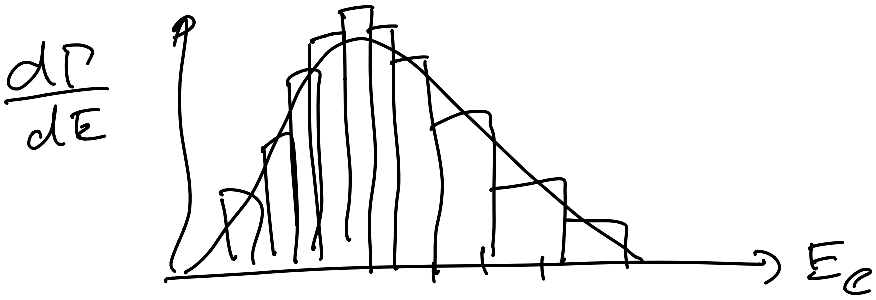
Decadimento $^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}$

$n \to p + e^- + \bar{\nu}$

esistenza del neutrino.



$$\frac{N(X \to Y + e^- + \nu)}{\Delta E_e}$$

misurate E_e

Particelle instabili oppure stati instabili:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-\Gamma t}$$

Γ: larghezza di decadim.

τ: $\langle t \rangle$ vita media

Necessario avere soluzioni immaginarie in

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

$$E = E_0 - i \frac{\Gamma}{2}$$

stato instabile

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\, e^{-iE_0 t}\, e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$$

$$P \propto |\psi|^2 \propto |\psi(r)|^2 e^{-\Gamma t}$$

$$e^{-i(E_0 - i\frac{\Gamma}{2})t} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E)\, e^{-iEt}\, dE$$

trasformata di Fourier

$$A(E) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i(E-E_0)t}\, e^{-\frac{\Gamma}{2}}\, dt$$

$t>0$ perché la particella/lo stato esiste da $t=0$

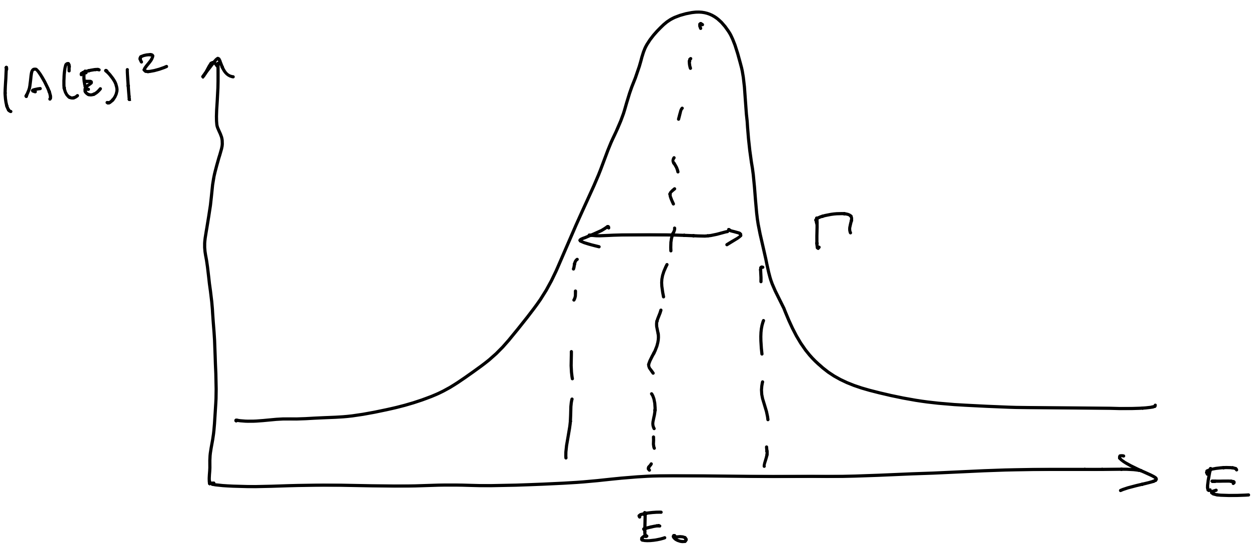
$$A(E) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\frac{\Gamma}{2} - i(E-E_0)}$$

