Prova scritta del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2016/2017

18 Luglio 2017

NOME E COGNOME:	CANALE:

Gli studenti che devono recuperare il I esonero devono risolvere i problemi 1 e 2 in due ore.
Gli studenti che devono recuperare il II esonero devono risolvere i problemi 3 e 4 in due ore.
Gli studenti che devono sostenere lo scritto devono risolvere i problemi 1, 3 e 4 in tre ore.

1. Un fascio di elettroni incide su un bersaglio fisso producendo la reazione:

$$\begin{aligned} e^- p &\rightarrow \psi(2S)\, e^- p \\ \psi(2S) &\rightarrow J/\psi\, \eta \end{aligned} \tag{1}$$

Si determini:

a. l'energia di soglia E_{min} dell'elettrone incidente necessaria a produrre la reazione;

b. il 3-impulso massimo della $\psi(2S)$ nel sistema di riferimento del laboratorio quando la reazione è prodotta da elettroni di energia pari a 20 GeV. Si noti che nel centro di massa l'energia della $\psi(2S)$ è massima quando la massa invariante della coppia e^-p è minima, pari cioè alla somma delle masse di elettrone e protone;

c. l'impulso della J/ψ nel sistema di quiete della $\psi(2S)$.

[$m_{\psi(2S)} = 3686.1$ MeV/c^2; $m_p = 938.3$ MeV/c^2; $m_e = 0.511$ MeV/c^2; $m_{J/\psi} = 3096.9$ MeV/c^2; $m_\eta = 547.9$ MeV/c^2].

Soluzione:

a. L'energia cinetica di soglia è data da:

$$K_{\min} = \frac{(m_{\psi(2S)} + m_e + m_p)^2 - (m_e + m_p)^2}{2m_p} = \frac{m^2_{\psi(2S)} + 2m_{\psi(2S)}(m_e + m_p)}{2m_p} = 10928.5 \text{ MeV} \tag{2}$$

b. L'energia della $\psi(2S)$ nel laboratorio è massima quando la sua energia nel sistema del centro di massa è massima e la $\psi(2S)$ è emessa nella direzione di volo dell'elettrone. Nel centro di massa l'energia è massima quando la massa invariante della coppia e^-p è minima (pari cioè alla somma delle masse di elettrone e protone). La conservazione dell'energia e impulso impone in tal caso:

$$E^*_{\psi(2S)} = \frac{s - m^2_{ep} + m^2_{\psi(2S)}}{2\sqrt{s}} = \frac{s - (m_e + m_p)^2 + m^2_{\psi(2S)}}{2\sqrt{s}} \tag{3}$$

come per il decadimento in due corpi di una particella di massa $\sqrt{s}$. Per elettroni da 20 GeV su protoni a riposo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{s} &= \sqrt{m_e^2 + m_p^2 + 2E_e m_p} = 6198 \text{ MeV} && (4)\\
\beta_{CM} &= \frac{|\vec{p}_{CM}|}{E_{CM}} \sim \frac{E_e}{E_e + m_p} = 0.955 && (5)\\
\gamma_{CM} &= 3.378 && (6)\\
& && (7)
\end{aligned}$$

quindi $E^*_{\psi(2S)} = 4124$ MeV. L'impulso corrispondente è $|\vec{p}^*_{\psi(2S)}| = \sqrt{E^{*2}_{\psi(2S)} - m^2_{\psi(2S)}} =$ 1849 MeV/c. Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$|\vec{p}^{\max}_{\psi(2S)}| = \gamma_{CM}(|\vec{p}^*_{\psi(2S)}| + \beta_{CM} E^*_{\psi(2S)}) = 19900 \text{ MeV/c} \tag{8}$$

c. Nel sistema di quiete della $\psi(2S)$ la J/ψ ha:

$$\begin{aligned}
E^*_{J/\psi} &= \frac{m^2_{\psi(2S)} - m^2_\eta + m^2_{J/\psi}}{2m_{\psi(2S)}} = 3103.3 \text{ MeV} && (9)\\
|\vec{p}^*_{J/\psi}| &= \sqrt{E^{*2}_{J/\psi} - m^2_{J/\psi}} = 199 \text{ MeV/c} && (10)
\end{aligned}$$

2. Al fine di determinare la sezione d'urto totale $\pi^- p$, un fascio di pioni negativi viene inviato alternativamente su bersagli di polietilene ($\mathrm{CH_2}$, $\rho_{\mathrm{CH_2}} = 0.89$ g/cm^3, $A_{\mathrm{CH_2}} = 14$) e carbonio (C, $\rho_{\mathrm{C}} = 2.21$ g/cm^3, $A_{\mathrm{C}} = 12$).

