

PROBABILIDADE DE FALHA POR FADIGA EM FLANGE DE RODA AUTOMOTIVA

Neste trabalho, a vida em fadiga de uma flange de roda de um veículo de alto desempenho categoria Formula SAE é analisada sob a ótica da confiabilidade estrutural. A partir de dados de pista, medições e hipóteses, são descritas as variáveis aleatórias consideradas no problema: raio da curva, raio do pneu, expoente de fadiga na curva S-N, tensões equivalentes de fadiga para curva à direita e à esquerda. Tais dados são alimentados no modelo linear de acumulo de dano de Palmgren-Miner para curva S-N do material, o qual é solucionado pelo First Order Reliability Method (FORM) e deterministicamente para os valores médios. O dano e a probabilidade de falha são calculados para um conjunto de número de voltas. Escolhido um limite superior de probabilidade de falha tolerável, é possível determinar o número da volta na qual a peça deve ser substituída.

INTRODUÇÃO

Em um veículo de alto desempenho, é frequente o conflito entre os atributos de peso e resistência mecânica durante o projeto de um componente estrutural. Almejam-se peças leves, que resultem maiores velocidades do veículo e consequentes menores tempos de volta. Entretanto, para diminuir sua massa, geralmente as seções transversais da peça são reduzidas, o que implica incremento das tensões atuantes e subsequente redução da vida em fadiga. Assim o conflito emerge, pois um carro de competição pesado se distancia da vitória, tal qual se suas peças falharem.

Convém notar que, embora aqui seja estudado o caso de um veículo de competição, conflitos de natureza semelhante são encontrados em veículos comerciais e na indústria aeronáutica, alterando-se o objetivo de menor tempo de volta para menor custo de produção (no caso da busca por maior margem de lucro) ou menor uso de combustível (para redução da emissão de poluentes).

Nos projetos cujo dimensionamento das peças é feito de maneira determinística, a variabilidade natural dos parâmetros de projeto é condensada na escolha de um valor nominal para o parâmetro, o que pode ser insuficiente nos casos dos atributos conflitantes e culminar em falhas inesperadas [1]. Com a aplicação da análise de confiabilidade, há maior controle

sobre o desempenho estrutural, pois as informações estatísticas dos parâmetros são utilizada integralmente no seu dimensionamento. Neste trabalho, então, é feita uma prova de conceito¹ da aplicação da análise de confiabilidade ao projeto em fadiga de uma flange de roda e, ao final, o resultado é comparado ao da análise determinística.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

A flange, cuja geometria e montagem estão apresentadas na figura 1, é a peça central do conjunto da roda responsável por transferir esforços mecânicos do aro ao cubo. Ao percorrer o circuito, no contato entre pneu e pavimento são gerados as forças que carregam elasticamente todo o conjunto de peças. Uma interface de entrada do carregamento na flange são os contatos na região dos seis parafusos posicionados no diâmetro maior da flange. Em cada interface, uma parcela do carregamento é transmitido a cada uma das duas vigas curvas do “V”, o qual une o parafuso ao centro da flange. Em análise estrutural auxiliada pelo método dos elementos finitos realizada anteriormente [1], houve indicação de concentração de tensão em posição intermediária da viga curva, como indicado na figura 1. O cubo, no qual a flange permanece solidária, é apoiado em rolamentos, logo permite o giro da roda e,

¹É dito prova de conceito porque a busca pela obtenção de resultados quantitativos refinados não foi exaustiva.

