Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

13. naloga: - Metoda maksimalne entropije

Poročilo pri predmetu modelska analiza 1

2015/2016

Avtor:
Klemen Rahne
28152028

5. december 2016

1 Frekvenčni spekter

V tej nalogi si bomo pogledali metodo maksimalne entropije. V tej metodi trenutni signal zapišemo kot vsota predhodnih signalov pomnoženimi s primernimi koeficienti:

$$y_i = \sum_{k=1}^{N} a_k y_{i-k} \tag{1.1}$$

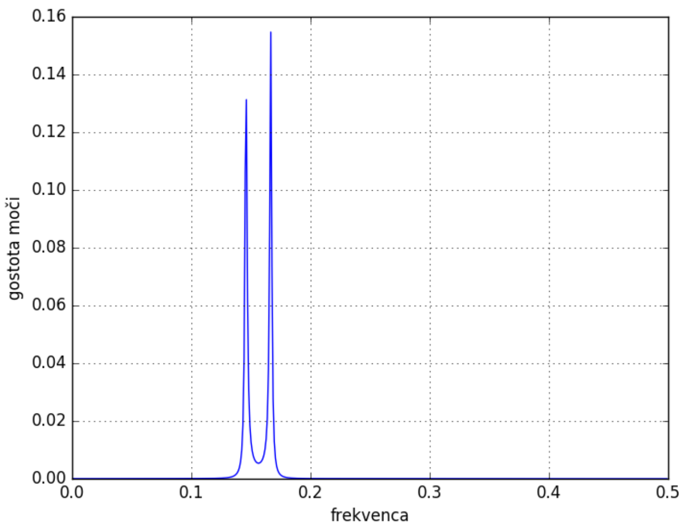
Moč takega signala se v frekvenčni obliki zapiše kot:

$$P(f) = |S(f)|^2 = \frac{a_0^2}{|1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i2\pi k f}|^2} \tag{1.2}$$

Frekvenca f je diskretna in je v enotah frekvenci vzorčenja $f_S = \frac{1}{N}$, kjer je N število točk. Zaradi Nyqusitovega kriterija je frekvenca omejena na $\frac{1}{2}$ vzorčne frekvence. Oglejmo si najprej na preprostem signalu, ki bo vsota dveh sinusnih signalov:

$$y_k = \sin(75x_k) + \sin(85x_k) \quad x_k = k\frac{2\pi}{N} \tag{1.3}$$

Signalu smo priredili 512 točk oz. v diskretnem imamo sedaj frekvenci 0.146 za $\sin(75x)$ in 0.166 za $\sin(85x)$.

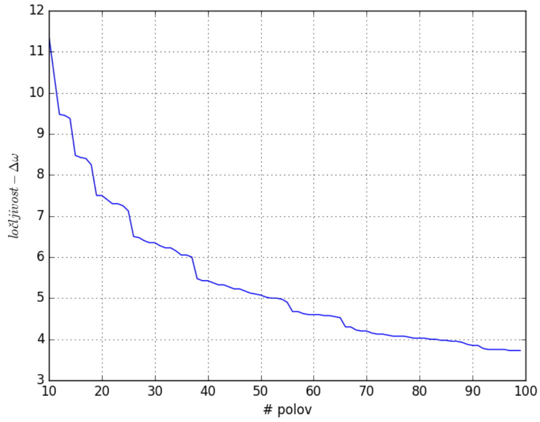


Slika 1.1: Frekvenčna slika signala 1.3. Opazimo da ima dva izrazita vrha, vendar njuni amplitudi nista enaki. Uporabljeno je bilo 20 koeficientov.

