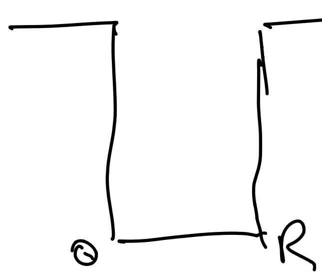
Modello di gas di Fermi:

stime energie cinetiche
dei nucleoni

Modello statistico semplice a particelle indipendenti.
nucleoni come particelle libere confinate in una
buca di potenziale.

- nucleo come gas di protoni e
  gas di neutroni

- azione di A-1 nucleoni su ciascun nucleone
  rapp. da buca di potenziale a simm. sferica

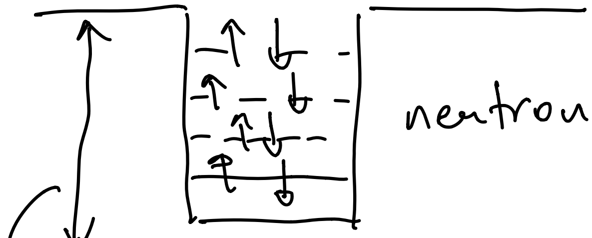


$U(r)$ $\quad r \leq R_0$

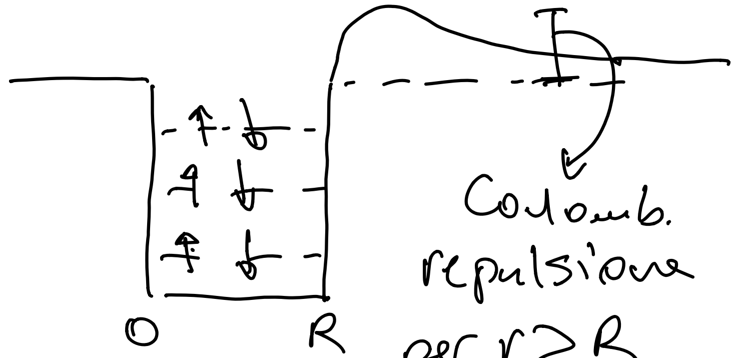
nucleoni liberi dentro ma sentono il potenziale
attrattivo quando raggiungo la superficie
o il confine del potenziale

$$r \simeq R = R_0 A^{1/3}$$

- Assumiamo $E \gg KT$ oppure $T = \emptyset$
  applichiamo la statistica di Fermi come
  esclusione di Pauli



neutroni



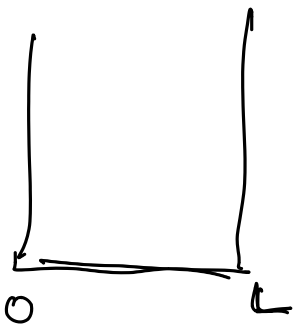
Coulomb. repulsione per $r > R$

$U = E_F + B/A$

energia massima dei nucleoni

Impulso / energia quantizzata per particelle confinate

Dalla MQ.



$$\psi(x) = A \sin(KL)$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \Rightarrow KL = n\pi.$$

$$K = n\frac{\pi}{L} \qquad K \equiv \frac{p}{\hbar} = p \text{ in U. natu.}$$

In 3D si ha

$$K_x = n_x \frac{\pi}{L} = p_x$$

$$K_y = n_y \frac{\pi}{L} = p_y$$

$L_x L_y L_z \equiv V$

$$K_z = n_z \frac{\pi}{L} = p_z$$

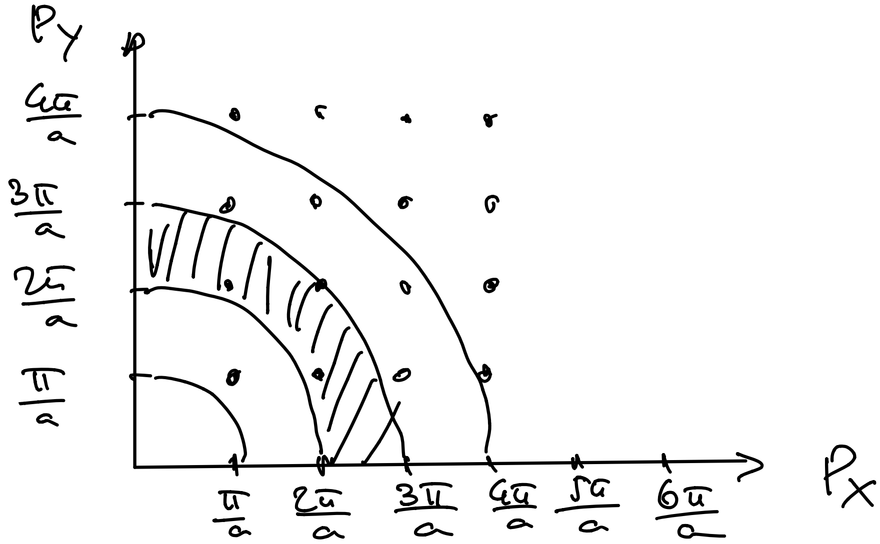
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2}{2mL^2} n^2$$

Dato un valore di Energia E, ci possono essere al massimo 4 nucleoni con la stessa energia

$p \uparrow \quad p \downarrow \quad n \uparrow \quad n \downarrow$

Ora vogliamo contare il numero di stati disponibili per una data energia o impulso.

