Prova in itinere di Fisica Nucleare e Subnucleare

tutti i canali

16 Maggio 2025

Esercizio 1

Nell'esperimento T2K un fascio di neutrini muonici ν_μ di energia $E_\nu = 1$ GeV è indirizzato su un rivelatore composto da un enorme bersaglio d'acqua (H_2O, $\rho_{\mathrm{H2O}} = 1$ g/cm^3, $\langle Z/A \rangle_{\mathrm{H2O}} = 0.55$, $\langle I \rangle_{\mathrm{H2O}} = 75$ eV, $n = 1.33$, $A_H = Z_H = 1$, $A_O = 16$, $Z_O = 8$), di spessore $d = 40$ m. Si vuole studiare la reazione:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$$

che ha una sezione d'urto pari a $\sigma = 10 \;\; \mathrm{fb}$.

1. Se la rate di neutrini che colpiscono il rivelatore è $\dot{N}_\nu = 30$ kHz, calcolare il numero totale di reazioni aspettate in un anno di presa dati.
2. Assumendo il bersaglio fermo nel laboratorio, calcolare l'energia minima e massima dei μ^- nel sistema di riferimento del laboratorio.
3. Considerare dei muoni di impulso $p_\mu = 500$ MeV, prodotti al centro del rivelatore, ovvero a 20 m dalle pareti esterne. Se questi muoni producono luce Cherenkov nel centro del rivelatore, calcolare il diametro degli anelli di luce Cherenkov una volta che raggiungono le pareti del rivelatore.
4. Calcolare il range di muoni con impulso $p_\mu = 500$ MeV nell'acqua, assumendo la perdita di energia per ionizzazione per unità di lunghezza costante e uguale al suo valore minimo.

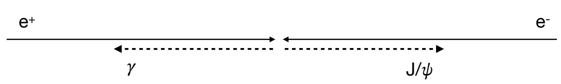
Esercizio 2

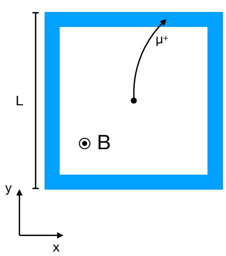
Nell'esperimento BESIII, installato al collider e^+e^- BEPC II (Pechino), è possibile osservare la risonanza J/ψ prodotta nella reazione:

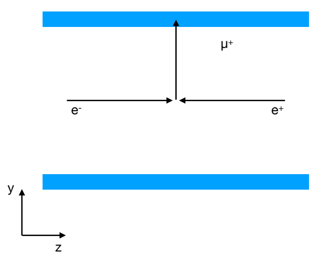
$$e^+ + e^- \rightarrow J/\psi + \gamma \tag{1}$$

operando il collider con fasci di pari energia che si scontrano frontalmente, e ad un'energia del centro di massa di 3770 MeV. La J/ψ decade in un tempo trascurabile in una coppia $\mu^+\mu^-$.

1. Determinare l'energia del singolo fascio.
2. Determinare l'energia del fotone prodotto nella reazione, nel sistema di riferimento del centro di massa.
3. Si consideri la configurazione in cui il fotone è emesso lungo la linea di volo dell'elettrone (Figura a sinistra), e i muoni sono emessi ortogonali alla linea di volo della J/ψ nel sistema di riferimento a riposo di quest'ultima. Assumendo un campo magnetico pari a 1 T parallelo ai fasci, determinare il raggio di curvatura della traiettoria dei muoni.
4. Si vogliono distinguere, con un livello di confidenza pari a 3σ, muoni di impulso 1500 MeV/c da eventuali pioni carichi aventi lo stesso impulso. Noto l'istante in cui avviene la collisione, si determini se è possibile effettuare tale distinzione misurando il tempo di volo tra il punto di collisione e un rivelatore scintillante, avente una risoluzione temporale di 100 ps. Per semplicità, si assuma che il punto di collisione sia circondato da rivelatori scintillanti che formano un tubo quadrato di lato L = 160 cm, coassiale ai fasci, e che le particelle siano emesso lungo l'asse y, come in Figura a destra .