   a) Lo spessore del bersaglio di carbonio è pari a $d_{\mathrm{C}} = 1$ cm. Si determini lo spessore del bersaglio di polietilene, $d_{\mathrm{CH_2}}$, affinché il numero di nuclei di carbonio sia lo stesso nei due bersagli.

   b) Un rivelatore è posto a valle del bersaglio, lungo la linea di fascio, al fine di misurare l'attenuazione del fascio di pioni. Si trova che il fascio in uscita ha una intensità pari al 94% di quello in entrata nel caso del bersaglio in carbonio. Si determini la sezione d'urto totale $\pi^-\mathrm{C}$.

   c) Nel caso del bersaglio in polietilene, l'attenuazione è pari al 93%. Considerando che la rate di interazioni $\pi^-\mathrm{CH_2}$ può essere espressa come somma delle rate di interazione sui nuclei di carbonio e su quelli di idrogeno e che il numero dei nuclei di carbonio è lo stesso nei due bersagli, si determini la sezione d'urto totale $\pi^- p$.

Soluzione:

a) Indicando con Σ la superficie del bersaglio, il numero di nuclei di carbonio nel bersaglio di carbonio ed in quello di polietilene è:

$$\begin{aligned}
N_{\mathrm{C}} &= \Sigma \frac{\rho_{\mathrm{C}} N_A}{A_{\mathrm{C}}} d_{\mathrm{C}} && (11)\\
N_{\mathrm{CH_2}} &= \Sigma \frac{\rho_{\mathrm{CH_2}} N_A}{A_{\mathrm{CH_2}}} d_{\mathrm{CH_2}} && (12)
\end{aligned}$$

avendo considerato che nel polietilene è presente un nucleo di carbonio per ogni complesso CH_2. Uguagliando le due espressioni:

$$d_{\mathrm{CH_2}} = \frac{A_{\mathrm{CH_2}}}{A_{\mathrm{C}}} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{C}}}{\rho_{\mathrm{CH_2}}} \cdot d_{\mathrm{C}} = 2.9 \text{ cm} . \tag{13}$$

b) La frazione di fascio residuo dopo il bersaglio è data da:

$$f = e^{-\frac{\rho N_A}{A}\sigma \cdot d} \,. \tag{14}$$

Nel caso del carbonio, ponendo $f_C = 0.94$, si ottiene $\sigma_{\mathrm{C}} = 0.56$ b. Alternativamente, si può approssimare la rate di interazioni come:

$$I = \Phi \cdot \frac{\rho N_A}{A} d\Sigma \cdot \sigma \tag{15}$$

e quindi:

$$f = \frac{I_\pi - I}{I_\pi} = \frac{\Phi\Sigma - \Phi \cdot \frac{\rho N_A}{A} d \cdot \Sigma \cdot \sigma}{\Phi\Sigma} = 1 - \frac{\rho N_A}{A} d \cdot \sigma \tag{16}$$

e, invertendo, $\sigma_{\mathrm{C}} = 0.54$ b.

c) Con calcolo analogo al precedente, la sezione d'urto per il bersaglio di polietilene è pari a $\sigma_{\mathrm{CH_2}} = 0.65$ b (o 0.63 b con calcolo approssimato). L'assunzione che la rate di interazioni $\pi^-\mathrm{CH_2}$ si possa esprimere come somma delle rate di interazione su nuclei di carbonio e idrogeno si può scrivere come:

$$\Phi \cdot \Sigma \frac{\rho_{\mathrm{CH_2}} N_A}{A_{\mathrm{CH_2}}} d_{\mathrm{CH_2}} \cdot \sigma_{\mathrm{CH_2}} = \Phi \cdot \Sigma \frac{\rho_{\mathrm{CH_2}} N_A}{A_{\mathrm{CH_2}}} d_{\mathrm{CH_2}} \cdot \sigma_{\mathrm{C}} + \Phi \cdot 2\Sigma \frac{\rho_{\mathrm{CH_2}} N_A}{A_{\mathrm{CH_2}}} d_{\mathrm{CH_2}} \cdot \sigma_p \tag{17}$$

ovvero $\sigma_{\mathrm{CH_2}} = \sigma_{\mathrm{C}} + 2\sigma_p$ e quindi $\sigma_p = (\sigma_{\mathrm{CH_2}} - \sigma_{\mathrm{C}})/2 = 48$ mb (o 45 mb con il calcolo approssimato).