Funzione d'onda nello spazio di E

$$P(E, E+dE) = |A(E)|^2 dE$$

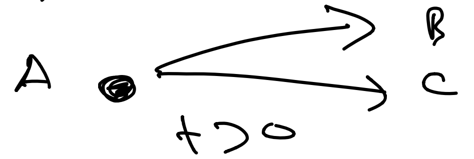
$$|A(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \cancel{4\pi^2}(E-E_0)^2}$$

Breit-Wigner (Lorentziana)

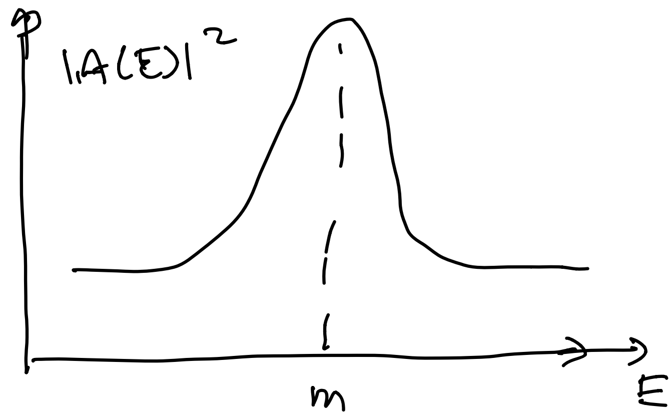


Supponiamo di avere una particella di massa m

Ci mettiamo nel suo c.d.m.



particelle in bin di E(massa) misurate.



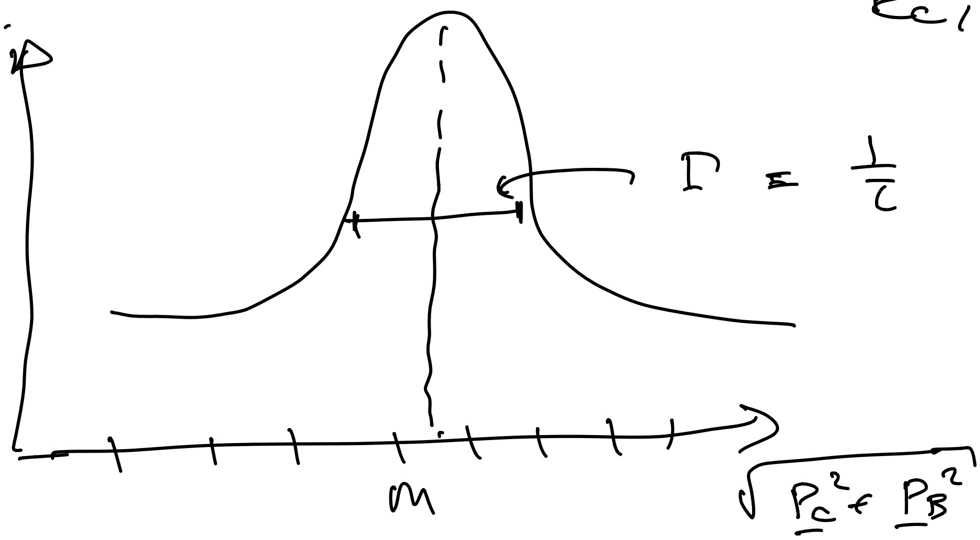
$A \to B + C$

Stima della massa di A: massa invariante.

$$m_A = \sqrt{\underline{P}_B^2 + \underline{P}_C^2}$$

N decadimenti: misurare $\underline{P}_B$, $\underline{P}_C$ $\quad E_B, \vec{P}_B$

$E_C, \vec{P}_C$



$\lim_{\tau \to \infty} \Gamma \to 0. \qquad |A(E)|^2 \to \delta(E-m)$

massa ben determinata

τ finito $\qquad \Gamma \cdot \tau = 1 = \hbar$

principio di indeterminazione

per particelle instabili: $\quad m, \Gamma \qquad \frac{\Gamma}{m} \ll 1$ molto stabile

$\frac{\Gamma}{m} \simeq 1$ molto instabile

$\Gamma = \frac{1}{\tau}$ caratterizza le particelle

Come si calcola Γ? predire # decadimenti.

