Univerza v ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

1. naloga: Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Poročilo pri predmetu modelska analiza 1

2015/2016

Avtor:
Klemen Rahne
28152028

8. oktober 2015

Kazalo

1 Naloga

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč.

2 Brezdimenzijska oblika

Imamo avtomobil na razdalji L_0, od semaforja ter z začetno hitrostjo v_0. Na semaforju se bo v času t_0 prižgala zelena luč. Želimo izračunati najbolj optimalno vožnjo -$v(t)$. Kot najbolj optimalno vožnjo, želimo tako vožnjo do semaforja, pri kateri imamo najmanj pospeševanja oz. zaviranja. To zapišemo kot:

$$\int_0^{t_0} \dot{v}^2(t)dt = MIN \tag{2.1}$$

Iz geometrijskih lastnosti problema imamo še naslednjo zvezo:

$$\int_0^{t_0} v(t)dt = L_0 \tag{2.2}$$

S tema dvema enačbama smo prišli do variacijskega problema, ki ga rešimo s pomočjo Euler-Lagrangeve enačbe (v nadaljevanju E-L):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial v} = 0 \tag{2.3}$$

pri čemer je $\bar{L}$ Lagrangeva funkcija:

$$\bar{L} = \dot{v}^2(t) - \lambda v(t) \tag{2.4}$$

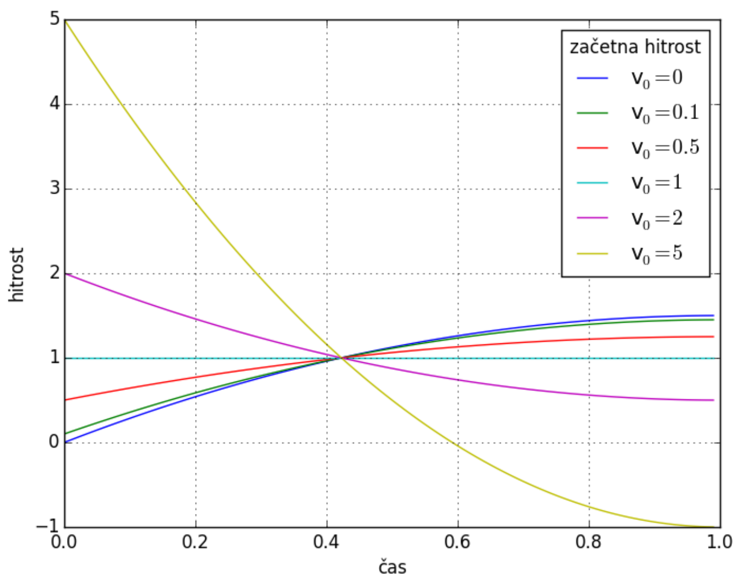
V enačbi λ predstavlja Lagrangev multiplikator, ki ga določimo s pomočjo enačbe 2.2. Ko Lagrangeovo funkcijo vstavimo v E-L enačbo dobimo naslednjo diferencialno enačbo:

$$\ddot{v}(t) - \frac{\lambda}{2} = 0 \tag{2.5}$$

Enačbo dvakrat integriramo in dobimo:

$$v(t) = \frac{\lambda}{4}t^2 + C_1 t + C_2 \tag{2.6}$$

Za prepis problema v brezdimenzijsko obliko uporabimo naslednji zvezi,



Slika 1: Primer rešitev za različne začetne hitrosti, po enačbi 2.9

$T = \frac{t}{t_0}$ za čas, in $V(t) = v(t)\frac{t_0}{L_0}$ za hitrost. Te dve "transformaciji"vstavimo v rešitev diferencialne enačbe, ter še upoštevamo robne pogoje.

Za primer dinamičnih robnih pogojev/poljubni končni hitrosti, velja naslednja zveza:

$$\frac{d\bar{L}}{d\dot{V}}\Big|_{T=1} = 0 \tag{2.7}$$

Dobimo naslednja robna pogoja:

$$V(0) = V_0$$
$$\dot{V}(1) = 0$$

Upoštevamo še pogoj:

$$\int_0^1 V(t)dT = 1 \tag{2.8}$$

in dobimo rešitve v obliki:

$$V(T) = \frac{3}{2}T^2(V_0 - 1) + 3T(1 - V_0) + V_0 \tag{2.9}$$

Vidimo, da so rešitve parabole, edini parameter, ki vpliva na obliko gibanja, je le začetna hitrost. Različne oblike rešitev, pri nekaj različnih začetnih hitrostih se vidijo na sliki 4.

