hyväksymispäivä arvosana

arvostelija

Referaatti artikkelista The "Boston"School Choice Mechanism

Jani Rahkola

Helsinki 27.1.2012

Referaatti

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Fuhito Kojiman ja M. Utku Ünverin kuvaavat Bostonin mekanismin toimintaa ja ominaisuuksia ensin sanallisesti. Sen jälkeen he määrittelevät useita aksioomia ja karakterisoivat mekanismi sen kahdessa eri tapauksessa. Toinen karakterisaatio koskee tapausta jossa toisen joukon alkioilla on jaettavana useita resursseja. Toinen tapaus on vastaava kuin klassisessa pysyvän avioliiton ongelmassa, jossa kummankin joukon alkioilla on tasan yksi resurssi.

Bostonin mekanismi on yleisesti käytössä oppilaitosten valintajärjestelmissä. Niissä mekanismi toimii tapana sijoittaa hakijat oppilaitosten tarjoamiin paikkoihin hakijoiden ja oppilaitosten järjestelmään ennalta toimittamien preferenssilistojen perusteella. Algoritmi etenee kierroksittain. Ensimmäisellä kierroksella jokaiseen oppilaitokseen sijoitetaan oppilaitoksen listan mukaisessa järjestyksessä ne hakijat jotka ovat listanneet oppilaitoksen ensimmäiseksi vaihtoehdokseen. Toisella kierroksella vielä avoinna olevat paikat täytetään oppilaitoksen toiseksi listanneilla hakijoilla ja näin jatketaan, kunnes kaikki paikat ovat täytetty tai kaikki hakijat ovat sijoitettu johonkin oppilaitokseen.

Bostonin mekanismissa on kuitenkin teoreettisia ja käytännön ongelmia. Se ei tuota pysyvää sijoittelua, sillä hakija voi jäädä valitsematta oppilaitokseen johon häntä alemmalla sijalla oleva toinen hakija valitaan. Lisäksi mekanismin tuottamaan tulokseen on mahdollista vaikuttaa muuttamalla preferenssilistaansa. Mekanismi ei siis ole myöskään strategiankestävä.

Galen ja Shapleyn viivytetyn valinnan mekanismi takaa sekä pysyvän sijoittelun että strategiankestävyyden. Lisäksi kokeellisessa ympäristössä on havaittu, että useammat hakijat manipuloivat preferenssilistaansa Bostonin mekanismin ollessa käytössä kuin viivytetyn valinna mekanismin tapauksessa. Bostonin mekanismissa preferenssilistojen manipulointi johtaa useammin tulokseen jossa listaansa manipuloineet hakijat sijoittuvat paremmin totuudenmukaisesti listansa täyttäneiden kustannuksella.

Bostonin mekanismilla on myös hyvät puolensa. Sen on osoitettu olevan tietyissä tilanteissa hakijoiden kannalta parempi kuin viivytetyn valinnan mekanismi. Yleisessäkin tilanteessa osa totuudenmukaisesti preferenssilistansa täyttäneistä saattaa sijoittua paremmin Bostonin mekanismissa. Hakijan mahdollisuutta vaikuttaa sijoitteluun listaamalla tietty oppilaitos korkealle listassaan voidaan myös pitää Bostonin mekanismin vahvuutena. Näin hakijoilla on suurempi mahdollisuus vaikuttaa suotuisasti sijoitteluun. Tästä mahdollisuudesta seuraavat kuitenkin myös useat Bostonin mekanismin ongelmat.

Aksiomaattista lähestymistapaa varten luodaan sijoittelusta seuraava malli. Olkoon I hakijoiden ja C oppilaitosten epätyhjä ja äärellinen joukko. Jokainen oppilas on joko sijoitettu johonkin oppilaitokseen tai vielä sijoittamatta. Merkitään sijoittamatta olemista sijoituksella oppilaitokseen $\emptyset$.

Jokaisella oppilaitoksella $c \in C$ on q_c avoinna olevaa paikkaa ja $q_\emptyset = \infty$. Olkoon $q = (q_c)_{c \in C}$ kaikkien oppilaitosten avoimia paikkoja kuvaava vektori.

