INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GRAPHES

Une approche par les problèmes

I. CHERCHER UN BON CHEMIN POUR RESOUDRE UN PROBLEME

1°) Problème n°1. Les ponts de la ville de Königsberg

La ville de Königsberg (Prusse orientale) comptait 7 ponts, disposés selon la figure ci-contre.
L'histoire veut que Léonard Euler, en visite dans cette ville, ait eu à résoudre le problème qui préoccupait fortement ses habitants : Est-il possible de trouver un circuit qui emprunte une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ?

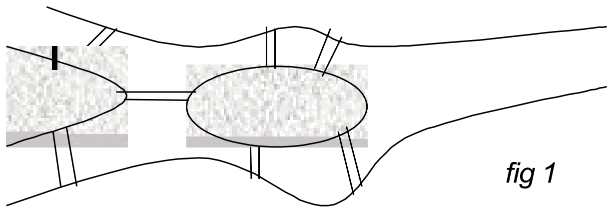


fig 1

Quelques tentatives à la main ne laissent envisager aucune solution ; il s'agit d'aller plus loin que ce simple constat et d'apporter une réponse complète au problème .
Pour cela, l'idée est de commencer par traduire l'énoncé du problème par un schéma :
Chaque lieu de la ville est repéré par sa position géographique : N pour le nord de la ville ; S pour le sud de la ville, O pour l'ouest et I pour île . Chaque pont sera alors représenté par un « trait » reliant ces lieux entre eux.
Cette modélisation s'appelle un graphe : Qu'est-ce qu'un graphe ? C'est un ensemble de sommets et de liens entre 2 sommets que l'on appelle arêtes.

La traduction du problème de départ en termes de propriétés du graphe est alors : «Peut-on circuler sur le graphe à partir d'un sommet en empruntant une fois et une seule chaque arête ? »

*On va oublier pour un temps la situation géographique et s'intéresser à **l'objet mathématique** qu'est le graphe*

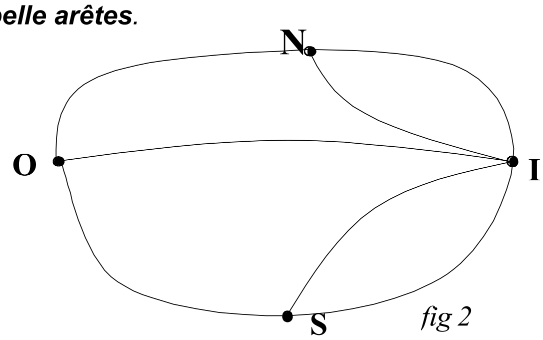


fig 2

2°) Définitions et vocabulaire élémentaires

Graphe : Un graphe est constitué d'un ensemble non vide d'éléments appelés sommets et d'un ensemble de paires (il ne s'agit pas de couples) de divers sommets, appelées arêtes. (ou encore : Un graphe est un ensemble non vide de sommets et d'arêtes joignant deux sommets.)
Exemple :
G={{A,B,C,D},{{A,B},{B,C},{A,C},{C,D}}} est un graphe

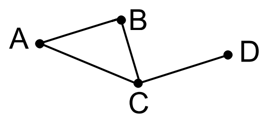


fig 3

Remarque : cette écriture ensembliste est destinée aux enseignants, et n'est pas à donner aux élèves.

Remarque :Dans d'autres cas, deux sommets peuvent être liés par plusieurs arêtes : on les appelle arêtes parallèles. Une arête peut avoir ses extrémités confondues : on parle de boucle. Dans ces deux cas, le graphe considéré est un **multigraphe.**

Exemple de **multigraphe :**

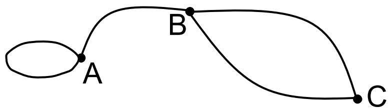


fig 4

*Ici, comme dans le cadre du programme de Terminale ES le terme **graphe** désignera indifféremment un graphe ou un multigraphe. De plus, dans cet exposé, tous les graphes considérés seront finis.*

<u>Degré :</u> Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité. (attention : une boucle augmente de deux le degré d'un sommet).
On parle aussi de rang, ou d'ordre.

Exemple : dans le graphe de la *figure 2*, le degré de N est trois.

<u>Incidente :</u> Une arête ayant un sommet pour extrémité est dite incidente à ce sommet.

Une arête pourra être désignée par ses extrémités s'il n'y a pas d'ambiguïté ; dans le cas contraire on codifie :

Exemples :
Dans la fig 3 , on peut noter : [BC] (ou encore : {B,C})
Dans la fig 2 : Il faut coder les arêtes comme indiqué sur la *figure 5* car il y a des arêtes parallèles : a_2 désigne alors sans ambiguïté une des deux arêtes reliant N et I.

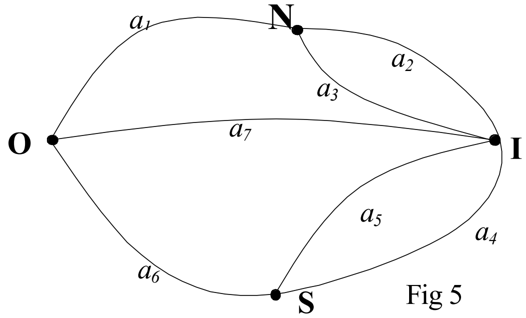


Fig 5

<u>Dans un graphe :</u>

Une chaîne est une suite alternée de sommets et d'arêtes.
Un cycle est une chaîne dont les arêtes sont distinctes et dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
Exemple (fig 5) : O, a_1, N, a_2, I est une chaîne d'extrémités O et I
O, a_1,N, a_2, I, a_7, O est un cycle
Remarque : Un cycle n'a ni origine ni extrémité. On peut donc lister ses composantes à partir de n'importe lequel de ses sommets : I, a_7 ; O ; a_1 , N, a_2, I désigne le même cycle que le précédent.

Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une seule **chaque arête** du graphe.
Un cycle eulérien est un cycle empruntant une fois et une seule **chaque arête** du graphe.

Le problème 1 peut maintenant être posé en ces termes : existe-t-il une chaîne ou un cycle eulérien dans le graphe de la figure 2 ?

<u>3°) Le théorème d'EULER :</u>

a) Un graphe connexe[1] admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf éventuellement 2 *.*

[1] Un graphe est connexe si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant.

b) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

4°) Preuve du théorème

a) La condition est nécessaire :

Cas de la chaîne :
On considère une sommet qui n'est pas une extrémité : chaque fois que la chaîne passe par ce sommet, elle l'atteint par une arête et en repart par une autre. **Comme chaque arête est utilisée dans la chaîne une fois et une seule**, chaque arête incidente à ce sommet peut être associée à un **autre** arête incidente à ce même sommet. Donc tous les sommets sont pairs sauf éventuellement les deux extrémités.
Cas du cycle :
Un cycle n'étant qu'un cas particulier de chaîne, le raisonnement ci-dessus vaut pour un cycle, le cas particulier des extrémités étant exclu.

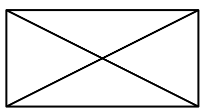
Remarque : la plupart du temps, seule cette propriété "directe" sera mise en œuvre, sous sa forme contraposée. C'est le cas dans le problème qui nous intéresse :

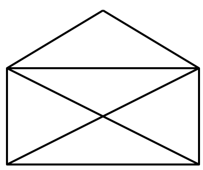
b) Résolution du problème de Königsberg

Revenons à la figure 5 : Il est aisé de vérifier que les quatre sommets sont de degré impair : Il n'existe donc pas de solution au problème !

c) Autres exemples classiques :

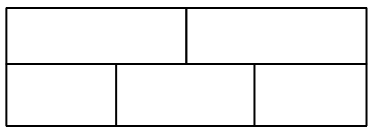
ex1. Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les figures ci dessous ?





ex2.

Peut-on "passer" d'une pièce à l'autre en franchissant une fois et une seule chacune des frontières :
a) sans passer par l'extérieur ?
b) En passant par l'extérieur ?



d) La condition est suffisante :

La partie réciproque du théorème est un peu plus délicate à démontrer. Mais elle présente l'avantage de fournir un procédé de construction d'un cycle eulérien, et à ce titre mérite peut-être d'être exposée aux élèves sur un exemple. De plus, l'utilisation de sous-graphes est efficace pour la résolution de nombreux problèmes, et à ce titre a valeur de méthode.