Quantità	Valore
Massa dell'elettrone e del positrone	511 keV
Massa del protone	938.3 MeV
Massa del neutrone	939.6 MeV
Massa del μ	105.6 MeV,
Massa del $\pi^{\pm}$	139.6 MeV
Massa del π^0	135.0 MeV
Massa del Jψ	3097 MeV
Massa del K^+	493.7 MeV
Numero di Avogadro	$6 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
Costante $\mathcal{C}$ della Bethe-Bloch	$0.307\,\mathrm{MeV/gcm}^2$

Formule utili:

- Momento nel centro di massa di un sistema di due corpi di masse m_1 ed m_2 e massa invariante M:

$$p^* = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - 2M^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}$$

- Formula di Bethe-Bloch:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} \quad = \quad \mathcal{C} \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2m_e(\beta\gamma)^2}{\langle I \rangle}\right) - \beta^2\right]$$

Soluzione dell'esercizio 1

1. Il numero totale di reazioni in un anno N_r è dato da:

$$N_r = N_\nu \cdot \sigma \cdot n_b \cdot d$$

dove il numero totale di neutrini che colpiscono il rivelatore in un anno N_ν si ottiene moltiplicando la rate di neutrini per il numero di secondi in un anno:

$$N_\nu = \dot{N}_\nu \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9.46 \times 10^{11}$$

Per quanto riguarda la densità di bersagli n_b, invece, dato che la reazione interessa solo i neutroni, bisogna tenere in conto che ogni molecola d'acqua ha 8 neutroni (gli 8 neutroni dell'ossigeno). Dunque si ha:

$$n_b = \frac{N_A}{A_{\mathrm{H2O}}}\rho_{\mathrm{H2O}}(A_O - Z_O)$$

dove $A_{\mathrm{H2O}} = 2 \cdot A_H + A_O = 2 + 16 = 18$.

Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$N_r = N_\nu \cdot \sigma \cdot \frac{N_A}{A_{\mathrm{H2O}}}\rho_{\mathrm{H2O}}(A_O - Z_O) \cdot d =$$

$$= 9.46 \times 10^{11} \cdot 1 \times 10^{-38} \cdot \frac{6.022 \times 10^{23}}{18} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 40 \times 10^2 = 10.1 \text{ eventi}$$

2. Con il bersaglio fermo nel laboratorio possiamo calcolare il $\sqrt{s}$ dell'evento:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_\nu + m_n)^2 - E_\nu^2} = \sqrt{m_n^2 + 2E_\nu m_n} = 1.66 \text{ GeV}$$

Da cui possiamo calcolare l'energia del muone nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$E_\mu^* = \frac{s - m_p^2 + m_\mu^2}{2\sqrt{s}} = 569.4 \text{ MeV}$$

e il corrispondente impulso:

$$p_\mu^* = \sqrt{(E_\mu^*)^2 - m_\mu^2} = 559.6 \text{ MeV}$$

Per calcolare l'energia del muone nel sistema di riferimento del laboratorio E_μ abbiamo bisogno dei parametri del boost β_{cm}, γ_{cm}, che si ottengono dall'impulsoe dall'energia totale dello stato iniziale:

$$\beta_{cm} = \frac{p_{tot}}{E_{tot}} = \frac{E_\nu}{E_\nu + m_n} = 0.516$$

$$\gamma_{cm} = \frac{E_{tot}}{\sqrt{s}} = \frac{E_\nu + m_n}{\sqrt{s}} = 1.167$$

Da cui si ottiene l'espressione:

$$E_\mu = \gamma_{cm}(E_\mu^* + \beta_{cm} p_\mu^* \cos\theta^*)$$

Si ha quindi che l'energia massima (minima) si ottiene per $\theta^* = 0$ ($\theta^* = \pi$):

$$E_\mu^{max} = \gamma_{cm}(E_\mu^* + \beta_{cm} p_\mu^*) = 1001.3 \text{ MeV}$$

$$E_\mu^{min} = \gamma_{cm}(E_\mu^* - \beta_{cm} p_\mu^*) = 327.9 \text{ MeV}$$

3. Muoni con impulso $p_\mu = 500$ MeV hanno energia $E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} = 511$ MeV e quindi $\beta = 500/511 = 0.98$. Dato che l'indice di rifrazione dell'acqua è $n = 1.33$, possiamo innanzitutto verificare che muoni di questa energia producono luce Cherenkov, dato che:

$$\beta_{th} = \frac{1}{n} = 0.75 < \beta$$

L'angolo θ_C della luce emessa è dato da:

$$\cos\theta_C = \frac{1}{\beta n}$$

che dà:

$$\theta_C = cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta n}\right) = 0.696$$