Γ: prob. di decadi / unità tempo

Per calcolare Γ $\Rightarrow$ la regola d'oro di Fermi

Scrivere Γ a partire dalla hamiltoniana.

Regola d'oro di Fermi

stato instabile $\qquad H = H_0 + H_I$

H_0: sistema stazionario ad esempio $\frac{p^2}{2m}$

H_I: perturbazione piccola

Usare teoria perturb. per calcolare Γ.

$$H_0 \psi_n = E_n \psi_n$$

$$\psi_n(\vec{r},t) = \psi_n(\vec{r},0)\, e^{-iE_n t} = \psi_n e^{-iE_n t}$$

$\{\psi_n\}$ base ortonormale di funzioni d'onda per H_0

A noi serve la soluzione

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \qquad (1)$$

posso scrivere

$$(2) \quad \psi(\vec{r},t) = \sum_n a_n(t)\, \psi_n(\vec{r},t) = \sum_n a_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_n t}$$

Soluzione generica, stato instabile

(2) in (1) $\quad$ equazione diff. per $a_n(t)$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = i \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_n a_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_n t} \right) =$$

$$(3) \quad = i \sum_n \dot{a}_n(t)\, \psi_n\, e^{-iE_n t} + i \sum_n a_n(t)\, \psi_n (-iE_n)\, e^{-iE_n t}$$

$$H\psi = H_0\psi + H_I\psi = \sum_n a_n(t)(E_n + H_I)\psi_n e^{-iE_nt}$$

$$= \boxed{\sum_n a_n E_n \psi_n e^{-iE_nt}} + \sum_n a_n H_I \psi_n e^{-iE_nt}$$

$$i\sum_n \dot{a}_n \psi_n e^{-iE_nt} = \sum_n a_n H_I \psi_n e^{-iE_nt}$$

$\{\psi_n\}$ ortonormali $\qquad \int d^3r\, \psi_k^* \psi_n = \delta_{kn}$

$$i\int d^3r\, \psi_k^* \sum_n \dot{a}_n \psi_n e^{-iE_nt} = \int d^3r\, \psi_k^* \sum_n a_n H_I \psi_n e^{-iE_nt}$$

$\Downarrow$

$$i\sum_n \delta_{nk} \dot{a}_n e^{-iE_nt}$$

$\Downarrow$

$$i\,\dot{a}_k(t) e^{-iE_kt} = \sum_n a_n(t) \underbrace{\int d^3r\, \psi_k^* H_I \psi_n}_{V_{kn}} e^{-iE_nt}$$

$$= \sum_n a_n(t) V_{kn} e^{-iE_nt}$$

$$\dot{a}_k(t) = -i\sum_n a_n(t) V_{kn} e^{i(E_k-E_n)t}$$

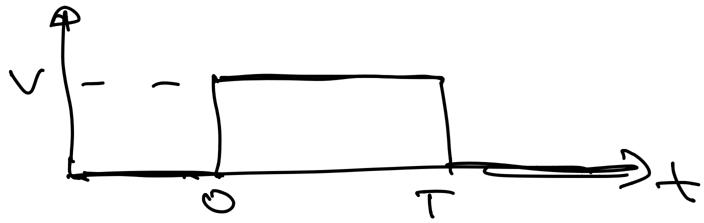
$$= \sum_n a_n(t) M_{kn} e^{i(E_k-E_n)t}$$