Notons tout d'abord que le a) du théorème se déduit du b) aisément : Si deux sommets seulement sont de degré impair, on peut les relier provisoirement par une arête et mettre en œuvre le b). le cycle obtenu sera transformé en simple chaîne par suppression de l'arête rajoutée au début.

Soit donc un graphe $\mathcal{G}$ dont tous les sommets sont de degré pair.
Choisissons un sommet A_1 et une arête incidente à A_1, puis considérons l'autre extrémité de cette arête : ce deuxième sommet étant de degré pair, on peut en repartir par une autre arête, et atteindre un «autre» sommet. Si ce dernier est différent de A_1, on peut en repartir à nouveau (car son degré est pair). Ainsi de suite. Comme le graphe possède un nombre fini d'arêtes, la chaîne ainsi formée se referme tôt ou tard en A_1, formant un cycle $\mathcal{C}_1$.

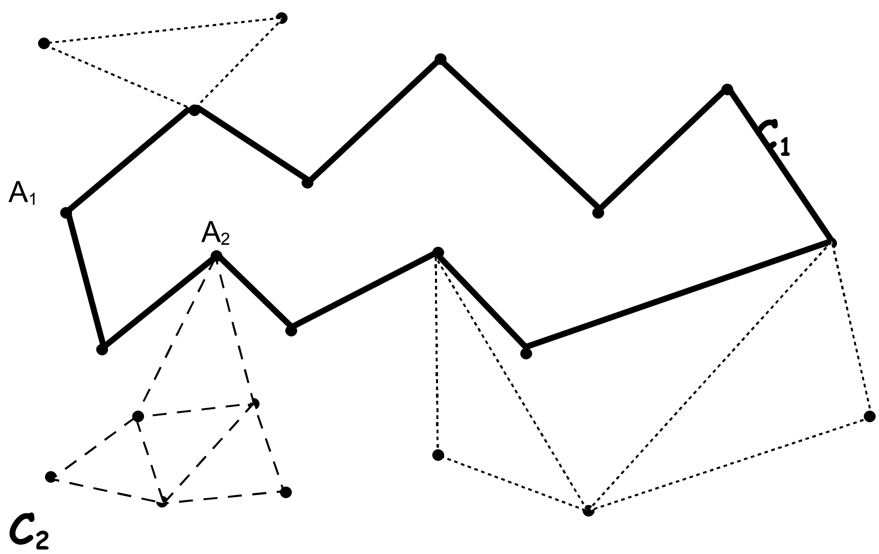


fig 6

Ce cycle peut être eulérien (s'il utilise toutes les arêtes du graphe). Dans le cas contraire, chacune des composantes[2] restantes vérifie les hypothèses du théorème : elle est finie, connexe, et ses sommets sont de degré pair. De plus, comme le graphe $\mathcal{G}$ est connexe, chacune des composantes restantes possède au moins un sommet appartenant à $\mathcal{C}_1$.
Choisissons un tel sommet A_2 pour une des composantes restantes : Le même procédé de construction développé plus haut permet d'obtenir un nouveau cycle $\mathcal{C}_2$ contenant A_2. On peut l'insérer dans le cycle $\mathcal{C}_1$ au niveau de A_2.
L'itération de ce procédé jusqu'à épuisement des arêtes, qui est certain puisque le graphe est fini, permet d'écrire pour $\mathcal{G}$ un cycle eulérien.

[2]Ici :graphes connexes les plus grands possibles, formés d'arêtes non encore utilisées et de leurs sommets. la construction de $\mathcal{C}_1$ laisse par exemple trois composantes.

e) Exemples

- On dispose d'une boîte classique de dominos (sept cases possibles : blanc; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6). Peut-on aligner tous les dominos sur la table en respectant la règle usuelle (deux dominos peuvent être alignés s'ils présentent une case commune). ?
- Un éditeur de jouets éducatifs souhaite commercialiser une variante simplifiée de jeu de dominos : Au lieu des sept cases, les dominos présenteront 4 couleurs : bleu, vert ; jaune ; rouge. Les enfants (ou leurs parents..) pourront-ils aligner tous les dominos de la boîte sur la table ?

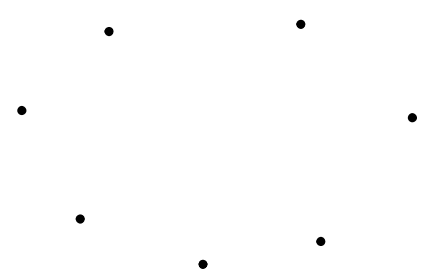
II. ANALYSER LES POSSIBILITES D'ECHANGES

1°) Problème n°2

Les sept collèges de la ville possèdent chacun une équipe de hand-ball. Les professeurs d'EPS souhaitent organiser des rencontres entre ces équipes dans le courant du mois de mai, de telle sorte que chaque équipe en rencontre trois autres. Quel planning de rencontres peut-on proposer aux organisateurs ?

Ici encore, on peut commencer par une recherche empirique de solution :
L'équipe 1 rencontrera les équipes 2 , 3 et 4
L'équipe 2 rencontrera les équipes 1, 4 et 5
…………..
La méthode n'aboutissant pas, on va essayer de traduire l'énoncé par un graphe. La difficulté consiste alors à choisir ce que représenteront les sommets, et les arêtes. De façon assez naturelle, les arêtes, qui lient deux sommets, pourront être associées aux matchs, et les sommets aux équipes.

La traduction du problème en terme de propriété des graphes est alors : Peut-on dessiner un graphe comprenant sept sommets, tous de degré trois ?



Là encore, des tentatives diverses n'aboutissent pas.
On peut alors essayer de dessiner un tel graphe pour trois, quatre, ou cinq sommets, et tenter quelque(s) conjecture(s).
On voit qu'il s'agit d'étudier les liens entre le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, et les degrés des sommets.

De façon générale, l'observation de quelques graphes simples permet de formuler assez rapidement ces propriétés, qui se démontrent aisément :

2°) Propriétés relatives aux degrés des sommets :

1) La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe.
2) La somme des degrés des sommets d'un graphe est un nombre pair.
3) Dans un graphe, il y a un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.

Preuves :

1): Chaque arête du graphe incrémente de deux la somme des degrés. D'où le résultat.
2): se déduit de 1) immédiatement

3) : Si tel n'était pas le cas, la somme des degrés serait impaire. En effet la somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire, et si l'on ajoute à cette somme celle des degrés des sommets pairs, qui est paire, on obtient à nouveau un nombre impair.

3°) Résolution du problème n°2 :

L'impossibilité devant laquelle nous nous sommes trouvés pour dessiner le graphe s'explique maintenant : si chaque équipe en rencontre trois autres, la somme des degrés du graphe associé à la solution sera égale à : 3×7. Or 21 est un nombre impair ; nous pouvons donc conclure que le problème n'a pas de solution.

4°) Autres exemples classiques :

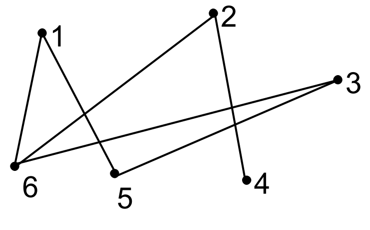
Ex 1
Montrer que le nombre de personnes vivant ou ayant vécu sur terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair..
Ex 2
Un graphe a *n* sommets et chacun est de degré au moins 2. Quel nombre minimum d'arête(s) contient ce graphe ?