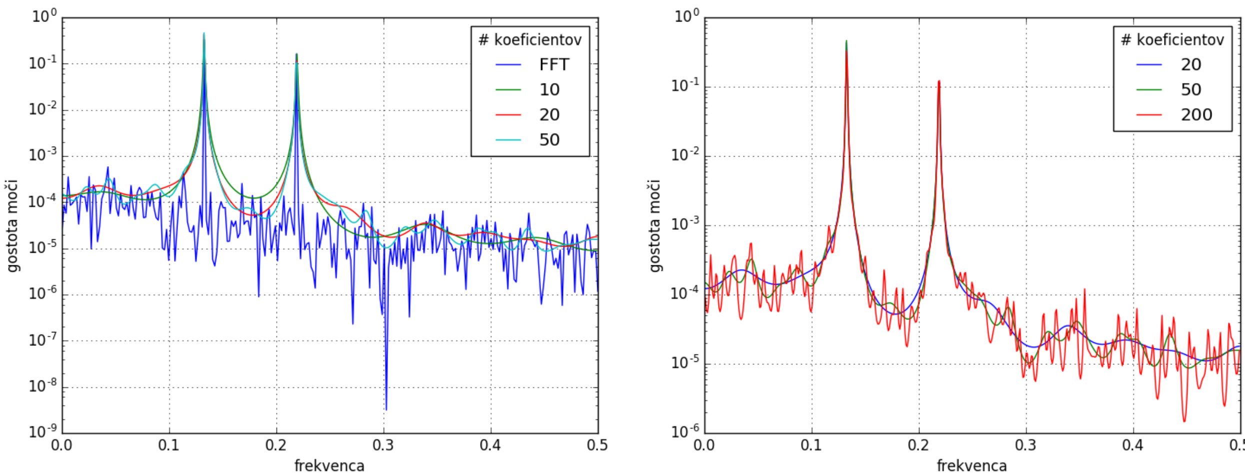
V zgornjem primeru smo za prikaz uporabili dve točno določeni frekvenci in znano število koeficientov. Predpostavimo, da sta ločljivost frekvence odvisna od števila vzorčnih točk in števila koeficientov (to trditev bomo pogledali v primerih v naslednjem poglavju). Poglejmo si kakšna je ločljivost v tem primeru. Minimalna frekvenca oz. dva vrhova med seboj ločimo, ko je minimum med dvema vrhovoma manjši od polovične višine maksimuma.

1.1 Frekvenčni spekter iz datoteke *va2.dat* in *val3.dat*

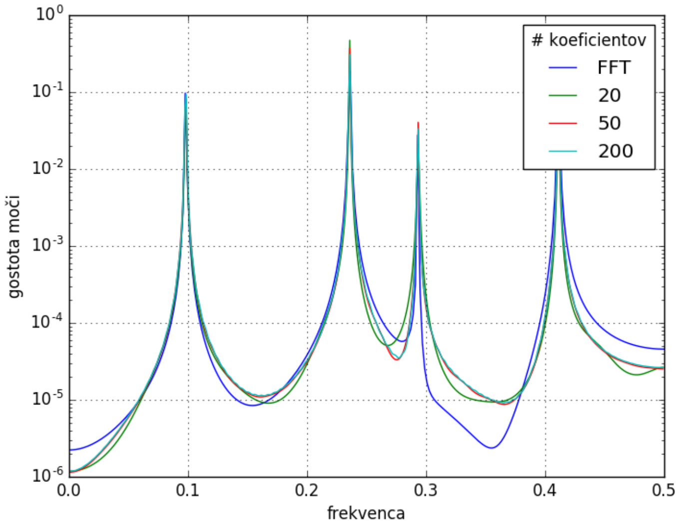
Oglejmo si kako ta metoda deluje na podatkih iz datotek *va2.dat* in *val3.dat*.



Slika 1.2: Ločljivost metode MEM. Natančnost metode narašča približno eksponentno z naraščanjem števila koeficientov. Od "oka" se pri okoli 20 koeficientih ločljivost zadovoljivo ustali, da v nadaljevanju uporabljamo 20 koeficientov.



