione, oppure una stima approssimata deducibile dal grafico riportato di seguito.



4. Se nella lastra di ferro impattano sia muoni che pioni con impulso $p = 100\,\mathrm{MeV}$, e l'impulso delle particelle cariche viene misurato con un tracciatore con una risoluzione $\sigma_{p_T}/p_T = 0.5\%$, si riesce a discriminare tra le due ipotesi di particella con una separazione $> 5\sigma$?

Soluzione dell'esercizio 2

- L'energia persa per irraggiamento dagli elettroni in uno spessore x di materiale è dato da:

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

da cui:

$$\frac{E(x)}{E_0} = e^{-\frac{x}{X_0}} = 1 - 0.1 = 0.9$$

e quindi lo spessore attraversato è dato da:

$$x = -X_0 \ln(0.9) = 0.105 \cdot X_0$$

Per calcolare lo spessore x in cm serve convertire la lunghezza di radiazione X_0 in cm:

$$X_0(\text{cm}) = \frac{X_0(\text{g/cm}^2)}{\rho(\text{g/cm}^3)} = \frac{13.84\,\text{g/cm}^2}{7.87\,\text{g/cm}^3} = 1.76\,\text{cm}$$

da cui si ottiene la lunghezza percorsa:

$$x = 1.76\,\text{cm} \cdot 0.105 = 1.85\,\text{mm}$$

- Sappiamo che gli elettroni perdono per irraggiamento in questo spessore il 10% della loro energia iniziale, quindi:

$$\Delta E_{\text{brem}} = 0.1 \cdot 23\,\text{MeV} = 2.3\,\text{MeV}$$

poiché l'energia del fascio di elettroni corrisponde all'energia critica del ferro, l'energia persa dagli elettroni per ionizzazione (ΔE_{ion}) è, per definizione, uguale a quella persa per irraggiamento. Quindi l'energia totale media persa nell'attraversare la lastra di materiale è:

$$\Delta E = \Delta E_{\text{brem}} + \Delta E_{\text{ion}} = 2 \cdot \Delta E_{\text{brem}} = 4.6\,\text{MeV}$$

- Nel caso di muoni di 100 MeV di impulso l'energia persa per irraggiamento è trascurabile. Possiamo calcolare l'energia media persa usando la formula di Bethe-Bloch approssimata:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = C\frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2\left[\log\frac{2m_e c^2(\beta\gamma)^2}{\langle I\rangle} - \beta^2\right]$$

usando la costante $C \approx 0.307\,\text{MeV/gcm}^2$, i valori dati per il ferro: $Z = 26$ e $A = 56$, e la carica del muone $z = 1$, in unità di cariche elementari. Calcoliamo i fattori cinematici β e $\beta\gamma$:

$$\beta_\mu = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_\mu^2}} = \frac{100\,\text{MeV}}{145.4\,\text{MeV}} = 0.688$$

e

$$\beta_\mu\gamma_\mu = \frac{p}{m_\mu} = \frac{100\,\text{MeV}}{105.6\,\text{MeV}} = 0.947$$

dal quale si ricava:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 2.29\,\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2$$

e quindi calcoliamo la perdita di energia per ionizzazione moltiplicando per la densità e il percorso nel ferro:

$$\Delta E^\mu_{ion} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right) \cdot \rho \cdot x = 2.29\,\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2 \cdot 7.87\,\text{g/cm}^3 \cdot 0.185\,\text{cm} = 3.34\,\text{MeV}$$

- Nel caso dei pioni con lo stesso impulso si ricava allo stesso modo:

$$\beta_\pi = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_\pi^2}} = \frac{100\,\text{MeV}}{171.7\,\text{MeV}} = 0.582$$

e

$$\beta_\pi\gamma_\pi = \frac{p}{m_\pi} = \frac{100\,\text{MeV}}{139.6\,\text{MeV}} = 0.716$$

dal quale si ricava:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 3.02\,\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2$$

e quindi calcoliamo la perdita di energia per ionizzazione moltiplicando per la densità e il percorso nel ferro:

$$\Delta E^\mu_{ion} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right) \cdot \rho \cdot x = 3.02\,\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2 \cdot 7.87\,\text{g/cm}^3 \cdot 0.185\,\text{cm} = 4.39\,\text{MeV}$$

Le energie dei due tipi di particelle all'uscita del percorso nel ferro sono:

$$E^\mu_{fin} = E^\mu_{in} - \Delta E^\mu_{ion} = 145.4\,\text{MeV} - 3.34\,\text{MeV} = 142.1\,\text{MeV}$$
$$E^\pi_{fin} = E^\pi_{in} - \Delta E^\pi_{ion} = 171.7\,\text{MeV} - 4.39\,\text{MeV} = 167.3\,\text{MeV}$$

da cui si possono calcolare gli impulsi in uscita:

$$p^{\mu}_{fin} = \sqrt{{E^{\mu}_{fin}}^2 - m_{\mu}^2} = 95.1\,\mathrm{MeV}$$
$$p^{\pi}_{fin} = \sqrt{{E^{\pi}_{fin}}^2 - m_{\pi}^2} = 92.3\,\mathrm{MeV}$$

e quindi la differenza di impulso tra le due ipotesi di particella è data da:

$$\Delta p = p^{\mu}_{fin} - p^{\pi}_{fin} = 2.82\,\mathrm{MeV}$$

Per essere distinguibili le particelle devono avere una differenza di impulsi maggiore di 5 volte la risoluzione in impulso del tracciatore, che, per $p = 95.1\,\mathrm{MeV}$ è:

$$\sigma_p = 0.005 * 95.1\,\mathrm{MeV} = 0.48\,\mathrm{MeV}$$

poiché $\Delta p = 2.82\,\mathrm{MeV} > 5 \times \sigma_p = 2.4\,\mathrm{MeV}$, le due particelle sono distinguibili.

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
$\overline{K}^0$	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha(^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}
J/ψ	3096.9	0	0	1^{--}	0	0	7.2×10^{-21}

Tabella 1: Massa (M), isospin (I, e sua terza componente I_3), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media (τ) di diverse particelle adroniche.

Part.	M [MeV/c^2]	τ [s]
e^-	0.511	stabile
μ^-	105.6	2.2×10^{-6}
τ^-	1776	2.9×10^{-13}
$\nu_{e/\mu/\tau}$	0	stabile

Tabella 2: Massa (M) e vita media (τ) dei leptoni.

Costanti utili:

- $\hbar c = 197\,\text{MeV fm}$
- costante di normalizzazione per $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ di ionizzazione: $C = 0.307$ MeV g^{-1} cm^2

Formule utili:

- Energia della particella B prodotta in un decadimento a due corpi $A \to B + C$, con A fermo:

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$