3. Una particella entra in uno spettrometro magnetico lungo L = 50 cm con campo magnetico B = 1 T ortogonale alla sua traiettoria. In uscita dal magnete, la distanza x dalla linea di volo iniziale è 1.3 cm.

   a) Determinare l'impulso della particella

Dopo il magnete è posto un contatore Cherenkov con indice di rifrazione $n = 1.3$, che segnala il passaggio di una particella solamente se questa emette luce Cherenkov ad angoli compresi tra $\theta_1 = 35°$ e $\theta_2 = 37°$ rispetto alla sua linea di volo.

   b) Stabilire la natura della particella in uscita dal magnete, sapendo che il contatore ne rivela la luce Cherenkov

Dopo aver attraversato il contatore la particella impatta su un blocco di ferro ($\rho_{Fe} = 7.96$ g/cm^3).

   c) Determinare il $\beta\gamma$ della particella e il suo range nel ferro, assumendo una perdita di energia per unità di lunghezza costante e pari a $dE/dx = 1.75$ MeV gr^{-1} cm^2.

Soluzione:

Nell'attraversare uno spettrometro magnetico una particella subisce una deflessione dovuta alla presenza del campo magnetico. Se la deflessione è piccola, lo spostamento x subito dalla particella rispetto alla direzione iniziale è legato all'impulso dalla relazione
$pc \ = \ 0.3\frac{BL^2}{2x}$
L'impulso della particella è pertanto $pc = 2.885$ GeV.

Una particella carica che attraversa un contatore Cherenkov con velocità maggiore della velocità della luce nel mezzo emette luce ad angolo θ_C tale che $\cos\theta_C \ = \ \frac{1}{\beta n}$. I valori di β corrispondenti ai

due angoli dati sono pertanto:
$\theta_1 = 35° \ : \ \beta_1 \ = \ \frac{1}{ncos\theta_1} \ = \ 0.939$
$\theta_2 = 37° \ : \ \beta_2 \ = \ \frac{1}{ncos\theta_2} \ = \ 0.963$
Conoscendo l'impulso p, si può ricavare l'energia della particella come $E = \frac{p}{\beta}$ e quindi la massa come $mc^2 \ = \ \sqrt{E^2 - c^2p^2}$. I due valori di θ dati corrispondono a
$E_1 = \frac{p}{\beta_1} \ = \ 3.072 \text{ GeV} \rightarrow \ mc^2 \ = \ \sqrt{E_1^2 - c^2p^2} = 1.06 \text{ GeV}$
$E_2 = \frac{p}{\beta_2} \ = \ 2.996 \text{ GeV} \rightarrow \ mc^2 \ = \ \sqrt{E_2^2 - c^2p^2} = 0.81 \text{ GeV}$
La particella in esame pertanto può essere un protone o un neutrone. Dal momento che emette luce Cherenkov deve essere carica ed è quindi un protone.

Un protone di impulso 2.885 GeV ha $\beta\gamma = \frac{p}{mc} \ = \ 3.08$.
La perdita di energia nel ferro è $dE/dx = \rho$*1.75 MeV gr^{-1} cm^2 = 13.93 MeV/cm
All'ingresso nel ferro il protone ha energia $E \ = \ \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = 3.033$ GeV ed energia cinetica $K \ = \ E - mc^2 \ = \ 2.095$ GeV. Il suo range nel ferro vale pertanto $R = \frac{K}{dE/dx}$ =1.5 m.

4. Stabilire quali delle reazioni e decadimenti sotto indicati sono permessi e quali sono proibiti. Per quelli proibiti, indicare tutti i numeri quantici (o le leggi di conservazione) che sono violati. Per quelli permessi, indicare la forza che media l'interazione.

a) $e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$
b) $K^- + n \rightarrow \Lambda + \pi^-$
c) $\mu^- + p \rightarrow \bar{\nu}_\mu + n$
d) $p + p \rightarrow \Sigma^+ + n + K^0 + \pi^+$
e) $\pi^- + p \rightarrow \Delta^-$
f) $e^+ + {}^7_4\text{Be} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \bar{\nu}_e$
g) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda + \pi^0$
h) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$
i) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$
l) $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$
m) $\Omega^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$
n) $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \nu_e$

Soluzione:

a) no: Le
b) sì: forte
c) no: Lμ
d) sì: forte
e) no: Q
f) no: Q
g) no: Q, m$_f$ >m$_i$
h) no: Le, Lμ
i) sì: em
l) sì: em
m) no: $|\Delta S| = 2$
n) no: Le, $|\Delta S| = 1$