III. GERER LES INCOMPATIBILITES

1°) Problème n°3 :

Une entreprise qui fabrique six sortes de produits chimiques différents (notés P_1, P_2, P_3,P_4, P_5, P_6) doit en assurer le transport par train. Ces produits sont en petite quantité mais ne peuvent être tous placés dans le même wagon pour des raisons de sécurité (le contact entre certains de ces produits peut provoquer des réactions explosives). Plus précisément :
P_1 ne peut être transporté avec P_2, P_3, ou P_4. .P_2 ne peut être transporté avec P_3 ou P_5. P_3 ne peut être transporté avec P_4. P_5 ne peut être transporté avec P_6.
Combien de wagons sont-ils nécessaires au transport des six produits ?
Ici une solution empirique peut être trouvée : Dans un premier wagon on transporte P_1 et P_5 ; dans un second P_2 , P_4 et P_6, et dans le troisième P_3.. Mais comment s'assurer que l'on a trouvé la solution la plus économique ? En d'autres termes, comment prouver que trois wagons au moins sont absolument nécessaires ? Un raisonnement du type :"P_1, P_2, et P_3 sont deux à deux incompatibles, trois wagons au moins sont donc nécessaires" pourra ici être efficace. Mais il n'est pas généralisable à d'autres situations éventuellement plus complexes. Nous allons donc une fois encore avoir recours aux graphes.
Quel type de graphe envisager ?

On aurait envie de relier par des arêtes des sommets (produits chimiques) compatibles. Examinons le graphe ci-contre, représentant cette situation : il semble difficile de traduire la question initiale en termes de propriété de ce graphe.



*La question du **choix du modèle** est ici évidemment primordiale.*
De ce point de vue, la résolution de problèmes par le recours à la théorie des graphes contribue à développer chez les élèves des compétences essentielles dans le domaine mathématique : choisir 'un modèle, choisir un outil, reconnaître ses erreurs,..

*En fait, l'idée ici est de relier par une arête les sommets représentant des produits incompatibles : Le graphe obtenu est appelé **graphe d'incompatibilité.***

La question, en termes de propriété du graphe, se pose maintenant ainsi : Combien de familles de sommets doit-on créer au minimum, si l'on veut que deux sommets liés par une arête n'appartiennent jamais à la même famille ?
Nous allons considérer que chaque famille est caractérisée par une couleur , et développer quelques éléments de théorie à ce sujet.

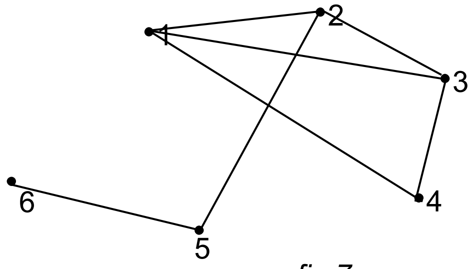


fig 7

2°) Définitions et résolution du problème n°3 :

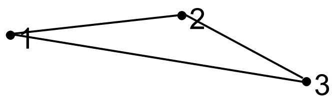
Sommets adjacents:
Dans un graphe, deux sommets liés par une arête sont dits **adjacents.**

Coloration :
Une **coloration d'un graphe** consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

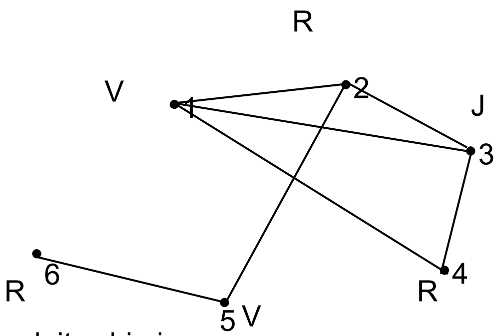
Nombre chromatique :
Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration, c'est à dire le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.
Remarque : l'existence de ce nombre est assurée car le graphe est fini.

Reformulons maintenant la question du problème n°3 : " Quel est le nombre chromatique du graphe de la figure 7 ?"
Disons tout de suite qu'il n'existe pas de formule donnant le nombre chromatique d'un graphe. Le plus souvent on déterminera ce nombre par double encadrement (il est plus petit que…et plus grand que…), et en exhibant une coloration utilisant un nombre de couleurs égal au minorant. Pour le graphe de la figure 7, par exemple, on peut prouver que son nombre chromatique est au moins égal à trois, et trouver une coloration utilisant trois couleurs (elle n'est pas unique!!) :

Soit en effet le graphe ci-contre, extrait de la figure 7 (on dit que l'on a un sous graphe de la figure 7). Trois couleurs sont nécessaires à sa coloration, puisque chaque sommet est adjacent aux deux autres. Le nombre chromatique du graphe de la figure 7 est donc au moins égal à trois.



Donnons nous donc trois couleurs : vert ; rouge ; jaune. Le graphe entier peut être coloré avec ces trois couleurs, comme le montre le schéma ci-contre



Résolution du problème n°3 :
Trois wagons sont nécessaires au transport des produits chimiques.

L'étude de cet exemple montre l'utilité qu'il y a, dans les problèmes de coloration, à reconnaître certains types de graphes contenus dans le graphe donné. Nous allons donc étudier quelques graphes particuliers.

<u>3°)Nombre chromatique de quelques graphes particuliers :</u>

Dans ce paragraphe, g désignera le nombre chromatique du graphes considéré.

Nous pouvons regrouper en deux grandes catégories ces graphes de référence :

a) Les graphes complets

Ce sont des graphes dans lesquels chaque sommet est adjacent à tous les autres

<u>graphes complets à :</u>

2 sommets — 3 sommets — 4 sommets — 5 sommets

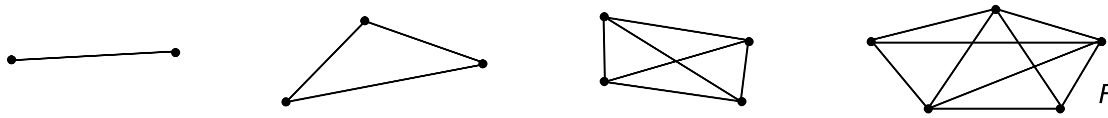


Fig 8

$g = 2$ — $g = 3$ — $g = 4$ — $g = 5$

Le nombre chromatique g est exactement égal au nombre de sommets. En effet, si le graphe contient n sommets, $g \leq n$. Or, chaque fois qu'une nouvelle couleur est utilisée pour un sommet, elle ne peut plus l'être pour aucun autre, puisque ce sommet est adjacent à tous les autres. Donc $g \geq n$.

b) Graphes qui sont des cycles élémentaires :

Un ***cycle élémentaire*** *est un cycle qui passe une fois et une seule par chacun des sommets.*

(remarque concernant le vocabulaire : selon les auteurs, un « cycle » est une chaîne fermée ou bien une chaîne fermée d'arêtes toutes distinctes ; pour les premiers, une chaîne fermée d'arêtes toutes distinctes est appelée « cycle simple », et pour les seconds, un cycle dans lequel certaines arêtes sont utilisées plusieurs fois est un « pseudo-cycle » … ! :Considérons par exemple la chaîne A,B,C,A,B,A de la figure 3 : c'est une chaîne fermée qui utilise trois fois l'arête [AB]. Ce n'est donc pas un cycle simple. En revanche, la chaîne A,B,C,A est un cycle simple. Cet exemple nous montre aussi que deux chaînes différentes peuvent avoir le même support)

<u>Cycles à :</u>

<u>3 sommets</u> — <u>4 sommets</u> — <u>5 sommets</u> — <u>*n* sommets</u> (<u>*n* pair</u>, <u>*n* impair</u>)

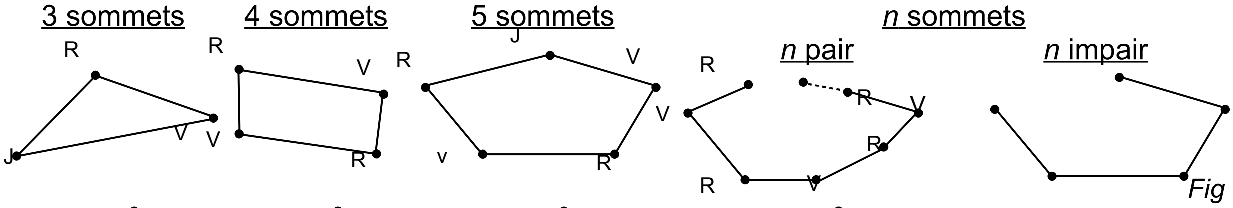


Fig 9

$g = 3$ — $g = 2$ — $g = 3$ — $g = 2$ — $g = 3$

Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire est 2 si son nombre de sommets est pair, et trois sinon.

