I Bonus di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2018/2019

17 Aprile 2019

NOME E COGNOME:	CANALE:

1. Un acceleratore di elettroni e positroni di 120 GeV di energia ciascuno, i cui impulsi sono diretti lungo l'asse z nel sistema di riferimento del laboratorio e formano un angolo di 180° fra loro, produce bosoni di Higgs e bosoni Z tramite il processo

$$e^+ + e^- \to H + Z.$$

Il bosone di Higgs è una particella di spin zero e massa $m_H = 125\,\mathrm{GeV}$, mentre lo Z ha una massa di $90\,\mathrm{GeV}$ ($\hbar = c = 1$).

Uno sperimentatore cerca eventi in cui lo Z decade tramite il processo

$$Z \to e^+ + e^-,$$

mentre il bosone di Higgs decade, attraverso il processo a cascata

$$\begin{aligned} H \to & X + X, \\ & X \to \mu^+ + \mu^-, \\ & X \to e^+ + e^-, \end{aligned}$$

in due ipotetiche particelle di spin zero, X, di massa m_X e vita media propria τ_X, entrambe incognite, la cui esistenza è predetta da alcune teorie di nuova fisica. Le particelle X decadono a loro volta in elettroni e muoni.

In uno di questi eventi, lo sperimentatore ricostruisce le tracce di due coppie elettrone-positrone e di una coppia muone-antimuone. I loro quadrimpulsi, misurati nel sistema di riferimento del laboratorio, valgono

$$\begin{aligned} \underline{p}_\mu^{(1)} &= (E, p_x, p_y, p_z) = (15.0, -7.9, -5.4, -11.5), \\ \underline{p}_\mu^{(2)} &= (42.3, -33.1, 5.0, -25.9), \\ \underline{p}_e^{(1)} &= (69.7, 33.2, -61.1, -5.4), \\ \underline{p}_e^{(2)} &= (30.8, 22.1, 16.8, 13.2), \\ \underline{p}_e^{(3)} &= (47.4, 18.4, 36.6, 24.0), \\ \underline{p}_e^{(4)} &= (34.8, -33.4, 8.3, 5.0), \end{aligned}$$

dove energie e impulsi sono espressi in GeV e sono misurati con una precisione di 100 MeV.

   a. Dopo aver identificato le particelle provenienti dal decadimento delle due X, stimare la massa m_X.

   b. Le tracce dell'elettrone e del positrone che vengono dal decadimento di X iniziano in un punto comune, distante 10 mm dal punto in cui è stato prodotto H. Calcolare la vita media propria τ_X.

c. A che angolo sono emesse le particelle X nel sistema di riferimento in cui l'H è fermo, rispetto alla direzione z?

d. Qual è la separazione angolare nel sistema del laboratorio fra l'elettrone e il positrone provenienti dal decadimento della X, in questo specifico evento?

Si consideri ora il generico processo $e^+ + e^- \to H + Z \to X + X + Z \to e^+ + e^- + \mu^+ + \mu^- + e^+ + e^-$, assumendo che la massa di X sia quella trovata al punto 1.

e. Dopo aver calcolato l'energia massima che può avere X nel sistema del laboratorio, si determini l'angolo di apertura minimo necessario per risolvere le tracce dell'elettrone e del positrone provenienti dal decadimento della X.

Soluzione:

a. Identifichiamo innanzitutto quale coppia di impulsi corrisponde alla coppia e^+e^- dal decadimento dello Z. Per farlo, calcoliamo la massa invariante delle varie coppie di particelle:

$$\begin{aligned}
m_{\mu_1\mu_2} &= 14.3\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_1e_2} &= 70.8\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_1e_3} &= 100.5\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_1e_4} &= 90.2\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_2e_3} &= 15.5\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_2e_4} &= 56.7\,\mathrm{GeV}, \\
m_{e_3e_4} &= 60.6\,\mathrm{GeV},
\end{aligned}$$

da cui concludiamo che gli elettroni e_1 ed e_4 sono quelli provenienti dal decadimento dello Z, e che $m_X \approx 15\,\mathrm{GeV}$.