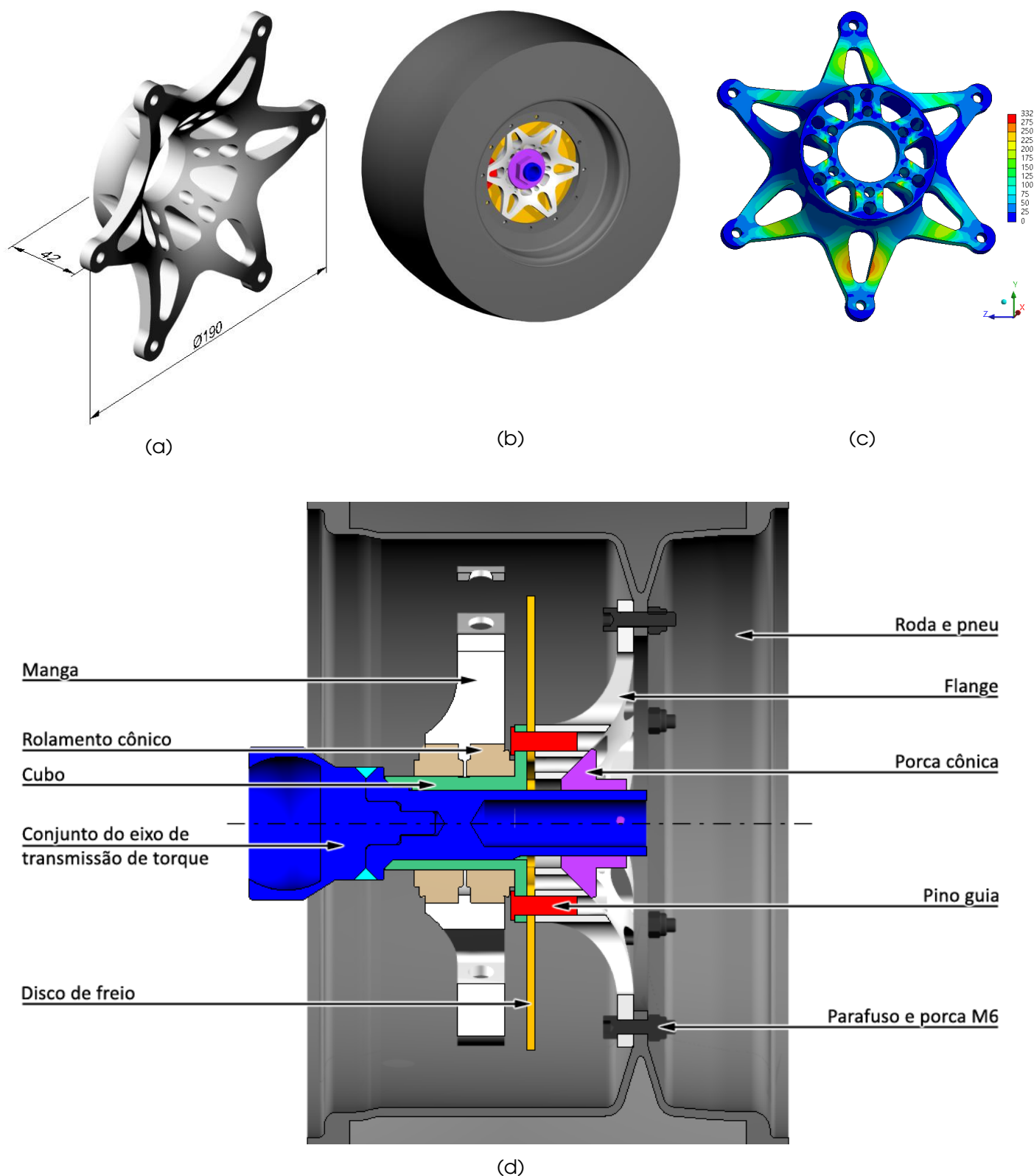


Figura 1: A flange e os componentes adjacentes na roda. Em (a), vista isométrica da flange. Em (b), vista isométrica da montagem da roda. Em (c), vista da face oposta da flange colorida conforme o gradiente de tensão obtido de análise estrutural estática pelo método dos elementos finitos, com o qual se observou concentração de tensão próxima à região intermediária da viga curva do "V" inferior. Em (d), vista em corte do conjunto com indicação dos componentes. Fonte: [1].

consequentemente, confere a natureza cíclica do carregamento de fadiga à flange. Com a realização de simulações semelhantes à da figura 1 para diversos ângulos de giro da roda, confirma-se a natureza cíclica da tensão na região de concentração da viga curva, expressando direção aproximadamente uniaxial e magnitude com perfil senoidal [1].

A progressão de uma trinca de fadiga nessa região pode culminar em falha da peça, suscitando, desse modo, a questão: em qual volta o carro deve ser parado e a peça trocada se não é desejável exceder uma pré-determinada probabilidade de falha? Ao considerar o contexto da análise de confiabilidade, pode-se reler a pergunta para a questão que define o problema:

Qual a probabilidade de falha para cada volta no circuito?