Nous allons maintenant établir les deux propriétés qui nous permettront de donner un encadrement du nombre chromatique d'un graphe :

<u>4°) Propriétés:</u>

a) Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à *r+1*, où *r* est le plus grand degré de ses sommets.

preuve : *Soit un graphe, et* r *le degré maximum de ses sommets. Donnons nous une palette de* (r+1) *couleurs.*

Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant : ce sommet est adjacent à r sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à r. *Il reste donc* ***au moins*** *une couleur non utilisée dans la palette, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.*

b) Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes[3].

Ce résultat, qui découle de la définition même du nombre chromatique, est celui que nous avons utilisé pour résoudre le problème n°3.

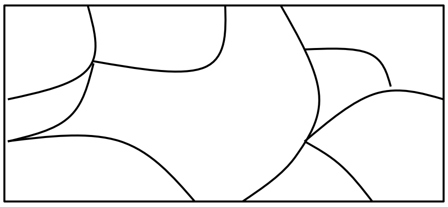
5°) Exemples classiques et exercices

ex1 : Dessiner cinq graphes tels que le degré maximum de leurs sommets soit 5 et le nombre chromatique respectivement 2, 3, 4 5 et 6.

ex 2

Combien de couleurs sont-elles nécessaires à la coloration de la carte ci-contre sachant que :

- deux "pays" limitrophes ne doivent pas être colorés de la même couleur.
- Un point n'est pas considéré comme une frontière.



ex 3

Le directeur d'un petit zoo veut réorganiser l'habitat de telle sorte que les animaux cohabitent dans des enclos plus vastes. Malheureusement, il n'est pas possible de laisser tous les animaux ensemble dans un seul enclos, car certains sont les prédateurs des autres ! Le tableau ci-contre indique, parmi les dix races d'animaux que possède le zoo, lesquelles sont les prédateurs ou les proies des autres. Combien d'enclos le directeur du zoo doit-il prévoir ?

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a		*			*					*
b	*			*			*			
c								*		*
d		*				*				
e	*								*	
f				*						*
g		*								
h			*						*	
i					*			*		*
j	*		*			*			*	

ex 4

Sept agences de voyage Romaines proposent des visites de monuments et lieux touristiques : Le Colisée, le Forum romain, Le musée du Vatican et les thermes de Caracalas.

Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour. La première Compagnie fait visiter uniquement le Colisée ; la seconde le Colisée et le musée du Vatican; la troisième les thermes de Caracalas; la quatrième le musée du Vatican et les thermes de Caracalas ;la cinquième le Colisée et le Forum romain; la sixième le Forum romain et les thermes de Caracalas ; la septième le musée du Vatican et le forum romain.
Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

ex 5

Une école d'ingénieurs doit organiser les examens des enseignements optionnels de ses élèves de troisième année. Les différente options sont : Français (F); anglais (A) ; mécanique (M) ; sport (S) ; Internet (I), et dessin industriel (D).
Certains étudiant ont choisi plusieurs options, et les regroupements existants sont : (F,A,M);(D,S); (I,S);(I,M).
Combien de demi-journées seront-elles nécessaires à cette organisation sachant que la durée de chaque épreuve est d'une demi journée ?

6°) Algorithme de coloration de Welch et Powell :

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne *coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).*

[3] Sous ensembles de sommets et d'arêtes les reliant (voir page précédente)

Etape 1
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
On obtient une liste ordonnée de sommets X_1, X_2,..X_n tels que degré (X_1)$\geq$ degré (X_2)… $\geq$ degré (X_n).
Etape 2
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.
Etape 3
S'il reste de sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.
Sinon, la coloration est terminée.

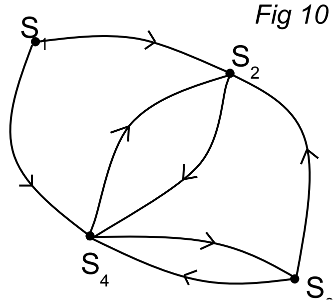
Application : Utiliser cet algorithme pour colorer les graphes des exercices précédents.

IV. DECRIRE ET COMPTER LES CHEMINS

1°) Problème n°4 :

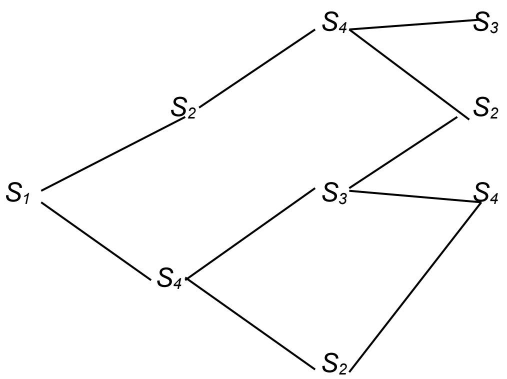
Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville. Il est composé de chemins à sens unique, et de quatre points de repère tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur le schéma ci-contre.
Sur le schéma du parcours de santé, S_1 désigne l'entrée et S_4 la sortie. On fera l'hypothèse que tout trajet commence en S_1 et se termine en S_4.

Fig 10



Combien y a-t-il de trajets différents de
1,5 km ?
2 km ?
2,5 km ?

Remarque 1 : On peut commencer par un dénombrement « à la main » des trajets : S_1 ,S_4 ,S_2 ,S_4 est trajet de 1,5 km ; E,S,C,S aussi…il ne semble pas y en avoir d'autres…
On peut aussi tenter d'utiliser un arbre :



Un tel arbre permet de dénombrer deux trajets de 1,5 km reliant S_1 à S_4, mais les limites de ce procédé sont bien visibles : il suffit d'imaginer la recherche des trajets de 5 kilomètres, ou encore l'étude d'un parcours de santé qui comporterait 10 points de repère…

Remarque 2 : Le schéma du parcours fourni ressemble à l'un des graphes étudié dans les paragraphes précédents, à cette différence près que les arcs sont ici « à sens unique ». Un complément de théorie est nécessaire :

2°) Graphes orientés : Définitions

Graphe orienté: Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées, c'est à dire que chacune relie deux sommets **dans un certain ordre.** Le premier sera appelé **origine** de l'arête, et le second **extrémité**.

Remarque 1 : Dans un graphe orienté, les arêtes peuvent être désignées par des couples (s'il n'y a pas d'arêtes parallèles). Le graphe de la figure 10 peut ainsi être noté : $\{\{S_1,S_2,S_3,S_4\},\{(S_1, S_2), (S_1, S_4),(S_2, S_4),(S_3, S_2),(S_3, S_4),(S_4, S_2),),(S_4, S_3)\}\}$, écriture à comparer avec celle de la première page.

Remarque 2 : Tout graphe peut être lu comme un graphe orienté : en effet une arête non orientée peut être lue comme étant une paire d'arêtes d'orientations différentes. Pour cette raison, on peut considérer si besoin est tout graphe non orienté comme un cas particulier de graphe orienté.

Longueur d'une chaîne : La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes de cette chaîne. Par exemple, dans le graphe de la figure 10, la chaîne S_1, S_4, S_2, S_4 a pour longueur 3.

Notre problème s'énonce maintenant de la façon suivante : Combien existe-t-il de chaîne(s) de longueur 3 (ou 4, ou 5) reliant S_1 à S_4 ?

3°) Matrice associée à un graphe :

Définition : La matrice associée à un graphe à *n* sommets S_1 ,S_2 ,…S_n est la matrice carrée M=$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = k \text{ si } k$ est le nombre d'arêtes de S_i vers S_j.