Jokaisella hakijalla i on preferenssirelaatio P_i joukossa $C \cup \{\emptyset\}$. Olkoon $P = (P_i)_i \in I$ preferenssiprofiili. Merkitään $P_i(c) = l$ oppilaitoksen c sijoitusta hakijan i listalla. Nyt kaikilla $c, d \in C$ pätee $P_i(c) < P_i(d)$ jos ja vain jos cP_id. Siis hakija i toivoo pääsevänsä mieluummin oppilaitokseen c kuin d. Olkoon lisäksi cR_id jos ja vain jos $P_i(c) \leq P_i(d)$.

Sijoittelu on funktio $\mu : I \to C \cup \{\emptyset\}$ jolle $\mu(i)$ on oppilaitos johon hakija i on sijoitettu. $\mu_{c \in C} = \{i \in I : \mu(i) = c\}$ on oppilaitokseen c sijoitettujen hakijoiden joukko. Sijoittelun tulee täyttää ehto $|\mu_c| < q_c$ kaikilla $c \in C \cup \{\emptyset\}$. Siis oppilaitokseen ei voi olla sijoitettuna avoimia paikkoja useampaa hakijaa.

I, C, P ja q määrittelevät valintaongelman. Valintamekanismi on algoritmi joka antaa sijoittelun jokaiseen ongelmaan. Kiinnittämällä joukot I ja C voimme merkitä ongelmaa preferenssiprofiilin ja avoimien paikkojen määrän avulla $[P; q]$. Olkoon

$M[q]$ ongelman $[P; q]$ kaikkien sijoittelujen joukko ja $\gamma[P; q] \in M[q]$ mekanismin γ antama sijoittelu ongelmalle $[P; q]$.

Ensimmäistä aksioomaa varten määritellään $I_c = \{i \in I : \gamma[P; q](i) = c \text{ jollain } P \text{ ja } q\}$ olemaan niiden hakijoiden joukko, jotka sijoitetaan oppilaitokseen c jollakin preferenssiprofiililla P ja avoimien paikkojen määrällä q käytettäessa mekanismia γ. Nyt sijoittelu μ **noudattaa preferenssilistoja** mekanismissa γ, jos

$$\text{kaikilla } c \in C \cup \{\emptyset\}, i \in I_c \text{ ja } j \in \mu_c \text{ pätee } cP_i\mu(i) \Rightarrow |\mu_c| = q_c \text{ ja } P_j(c) \leq P_i(c).$$

Siis jos hakija $i \in I_c$ sijoitetaan c:tä epämieluisempaan oppilaitokseen, on c:n kaikki paikat täytetty hakijoilla jotka sijoittivat c:n vähintään yhtä korkealle kuin i. Mekanismi **noudattaa preferenssilistoja** jos se löytää jokaiseen ongelmaan sijoittelun, joka noudattaa preferenssilistoja.

Mikäli mekanismi noudattaa preferenssilistoja, on se myös **rajoitetusti Pareto-tehokas**. Se siis löytää jokaiseen ongelmaan sijoittelun jota ei voida parantaa niin, että ainakin yksi hakija pääsisi mieluisempaan oppilaitokseen kenenkää muun joutumatta epämieluisempaan oppilaitokseen. Parannuksia joissa hakija sijoitetaan oppilaitokseen johon häntä ei voida valita ei kuitenkaan oteta huomioon. Mikäli jokainen hakija voidaan valita mihin tahansa oppilaitokseen, on preferenssilistoja noudattava mekanismi myös Pareto-tehokas.

Sijoittelumekanismin strategiankestävyys voidaan esittää formaalisti Maskin monotonisuuden avulla. Se vaatii, että mikäli hakija tulisi sijoitetuksi oppilaitokseen c, muuttuu sijoittelun tulos vain jos hakija nostaa listassaan c:tä alempana olleen oppilaitoksen c:tä ylemmäs. Bostonin mekanismi ei kuitenkaan ole Maskin monotoninen, sillä hakija voi muuttaa sijoittelun tulosta lyhentämällä listaansa sen yläpäästä. Höllentämällä Maskin monotonisuuden ehtoja saadaan kuitenkin aikaan edelleen mielenkiintoinen ominaisuus jonka Bostonin mekanismi toteuttaa.