$$M_{kn} = -iV_{kn} = -i\int d^3r\, \psi_k^* H_I \psi_n$$

$$\dot{a}_k(t) = \sum_n a_n(t) M_{kn} e^{i(E_k-E_n)t}$$

$a_m \simeq 1 \qquad a_{k\neq m} \simeq 0$

Ipotesi sulla natura di H_I. $\cancel{H_I}$



1/ stato esiste da $t=0$

2/ @ $t=0$ sistema si trova nello stato $|m\rangle = |i\rangle$ $\quad \psi_m(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} a_m(0) = 1 \\ a_k(0) = 0 \quad \forall\, k \neq m \end{cases} \qquad t \gtrsim 0$$

con queste ipotesi:

$$\dot{a}_k(t) \simeq \underbrace{a_m(t)}_{\simeq 1} \mu_{km}\, e^{i(E_k-E_m)t}$$

$$\simeq \mu_{km}\, e^{i(E_k-E_m)t}$$

$-i\int d^3r\, \psi_k^* H_I \psi_m$

dipende solo da $\vec{r}$

varia poco con t

$$a_k(t) = \int_0^T dt\, \mu_{km}\, e^{i(E_k-E_m)t} = \mu_{km} \int_0^T dt\, e^{i(E_k-E_m)t}$$

$|i\rangle = |m\rangle \qquad |f\rangle = |k\rangle$

$$|a_k(T)|^2 = P(m \to k, t=T)$$ prob. di transiz.

prob. per unità di tempo.

$$\Gamma = \sum_k \frac{|a_k(T)|^2}{T} = \sum_k \Gamma_k$$

$$P(i \to f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|a_f(t)|^2}{T}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{|a_f(t)|^2}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{|M_{fi}|^2}{T} \int_0^T e^{i(E_f-E_i)t} dt \int_0^T e^{-i(E_f-E_i)t'} dt'$$

$$a_f(t) \quad a_f^*(t)$$

Cambio di variabile $t \in [0,T] \longrightarrow t'' \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

$$t'' = t - \frac{T}{2} \qquad dt'' = dt$$

$$P(i\to f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|M_{fi}|^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, e^{i(E_f-E_i)t} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, e^{-i(E_f-E_i)t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} dx = (2\pi)\,\delta(x)$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i(E_f-E_i)t} = 2\pi\, \delta(E_f - E_i)$$

esprime conserv. energia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \delta(E_f - E_i)\, e^{-i(E_f-E_i)t}$$

$$\longrightarrow \int_{-T/2}^{+T/2} dt \cdot 1 = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T$$

$$P(i\to f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|M_{fi}|^2}{\cancel{T}} (2\pi)\, \delta(E_f - E_i)\, \cancel{T}$$

$$= 2\pi\, |M_{fi}|^2\, \delta(E_f - E_i)$$

$$M_{fi} = -i \int d^3r\, \psi_f^* H_I \psi_i$$

Regola d'oro di Fermi

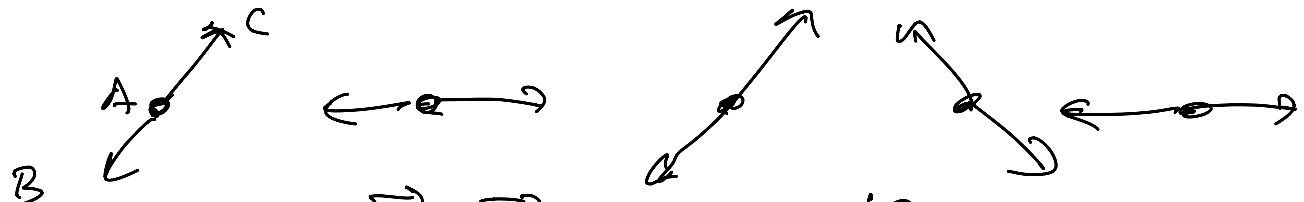
Prob. di transizione (in unità di tempo): $|i\rangle \to |f\rangle$

$A \to B + C$ Decadimenti a 2 corpi.

$\delta(E_f - E_i)$. $E_A = E_B + E_C$.

densità degli stati / spazio delle fasi.