A titre d'exemple, la matrice associée au graphe de la *figure 10* est M avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui se lit : M = $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Il y a une arête de S_1 vers S_2

On peut faire au sujet de cette matrice un certain nombre de remarques telles que :
- *La somme des termes est égale au nombre d'arêtes du graphe orienté.*
- *La première colonne est remplie de zéros : c'est la conséquence du fait qu'aucune arête n'a S_1 pour extrémité.*
- *Il y a deux 1 sur la dernière ligne : cela traduit le fait que le sommet S_4 est à l'origine de deux arêtes.*
- *La somme des termes de la quatrième colonne est 3 : interpréter ce nombre*
- *……*

La matrice associée à un graphe indique les chaînes de longueur 1 liant deux sommets quelconques du graphe. Cherchons à exprimer les chaînes de longueur 2 à l'aide de chaînes de longueur 1 : Pour aller de S_1 à S_3 en deux étapes, par exemple, il faut pouvoir aller de S_1 à un sommet quelconque S_i du graphe, puis de ce sommet à S_3. Il s'agit donc de dénombrer, pour tout i allant de 1 à 4, les arêtes d'origine S_1 et d'extrémité S_i et celles d'origine S_i et d'extrémité S_3.
Pour un i donné, le produit de ces deux nombres sera le nombre de chaînes de longueur 2, d'origine S_1 et d'extrémité S_3, passant par S_i.
La somme des nombres obtenus en faisant varier i de 1 à 4 est exactement le nombre de chaînes de longueur 2, d'origine S_1 et d'extrémité S_3. Si l'on note b_{13} ce nombre, on a : $b_{13} = \sum_{1\leq i\leq 4} a_{1i}a_{i3}$. On reconnaît la formule de calcul du terme de la première ligne, troisième colonne, de la matrice $M^2 = M \times M$.

4°) Dénombrement des chaînes à l'aide d'une matrice:

Théorème :

Soit M la matrice associée à un graphe ***G***. Le coefficient d'indice (ij) de la matrice M^n est le nombre de chaînes de longueur *n* reliant S_i à S_j.

Démonstration :

La démonstration de ce théorème peut être admise comme généralisation « intuitive »du raisonnement précédent fait pour n = 2 et m=4. Le programme ne demande pas de démonstration de ce résultat.

Par récurrence sur *n*.

Soit un graphe ***G*** admettant *m* sommets $S_1,\ldots.S_m$, et de matrice associée M.

- Pour *n* = 1, le résultat vient de la définition même de M.
- Supposons le résultat vrai au rang *n* ($n \geq 1$) et posons : $M^n = (a_{ij})$; $M = (b_{ij})$;

  $M^{n+1} = (c_{ij})$. *(i et j allant de 1 à m).* Pour tout (*ij*) on a $c_{ij} = \sum_{1\leq k\leq m} a_{ik}b_{kj}$.

  Or, d'après les hypothèses, a_{ik} est le nombre de chaînes de longueur *n* reliant S_i à S_k, et b_{kj} est le nombre d'arêtes reliant S_k à S_j. $a_{ik}b_{kj}$ est donc le nombre de chaînes de longueur *n+1* reliant S_i à S_j et ayant S_k pour avant dernier sommet. La somme pour *k* allant de 1 à *n* des $a_{ik}b_{kj}$ est donc exactement le nombre de chaînes de longueur *n*+1reliant S_i à S_j.
- Le résultat est vrai pour 1 et vrai pour *n+1* s'il est vrai pour $n \geq 1$ *:* Le théorème est bien démontré.

5°) Résolution du problème n°4 :

Le problème peut maintenant être posé dans les termes suivants :

« Quel est le terme d'indice (1 ,4) de la matrice M^3, où M est la matrice associée au graphe de la figure 10 ? Quel est le terme d'indice (1,4) de M^4, de M^5 ? »

Les calculs donnent : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: Il y a donc deux chaînes de longueur 3 reliant S_1 à S_4.

On peut maintenant affirmer qu'il y a deux trajets de 1,5 km allant de S_1 à S_4.

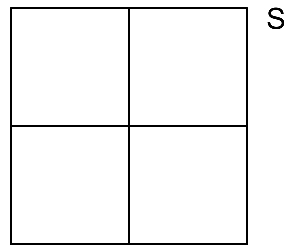
Remarques :

- *La matrice M^3 donne le nombre de chaînes, mais ne les décrit pas. On pourrait cependant obtenir ces chaînes en « remontant » dans les calculs et en observant de quelle façon ce 2 a été obtenu.*
- *Il est ici inutile de calculer tous les termes de M^3, puisqu'on n'en cherche qu'un seul. Mais était-il nécessaire de calculer tous les termes de M^2 ?*
- *De le même façon, quels sont les termes de M^3 nécessaires au calcul du terme (1,4) de M^4 ? Même question pour M^4 et M^5 : le produit de matrices n'est pas commutatif, mais il est associatif. Dans le cas particulier qui nous intéresse – élévation à une puissance – cette propriété donne beaucoup de souplesse pour les calculs :*
  - *Le terme (1,4) de M^4s'obtient en faisant le produit de la première ligne de M^3 par la quatrième colonne de M la première ligne de M^3 aurait donc suffit) : il y a 3 trajets de 2 kilomètres.*
  - *Le terme (1,4) de M^5 s'obtient en faisant le produit de la première ligne de M^3 par la dernière colonne de M^2 (la première ligne de M^3 aurait donc suffit ici aussi) : il y a 5 trajets de 2,5 kilomètres..*

$$M^4 = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & 3 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}. \qquad M^5 = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & 5 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

6°) Exercices

Ex 1 :



Dénombrer les trajets de E à S sur l'échiquier ci-contre, sachant que seuls les déplacements de gauche à droite (→) et de bas en haut (↑) sont possibles.

Ex 2 : Dans le parc du problème n°4, on a réaménagé le parcours de santé de telle sorte que tous les chemins sont maintenant praticables dans les deux sens. Un sportif décide d'emprunter chaque jour un nouveau trajet de 2 kilomètres : combien de jours peut-il tenir cet engagement ?

Ex 3 : a) Que peut-on dire d'un graphe dont la matrice associée M est telle que M^2 ne contienne aucun 0 ?

b) Que peut-on dire d'un graphe dont la matrice associée M est telle que $(M+M^2+M^3+M^4)$ ne contienne aucun 0

V. TROUVER LE MEILLEUR CHEMIN

1) Problème n°5

Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train. D'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-contre :

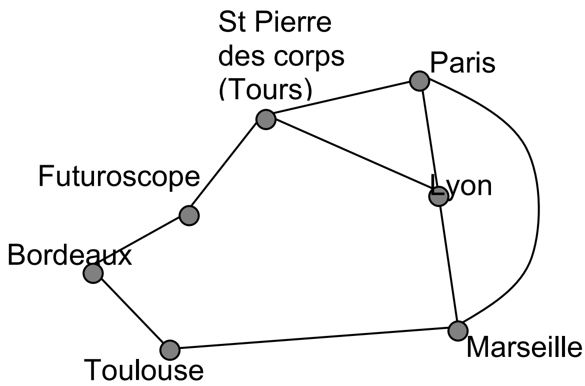


fig 11

Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille – Lyon : 1h50	Lyon – Paris : 2h15	St Pierre des corps – Futuroscope : 30 '
Marseille – Paris :3h	Lyon – St Pierre des corps : 3h	Futuroscope - Bordeaux : 2h10
Marseille -Toulouse : 3h	Paris – St Pierre des corps : 1h	Toulouse – Bordeaux : 2h10

Quel trajet conseilleriez-vous à ce voyageur ? (On négligera dans cet exercice les temps de correspondance).

*Il semble naturel de porter sur le schéma précédent les indications fournies par le tableau. Le graphe obtenu sera appelé **graphe pondéré.***

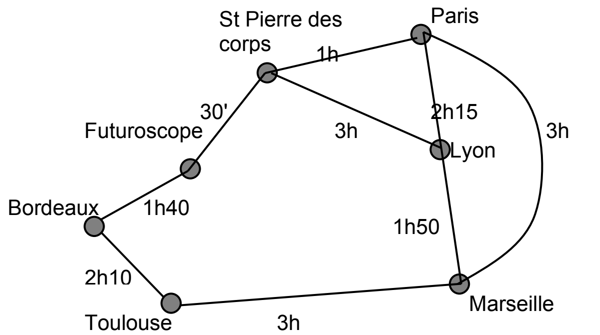


fig 12

2) Définitions :

Graphe pondéré : On appelle **graphe pondéré**, un graphe dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé **poids.**
Dans les exemples étudiés ici, les poids affectés à chaque arête seront toujours positifs. Cette condition est assez banale lorsque les poids représentent par exemple des coûts, des distances, ou des temps. Elle n'est pas toujours réalisée lorsque par exemple les poids représentent des flux.

