ریاضیات مالی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مدرس: دکتر مرتضی فتوحی

دانشکده علوم ریاضی

mean-CVAR Portfolio Selection Report

حسین رحمانی ۹۸۱۱۰۱۵۷ فیروزه ابریشمی ۹۷۱۰۰۰۴۳

۱ مقدمه

این گزارش در مورد حل مسئله Portfolio Optimization به روش Mean-CVaR است، هنگامی که توزیع سودهای assetهای ما از یک ambiguity set می‌آیند.
به طور خلاصه، نویسندگان مقاله یک راهکار برای حل این مسئله بهینه‌سازی به صورت robust ارائه می‌دهند که کمینه کردن مقدار worst-case CVaR است در حالتی که توزیع سود دارایی‌های ما از مجموعه ambiguity set می‌آیند. (به تعریف دقیق همه این مفاهیم در ادامه اشاره می‌شود.) همچنین در این مقاله نشان داده شد که مسئله robust mean-CVaR می‌تواند به یک مسئله tractable second order cone programming تبدیل شود.
در ادامه به مفاهیم مهم مقاله و نوتیشن استفاده شده در این گزارش (که با مقاله هماهنگی دارد.) اشاره شده است.
در این مقاله به طور کلی مقدار CVaR (Conditional value-at-risk) را کمینه میکنیم. CVaR یک risk mesure است و در مساله پیدا کردن سهم بهینه از دارایی ها Portfolio Optimization به جای VaR (Value-at-risk) استفاده میشود زیرا VaR یکسری محدودیت ها دارد که در این نسخه جدید بهبود یافته. مثلا خاصیت subaddivity ندارد که به این معناست که پراکنده کردن دارایی ها (Diversification) ممکن است به ریسک بیشتری منجر شود. و بنابراین طبق تعاریف یک معیار سنجش ریسک غیر coherent است. (Artzner et al. 1999) برای فائق آمدن بر این موضوع، یک ورژن دیگری از این معبار سنجش ریسک معرفی شد که CVaR نام داشته و به طور شهودی، مقدار زیانی است که در دم توزیع، بعد از VaR اتفاق میافتد. توضیح کامل ریاضی آن را در بخش دوم به تفصیل ارائه میکنیم و به دنبال راهکارهای تاریخی حل این مسئله و اپروچ و راهکار اشاره شده در این مقاله میرویم.
یک نکته جالب در این مقاله استفاده از یک مفهوم ambiguity set است که یعنی توزیع مقدار سود های دارایی های ما دقیق معلوم نیست و فقط یکسری خاصیت هایی برای ان متصور میشویم. راهکار های کلاسیک در مورد توزیع این سودها این بود که یا با داده و یا با دانش خبرگان این موضوع، توزیع تقریبی را بدست آوریم ولی اپروچ مقاله به این مسئله بسیار نو و همینطور کاربردی برای دیتاهای واقعی است.
سطح های مختلف ازاد بودن یا نبودن توزیع هایی که در این مجموعه هستن و کاندید،توزیع ریترن ها هستند، توسط الگوریتم Bootstrap تعیین میشود که در بخش ۳ به آن اشاره میکنیم.
درادامه ورژن جمع صفر (zero net adjustment) مدل را معرفی کرده و محافظه کاری ما را کم کرده و شرط مدل ما را ریلکس میکند آن هم مسئله ای مشابه مسئله اول تبدیل شده، و به صورت کارا حل میشود.

۱.۱ Notation

مجموعه S_+^n را مجموعه نیمه معین مثبت نامیده و برای این ماتریس ها، ماتریس $Y = X^{\frac{1}{2}}$ که $X = Y^2$. برای یک ماتریس وارون پذیر $G \in S^n$ فاصله ellipsoidal از بردار z را $||z||_G = \sqrt{z^T G^{-1} z}$ تعریف میکنیم و نرم فربیونوس ماتریس $X \in S^n$ به صورت $||X||_F = \sqrt{tr(XX^T)}$ تعریف میکنیم.