Nel c.d.m. di A



$\vec{P}_B + \vec{P}_C = \emptyset$

$(|P_B| = |P_C|)$

θ_B, φ_B

$$\Gamma_{fi} = \int P(i \to f) \cdot dn = \int P(i \to f) \frac{dn}{dE_f} dE_f$$

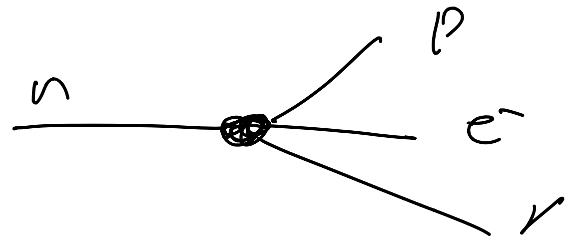
$$= \int 2\pi |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{dn}{dE_f} dE_f$$

$$= 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f}\Big|_{E_f = E_i} = 2\pi |\underline{M_{fi}}|^2 \rho(E_f)\Big|_{E_f = E_i}$$

Hamiltoniana d'interazione

Spazio delle fasi

Ampiezza decadimento β



Teoria di Fermi

$^{Z}_{A}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \nu$

$n \to p + e^- + \nu$.

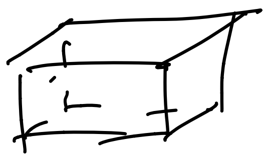
$H_I = G_F$

$|i\rangle = |n\rangle \qquad |f\rangle = |p\, e^- \nu\rangle$

$$\Gamma = 2\pi\, |M_{fi}|^2\, \rho(E)$$

$$M_{fi} = -i\int d^3r\, \psi_f^* H_I \psi_i = -i\int d^3r\, \psi_p^* \psi_e^* \psi_\nu^* G_F \psi_n$$

Supponiamo di normalizzare le funzioni d'onda su un volume V



$|\psi|^2 \propto V \qquad \psi \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$

V : Volume nucleare

$$\int d^3r\, |\psi|^2 = 1 \Rightarrow |\psi|^2 \propto \frac{1}{V} \to \psi \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$[\Gamma] = \left[\frac{Prob}{T}\right] = [T]^{-1} = [E]$$

$$\Big[\int d^3r\, \psi_p^* \psi_e^* \psi_\nu^* G_F \psi_n\Big] =$$

$\cancel{[L]^3} \qquad \cancel{[L]^{-3}} \qquad [L]^{-3} \qquad [G]$

$$[\cancel{E}] = [L]^{-3}[G] = [E]^{\cancel{3}\,2}[G]$$

$$[G] = [E]^{-2} \qquad eV^{-2}$$

$$M_{fi} = -i \int d^3r \, \psi_p^* G_F \psi_n \, \psi_e^* \psi_\nu^*$$

e^-, ν nello stato finale considero come particelle libere.

onde piane per e^-, ν.

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \qquad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{p} \equiv \vec{p_e} \qquad \vec{q} = \vec{p_\nu}$$

$$M_{fi} = -iG_F \int d^3r \, \frac{e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}\sqrt{V}} \, \psi_p^* \psi_n$$

Nella teoria di Fermi $G_F \equiv$ costante.

$$Q = m_n - m_p - m_e - m_\nu \lesssim 1 \text{ MeV}$$

$$|\vec{p}| \pm |\vec{q}| \simeq 1 \text{ MeV} \quad \text{al massimo.}$$

$$|\vec{r}| \simeq 1 \text{ fm} \quad \text{scala nucleare.}$$

$$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r} \simeq |\vec{p}+\vec{q}|\cdot|\vec{r}| \simeq 1 \text{ MeV}\cdot 1\text{ fm}.$$

$$= 1 \text{ MeV} \frac{1}{200 \text{ MeV}} \simeq 5/1000$$

$$e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}} \simeq \underbrace{1}_{\text{prendiamo solo il termine dominante}} + i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r} + O(\;)^2$$

$$M_{fi} = -i\frac{G_F}{V} \underbrace{\int d^3r \, \psi_p^* \psi_n}_{\text{termine nucleare} =: N} = -i\frac{G_F}{V} N$$

$$|M_{fi}|^2 \simeq \frac{G_F^2}{V^2} |N|^2$$