Nello spazio dell'impulso.



Possiamo calcolare il numero di stati in un intervallo di momento $P, P+dP$.

$$dn(P) = \frac{1}{8} \frac{4\pi P^2 dP}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^3}$$

Volume del guscio.

Volume quantizzato di momento.

Per definizione $P_x, P_y, P_z > 0$. solo un ottavo del guscio.

$$dn = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^3 4\pi P^2 dP = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi P^2 dP$$

$$\frac{dn}{dp} = \rho(p)$$ densità degli stati per un impulso p.

Spesso si parla di densità degli stati per un'energia.

$$E = \frac{p^2}{2m}. \qquad dE = \frac{\cancel{2} p\, dp}{\cancel{2} m}$$

$$p = \sqrt{2mE} \qquad dp = \frac{m}{p} dE = \frac{m}{\sqrt{2mE}} dE$$

$$dn = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi (2mE) \frac{m}{\sqrt{2mE}} dE$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \sqrt{2}\, m^{3/2} E^{1/2} dE.$$

$$\frac{dn}{dE} \propto E^{1/2}$$

ci sono più stati accessibili al crescere di energia.

Possiamo usare dn per calcolare l'energia dei nucleoni.

$$\int_0^{E_F(p)} dn_p = \int_0^{E_F} 2\, dn = Z \quad \text{protoni}$$

$\hookrightarrow s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$$\int_0^{E_F(n)} dn_n = \int_0^{E_F(n)} 2\, dn = A - Z \quad \text{neutroni}$$

E_F : l'energia di Fermi è l'energia massima possibile per i nucleoni nel nucleo.

$$dn = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 dp$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$$

$$Z = 2 \int_0^{E_F(p)} \frac{4\pi}{3} R_0^3 A \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi\, p^2 dp$$

$$= \frac{32\pi^2}{3(2\pi)^3} R_0^3 A \underbrace{\int_0^{p_F} p^2 dp}_{\frac{1}{3} p_F^3}$$

$$Z = \frac{32\pi^2}{3(2\pi)^3} R_0^3 A \frac{1}{3} p_F^3 = \frac{4}{9\pi} R_0^3 A\, p_F^3.$$

$$p_F(p) = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \left(\frac{Z}{A}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3}$$

simile per i neutroni ma

$$p_F(N) = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} = 1.52$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{1.25}\ fm^{-1} \qquad 197\ fm \cdot MeV = 1.$$
$$fm^{-1} = 197\ MeV.$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{197}{1.25}\ MeV = 158\ MeV.$$

$$\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} R_0^{-1} = 239.55\ MeV.$$

$$P_F(p) = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} = 240\ MeV \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3}$$
$$P_F(n) = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3} = 240\ MeV \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3}$$

Per la maggior parte dei nuclei $A \simeq 2Z$.

$$\Rightarrow \quad P_F(n) \simeq P_F(p) \simeq 240\ MeV.$$

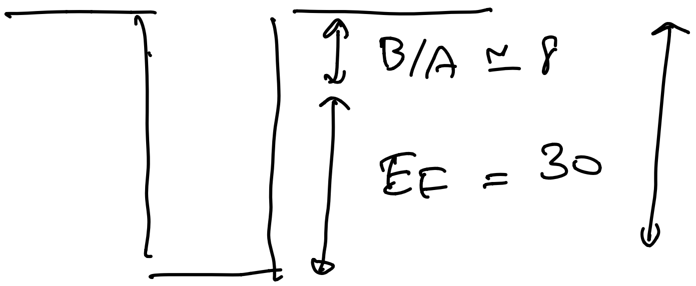
$$E_F = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \quad E_F \simeq \frac{240^2}{2 \times 1000} \simeq 30\ MeV.$$

$\Rightarrow$ nucleoni in regime non relativistico e possiamo usare MQ non-relativ. per calcoli nucleari.

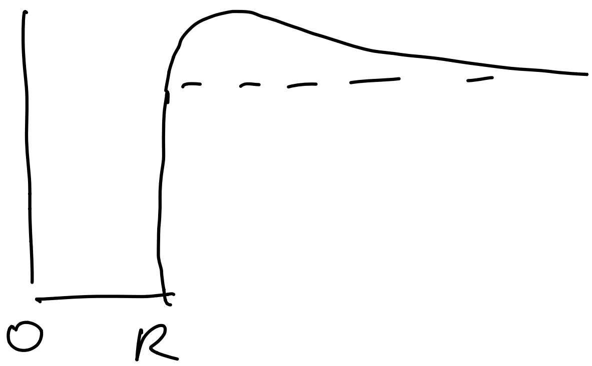
Per nuclei molto pesanti si apprezza la differenza tra p e n.