EQUAÇÃO DE ESTADO LIMITE

A equação 1, empregada nesse problema para caracterizar a falha, é a regra de acúmulo de dado de Palmgren-Miner [2] aplicada a um circuito em formato de oito (duas circunferências adjacentes) percorrido o mesmo número de voltas à esquerda e à direita. Para essa regra de dano linear, a ordem de aplicação dos carregamentos é indiferente, portanto uma análise estocástica não é necessária para solucionar o problema.

$$C = n_V \left(\frac{n_L}{N_L} + \frac{n_R}{N_R} \right) \quad (1)$$

em que

- C : Constante de projeto, sendo adotado seu valor padrão de 1 (um);
- n_V : número de voltas;
- n_L : número de ciclos de carregamento para uma volta à esquerda (“left”);
- N_L : número de ciclos até a falha, sob determinado nível de tensão incidente em curva à esquerda;
- n_R : número de ciclos de carregamento para uma volta à direita (“right”);
- N_R : número de ciclos até a falha, sob determinado nível de tensão incidente em curva à direita.

Para chegar à equação de estado limite, manipula-se a equação 1. Inicialmente, o número de ciclos até a falha é calculado com a

equação da curva de S-N [2], da equação 2.

$$\sigma_{fa} = \sigma_f (2N)^b$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_{fa}}{\sigma_f}} \quad (2)$$

em que

- σ_{fa} : tensão de fadiga alternada;
- σ_f : tensão limite de fadiga do material;
- b : expoente de fadiga do material.

Em seguida, observa-se que o número de ciclos de fadiga em uma volta corresponde ao número de giros da roda nessa volta, que, por sua vez, pode ser determinado pela razão entre o perímetro da circunferência e o perímetro do pneu, resultando na equação 3.

$$n = \frac{2\pi R_c}{2\pi R_p} = \frac{R_c}{R_p} \quad (3)$$

em que

- R_c : raio da circunferência;
- R_p : raio do pneu.

Finalmente, substituindo as equações 2 e 3 na equação 1 e removendo o termo R_p do numerador, obtém-se a equação 4: a equação do estado limite.

$$g(X) = R_p - 2n_V R_c \left(\frac{1}{b \sqrt{\frac{\sigma_{fa,L}}{\sigma_f}}} + \frac{1}{b \sqrt{\frac{\sigma_{fa,R}}{\sigma_f}}} \right) \quad (4)$$

em que X corresponde ao vetor de variáveis aleatórias do problema:

$$X = [R_p, R_c, b, \sigma_{fa,L}, \sigma_{fa,R}]$$

Neste trabalho, a análise de confiabilidade foi feita somente para a **roda traseira direita**.

DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Para a variável raio do pneu, foram feitas medições do perímetro do pneu em quatro rodas distintas (1418, 1420, 1415 e 1422 mm), conversão para o raio e cálculo da média e desvio padrão (225,8 e 0,475 mm). A partir desses valores de estatística descritiva, uma amostra de valores distribuídos normalmente foi gerada e, a ela, ajustada uma distribuição log-normal que limita o valor do pneu a valores estritamente positivos. O ajuste foi realizado pela busca dos

estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição com auxílio de rotina computacional [3]. Os valores obtidos para os parâmetros da distribuição log-normal são:

$$R_p \sim \text{lognorm}(0,2258; 0,0021) \text{ [m]}$$

Para a variável raio da circunferência, não foi possível realizar medições, então adotou-se uma hipótese: uma distribuição inicialmente normal com média 9,1 m, igual ao raio até o centro da largura da pista, e 95% da população distribuída no interior da largura da pista. Então procedeu-se de modo análogo a variável anterior: uma amostra de valores distribuídos normalmente foi gerada e, a ela, com auxílio da mesma rotina computacional, ajustada uma distribuição log-normal que limita o valor do raio da circunferência a valores estritamente positivos. Os valores dos parâmetros da distribuição log-normal resultante são:

$$R_c \sim \text{lognorm}(9,099; 0,0165) \text{ [m]}$$

Para o expoente de fadiga, foi usado o gráfico S-N do alumínio 7075-T6 mostrado na figura 2. Inicialmente, foram ajustadas curvas à pares de pontos coletados dos limites inferior e superior da banda para um total de ciclos inferior à 10^7 . O ajuste foi feito de maneira iterativa, com a variação dos parâmetros σ_f e b da equação 2 até a redução da soma dos quadrados dos resíduos nesses pontos.