b. A causa della dilatazione dei tempi, si ha che

$$10\,\mathrm{mm} = \beta_X\gamma_X c\tau_X = \frac{p_X}{m_X}c\tau_X = \frac{p_1 + p_4}{m_X}c\tau_X \approx \frac{77\,\mathrm{GeV}}{15\,\mathrm{GeV}}c\tau_X \approx 5c\tau_X,$$

da cui

$$\tau_X \approx \frac{1\,\mathrm{cm}}{5 \times 30\,\mathrm{cm/ns}} \approx 7 \times 10^{-3}\,\mathrm{ns} = 7\,\mathrm{ps}.$$

c. Nel sistema del centro di massa di H, le due particelle X sono emesse ad un angolo π fra loro. Nel laboratorio, l'X che decade in $\mu^+\mu-$ ha quadrimpulso

$$\underline{p}_X = \underline{p}_e^{(2)} + \underline{p}_e^{(3)} = (78.4, 40.9, 53.3, 37.3),$$

mentre H ha quadrimpulso

$$\underline{p}_H = \underline{p}_e^{(2)} + \underline{p}_e^{(3)} + \underline{p}_\mu^{(1)} + \underline{p}_\mu^{(2)} = (135.6, -0.1, 52.7, 0.1),$$

ovvero si muove lungo la direzione y con $53\,\mathrm{GeV}$ di impulso. Spostiamoci nel sistema del centro di massa di X ed esprimiamo l'impulso in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
E^{*,(X)} &= \gamma_H\left(E^{(X)} - \beta_H p_y^{(X)}\right), \\
p_x^{*,(X)} &= p_x^{(X)} = p^{*,(X)}\sin\theta^*\cos\phi^*, \\
p_y^{*,(X)} &= \gamma_H\left(p_y^{(X)} - \beta_H E^{(X)}\right) = p^{*,(X)}\sin\theta^*\sin\phi^*, \\
p_z^{*,(X)} &= p_z^{(X)} = p^{*,(X)}\cos\theta^*,
\end{aligned}$$

per cui

$$\theta^* = \operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{\left(p_x^{(X)}\right)^2 + \left(\frac{E^{(H)}}{m^H}\left(p_y^{(X)} - \frac{p^{(H)}}{E^{(H)}}E^{(X)}\right)\right)^2}}{\sqrt{\left(p_x^{(X)}\right)^2 + \left(\frac{E^{(H)}}{m^H}\left(p_y^{(X)} - \frac{p^{(H)}}{E^{(H)}}E^{(X)}\right)\right)^2 + \left(p_z^{(X)}\right)^2}}\right) \approx 0.91\,\mathrm{rad}.$$

d. Consideriamo il sistema $e_2 e_3$: la massa invariante della coppia vale, usando l'identità $\cos 2\xi = 1 - 2\sin^2\xi$ e il fatto che $m_e \ll p_e$,

$$\begin{aligned} m_X &= \sqrt{\left(E_e^{(2)} + E_e^{(3)}\right)^2 - \left(\mathbf{p}_e^{(2)} + \mathbf{p}_e^{(3)}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{2E_e^{(2)}E_e^{(3)}(2 - \cos\alpha_{e_2,e_3})} = 2\sqrt{E_e^{(2)}E_e^{(3)}}\sin\frac{\alpha_{e_2,e_3}}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{e_2,e_3} = 2\operatorname{asin}\left(\frac{m_X}{2\sqrt{E_e^{(2)}E_e^{(3)}}}\right) \approx 0.41 \approx \frac{2m_X}{E_X}.$$

e. La reazione $e^+ + e^- \to HZ$ avviene a

$$\sqrt{s} = 2E = 240\,\mathrm{GeV},$$

e il sistema del laboratorio coincide con quello del centro di massa (l'impulso totale nello stato iniziale è nullo). Troviamo innanzitutto l'energia con cui viene emesso H: usando il fatto che i moduli degli impulsi di H e Z, p, sono uguali, abbiamo che

$$\begin{aligned} s &= (E_H + E_Z)^2 - (\mathbf{p}_H + \mathbf{p}_Z)^2 = (E_H + E_Z^2) + 0 = E_H^2 + E_Z^2 + 2E_H E_Z \\ &= (m_Z^2 + p^2) + (m_H^2 + p^2) + 2E_H(\sqrt{s} - E_H) \\ &= m_Z^2 + m_H^2 + 2p^2 + 2E_H\sqrt{s} - 2(m_H^2 + p^2) \\ &= m_Z^2 - m_H^2 + 2E_H\sqrt{s}, \end{aligned}$$