۲ Mean-CVaR Optimization

۱.۲ تعاریف اولیه

تابع $I(x,\xi)$ مقدار خطا برای بردار دارایی x (وزن هر دارایی مقدار x_i است.) همچنین فرض میکنیم که بردار ریترن یا سود دارایی ها دارای تابع چگالی احتمال پیوسته $p(\xi)$ با مقدار میانگین متناهی μ و کوواریانس σ است.مقدار $VaR_\beta(x)$ سطح اطمینان $\beta \in (0,1)$ و بردار دارایی x را اینطور تعریف میکنیم.

$$VaR_\beta(x) = \min\{\eta \in R : \int_{\xi:l(x,\xi)\eta} p(\xi)d\xi \geq \beta\}. \quad (۱)$$

شهود ما در مورد این معیار، مینیمم خطایی است که به ازای آن، ما مقدار سود کلی حداقل بتا را داریم. معیار ریسک CVaR با سطح اطمینان $1-\beta$ و توزیع P برابر مقدار امیدریاضی خطایی که بیشتر از مقدار VaR است، تعریف میشود که همان شهود دم توزیع را دارد.

$$CVaR_\beta(x,P) = E_P[l(x,\xi)|l(x,\xi) \geq VaR_\beta(x)] = \frac{1}{1-\beta}\int_{\xi:l(x,\xi)\geq VaR(x)} l(x,\xi)p(\xi)d\xi. \quad (۲)$$

از کارهای تئوری مقاله Rockafellar& Uryasev (2000) میدانیم که برای محاسبه CVaR میتوانیم تابع زیر را کمینه کنیم.

$$F_\beta(x,\eta) = \eta + \frac{1}{1-\beta}\int_{\xi\in R^n} [l(x,\xi)-\eta]^+ p(\xi)d\xi \quad (۳)$$

که $[t]^+ = \max\{0,t\}$ تعریف شده.و ما برابری $CVaR_\beta(x,P) = \min_{\eta\in R} F_\beta(x,\eta)$.

تعریف ۱ فرض کنید یک ترشهولد احتمال $\beta > 0$ داریم و بدترین حالت $CVaR$ یا *Worst-case CVaR (WCVaR)* یک بردار داراییx و سود های تصادفی برای هر یک از این دارایی ها که بردار آنها از توزیع P با خاصیت هایی که از مجموعه *ambiguity* میآیند باشند، به صورت زیر تعریف میشود.

$$WCVaR_\beta(x) = \sup_{P\in D} CVaR_\beta(x,P). \quad (۴)$$

تابع $WCVaR$ خاصیت های خوب $CVaR$ مانند *subaddivity*، *positive homogenity*، *monotonicity* و *translation invariance* را به ارث برده و انها را داراست.پس یک معیار سنجش ریسک *coherent* است.

۲.۲ Robust portfolio optimization model with WCVaR risk measure

نتیجه ۱ یک بازار مالی متشکل ازn تا سهام را در نظر گرفته و بردار داراییx وزن هر یک از این سهام در سبد *(Portfolio)* را نشان میدهد.که یعنی درصدی از پول ما که به خرید آن دارایی اختصاص پیدا کرده ر نشان میدهد. مسئله کلاسیک ما MC به صورت زیر فرمول بندی میشود.

$$\min_x CVaR_\beta(x,P), \quad (۵)$$

$$s.t.\ \ E_P(\xi)^T x \geq \rho,\ \ x \in X \quad (۶)$$

که ρ مقدار باند پایین روی متوسط سود کلی دریافتی است.
در کاربردهای واقعی،ما معمولا توزیع سود های هر کدام از سهم ها را نمیدانیم به طور دقیق یعنی P را نداریمو باید آن را یا با داده های قبلی که از بازار داریم، تخمین بزنیم و در طول سیر تاریخی به این مسیر پرداخته شده است.
راهکار دیگر حل مسئله به صورت سمپل محور به صورت زیر است

$$(SMC) : \min_{(x,\eta)} F_\beta(x,\eta), \quad (۷)$$

$$s.t.\ \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{S}(\xi[k])^T x \geq \rho \quad (۸)$$

$$x \in X, \eta \in R \quad (۹)$$

مسئله SMC با شرط $Convex$ بودن مجموعه X و $I(x,\xi)$ در x به راحتی حل میشود (این مسئله در مقاله $Rockfellar\&$ $Uryasev(2000)$ آمده است و مربوط به این مقاله نیست) و به قسمت کمی از داده هم وابسته است ولی در عین حال جواب غیر قابل اطمینانی میدهد.
حال به سراغ ایده خلاقانه داخل مقاله میرویم.
نویسندگان مقاله، یک مجموعه نهان $(ambiguity\ set)$ تعریف کرده که یکسری خاصیت اولیه دارد و فرض میشود که توزیع مقدار سود های سهام های ما از این مجموعه میآید.