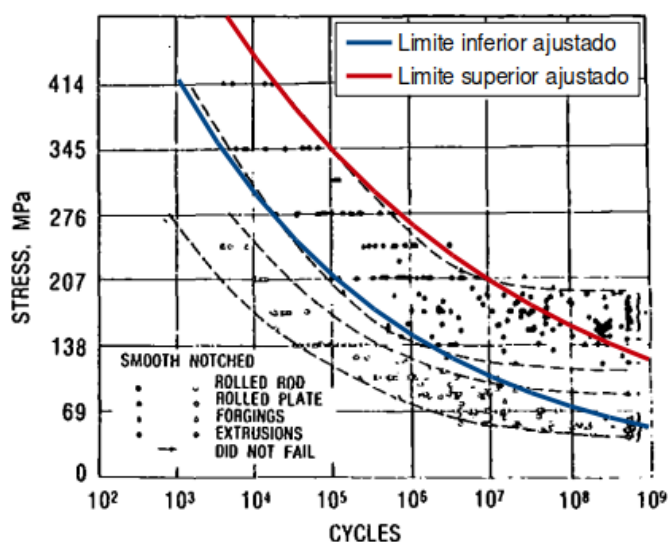


Figura 2: Diagrama S-N para flexão alternada do alumínio 7075-T6 em diferentes processamentos e corpos de prova sem concentrador de tensão. Adaptado de [4].

A seguir, foram adotadas as hipóteses de que 90% da população está distribuída normalmente entre as duas curvas limite e que do expoente b decorreria toda variabilidade dos dados. Com isso, obteve-se os valores dos parâmetros da distribuição normal:

$$b \sim N(-0,1285; 0,0131) [-]$$

Para as tensões de fadiga alternada, foram utilizados dados de pista gentilmente cedidos pela Equipe de Formula SAE da Escola de Engenharia de São Carlos para o circuito em pauta. A caracterização destas variáveis aleatórias demandou mais etapas, pois foi necessário calcular a tensão na viga curva da flange a partir dos dados mensurados no centro de gravidade do veículo. A descrição de todo o processo excede o escopo da apresentação da análise de confiabilidade, porém é razoável sumariá-lo:

1. Leitura do arquivo contendo os dados brutos², identificação e separação dos parâmetros relevantes ao problema;
2. Limpeza e filtragem dos dados;
3. Uso de uma linha de dados do arquivo tratado na 2ª lei de Newton aplicada ao veículo para obtenção da força atuante no contato entre pneu e pavimento;
4. Cálculo das reações nas interfaces dos parafusos que unem o aro à flange;
5. Divisão da força na interface entre as duas vigas curvas que compõem o "V";
6. Cálculo dos esforços internos na viga curva;
7. Determinação da tensão resultante para as diferentes posições ao longo da viga pelo uso de equações para vigas curvas sujeitas a flexão no plano de curvatura [6];
8. Repetição do processo a partir do item (4) em diversas posições angulares de um giro completo da roda para aferir a variação da tensão;
9. Cálculo da tensão alternada equivalente de Morrow [2].

As etapas do processo foram repetidas a partir do item (3) para cada linha de dados, resultando nos espectros de tensão equivalente

²Uma amostra das 100 linhas iniciais do arquivo com os dados brutos está disponível em [5]

de fadiga à direita e à esquerda. A cada espectro foi ajustada uma distribuição log-normal, uma vez que não foram observados valores de tensão equivalente de Morrow negativas. Os espectros e as distribuições estão apresentados na figura 3 e os valores dos parâmetros das distribuições são:

$$\sigma_{fa,L} \sim \text{lognorm}(3,928 \times 10^8; 0,523) \text{ [Pa]}$$

e

$$\sigma_{fa,R} \sim \text{lognorm}(6,491 \times 10^7; 0,513) \text{ [Pa]}$$

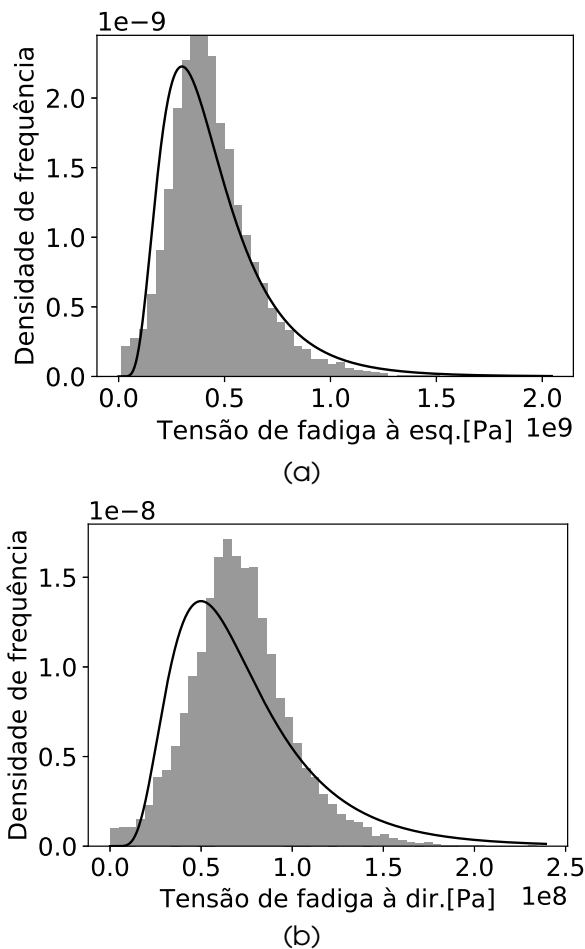


Figura 3: Ajuste de distribuição log-normal aos espectros de tensão equivalente de fadiga. Em (a), curva à esquerda. Em (b), curva à direita.

Não foi atribuída correlação alguma entre as variáveis aleatórias do problema.

TÉCNICA DE SOLUÇÃO

Na análise de confiabilidade, foi utilizado o *First Order Reliability Method* (FORM) na forma do algoritmo de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiesler (HLRF) de busca do ponto de projeto [7]. O índice de confiabilidade obtido, β , foi tradu-

zido na probabilidade de falha com uso da função inversa da densidade acumulada de probabilidade de uma distribuição normal padrão, $\Phi(-\beta)$. A probabilidade de falha e o valor determinístico do dano foram calculados para o seguinte conjunto de valores de número de volta:

$$n_V = (1, 5, 10, 20, 30, 50, 75, 100, 130) \text{ [voltas]}$$

Com o objetivo de obter um indicativo de convergência global do ponto de projeto no algoritmo HLRF, foi gerado um conjunto de onze vetores de valor inicial x_0 para cada valor de número de volta selecionado. A geração de dez deles consistiu na aplicação da função inversa da densidade de probabilidade acumulada específica de cada variável a um valor pseudoaleatório limitado ao intervalo $[0,2; 0,8]$ amostrado de uma distribuição uniforme de limites $[0, 1]$. O uso de um intervalo limitado na amostragem ocorreu após casos de insucesso na convergência local para valores amostrados próximos dos limites. O décimo primeiro vetor empregado foi o dos valores médios. Uma vez solucionado o FORM para cada vetor de valor inicial, os pontos de projetos resultantes foram comparados e, quando iguais, a possibilidade de convergência global foi indicada. A tabela 1 mostra exemplos de vetor de valor inicial utilizados no caso $n_V = 50$.

Tabela 1: Exemplos de vetor valor inicial.

n^o	R_p [m]	R_c [m]	b	$\sigma_{fa,L}$ [10^8 Pa]	$\sigma_{fa,R}$ [10^7 Pa]
1	0,2261	9,167	-0,1250	4,761	7,684
2	0,2259	9,150	-0,1189	3,243	6,511
3	0,2255	9,008	-0,1200	2,719	8,737
4	0,2258	9,099	-0,1285	3,928	6,491

Cada vetor de valor inicial foi inserido como entrada no algoritmo do FORM com HLRF [7]:

1. Cálculo da matriz de correlação no espaço normal equivalente usando a aproximação $\rho_z = \rho_x$;
2. Cálculo da matrix Jacobiana referente à transformação $Z \leftrightarrow Y$ (Equivalente normal \leftrightarrow Normal padrão);
3. Enquanto não convergir:

