

Урок 3. Теория вероятностей (часть 1)

Хакимов Р.И. + ChatGPT

Случайные события, величины, свойства и операции

Теория вероятностей изучает случайные события и их вероятности. Основные понятия включают случайные события, случайные величины, а также свойства и операции с ними. Далее обзор этих понятий.

Случайные события, величины, свойства и операции

Случайные события

Описание: Случайное событие — это результат, который может произойти в рамках некоторого случайного эксперимента. Событие может быть элементарным (то есть состоящим из одного исхода) или составным (состоящим из нескольких исходов).

Пример: В подбрасывании монеты "орел" или "решка" — это случайные события. Если рассматривается подбрасывание двух монет, событие "обе монеты показывают орел" является составным событием.

Случайные события, величины, свойства и операции

Типы событий

Элементарное событие: Событие, которое не может быть разложено на более простые события.

Пример: Падение одной монеты "орел" или "решка".

Совместные события: События, которые могут происходить одновременно.

Пример: В подбрасывании двух монет "первая монета показывает орел" и "вторая монета показывает решку".

Противоположные события: События, которые не могут произойти одновременно.

Пример: "Монета показывает орел" и "монета показывает решку".

Независимые события: События, где наступление одного не влияет на вероятность наступления другого.

Пример: Подбрасывание двух монет.

Случайные события, величины, свойства и операции

Случайные величины

Описание: Случайная величина — это функция, которая присваивает числовые значения каждому возможному исходу случайного эксперимента.

Типы случайных величин:

Дискретные случайные величины: Могут принимать конечное или счетное число значений.

Пример: Количество орлов при подбрасывании двух монет (0, 1, 2).

Непрерывные случайные величины: Могут принимать любые значения в некотором интервале.

Пример: Рост человека, который может варьироваться от 150 до 200 см.

Вероятность: определения

В теории вероятностей вероятность — это числовая мера того, насколько вероятно, что определённое событие произойдет. Существуют различные подходы к определению вероятности, которые можно классифицировать на несколько основных типов:

Вероятность: определения

Классическое определение вероятности

Описание: Вероятность события определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу возможных исходов, при условии что все исходы равновероятны.

Формула:

$$P(A) = \frac{\text{Количество благоприятных исходов}}{\text{Общее количество возможных исходов}}$$

Пример: При броске симметричной шестигранной кости вероятность выпадения числа 4:

$$P(\text{выпадение } 4) = \frac{1}{6}$$

так как есть 1 благоприятный исход (выпадение 4) и 6 возможных исходов.

Вероятность: определения

Частотное определение вероятности

Описание: Вероятность события определяется как отношение числа успешных попыток (или наблюдений), когда событие произошло, к общему числу попыток.

Формула:

$$P(A) = \frac{\text{Число успешных попыток}}{\text{Общее число попыток}}$$

Пример: Если при подбрасывании монеты 100 раз орел выпадает 45 раз, то частотная вероятность выпадения орла:

$$P(\text{орел}) = \frac{45}{100} = 0.45$$

Вероятность: определения

Аксиоматическое определение вероятности

Описание: Основывается на аксиомах, предложенных Андреем Колмогоровым. Это наиболее общепринятый и формализованный способ определения вероятности.

Вероятность — это функция, которая удовлетворяет определенным аксиомам.

Аксиомы Колмогорова:

1. **Ненегативность:** $P(A) \geq 0$ для любого события A .
2. **Нормированность:** $P(\Omega) = 1$, где Ω — пространство всех возможных исходов (или универсум).
3. **Счётная аддитивность (σ -аддитивность):** Если события A_1, A_2, A_3, \dots попарно непересекающиеся ($A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Пример: Пусть есть три дискретных непересекающихся события A , B и C , которые составляют пространство элементарных исходов. Тогда вероятность их объединения будет:

Вероятность: определения

Субъективное определение вероятности

Описание: Вероятность события рассматривается как мера уверенности или субъективного мнения о том, что событие произойдет, и может варьироваться в зависимости от личного опыта или знаний.

Пример: Если кто-то считает, что шансы на победу своей любимой команды в следующем матче равны 70%, то это субъективная вероятность, основанная на личном мнении и интуиции.

Случайные события, величины, свойства и операции

Функции случайной величины

Функция распределения (CDF, Cumulative Distribution Function): Функция, которая показывает вероятность того, что случайная величина примет значение меньше или равно заданному.

Формула: $F(x) = P(X \leq x)$, где $F(x)$ — функция распределения, X — случайная величина.

Функция вероятностей (для дискретных случайных величин) (PMF, Probability Mass Function): Определяет вероятность того, что случайная величина примет конкретное значение.

Формула: $P(X = x)$, где $P(X = x)$ — вероятность того, что X равна x .

Свойства случайных величин

Ожидаемое значение (математическое ожидание)

Описание: Среднее значение случайной величины, которое ожидается в долгосрочной перспективе.

Формула (для дискретных случайных величин):

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Формула (для непрерывных случайных величин):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

где $f(x)$ — функция плотности вероятности.

Свойства случайных величин

Дисперсия

Описание: Среднее значение квадратов отклонений случайной величины от её математического ожидания.

Формула:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

или

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Свойства случайных величин

Стандартное отклонение

Описание: Квадратный корень из дисперсии. Показывает среднее отклонение значений случайной величины от её математического ожидания.

Формула:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Операции с событиями

Объединение событий

Описание: Событие, что происходит одно из двух (или более) событий.

Формула:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

где $P(A \cup B)$ — вероятность объединения событий A и B , $P(A \cap B)$ — вероятность их пересечения.

Пересечение событий

Описание: Событие, что происходят оба (или несколько) событий одновременно.

Формула:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (если события независимы)}$$

Операции с событиями

Дополнение события

Описание: Событие, что исход не принадлежит заданному событию.

Формула:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

где A^c — дополнение события A .

Условная вероятность

Описание: Вероятность наступления события A при условии, что событие B уже произошло.

Формула:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Законы вероятности

Закон сложения

Описание: Вероятность того, что произойдет хотя бы одно из нескольких событий.

Формула:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Закон умножения

Описание: Вероятность того, что произойдут оба события.

Формула (для независимых событий):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$