3 Višje sode potence

Oglejmo si primer, ko v funkcionalu izberemo višjo sodo potenco pospeška. Lagrangeova funkcija je potem:

$$\bar{L} = \dot{v}(t)^{2p} - \lambda v(t) \tag{3.1}$$

Po uporabi E-L enačbe dobimo naslednjo diferencialno enačbo:

$$\ddot{v}(t) + \frac{\lambda}{2p(2p-1)}\dot{v}(t)^{-2p+2} = 0 \tag{3.2}$$

Po dveh integracijah dobimo sledečo rešitev:

$$v(t) = (-\frac{\lambda}{2p})^{\frac{1}{2p-1}}(C_1 + t)^{\frac{2p}{2p-1}} + C_2 \tag{3.3}$$

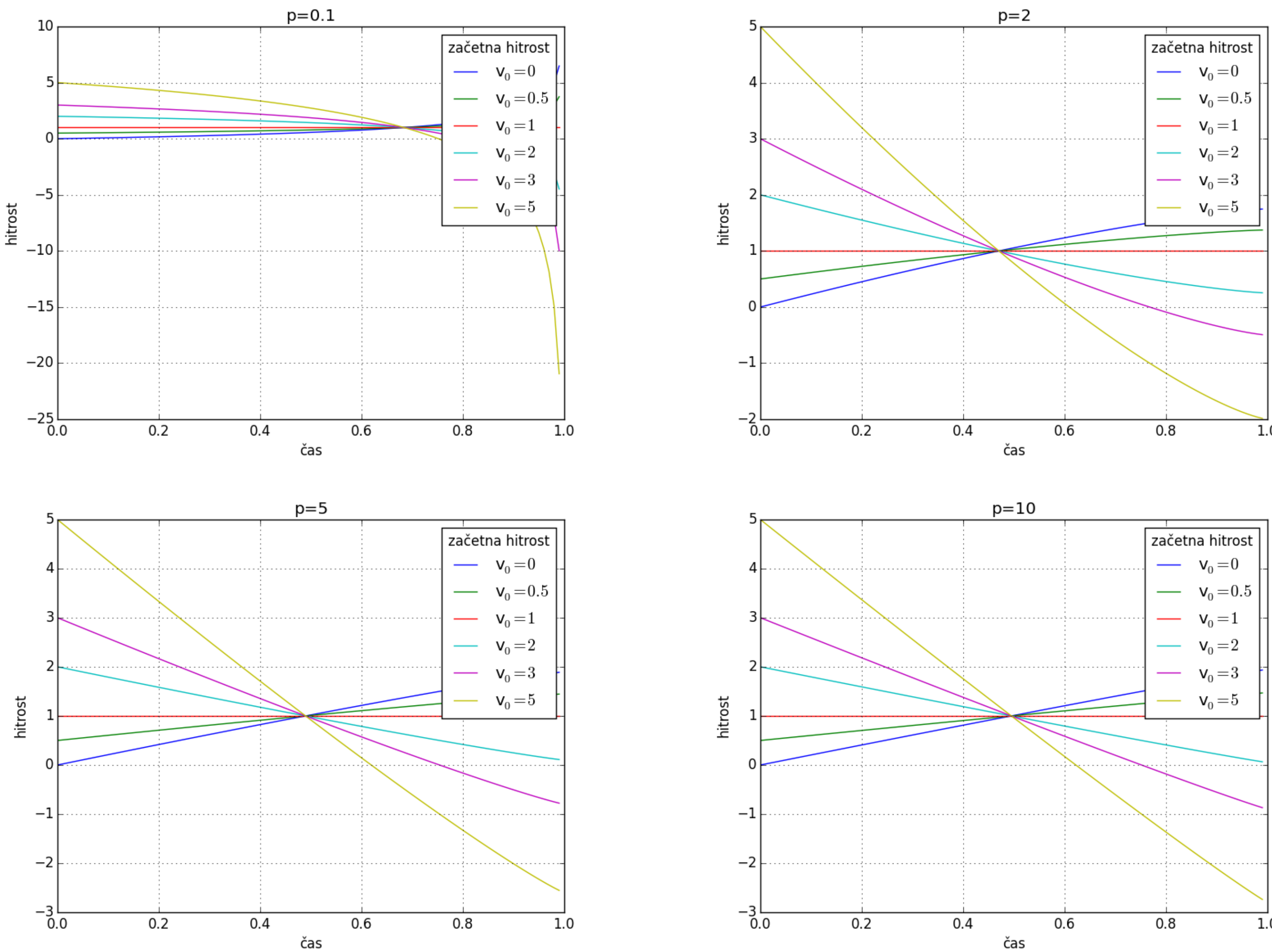
Po uporabi robnih pogojev, uporabi vezi ter vpeljavi brezdimenzijskih spremenljivk:

$$v(0) = v_0$$
$$\dot{v}(1) = 0$$
$$\int_0^1 V(t)dT = 1$$

pridemo do rešitve:

$$V(T) = \frac{4p-1}{2p}(1 - V_0)(1 - (1 - T)^{\frac{2p}{2p-1}}) + V_0 \tag{3.4}$$