- Cálculo do próximo ponto no espaço normal padrão;
- Conversão deste ponto ao espaço original;
- Obtenção do ponto normal equivalente pela preservação da probabilidade acumulada original;
- Obtenção do desvio padrão normal equivalente;
- Obtenção da média normal equivalente;
- Cálculo da matrix Jacobiana referente à transformação $X \leftrightarrow Z$ (Original \leftrightarrow Equivalente normal);
- Cálculo da matrix Jacobiana referente à transformação $X \leftrightarrow Y$ (Original \leftrightarrow Normal padrão);
- Conversão do ponto de volta ao espaço normal padrão usando a matriz de transformação J_{YX} atualizada;
- Avaliação do índice de confiabilidade, β ;
- Obtenção, no ponto, do gradiente da equação de estado limite no espaço original;
- Conversão do gradiente para o espaço normal padrão usando J_{XY} ;
- Cálculo do vetor unidade do gradiente;
- Verificação do critério de convergência adotado: $|\beta_i - \beta_{i-1}| < 1 \times 10^{-6}$;

4. Cálculo da probabilidade de falha;

5. Fim.

O algoritmo foi implementado computacionalmente em um *script* Python (versão 3.5.3) com o auxílio de bibliotecas de funções matemáticas, numéricas e estatísticas. O código pode ser verificado na íntegra em um repositório público na internet [5] juntamente com os códigos utilizados no pré-processamento dos parâmetros das variáveis aleatórias.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com a aplicação do algoritmo, por exemplo, para o vetor de valor inicial referente as médias das variáveis aleatórias no caso $n_v = 50$, obteve-se a convergência apontada no gráfico da figura 4. No âmbito geral desse caso, todos vetores de valor inicial resultaram no mesmo ponto de projeto, indicando uma possível convergência global do ponto de projeto. Para esse caso foram obtidos os seguintes resultados:

$$\beta = 0,2478 \Rightarrow p_f = \Phi(-\beta) = 0,402$$

$$\mathbf{x}^* = \underbrace{[0,226; 9,099; -0,129]}_{R_p} \underbrace{[4,459 \times 10^8; 6,491 \times 10^7]}_{R_c} \underbrace{[4,0 \times 10^{-2}]}_b \underbrace{[-0,96; -1,0 \times 10^{-13}]}_{\sigma_{fa,L}} \underbrace{[0,402]}_{\sigma_{fa,R}}$$

$$\alpha^2 = [2,6 \times 10^{-7}; -1,6 \times 10^{-5}; 4,0 \times 10^{-2}; -0,96; -1,0 \times 10^{-13}]$$

Nota-se uma sensibilidade predominante da variável tensão de fadiga para curva à esquerda ($\sigma_{fa,L}$). Para os demais casos de número de volta, foram observados valores próximos, entre $-0,95$ e $-0,97$. Portanto, a probabilidade de falha é quase que integralmente governada pela variabilidade da tensão de fadiga em curva à esquerda. Ou seja, eventuais sobrecargas durante às curvas podem ser críticos à vida da peça.

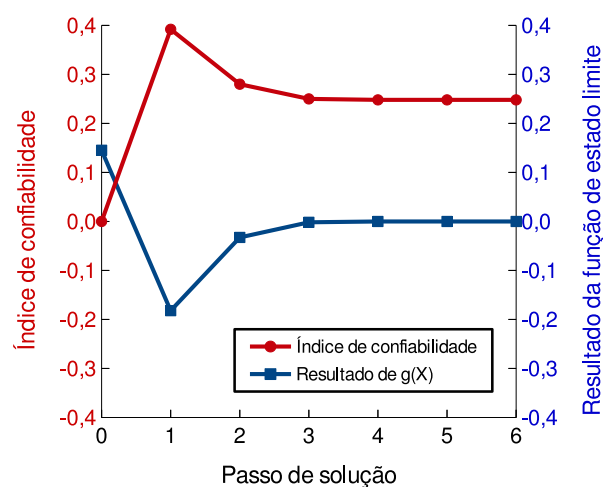


Figura 4: Gráfico de convergência do método HLRF.

Para os demais casos de número de volta, também ocorreu indicativo de convergência global. Calculadas as soluções determinísticas de todos os casos para os valores médios das variáveis aleatórias, agrupou-se os resultados na figura 5.