$$D_F\{\gamma_1,\gamma_2\} = \Big\{ P \in M_+ : \tag{۱۰}$$

$$P(\xi \in \Omega) = 1, (E_P(\xi) - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (E_P(\xi) - \hat{\mu}) \leq \gamma_1, \tag{۱۱}$$

$$||Cov_P(\xi)\hat{\Sigma}||_F \leq \gamma_2,\ \ Cov_P(\xi) > 0 \Big\} \tag{۱۲}$$

که پارامترهای $\hat{\mu}$ و $\hat{\Sigma}$ میانگین و انحراف معیار تخمین زده شده ما هستند که از روی داده به صورت غیربایاس میتوانیم به صورت زیر حساب کنیم

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{S-1} \sum_{i=1}^{S} (\xi^{[i]} - \hat{\mu})(\xi^{[i]} - \hat{\mu})^T \tag{۱۳}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \xi^{[i]} \tag{۱۴}$$

پارامتر های γ_1 و γ_2 اندازه مجموعه $ambiguity\ set$ است که معیار این است که تا چه حد دست باز توزیع ها را به هنوان کاندیدا انتخاب کنیم که به تفصیل در بخش ۳ به این موضوع میپردازیم و الگوریتم انتخابشان را میگوییم.

لم ۱ (۱.۲ مقاله)
$[Chen\ \&\ al.\ 2011]$ فرض کنید که $I(x,\xi) = -\xi^T x$ و بردار تصادفی $\xi \in R^n$ با میانگین $\hat{\mu}$ و کواریانس $\hat{\Sigma} > 0$ از خانواده توزیع های F که به صورت پایین هستند، میآیند.
و اگر $F = \{P \in M^+ | P(\xi \in \Omega) = 1, E_P(\xi) = \hat{\mu}, Cov_P(\xi) = \hat{\Sigma}\}$ و اگر $Support\ set$ کل فضا را بپوشاند، (یعنی $\Omega = R^n$) داریم که

$$\max_{P \in F} CVaR_\beta(x,P) = -\hat{\mu}^T x + \kappa \sqrt{x^T\ \hat{\Sigma}\ x}, \tag{۱۵}$$

که $\kappa = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$.

گزاره ۱ مسئله ما به یک مسئله بهینه سازی تبدیل میشود که به صورت زیر است

$$\min_{x,s,t} \kappa s - \hat{\mu}^T x + \sqrt{\gamma_1} t, \tag{۱۶}$$

$$s.t.\ \ \sqrt{1} ||\hat{\Sigma}^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq \hat{\mu}^T x - \rho, \tag{۱۷}$$

$$||(\hat{\Sigma} + \gamma_2 I_n)^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq s, \tag{۱۸}$$

$$||\hat{\Sigma}^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq t, \tag{۱۹}$$

$$x \in X \tag{۲۰}$$

که متغیر های ما $x \in R^n,\ \ , s,t \in R$ هستند.

نکته ۱ میبینیم که مسئله ما که عبارت ۱۶ هست، یک مسئله $SOCP$ بهینه سازی است که به صورت کارا با روش $interior$ $point$ حل میشود.

۱.۲.۲ zero net adjustment

این ورژن مسئله برای کمتر کردن سختگیری مدل روی است و یک شرط $e^T(E_P(\xi) - \hat{\mu}) = 0$ یعنی

$$D_F^{adj}\{\gamma_1, \gamma_2\} = \Bigg\{ P \in M_+ : \tag{۲۱}$$

$$P(\xi \in \Omega) = 1, (E_P(\xi) - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (E_P(\xi) - \hat{\mu}) \leq \gamma_1, \tag{۲۲}$$

$$||Cov_P(\xi)\hat{\Sigma}||_F \leq \gamma_2, \;\; Cov_P(\xi) > 0 \tag{۲۳}$$

$$e^T(E_P(\xi) - \hat{\mu}) = 0 \Bigg\} \tag{۲۴}$$

به مجموعه شرط ها اضافه شده و به کمک لمی که پیشتر دیدیم، مسئله ما دوباره شبیه مسئله وال به یک $SOCP$ تبدیل شده که به صورت زیر است.