Dopo aver viaggiato per $L = 20$ m, gli anelli avranno un diametro D dato da:

$$D = 2 \cdot L \cdot \tan\theta_C = 33.4 \text{ m}$$

4. Il problema dice di assumere la perdita di energia per ionizzazione costante e pari al suo minimo, quindi calcoliamo la perdita di energia per unità di lunghezza dE/dx in corrispondenza di $\beta\gamma = 3$. Calcoliamo innanzitutto il β corrispondente del muone.

$$\beta\gamma = 3 = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad p = 3m \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{p}{E} = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2 + m^2}} = 0.95$$

Possiamo quindi calcolare dE/dx:

$$\frac{dE}{dx} = C \cdot \rho \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2m_e(\beta\gamma)^2}{\langle I \rangle}\right) - \beta^2\right] =$$

$$= 0.307 \cdot 1 \cdot 0.55 \cdot \frac{1}{0.95^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot 511 \times 10^3 \cdot 3^2}{75}\right) - 0.95^2\right] = 2.02 \text{ MeV/cm}$$

Per stimare il range, ossia la distanza percorsa dal muone prima fermarsi (perdendo tutta la sua energia cinetica) calcoliamo l'energia cinetica del muone $K\mu = E_\mu - m_\mu = 511 - 106 = 405$ MeV, dove usiamo $p_\mu = 500$ MeV.

Quindi il range R_μ si ottiene da:

$$R_\mu = \frac{K_\mu}{dE/dx} = \frac{E_\mu - m_\mu}{2.02} = 200 \text{ cm} = 2.00 \text{ m}$$

Notare che se venisse usato erroneamente il valore del momento al minimo di Bethe-Bloch, $p_\mu = 3 \cdot m_\mu = 318$ MeV si avrebbe $E_\mu = 335$ MeV e quindi

$$R_\mu = \frac{K_\mu}{dE/dx} = \frac{E_\mu - m_\mu}{2.02} = 113 \text{ cm} = 1.13 \text{ m}$$

che è infatti diverso di quasi un fattore 2.

Soluzione dell'esercizio 2

Trascuriamo la massa dell'elettrone.

1. L'energia del centro di massa è data da:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p_{e^+} + p_{e^-})^2} = 2E_e \tag{2}$$

da cui:

$$E_e = \sqrt{s}/2 = 1885 \text{ MeV} \tag{3}$$

2. Trattando il processo come il decadimento a due corpi di una particella di massa $\sqrt{s}$:

$$E^*_\gamma = \frac{s - m^2_{J/\psi}}{2\sqrt{s}} = 612.9 \text{ MeV} \tag{4}$$

3. Il raggio di curvatura è determinato dall'impulso trasverso nel laboratorio che, nella configurazione considerata, è uguale all'impulso trasverso nel sistema a riposo della J/ψ (in quanto anche quest'ultima, come il fotone, viaggerà lungo la direzione dei fasci). L'impulso trasverso nel sistema a riposo della J/ψ, a sua volta, è uguale all'impulso totale nella configurazione considerata. Per cui, dal decadimento a due corpi:

$$E^*_\mu = \frac{m_{J/\psi}}{2} = 1548.5 \text{ MeV} \tag{5}$$

$$p^*_\mu = \sqrt{E^{*2}_\mu - m^{*2}_\mu} = 1544.9 \text{ MeV}/c = p^*_{\mu,\perp} = p_{\mu,\perp} \tag{6}$$

$$R[\text{m}] = \frac{p_{\mu,\perp}[\text{GeV}]}{0.3\,B[\text{T}]} = 5.15 \text{ m} \tag{7}$$

4. Il tempo di volo è determinato dalla lunghezza di volo l_μ nel piano trasverso che corrisponde ad un arco di circonferenza di angolo:

$$R[\text{m}] = \frac{p_{\mu,\perp}[\text{GeV}]}{0.3\,B[\text{T}]} = 5 \text{ m} \tag{8}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{L/2}{R}\right) = 0.161 \text{ rad} \tag{9}$$

ovvero:

$$l_\mu = R\,\theta = 0.803 \text{ m} \tag{10}$$

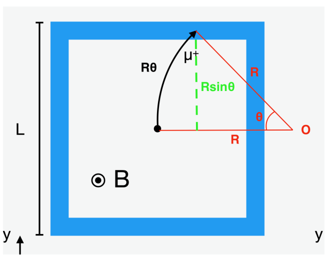


Figura 1: calcolo dell'angolo sotteso all'arco di circonferenza