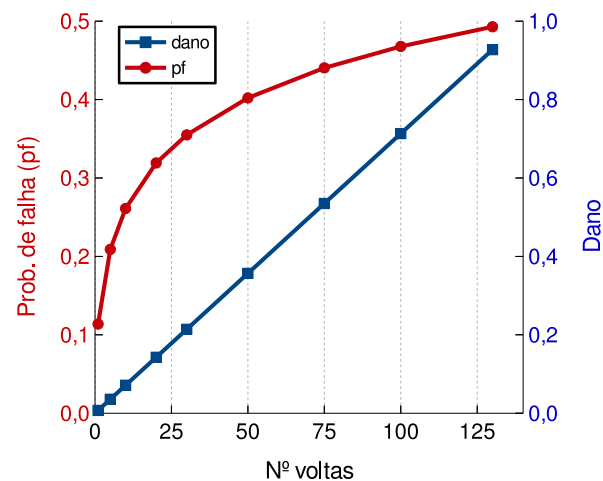


Figura 5: Evolução da probabilidade de falha e do dano determinístico à cada volta.

Logo, da figura 5 se obtém a resposta para a pergunta formulada na introdução. No caso de uma probabilidade de falha tolerável de até 40%, a análise de confiabilidade indica que, nas condições do problema, a flange da roda traseira direita não deve ser utilizada por mais de cinquenta voltas. Observa-se que, ao mesmo tempo, a solução determinística indica que a peça ultrapassou somente um pouco mais de um terço de sua vida útil.

Observa-se uma evolução linear do dano na solução determinística, enquanto, na solução de confiabilidade, a probabilidade de falha apresenta comportamento próximo do logarítmico, com rápido incremento do início até metade da vida útil da peça. Assim, a análise de confiabilidade se mostrou mais segura nesse estudo desta peça e, portanto, pode evitar uma falha inesperada da peça.

CONCLUSÃO

A aplicação da análise de confiabilidade ao problema da vida em fadiga para uma flange de roda automotiva foi realizada e seus resultados forneceram uma perspectiva favorável à segurança na evolução da vida útil da peça. O método FORM utilizado foi capaz de resolver a equação de estado limite e solucionou o problema proposto da determinação da probabilidade de falha da peça a cada volta no circuito. Foi possível observar que, considerando todo o processo da análise, a coleta, organização, tratamento e filtragem dos dados utilizados na caracterização das variáveis aleatórias demandaram considerável quantidade de tempo de trabalho.

É sabido que há outras fontes de variabilidade dentro de σ_{fa} , porém a incorporação de todas elas poderia dificultar a aplicação do FORM por aumentar a não-linearidade matemática da equação de estado limite. Em trabalho futuro, é possível incluir outras fontes de variabilidade e solucionar o problema de confiabilidade utilizando Simulação de Monte Carlo. Caso contrário, pode ser implementado o algoritmo iHLRF para garantir a convergência global do ponto de projeto. Outra frente de melhoria seria a integração do código com o método dos elementos finitos para refinar o cálculo de σ_{fa} .

No geral, para esse problema, há ainda outras questões de interesse a serem considera-

das futuramente:

- > Qual a probabilidade de falha para todo o sistema de vigas curvas e suas falhas progressivas, além do sistema composto pelas quatro rodas do veículo?
- > Qual valor pode ser atribuído à constante C (calibração) para possibilitar um cálculo determinístico seguro?
- > Durante a vida da peça, circuitos com trajetórias diferentes serão percorridos: Quais serão os novos valores das probabilidades de falha? Qual a sensibilidade de cada circuito?
- > Dado que a peça falhou após quatro meses de uso, quais as probabilidades calculadas *a posteriori*?

AGRADECIMENTO

O autor agradece aos alunos da Equipe de Formula SAE da Escola de Engenharia de São Carlos pela gentil e pronta cessão dos dados utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- 1 M., R.R. **Apresentação de estudo de caso sugerido à disciplina SMM0330 – Princípios de análise de falhas**: Flange de roda Formula SAE 2014. 2015.
- 2 DOWLING, N.E. **Mechanical behavior of materials**: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 9780131863125.
- 3 ROTINA de ajuste de distribuição estatística. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.rv_continuous.fit.html. Acesso em 5 de Janeiro de 2020.
- 4 BOYER, H.E. **Atlas of fatigue curves**. American Society for Metals, 1985. ISBN 9780871702142.
- 5 M., R.R. **Repositório de código para problema de confiabilidade em fadiga de roda automotiva**. <https://www.gitlab.com/rahcor/fsae-form>. Acesso em 5 de Janeiro de 2020.
- 6 ROARK, R.J.; YOUNG, W.; BUDYNAS, R. **Roark's Formulas for Stress and Strain**. Mcgraw-hill, 2002. ISBN 9780070725423.
- 7 BECK, A.T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. Elsevier editora, 2019. ISBN 9788535286885.