$$\min_{x,s,t} \kappa\sigma - \hat{\mu}^T x + \sqrt{\gamma_1}\omega, \tag{۲۵}$$

$$s.t. \;\; \sqrt{\gamma_1}||\Lambda^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq \hat{\mu}^T x - \rho, \tag{۲۶}$$

$$||(\hat{\Sigma} + \gamma_2 I_n)^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq \sigma, \tag{۲۷}$$

$$||\Lambda^{\frac{1}{2}} x||_2 \leq \omega, \tag{۲۸}$$

$$x \in X \tag{۲۹}$$

که متغیر های ما $, s, t \in R$ $x \in R^n,$ و $\Lambda = \hat{\Sigma} - \frac{1}{e^T\hat{\Sigma}e}\hat{\Sigma}ee^T\hat{\Sigma}$ هستند.

۳ Calibration of γ_1 and γ_2

در حل مسئله یکسری پارامتر وجود داشتند که ما باید آنهارا برای سطح های مختلف آزادی در مجموعه ابهام خود، انتخاب میکردیم. راهکار های انتخاب این مقادیر به طور کلی،از طریق $cross\text{-}validation$ یا $bootstrap$ است. در مورد این قضیه روش $cross\text{-}validation$ چون ممکن است جواب های غیر قابل اطمینان تولید کند، در این مقاله از روش $bootstrap$ استفاده شده است. در ادامه نمای کلی روش انتخاب پارامتر های مورد نیاز از طریق بوت استرپ را مشاهده میکنید

Bootstrapping procedure:

Step 1. Construct B bootstrap samples $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_B\}$ (for example, $B = 10000$) by drawing random observations with replacement from the available observations.

Step 2. For each bootstrap sample Y_b, compute the corresponding mean $\hat{\mu}_b$ and covariance matrix $\hat{\Sigma}_b$, and then generate a sample

$$C = \left\{ (\hat{\mu}_b, \hat{\Sigma}_b) : b = 1, \ldots, B \right\}.$$

Step 3. For sample C, define data sets C_{γ_1} and C_{γ_2} as

$$C_{\gamma_1} = \left\{ \gamma_{1b} : \gamma_{1b} = (\hat{\mu}_b - \hat{\mu})^{\mathrm{T}} \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}), \; b = 1, \ldots, B \right\},$$

$$C_{\gamma_2} = \left\{ \gamma_{2b} : \gamma_{2b} = \|\hat{\Sigma}_b - \hat{\Sigma}\|_F, b = 1, \ldots, B \right\}$$

to ensure reasonable values of γ_1 and γ_2. The percentiles of the empirical distributions of C_{γ_1} and C_{γ_1} can then be referenced to derive γ_1 and γ_2. Consequently, the calibrated values of γ_1 and γ_2 are

$$\hat{\gamma}_1 = q_\zeta(C_{\gamma_1}), \;\; \hat{\gamma}_2 = q_\zeta(C_{\gamma_2}),$$

where $q_\zeta(\cdot)$ is an upper quantile of the corresponding data sets (for example, $\zeta = 95\%$).

اول B بار نمونه گیری با جایگزینی انجام داده و هر کدام از این سمپل های Y_b را میانگین و انحراف معیار شان را بدست

آورده و و دو مجموعه C_{γ_1} و C_{γ_2}

$$C_{\gamma_1} = \left\{ \gamma_{1b} : \gamma_{1b} = (\hat{\mu}_b - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} \, (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}), \quad b = 1, ..., B \right\} \tag{۳۰}$$

$$C_{\gamma_2} = \left\{ \gamma_{2b} : \gamma_{2b} = ||\hat{\Sigma}_b - \hat{\Sigma}||_F, \quad b = 1, ..., B \right\} \tag{۳۱}$$

را بدین صورت که درمقاله گفته، میسازیم وکونتایل ۹۵ درصد آنها، مقدار γ_1 و γ_2 را میدهند.