Université de Nice – Sophia Antipolis
UE Automates & Langages

Licence 3 Informatique
2010–2011

TD n° 1

Langages rationnels et automates finis

Exercice 1) On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Parmi les expressions régulières suivantes, indiquez celles qui décrivent le langage Σ^* :

1. $(a^*b)^* + (b^*a)^*$
2. $(a + b + \varepsilon)^+$
3. $a^* + a^*(ba^*)^+$
4. $(a^*b^+ + b^*a^+)^*$
5. $a(a + b)^* + b(a + b)^*$
6. $(a^*b^*)^+$
7. $(\varepsilon + b)^*.\,(ab^*)^*$
8. $a^*(b^+a^+)^*b^*$
9. $(a + b + \varnothing)^*$

Exercice 2) Donnez une expression régulière permettant de décrire les langages suivants :

1. les identificateurs en langage PASCAL : suite alphanumérique commençant par une lettre (il n'y a pas de limitation sur le nombre de caractères). Comment faire pour retirer de cet ensemble le mot-clef `if` par exemple ?
2. les réels en `C` : on suppose que chaque réel a un point (pas une virgule !) et contient au moins un chiffre avant et après le point. Exemples : `+1.0`, `12.34e-5`, `-0.7e07`, `12.001E+9` ...
3. les mots sur $\{0, 1\}$ dont la dernière lettre est le *bit de parité*, c'est-à-dire qu'il mémorise la parité du reste du mot (0 si le nombre de 1 est pair, 1 sinon).

Exercice 3) Montrez que, sur un alphabet A donné, l'ensemble des expressions régulières est dénombrable (infini dénombrable même). L'idée est d'ordonner les expressions régulières de telle sorte à les mettre facilement en bijection avec $\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire concernant les langages rationnels inclus dans A^* ?

Exercice 4) Décrivez des automates finis déterministes qui reconnaissent les langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1. Le langage des mots n'ayant pas de a.
2. Le langage des mots ayant un nombre impair de c.
3. Le langage des mots ayant $baba$ pour suffixe.

Exercice 5) Considérons l'automate fini $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, avec $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ et $F = \{q_3\}$. La fonction δ se déduit aisément du schéma suivant :

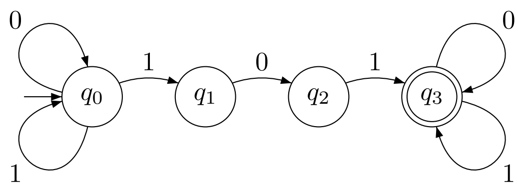


FIG. 1 – L'automate fini $\mathcal{A}$

1. Donnez une expression régulière décrivant le langage L reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.
2. Comment décririez-vous le langage L en français ? Et le langage L^* ?
3. Construisez puis dessinez l'automate $\mathcal{D}$, obtenu en déterminisant l'automate $\mathcal{A}$ précédent.
4. Tentez de trouver directement à partir de $\mathcal{A}$ un autre automate déterministe $\mathcal{D}'$, *plus simple* que l'automate $\mathcal{D}$.
5. En déduire un automate déterministe C pour reconnaître le langage $\overline{L}$, le complémentaire de L à A^*.

Exercice 6) On se propose de représenter le comportement d'une machine à café à l'aide d'un automate déterministe. La machine accepte les pièces de 10 cents, 20 cents, 50 cents, 1 € et rejette les autres. On suppose que le café vaut 40 cents.

1. Représenter, à l'aide d'un automate fini déterministe, le comportement d'une machine qui délivrerait un café dès que la somme versée est supérieure au prix du café.
2. Modifier l'automate pour que la machine rende la monnaie.
3. Ajouter une touche *Annulation* à la machine. Dans ce cas la machine rend tout l'argent déjà inséré.

Exercice 7) Σ étant un alphabet donné, retrouvez à quel ordre correspond la définition inductive suivante :

Base : $\varepsilon \leq \varepsilon$

Induction : $\forall u, v \in \Sigma^*, \forall \alpha \in \Sigma,$ si $u \leq v$ alors : $u \leq \alpha v$
$u\alpha \leq v\alpha$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence 3 Informatique
UE Automates & Langages | 2010–2011

TD n° 2

Théorème de Kleene

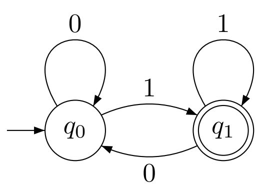
Exercice 1) Il existe un algorithme pour passer <u>directement</u> d'une expression régulière à un automate fini déterministe.

1. Trouver l'expression régulière de l'ensemble des représentations binaires des entiers pairs.
2. Appliquez cet algorithme à l'expression régulière précédente.
3. Dessinez l'automate déterministe $\mathcal{D}$ obtenu.

