Урок 4. Теория вероятностей (часть2)

Хакимов Р.И. + ChatGPT

Комбинаторика: перестановки, сочетания, размещения

Комбинаторика в теории вероятностей и статистике изучает способы, которыми можно выбирать и упорядочивать элементы из множества. Основные понятия включают перестановки, сочетания и размещения. Вот основные определения и формулы для этих понятий:

Комбинаторика: перестановки, сочетания, размещения

Перестановки

Описание: Перестановка — это упорядоченный набор элементов. Если у вас есть n уникальных элементов, то количество возможных перестановок этих элементов — это количество способов, которыми можно упорядочить все элементы.

Формула для количества перестановок n элементов:

$$P(n) = P_n = n!$$

где $n!$ (факториал n) — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Пример: Для 3 элементов A, B, C, возможные перестановки будут: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Всего $3! = 6$ перестановок.

Комбинаторика: перестановки, сочетания, размещения

Сочетания

Описание: Сочетание — это выбор подмножества элементов из множества без учета порядка. Если нужно выбрать k элементов из n доступных, не учитывая порядок, то это сочетание.

Формула для сочетаний k элементов из n (без повторений):

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Пример: Если у вас есть 5 книг, и вы хотите выбрать 2, то количество способов это сделать:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

Таким образом, есть 10 способов выбрать 2 книги из 5.

Комбинаторика: перестановки, сочетания, размещения

Размещения
Описание: Размещение — это выбор и упорядочивание подмножества элементов из множества. В отличие от сочетаний, здесь важен порядок выбранных элементов.
Формула для размещений k элементов из n:

$$A(n,k) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример: Если у вас есть 4 книги, и вы хотите выбрать 2 и упорядочить их, количество способов это сделать:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

Таким образом, есть 12 способов выбрать 2 книги из 4 и упорядочить их.

Комбинаторика: перестановки, сочетания, размещения

Примеры применения

Перестановки: При организации конкурсов, где важно определить, кто займет какое место, используется перестановка. Например, сколько способов упорядочить 5 призеров в конкурсе.

Сочетания: Выбор комбинаций команд из игроков, где порядок не имеет значения. Например, сколько способов выбрать 3 игрока из 10 для участия в команде.

Размещения: Распределение задач между членами команды, где важен порядок распределения. Например, сколько способов назначить 3 из 10 сотрудников на конкретные задачи, если порядок назначения имеет значение.

Эти комбинаторные методы являются основой для решения задач, связанных с подсчетом способов выполнения различных комбинаций и упорядочиванием элементов, что широко используется в теории вероятностей, статистике и других областях науки.

Условная вероятность

Условная вероятность — это вероятность наступления события A, при условии, что событие B уже произошло. Условная вероятность показывает, как изменяется вероятность события A в свете дополнительной информации о событии B.

Формальное определение

Условная вероятность события A, при условии, что событие B уже произошло, обозначается как $P(A|B)$. Она определяется следующим образом:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

где:

- $P(A|B)$ — условная вероятность события A при условии, что произошло событие B.
- $P(A \cap B)$ — вероятность одновременного наступления событий A и B.
- $P(B)$ — вероятность наступления события B, при условии что $P(B) > 0$.

Условная вероятность

Свойства условной вероятности

1. Неотрицательность:

$$P(A|B) \geq 0$$

2. Нормированность:

$$P(B) = \sum_i P(A_i|B) \quad \text{для всех возможных } A_i$$

где A_i — всевозможные события, которые покрывают пространство.

3. Условная вероятность не может быть больше 1:

$$0 \leq P(A|B) \leq 1$$

4. Если $A \subseteq B$:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Условная вероятность

Пример с игральной костью

Пусть есть игральная кость. Мы хотим узнать вероятность того, что на верхней грани выпадет число 4 (событие A), если мы знаем, что число на грани четное (событие B).

- Вероятность того, что выпадет четное число (2, 4, или 6), равна $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- Вероятность того, что выпадет число 4 и оно четное, равна $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (так как только 4 из четных чисел совпадает с событием A).

Таким образом, условная вероятность выпадения 4, при условии, что число четное:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Условная вероятность

Пример с картами

Пусть у нас есть колода из 52 карт, и мы извлекаем одну карту. Мы хотим найти вероятность того, что карта — это туз (событие A), если мы знаем, что карта — это червовая (событие B).

- Вероятность того, что карта червовая, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

- Вероятность того, что карта — это туз и она червовая, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.

Условная вероятность того, что карта — это туз, при условии, что она червовая:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13}$$

Законы, связанные с условной вероятностью

Формула полной вероятности: Если события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу (то есть они покрывают всё пространство), то для любого события A справедлива формула:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Формула Байеса: Позволяет вычислять условные вероятности, зная вероятность обратного события:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

где B_i — одно из событий, образующих полную группу.

Условная вероятность позволяет анализировать вероятность события в зависимости от дополнительных условий или информации, что особенно полезно в различных областях науки и практики, таких как медицинская диагностика, статистика, инженерия и экономика.