Poids d'une chaîne : C'est la somme des poids des arêtes qui constituent la chaîne. On parlera aussi, selon le contexte, de **longueur de la chaîne.**

Plus courte chaîne d'un sommet à un autre : C'est, de toutes les chaînes qui relient deux sommets, celle de longueur minimale.
Remarque 1 : L'existence de cette chaîne est assurée si tous les poids sont positifs. Dans le cas contraire, il faudrait exiger que le graphe soit sans cycle.
Remarque 2 : A priori, cette chaîne n'est pas unique.
*Remarque 3 : On définirait de même la chaîne **la plus longue** (pour des graphes sans cycle).*

Notre problème n°5 s'énonce maintenant ainsi : Dans le graphe de la figure 11, déterminer la plus courte chaîne reliant Marseille au Futuroscope.

Le nombre de chaînes reliant ces deux villes est limité, du moins si l'on élimine les chaînes contenant des cycles, qui ne peuvent être minimales. On peut en dresser la liste, calculer leur poids respectifs, et déterminer la solution du problème : Marseille, Paris, Saint Pierre des Corps, Futuroscope (4h30 sans tenir compte de la correspondance)
Intuitivement, on ne procèdera pas ainsi, mais "par étapes successives". Par exemple, on constatera que le passage par Paris, qu'il soit ou non retenu finalement, est plus court s'il ne passe pas par Lyon. La chaîne (Marseille; Lyon; Paris; Saint Pierre des Corps; Futuroscope) peut ainsi être éliminée rapidement.
La règle très simple appliquée ici est à la base de tout algorithme de recherche de plus courte chaîne et peut être écrite ainsi :
Une plus courte chaîne [X_0 X_n] entre deux sommets X_0 et X_n d'un graphe est constituée de plus courtes chaînes reliant deux sommets de la chaîne [X_0 X_n]. (En d'autres termes : les sous-chaînes des plus courtes chaînes sont des plus courtes chaînes. Cette règle, appelée parfois « principe d'optimalité », se démontre sans difficulté par l'absurde)

*La recherche de la plus courte chaîne entre deux sommets X_0 et X_n d'un graphe passe alors par les recherches successives des plus courtes chaînes reliant X_0 à tous les sommets du graphe susceptibles de se trouver sur le trajet. Reste à choisir **dans quel ordre** on liste les sommets intermédiaires. C'est essentiellement sur ce point que les méthodes varient.*

3) Exemples d'algorithmes de recherche de plus courte chaîne

Nous présenterons ici deux algorithmes très classiques :
L'Algorithme de FORD pour les graphes ordonnancés et l'Algorithme de DIJKSTRA-MOORE pour les graphes pondérés par des poids positifs.

a) Algorithme de FORD pour les graphes ordonnancés :

Un des plus anciens algorithmes de recherche de la plus courte chaîne est l'algorithme de FORD. Nous présentons ici sa version "améliorée" (......), qui s'appuie sur un ordonnancement préalable du graphe.

Cet algorithme s'applique dans les cas de graphes orientés sans cycle.

a-1 : sur un exemple

Reprenons le graphe de la figure 11. Notre voyageur, qui cherche à atteindre le Futuroscope, peut orienter chaque arête en fonction de son objectif :

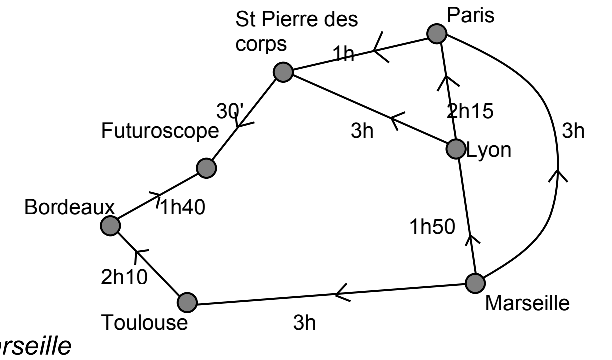


fig 13

Paris peut être atteint
- *Soit directement depuis Marseille*
- *Soit après un changement à Lyon*

En revanche, Lyon ou Toulouse sont nécessairement atteints en une seule étape.
*On dira que Lyon et Toulouse sont **de niveau 1**, et que Paris est **de niveau 2.***

Définitions
- Dans un graphe orienté sans cycle pour lequel on a choisi un sommet origine E, considérons un sommet X : le **niveau** du sommet X est le nombre **maximum** d'arêtes de toutes les chaînes reliant E à X. Le niveau de E est zéro.
- Un graphe dont les sommets ont été classés par niveau est appelé graphe **ordonnancé.** En général, on modifie alors sa représentation graphique de façon à faire apparaître les niveaux .

Dans notre exemple, on voit que :
- *Marseille est de niveau 0.*
- *Lyon et Toulouse de niveau 1*
- *Paris et Bordeaux de niveau 2*
- *St Pierre des corps de niveau 3*
- *Le Futuroscope de niveau 4*

Voici une nouvelle représentation du graphe , dans laquelle les sommets ont été rangés par niveau :

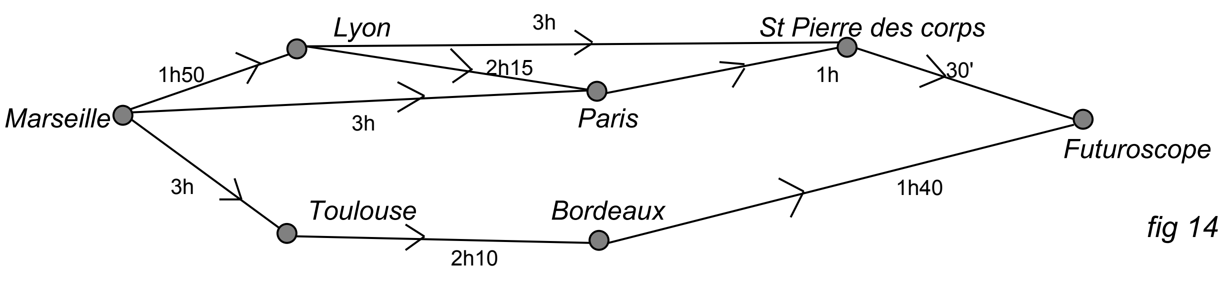


fig 14

a-2 : Algorithme de FORD pour la recherche de la plus courte chaîne :

Etape 1 : *Affecter le poids 0 au sommet de niveau 0*
Etape 2 : *Pour chaque niveau, pour chaque sommet X de ce niveau, affecter à X le poids :*
Min(poids d'un des sommets précédent + poids de l'arête reliant ce sommet à X)

Etape 3 : *La chaîne de poids minimum se lit « à l'envers » : c'est celle (ou l'une ce celles) qui réalise(nt) le poids du dernier sommet.*
remarque : l'algorithme écrit ici est « relativement simple ».La question de l'ordonnancement des taches a été éludée, ce qui simplifie notablement le travail, et la phase d'initialisation et de définition de la variable affectée à chaque sommet est écourtée. Il s'agit uniquement de proposer une première pratique du procédé algorithmique.