$$^{238}_{92}U : \quad E_F^n = 32\ MeV$$
$$E_F^p = 28\ MeV$$

Abbiamo una stima della profondità della buca



Piccola correzione per i protoni



$$U(R) = \frac{Ze^2}{4\pi} \frac{1}{R} = Z \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R_0} A^{-1/3}$$

$$= \alpha Z \frac{1}{R_0} A^{-1/3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_0} &= \frac{1}{1.25 \text{ fm}} = 158 \text{ MeV.} \\ \alpha &= \frac{1}{137.} \end{aligned}\right\} \frac{\alpha}{R_0} = 1.15 \text{ MeV}$$

$$U(R) = (1.2 \text{ MeV})\, Z A^{-1/3}$$

$${}^{238}_{92}U : \quad U(R) = 1.2 \text{ MeV.} \times 92 \times 238^{-1/3}$$

$$= 18 \text{ MeV.}$$

Calcoliamo finalmente l'energia cinetica media per ciascun nucleone.

$$\langle E_c \rangle = \frac{\int (p^2/2m)\, dn}{\int dn}$$

$$\int dn = 2\int dn_p + 2\int dn_n = A.$$

$$dn = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi P^2 dP =$$

$$= \frac{\cancel{8\pi}}{\cancel{8}\pi^{\cancel{3}}} \frac{4\cancel{\pi}}{3} R_0^3 A \; p^2 dP.$$

$$= \frac{4}{3\pi} R_0^3 A \; P^2 dP.$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{4}{3\pi} R_0^3 \frac{1}{2m} \int_0^{P_F} p^4 dp$$

$$= \frac{4}{3\pi} R_0^3 \left[\frac{1}{10 m_p} P_F(p)^5 + \frac{P_F(n)^5}{10 m_n} \right]$$

mettiamo $m_n \simeq m_p$ e sostituiamo.

$$P_F(n,p) = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0} \begin{cases} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} & p \\ \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{1/3} & n \end{cases}$$

$$\langle E_c \rangle = \underbrace{\frac{4}{3\pi} \frac{R_0^3}{10m} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{5/3} \frac{1}{R_0^5}}_{C} \left[\left(\frac{2Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{5/3} \right]$$

$$\langle E_c \rangle = (3.5)\,\frac{1}{10\,m}\,\frac{1}{R_0^{\,2}}\left[\;-\;-\;\right]$$

$$= \frac{0.35}{m R_0^{\,2}}\left[\;-\;-\;\right]$$

$$\frac{1}{R_0^{\,2}} = (1.25\ \text{fm})^{-2} = 0.64\ \text{fm}^{-2}.$$

$$\text{fm}^{-1} = 197\ \text{MeV}. = 0.197\ \text{GeV}.$$

$$\text{fm}^{-2} = 0.039\ \text{GeV}^2$$

$$\frac{1}{m R_0^{\,2}} = \frac{1}{1\,\text{GeV}}\ 0.64\ \text{fm}^{-2} = 0.64 \times 0.039\ \text{GeV}$$

$$= 0.64 \times 39\ \text{MeV} = 25\ \text{MeV}$$

$$C = 0.35 \times 25\ \text{MeV} = 9\ \text{MeV}.$$

$$\langle E_c \rangle = (9\ \text{MeV})\left[\left(\frac{2Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{2(A-Z)}{A}\right)^{5/3}\right]$$

Maggior parte dei nuclei $A \simeq 2Z$.
Per i nuclei più pesanti $A \gtrsim 2Z$

$$\frac{2Z}{A} = 1 - x \Rightarrow x = 1 - \frac{2Z}{A} = \frac{A-2Z}{A}$$

$$\frac{2(A-Z)}{A} = \frac{A + (A-2Z)}{A} = 1 + x$$

$$(1-x)^{5/3} + (1+x)^{5/3} \simeq 1 - \cancel{\frac{5x}{3}} + \frac{5}{9}x^2 + 1 + \cancel{\frac{5x}{3}} + \frac{5}{9}x^2 + O(x^3).$$

$$= 2\left(1 + \frac{5}{9}x^2\right].$$

$$\langle E_c \rangle \simeq (9\ \text{MeV}) \times 2\left[1 + \frac{5}{9}\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right].$$

$$= (18\ \text{MeV})\left[1 + \frac{5}{9}\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]$$

per molti nuclei $\langle E_c \rangle \simeq 20$ MeV.

a causa di esclusione di Pauli

$$\langle E_c \rangle_{A=2n} \neq \langle E_c \rangle_{A=2n+1}.$$

per $\frac{A-2Z}{A} \nearrow \Rightarrow$ aumenta differenza di energia cinetica.

nuclei con maggior neutroni hanno $\langle E_c \rangle$ maggiore $\Rightarrow$ nuclei più instabili.

Energia cinetica media del nucleo

$$K(Z,A) = A\langle E_c \rangle =$$

$$= 20\ \text{MeV}\left(A + \frac{5}{9}\frac{(A-2Z)^2}{A}\right)$$