da cui

$$E_H = \frac{s + m_H^2 - m_Z^2}{2\sqrt{s}} \approx 135\,\mathrm{GeV}.$$

Spostiamoci ora nel sistema di riferimento in cui H è fermo. Poiché le particelle X hanno la stessa massa, e nel sistema di centro di massa i loro impulsi hanno lo stesso modulo, le loro energie saranno uguali e pari a

$$E_{X_1}^* = E_{X_2}^* = \frac{m_H}{2} = 62.5\,\mathrm{GeV}.$$

Assumiamo che θ^* sia l'angolo, rispetto alla direzione di volo di H, a cui una delle due X – diciamo X_1 – è emessa nel centro di massa. Nel riferimento del laboratorio, la sua energia vale

$$\begin{aligned} E_{X_1} &= \gamma_H\left(E_{X_1}^* + \beta_H p_{X_1}^* \cos\theta^*\right) = \frac{E_H}{m_H}\left(\frac{m_H}{2} + \frac{p_H}{E_H}\sqrt{\frac{m_H^2}{4} - m_X^2}\cos\theta^*\right) \\ &= \frac{E_H + p_H\cos\theta^*\sqrt{1 - \left(\frac{2m_X}{m_H}\right)^2}}{2}. \end{aligned}$$

La risoluzione angolare del rivelatore dev'essere dell'ordine di grandezza dell'angolo di apertura minimo fra elettrone e positrone, che – poiché $m_e \ll p_X$ – vale

$$\alpha(e^+, e^-)^{\min} \approx \frac{2m_X}{E_{X_1}}.$$

Il valore massimo di E_{X_1} vale

$$E_{X_1}^{\max} = \frac{E_H + p_H\sqrt{1-\left(\frac{2m_X}{m_H}\right)^2}}{2} \approx 92\,\mathrm{GeV},$$

per cui

$$\alpha(\mu^+,\mu^-)^{\min} \approx 0.32.$$

2. Le osservazioni cosmologiche dell'ultimo secolo mostrano come l'universo si comporrebbe in gran parte di particelle di materia oscura, χ, che non interagiscono elettromagneticamente con la materia ordinaria, e che si muovono rispetto ad un osservatore sulla Terra con velocità $v \approx 200\,\mathrm{km/s} \ll c$. Una sperimentatrice vuole costruire un esperimento che osservi la reazione

$$\chi + N \to \chi + N,$$

dove la particella χ, di massa ignota, diffonde sul nucleo N degli atomi di cui è composto il rivelatore. La strategia sperimentale è quella di misurare l'energia di rinculo del nucleo tramite processi di scintillazione e ionizzazione da questo indotti su altri atomi del rivelatore.

   a. La sperimentatrice vuole rivelare particelle di massa $m_\chi = 100\,\mathrm{GeV}$. Assumendo che il nucleo nello stato iniziale sia fermo, si ricavi l'espressione dell'energia massima di rinculo del nucleo nel riferimento del laboratorio, svolgendo il calcolo in approssimazione non-relativistica ed esprimendo il risultato in funzione della massa ridotta del sistema χN,

$$\mu \equiv \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N}.$$

   b. Qual è la massa del nucleo che dovrebbe scegliere la sperimentatrice, per costruire il suo rivelatore, in modo da ottenere l'energia massima di rinculo del nucleo più alta possibile? Quanto vale quest'energia?

   c. Se la densità numero di χ nell'universo è di 3 particelle per dm^3, e la sezione d'urto del processo $\chi + N \to \chi + N$ vale

$$\sigma = A \times \left(\frac{\mu}{B}\right)^2,$$

   dove $A = 1 \times 10^{-42}\,\mathrm{cm}^2$, $B = 5\,\mathrm{GeV}$ e m_N è la massa del nucleo, quante interazioni ci si aspetta che avvengano in un anno per un rivelatore di $1000\,\mathrm{kg}$ di massa, del materiale identificato al punto precedente?