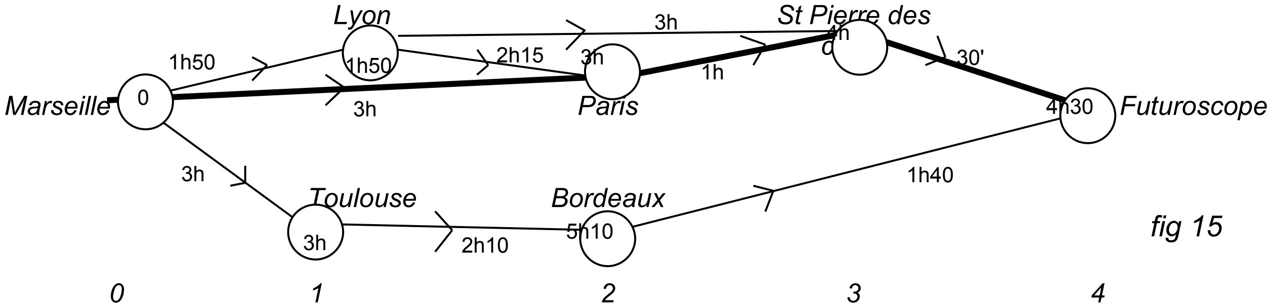


fig 15

Réponse au problème n°5 :
Le trajet le plus court en temps pour relier Marseille au Futuroscope (hors temps de correspondance) par TGV est : Marseille –Paris- St Pierre des corps – Futuroscope (4h 30) .
Remarque : Ce trajet n'est optimal qu'en regard du seul critère de rapidité. Il n'est probablement pas le plus économique en coût, ni le plus court en kilomètres.

b) Algorithme de DIJKSTRA-MOORE

(pour les graphes pondérés par des poids positifs).

b-1 : sur un exemple

Reprenons notre problème, énoncé à l'aide de la *figure 12.*
Le voyageur, partant de Marseille, peut se rendre « directement » à Paris (3h), à Lyon (1h50), ou à Toulouse (3h). Il code ces indications sur son schéma, en indiquant de plus pour chacune de ces villes l'initiale de la ville de laquelle il vient.
Ces trois villes seront dites « provisoirement marquées ».
(On écrira M pour Marseille ; L pour Lyon ; P pour Paris ; S pour St Pierre des corps ; F pour Futuroscope ; B pour Bordeaux, et T pour Toulouse)

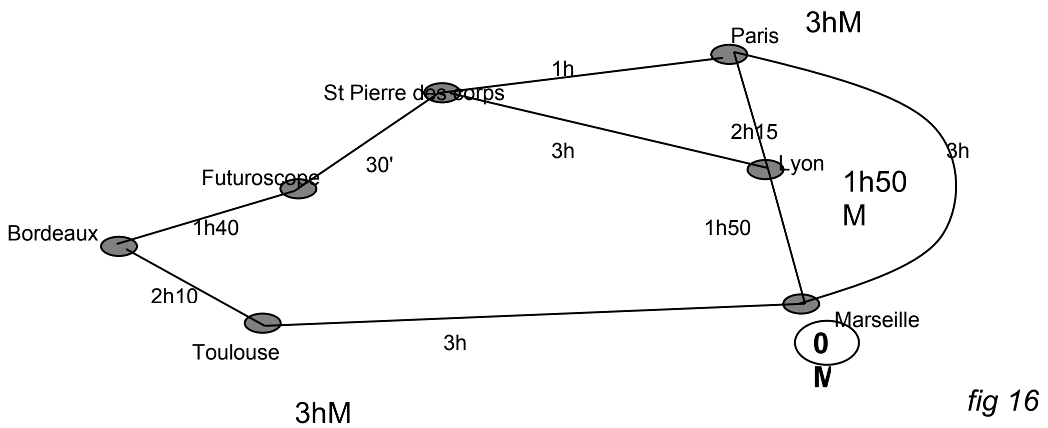


fig 16

Le temps le plus court inscrit à cette étape est 1h50 (si l'on excepte, bien entendu, 0 pour Marseille).
Aucune autre ville n'étant accessible depuis Marseille en un temps plus court, on peut assurer **qu'aucun autre trajet, passant par une autre ville, ne relie Marseille à Lyon en un temps plus court.** 1h50 est le temps minimum d'un trajet Marseille-Lyon.

Ce temps sera appelé **distance** de Marseille à Lyon, et noté **dist(L)**. Lyon sera dite **marquée (définitivement).**

Notre voyageur peut alors considérer les villes accessibles depuis Lyon : pour chacune, trois cas peuvent se présenter :

- Cette ville X n'était pas provisoirement marquée : on la marquera provisoirement du temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]).
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, mais le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est inférieur au temps du marquage provisoire : on le remplace.
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, et le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est supérieur au temps du marquage provisoire : on garde le marquage provisoire. (cf fig 17)

Dans notre exemple, les temps pour Paris et Toulouse restent inchangés, et un temps pour Saint Pierre des Corps apparaît.

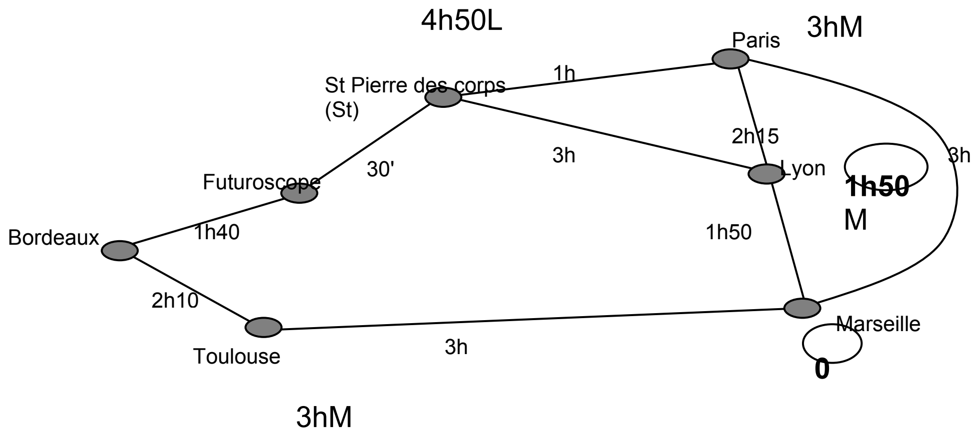


fig 17

A ce stade, parmi les villes provisoirement marquées, Paris et Toulouse ont les distances minimales (3h). Paris, par exemple, ne pourra donc pas être reliée à Marseille en moins de 3 heures.

Le même raisonnement que précédemment conduit à marquer (définitivement) Paris, et à modifier le temps de St Pierre des Corps, puisque dist(P)+poids de l'arête[PS]=4h, et que 4h<4h30.

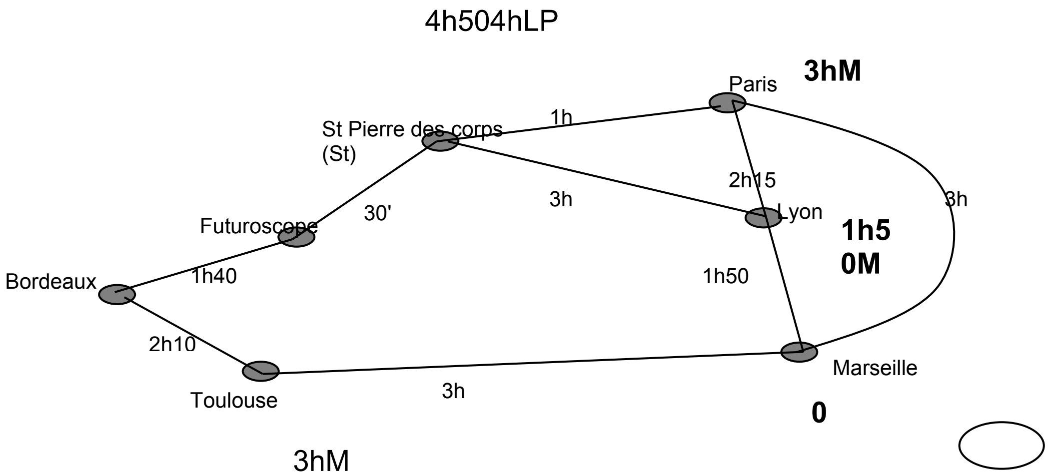
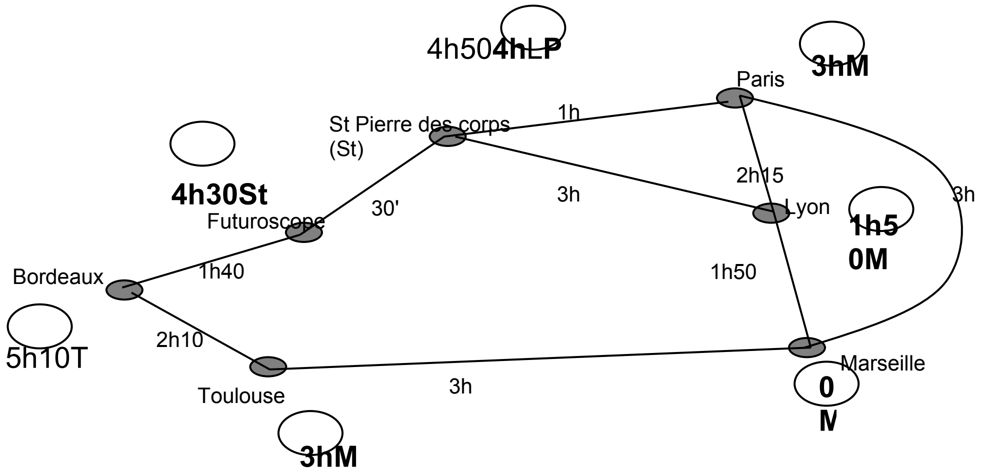