Exercice 2)

1. Un langage peut être défini par un ensemble de mots interdits. Trouvez un automate fini $\mathcal{A}$ reconnaissant par exemple le langage des mots binaires ne contenant pas le facteur 11.
2. Cette fois, trouvez un automate fini $\mathcal{B}$ pour reconnaître l'ensemble des représentations binaires des entiers multiples de 3.
3. Assemblez les deux automates finis $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en un seul automate $\mathcal{R}$ de façon à reconnaître la réunion des langages $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.
4. Déterminisez l'automate $\mathcal{R}$ précédemment obtenu.

Exercice 3) $\mathcal{L}$ est le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ reconnu par l'automate déterministe $\mathcal{A}$ suivant :



1. Avez-vous une idée du langage qu'il reconnaît ?
2. Utilisez un système d'équations linéaire à droite afin de trouver une expression régulière pour $\mathcal{L}$.

Click to BUY NOW! PDF-XChange Editor www.pdf-xchange.com

Exercice 4) Considérons l'automate fini $\mathcal{A}$ défini par le quintuplet $(\Sigma = \{0,1\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, F = \{q_2\})$ avec la relation de transition δ suivante :

q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2

1. L'automate fini $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ?
2. Donnez a priori une description *en français* du langage $L(\mathcal{A})$.
3. Posez puis résolvez le système d'équations linéaire à droite permettant d'obtenir une expression régulière décrivant ce langage $L(\mathcal{A})$.
4. Simplifiez le plus possible l'expression régulière obtenue.

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence 3 Informatique
UE Automates & Langages | 2010–2011

TD n°3

Minimisation

Exercice 1) On se place sur l'alphabet binaire et on s'intéresse au langage L décrit par l'expression régulière suivante :

$$E \;:\; 0^*1(10^*1+0)^*$$

1. Construisez l'automate minimal $\mathcal{A}$ reconnaissant le langage L par la méthode des résiduels à gauche.
2. Expliquez en "français" ce qui caractérise les mots de L.

Exercice 2) Construisez l'automate minimal de l'automate déterministe obtenu au TD2 exercice 2, à l'aide de l'algorithme vu en cours .

Exercice 3) Soit $\mathcal{L}$ le langage sur l'alphabet $\{0,1\}$ décrit par l'expression régulière suivante :

$$(0+1)^*1(0+1)0(0+1)^*$$

1. Construisez l'automate déterministe $\mathcal{D}$
2. Construisez l'automate minimal $\mathcal{M}$ en appliquant à $\mathcal{D}$ l'algorithme de minimisation vu en cours.
3. A présent, vérifiez votre résultat en construisant cette fois l'automate minimal $\mathcal{M}$ directement à partir de l'expression régulière en utilisant la méthode des résiduels à gauche.

Exercice 4) (Algorithme de Brzozowski)
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$ un automate.
$Q = \{0,1,2,3,4\}$, $I = \{0\}$, $F = \{2,3\}$
$E = \{(0,1,a),(0,3,b),(1,2,a),(1,1,b),(2,3,a),(2,1,b),(3,3,a),(3,4,b),(4,3,a),(4,1,b)\}$

On définit l'automate renversé de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_r$ = (Q, Σ, Er, Ir, Fr)
où $(p,a,q) \in Er$ si et seulement si $(q,a,p) \in E$, Ir = F, Fr = I.
Appliquez les transformations suivantes à l'automate $\mathcal{A}$:

1. renversez le
2. déterminisez le résultat
3. renversez le résultat
4. déterminisez le résultat

A quelle opération correspond le résultat obtenu ?

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

Université de Nice – Sophia Antipolis
UE Automates & Langages

Licence Informatique 3
2010–2011

TD n°4

Clôture des langages rationnels

Exercice 1) Voici les expressions régulières décrivant respectivement les langages L et K :

$$E_L : (0+\varepsilon)(10)^*(1+\varepsilon)$$

$$E_K : 1^*(01^*01^*)^*$$

1. Trouvez les deux automates finis minimaux $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_K$ qui reconnaissent respectivement les langages L et K.
2. En utilisant le produit d'automates, construisez un automate fini $\mathcal{I}$ pour reconnaître le langage $L \cap K$.
3. Adaptez la méthode précédente afin de construire un automate fini $\mathcal{U}$ qui reconnaisse l'union des deux langages L et K.
4. Comment procéder pour trouver un automate reconnaissant $L \setminus K$? (donnez juste l'idée !).
5. Décrivez en français chacun des langages calculés.

Exercice 2) Utilisez le théorème de l'étoile afin de montrez que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. $L_{\text{Carré}} = \{ww, w \in \{0,1\}^*\}$;
2. $L = \{0^p, p \text{ nombre premier }\}$.

Exercice 3) En utilisant les propriétés de clôture de la classe des langages rationnels, montrez que les langages suivants ne sont pas rationnels (*on raisonnera sur des langages dont on connaît déjà la rationnalité ou la non-rationnalité*) :

1. le langage de Dyck sur l'alphabet $\{(,)\}$;
2. le langage $L = \{w \in \{0,1\}^*, \mid w \mid_0 \neq \mid w \mid_1\}$.