Soluzione:

a. Poiché $v \ll c$, nel limite classico la conservazione di energia e impulso si scrive, indicando con p e p' gli impulsi delle varie particelle prima e dopo lo scattering,

$$\mathbf{p}_\chi + \mathbf{p}_N = \mathbf{p}_\chi + \mathbf{0} = \mathbf{p}'_\chi + \mathbf{p}'_N,$$
$$\frac{p_\chi^2}{2m_\chi} = \frac{{p'_\chi}^2}{2m_\chi} + \frac{{p'_N}^2}{2m_N}.$$

La sperimentatrice misura solamente il rinculo del nucleo, quindi usiamo la conservazione dell'impulso per rimpiazzare $\mathbf{p}'_\chi$ (che è ignoto) nella conservazione dell'energia:

$$\frac{p_\chi^2}{2m_\chi} = \frac{(\mathbf{p}_\chi - \mathbf{p}'_N)^2}{2m_\chi} + \frac{{p'_N}^2}{2m_N} = \frac{p_\chi^2}{2m_\chi} + \frac{{p'_N}^2}{2m_\chi} - 2\frac{p_\chi p'_N\cos\theta}{2m_\chi} + \frac{{p'_N}^2}{2m_N},$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di volo della particella di materia oscura χ nello stato iniziale e quella del nucleo nello stato finale. Ne segue che

$$\frac{{p'_N}^2}{2}\left(\frac{1}{m_N}+\frac{1}{m_\chi}\right)\equiv\frac{{p'_N}^2}{2\mu}=\frac{p_\chi p'_N\cos\theta}{m_\chi},$$

dove si è definita la massa ridotta del sistema χ–nucleone, $\mu = m_\chi m_N/(m_\chi+m_N)$. Si ha quindi che

$$p'_N = 2\frac{\mu p_\chi \cos\theta}{m_\chi} = 2\mu v\cos\theta,$$

perciò l'energia cinetica del nucleo vale

$$E'_N = \frac{{p'_N}^2}{2m_N} = \frac{2\mu^2 v^2\cos^2\theta}{m_N}.$$

Il suo valore massimo dopo l'urto è

$${E'_N}^{\max} = \frac{2\mu^2 v^2}{m_N}.$$

b. Trovare il nucleo migliore equivale, da un punto di vista cinematico, a massimizzare ${E'_N}^{\max}$ scegliendo opportunamente m_N:

$$\frac{\mathrm{d}{E'_n}^{\max}}{\mathrm{d}m_N} = \frac{\mathrm{d}\frac{v^2}{m_N}\left(\frac{m_N m_\chi}{m_N+m_\chi}\right)^2}{\mathrm{d}m_N} \propto \frac{\mathrm{d}\frac{m_N m_\chi^2}{(m_N+m_\chi)^2}}{\mathrm{d}m_N} = 0,$$

che si verifica quando il numeratore della derivata si annulla, cioè quando

$$m_\chi^2(m_N+m_\chi)^2 - 2m_N m_\chi^2(m_\chi+m_N) = 0,$$

ovvero per $m_N = m_\chi \approx 100\,\mathrm{GeV}$. L'energia massima a quel punto varrà

$${E'_N}^{\max} = \frac{2\times\left(\frac{100\,\mathrm{GeV}\times 100\,\mathrm{GeV}}{100\,\mathrm{GeV}+100\,\mathrm{GeV}}\right)^2\times\left(\frac{200\,\mathrm{km/s}}{300\times 10^3\,\mathrm{km/s}}\right)^2}{100\,\mathrm{GeV}} \approx 22\,\mathrm{keV}.$$

c. Il numero di interazioni per anno in un rivelatore R di massa M_R è dato da

$$N = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\times\Delta t,$$

dove $\Delta t = 1\,$anno e

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \sigma\frac{\mathrm{d}N_\chi}{\mathrm{d}t}n_R d = \sigma\frac{\mathrm{d}N_\chi}{\mathrm{d}t}\rho_R\frac{N_A}{A_R}d = \sigma\phi_\chi\frac{N_A}{A_R}M_R,$$

dove N_A è il numero di Avogadro, A_R, ρ_R e M_R sono massa molare, densità e massa totale del rivelatore, e d lo spessore attraversato dal fascio di particelle di materia oscura, il cui flusso è dato dal prodotto della densità numero di materia oscura per la sua velocità:

$$\phi_\chi = n_\chi v = 3\,\mathrm{dm}^{-3}\times 200\,\mathrm{km/s} \approx 6\times 10^4\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1},$$

e la sezione d'urto per $A_R = 100$ vale $\sigma \approx 1\times 10^{-40}\,\mathrm{cm}^2$.

Perciò, un rivelatore da una tonnellata di massa osserverebbe in un anno

$$N = \sigma n_\chi v\frac{N_A}{A_R}M_R\times\Delta t \approx 1.1$$

eventi.