fig 18

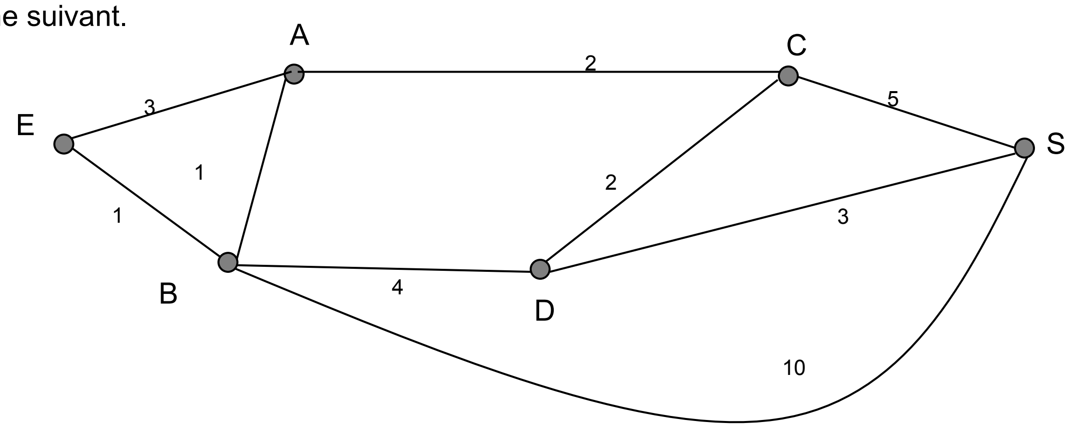
On marque de même, successivement, Toulouse, puis Le Futuroscope, puis Bordeaux :



Le Futuroscope a été marqué (définitivement) avant Bordeaux : le temps pour atteindre Bordeaux étant supérieur à celui mis pour atteindre Poitiers par un autre trajet, il est inutile d'envisager de passer par Bordeaux.
Le trajet le plus court (en temps) se lit *à l'envers* : il suffit de repérer les villes par lesquelles on est arrivé à chaque étape : Futuroscope ← St Pierre des Corps ←Paris ←Marseille.
St Pierre des Corps est le **prédécesseur** du Futuroscope. (de même, Paris est le prédécesseur de St Pierre des Corps, et Marseille celui de Paris)
Réponse au problème n°5 : Fort heureusement, la réponse est la même que celle obtenue par l'algorithme de FORD : Marseille-Paris-St Pierre des Corps-Futuroscope (4h 30).

b-2 : autre exemple

Appliquer la méthode ci-dessus pour rechercher le chemin minimal reliant E à S dans le graphe suivant.



Remarque : En vue de la préparation à la compréhension de l'algorithme qui suit, à la première étape E et les sommets adjacents à E seront traités comme dans le premier exemple, mais les autres sommets seront eux aussi affectés d'une distance provisoire. La place du prédécesseur provisoire sera marquée par un « ? ».

Par exemple, à la première étape, C sera marqué : $+\infty$?

Formalisons la méthode utilisée ci dessus :

b-3 : Algorithme

(*de recherche d'un chemin minimal entre deux sommets E et S d'un graphe pondéré positivement)*

- *On appelle Σ un ensemble dans lequel on met les sommets au fur et à mesure de leur marquage définitif.*
- *A chaque sommet X on associe le couple : (dist(X), P(X)), dans lequel dist(X) représente la distance (provisoire ou définitive) de E à X, et P(X) le prédécesseur de X.*

Initialisation :

- *Attribuer au sommet E le couple (0,E)*
- *Attribuer aux sommets adjacents à E le couple (poids de l'arête qui le relie à E, E)*
- *Attribuer aux autres sommets le couple (+∞, ?)*

Mettre E dans Σ.

Fonctionnement :

Tant que tous les sommets ne sont pas dans Σ, ou que le sommet S n'est pas affecté de la plus petite distance provisoire :

- *Choisir parmi les sommets n'appartenant pas à Σ un de ceux dont la distance provisoire est minimale. Soit X ce sommet.*
- *Mettre X dans Σ.*
- *Pour chacun des sommets Y_i qui lui sont adjacents et qui ne sont pas dans Σ*
    - *Calculer s=distance de X + poids de l'arête [XY_i]*
    - *Si s est inférieur à la distance provisoire de Y_i, attribuer à Y_i le couple (s, X)*

***Conclusion** :*

La longueur du plus court chemin de E à S est la distance de S. La chaîne de poids minimum se lit "à l'envers", de S à chacun des prédécesseurs successifs.

A titre d'exemple, voici, présenté dans un tableau, le fonctionnement de cet algorithme pour notre problème n°5, avec ici E=M :

M	L	P	S	F	T	B	Σ
(0,M) M→ Σ	(1h5O,M)	(3h,M)	(+∞, ?)	(+∞, ?)	(3h,M)	(+∞, ?)	Σ = {M}
	L→ Σ	(3h,M)	(4h50,L)	(+∞, ?)	(3h,M)	(+∞, ?)	Σ = {M,L}
		P→ Σ	(4h,Pa)	(+∞, ?)	(3h,M)	(+∞, ?)	Σ = {M,L,P}
			(4h,Pa)	(+∞, ?)	T→ Σ	(5h10,T)	Σ = {M,L,P,T}
			S→ Σ	(4h30,S)		(5h10,T)	Σ = {M,L,P,T,S}
				F→ Σ		(5h10,T)	Σ = {M,L,P,T,S,F}

***remarque** : ici l'algorithme se termine alors qu'un des sommets n'a pas été marqué définitivement. Ceci vient du fait que le temps trouvé pour le Futuroscope (extrémité du chemin cherché) est inférieur aux temps encore provisoires restant (Bordeaux : 5h10). On peut alors être certain que le passage par Bordeaux n'est pas intéressant, et que le chemin optimal ne passera pas par cette ville.*

La lecture « inverse » des prédécesseurs donne successivement : (4h30,S) ; (4h,P) ; (3h,M) . Le chemin optimal est donc <u>Marseille- Paris-Saint-Pierre des Corps- Futuroscope</u>

<u>On démontre que cet algorithme donne un chemin minimal</u>

<u>Courte bibliographie pour un premier contact</u>

Certains ouvrages mentionnés ici sont épuisés. Mais la bibliographie utile pour une approche simple par les problèmes est à ce jour si brève qu'il peut être utile de rechercher ces ouvrages parfois encore disponibles d'occasion dans certaines librairies.

Mathématiques discrètes - Cours et problèmes (SEYMOUR LIPSZCHUTZ)

Série Schaum -1990
Diagonales – les cahiers mathématiques du CNED
Deux numéros sur les graphes, parus en 1998 et en 2000
Mathématiques – informatique des gestion (Jean-Denis Astier, Françoise Comparat, François Khun et France Laplume)*Collection BTS tertiaires - Nathan technique- 2000*
Les graphes par l'exemple
Ellipse – 1987