Урок 6. Распределения случайных величин (часть 2)

Хакимов Р.И. + ChatGPT

Непрерывные распределения

Непрерывные распределения описывают случайные величины, которые могут принимать любое значение в непрерывном интервале. Рассмотрим основные непрерывные распределения: равномерное, нормальное, экспоненциальное, гамма и распределение Коши.

Непрерывные распределения

Равномерное распределение распределение описывает случайную величину, которая имеет равные вероятности для всех значений в интервале $[a, b]$.
Функция плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

для $a \leq x \leq b$, и $f(x) = 0$ в других случаях.
Пример: Если число случайно выбирается из интервала от 0 до 1, его распределение будет равномерным.

Непрерывные распределения

Нормальное распределение, или распределение Гаусса, описывает многие естественные явления и статистические измерения. Оно характеризуется двумя параметрами: средним μ и стандартным отклонением σ.

Функция плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ — среднее значение, σ — стандартное отклонение.

Пример: Рост людей в популяции часто подчиняется нормальному распределению. Если средний рост составляет 170 см, а стандартное отклонение — 10 см, можно использовать нормальное распределение для оценки вероятности того, что рост случайно выбранного человека будет в пределах определенного интервала.

Непрерывные распределения

Экспоненциальное распределение описывает время между событиями в процессе с постоянной средней частотой. Оно является частным случаем гамма-распределения с параметром $\alpha = 1$.

Функция плотности вероятности:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

где λ — параметр распределения (обратный среднему времени до события), $x \geq 0$.

Пример: Время ожидания следующего автобуса в автобусной остановке с постоянным интервалом прибытия можно моделировать с помощью экспоненциального распределения.

Непрерывные распределения

Экспоненциальное распределение

Задача: Автобусы на остановку приезжают в среднем каждые 15 минут. Какова вероятность того, что следующий автобус придет через 10 минут или меньше?

Решение:

1. Параметр λ – это интенсивность процесса (количество автобусов в единицу времени). Если автобус приходит в среднем каждые 15 минут, то λ будет равен $\frac{1}{15}$ автобусов в минуту.

2. Экспоненциальное распределение описывает время между событиями, его функция распределения для времени t выглядит так:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Это вероятность того, что событие (прибытие автобуса) произойдет в течение времени t.

Экспоненциальное распределение

Решение:

3. Подставляем значения: Нам нужно найти вероятность того, что автобус придет через 10 минут или меньше. Для этого подставим $\lambda = \dfrac{1}{15}$ и $t = 10$ минут в формулу:

$$F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 10} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 1 - 0.5134 \approx 0.4866$$

4. Результат: Вероятность того, что автобус придет в течение 10 минут, составляет примерно 48.66%.

Непрерывные распределения

Гамма распределение обобщает экспоненциальное распределение и моделирует время до k-го события в процессе с постоянной средней частотой. Имеет два параметра: α (форма) и β (масштаб).
Функция плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — функция Гамма, α — параметр формы, β — параметр масштаба, $x \geq 0$.
$\Gamma(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad Re(z) > 0$ - является обощением понятия факториала.
Пример: Если время до поломки устройства можно рассматривать как сумму времени до поломки нескольких компонентов, это может быть смоделировано с помощью гамма распределения.

Непрерывные распределения

Распределение Коши имеет "тяжелые хвосты"и используется для моделирования явлений, где экстремальные значения более вероятны, чем в нормальном распределении. Оно характеризуется параметрами: медианой x_0 и масштабом γ.
Функция плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$$

где x_0 — медиана, γ — параметр масштаба.
Пример: Распределение Коши может быть использовано для моделирования финансовых данных, где резкие колебания цен встречаются чаще, чем предсказывается нормальным распределением.

Свойства непрерывных распределений

Математическое ожидание и дисперсия:

Нормальное распределение: Среднее значение μ и дисперсия σ^2.

Экспоненциальное распределение: Среднее $\frac{1}{\lambda}$ и дисперсия $\frac{1}{\lambda^2}$.

Гамма распределение: Среднее $\alpha\beta$ и дисперсия $\alpha\beta^2$.

Равномерное распределение: Среднее $\frac{a+b}{2}$ и дисперсия $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Распределение Коши: Не имеет конечного математического ожидания и дисперсии.

Свойства непрерывных распределений

Функция распределения (CDF):

Нормальное распределение: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$

Экспоненциальное распределение: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$

Гамма распределение: $F(x) = \frac{\gamma(\alpha, x/\beta)}{\Gamma(\alpha)}.$

Равномерное распределение: $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ для $a \leq x \leq b.$

Распределение Коши: $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}.$