Preferenssiprofiili P' on **monotoninen transformaatio** profiilista P, jos kaikilla $i \in I$ pätee $\forall b \in C \cup \{\emptyset\} : bP'_i c \Rightarrow bP_i c$ missä c $= \mu(i)$. Olkoon lisäksi

$$U_i(P, \mu) = \{j \in I : P_j(\mu(i)) \leq P_i(\mu(i)) \text{ ja } P_j(\mu(i)) \leq P_j(\mu(j))\}$$

$$V_i(P, \mu) = \{j \in I : P_j(\mu(i)) < P_i(\mu(i)) \text{ ja } P_j(\mu(i)) \leq P_j(\mu(j))\}$$

Nyt P' on **sijoitusta noudattava monotoninen transformaatio** profiilista P (P' s. n. m. t. P), jos kaikilla i joilla $\mu(i) \in C$ pätee $U_i(P', \mu) \subseteq U_i(P, \mu)$ ja $V_i(P', \mu) \subseteq V_i(P, \mu)$. Nyt mekanismi γ on **sijoitusta noudattaen Maskin monotoninen**, jos

$$P'\text{:n ollessa s. n. m. t. profiilista } P \text{ pätee } \gamma[P'; q] = \gamma[P; q].$$

Nyt siis sijoittelun tulos muuttuu vain kuten Maskin monotonisella mekanismilla, tai jos hakijan i preferenssilistan muutos lisää kilpailua pääsystä johonkin muuhun kouluun kuin $\mu(i)$.

Mekanismi γ on **resurssimonotoninen**, jos kaikilla preferenssiprofiileilla P pätee $(\forall c \in C : q_c \geq q'_c) \Rightarrow (\forall i \in I : \gamma[P; q](i) R_i \gamma[P; q'](i))$. Siis jos avoimien paikkojen määrää lisätään,jokaisen hakijan sijoitus mahdollisesti paranee.

Mekanismi γ on **yksilöllisesti rationaalinen**, jos kaikilla P ja q, sekä $i \in I$ pätee $\gamma[P; q](i) R_i \emptyset$. Siis jokainen hakija pitää saamaansa sijoitusta parempana kuin sijoittumatta jäämistä. Jokainen resurssimonotoninen mekanismi on myös yksilöllisesti rationaalinen, sillä $\gamma[P; q](i) R_i \gamma[P; (0, \ldots, 0)] = \emptyset$.

Olkoon P$^\emptyset$ preferenssiprofiili, jossa hakija i ei halua tulla sijoitetuksi. Mekanismi γ on **populaatiomonotoninen**, jos kaikilla preferenssiprofiileilla P pätee $\gamma[P^\emptyset; q](j) R_j \gamma[P; q](j)$ kaikilla $j \neq i$. Siis jos hakija jättäytyy pois valinnasta, jokaisen jäljelle jääneen sijoitus mahdollisesti paranee.

Olkoon q$^\emptyset$= $q_{\gamma[P;q](i)} - 1$ Mekanismi γ on **konsistentti**, jos $\gamma[P^\emptyset; q^\emptyset](j) = \gamma[P; q](j)$ kaikilla $j \neq i$. Siis jos sekä hakija että avoin paikka johon hänet olisi sijoitettu poistetaan, sijoittelun tulos ei jäljelle jääneiden hakijoiden osalta muutu.

Nyt Bostonin mekanismi voidaan karaterisoida seuraavasti. Mekanismi γ on **Bostonin mekanismi**, jos ja vain jos γ noudattaa preferenssilistoja, on konsistentti, resurssimonotoninen ja preferenssilistoja noudattaen Maskin monotoninen.

Monissa tapauksissa kummallakin osapuolella on vain yksi resurssi. Näin on esimerkiksi jaettaessa toimistoja tai muita jakamattomia resursseja hakijajoukon kesken. Kiinnitetään siis $q_c = 1$ kaikilla $c \in C$. Nyt γ on Bostonin mekanismi, jos ja vain jos se noudattaa preferenssilistoja, on yksilöllisesti rationaalinen, populaatiomonotoninen ja preferenssilistoja noudattaen Maskin monotoninen.