Oglejmo si še limito, ko gre p proti neskončno. Takrat se enačba poenostavi v preprosto linearno funkcijo: $V(T) = 2T(1 - V_0) + V_0$. Linearno padanje/naraščanje hitrosto se dobro opazi pri p=10, medtem, ko pri p=5, pa krivulje malenkostno odstopajo od premice.



Slika 2: Primeri vožnje za različne potence pospeška.

4 Prispevek kvadratičnega člena hitrosti

Sedaj si bomo pogledali še kako vpliva kvadratični člen hitrosti v Lagrangeovi funkciji k našim rešitvam. Torej naša Lagrangeova funkcija je:

$$\bar{L} = \dot{v}(t)^2 + Av(t)^2 - \lambda v(t) \tag{4.1}$$

Ko vstavimo to v E-L enačbo dobimo naslednjo diferencialno enačbo:

$$\ddot{v}(t) - Av(t) + \frac{\lambda}{2} = 0 \tag{4.2}$$

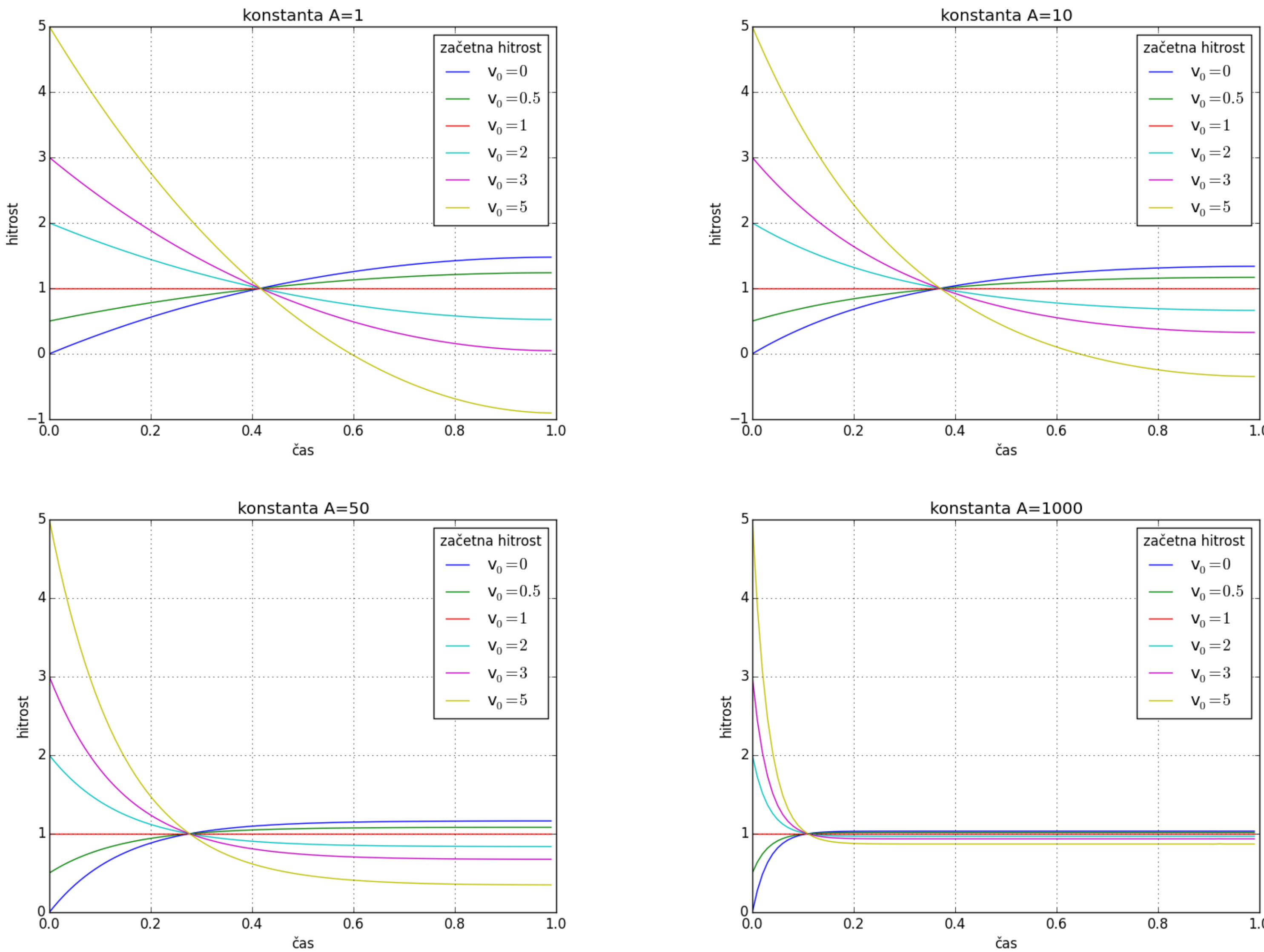
ter njena rešitev:

$$v(t) = C_1 \sinh(\sqrt{A}t) + C_2 \cosh(\sqrt{A}t) + \frac{\lambda}{2C} \tag{4.3}$$

Ob upoštevanju robnih pogojev (enaki kot v prejšnjih primerih), vezi in transformaciji spremenljivk, naslednjo enačbo:

$$V(T) = (V_0 - AT_0 \frac{1 - V_0 \frac{\tanh(\sqrt{A}T_0)}{\sqrt{A}T_0}}{1 - \frac{\tanh(\sqrt{A}T_0)}{\sqrt{A}T_0}})(\cosh(\sqrt{A}T) - \tanh(\sqrt{A}T_0)\sinh(\sqrt{A}T)) + AT_0 \frac{1 - V_0 \frac{\tanh(\sqrt{A}T_0)}{\sqrt{A}T_0}}{1 - \frac{\tanh(\sqrt{A}T_0)}{\sqrt{A}T_0}} \tag{4.4}$$

Ker enačba ni pretirano lepa in se ne vidi njenih lastnosti si oglejmo grafe za nakaj vrednosti začetne hitrosti in pri različnih vrednsoti konstante A. Opazimo, da z naraščanjem vredosti konstante A, se hitrost hitreje približuje h povprečni vrednosti vožnje.



Slika 3: Primeri vožnje za različne vrednosti konstante A.

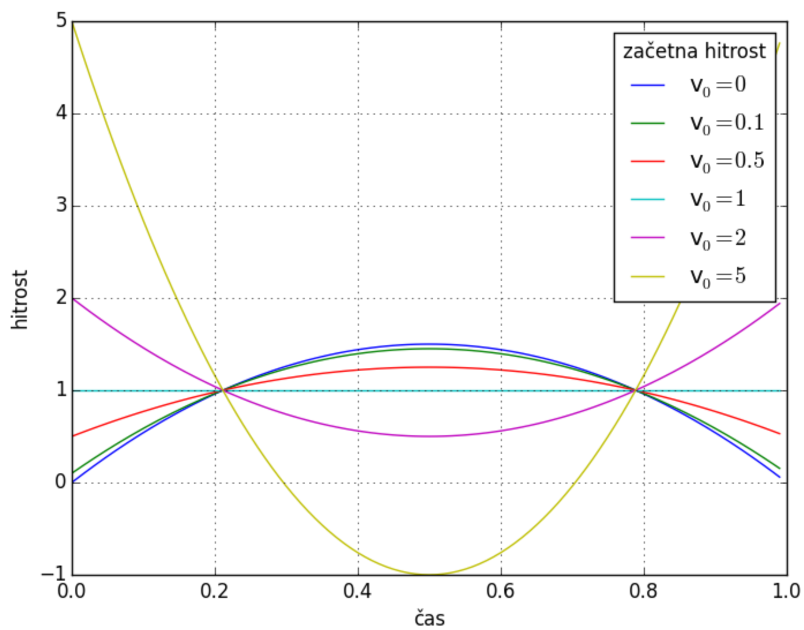
5 Periodična rešitev

Oglejmo si primer rešitve diferencialne enačbe 2.6, z naslednjima robnima pogojema:

$$v(0) = v_0$$
$$v(t_0) = v_0$$

Dobimo rešitev:

$$V(T) = -6(1 - V_0)T^2 + 6(1 - V_0)T + V_0 \tag{5.1}$$



Slika 4: Primer rešitev za različne začetne hitrosti, za enačbo 2.6, za primer enake končne in začetne hitrosti.