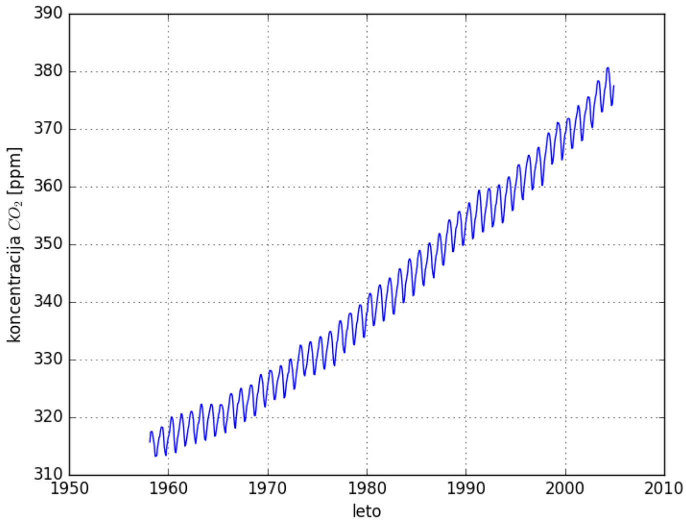
Slika 1.3: Primerjava spektrov podatkov iz datoteke *va2.dat*. Na levi imamo primerjavo MEM metode proti Fourierovi transformaciji (FT). Vidimo da je MEM metoda nekoliko zglajena FT, kar lahko sklepamo da dobro odtrani šum. Na desnem grafu vidimo, da z povečevanjem števila koeficientov ne izboljšamo odstranjevanja šuma, saj želi potem MEM metoda upoštevati tudi šum.



Slika 1.4: Frekvenčna slika iz datoteke *va3.dat*. V tem primeru sta MEM metoda in FT primerljivi. Obe metodi enako ostro določita vrhove. V tem primeru se z večanjem števila koeficientov ne izboljša spektralna oblika.

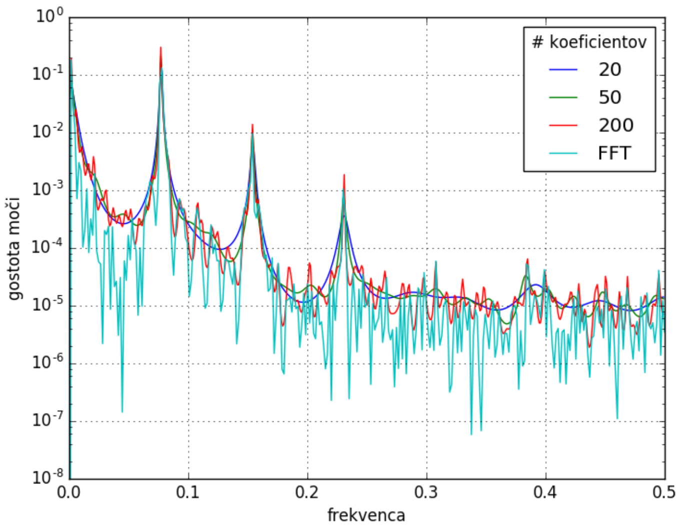
1.2 Koncentracija CO_2

Imamo tudi meritve koncentracije CO_2 v zraku za preteklih 50 let. Nas zanima le frekvenčni oz.

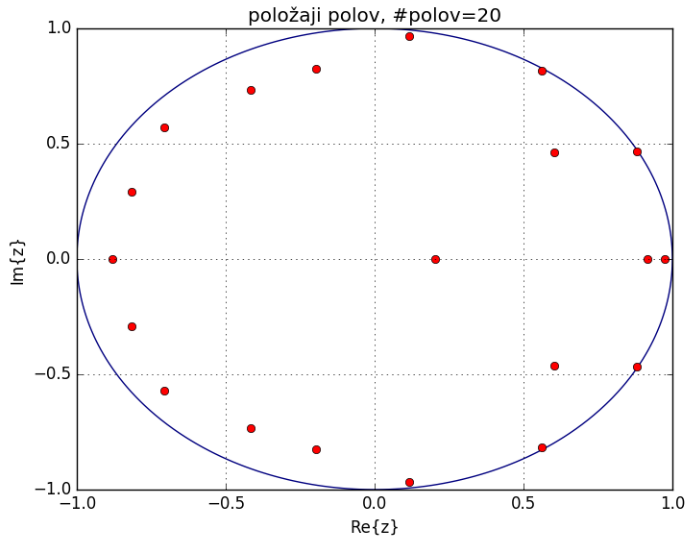


Slika 1.5: Koncentracija CO_2 v zraku skozi čas.

oscilirajoči del, zato bomo meritvam odšteli linearni člen.



Slika 1.6: Frekvenčna slika meritev koncentracije CO_2 v ozračju. Iz slike opazimo nekaj izrazitih vrhov, kar nam očitno že graf 1.2 pokaže. Ponovno se vidi, da z povečanjem števila koeficientov ne izboljšamo slike.



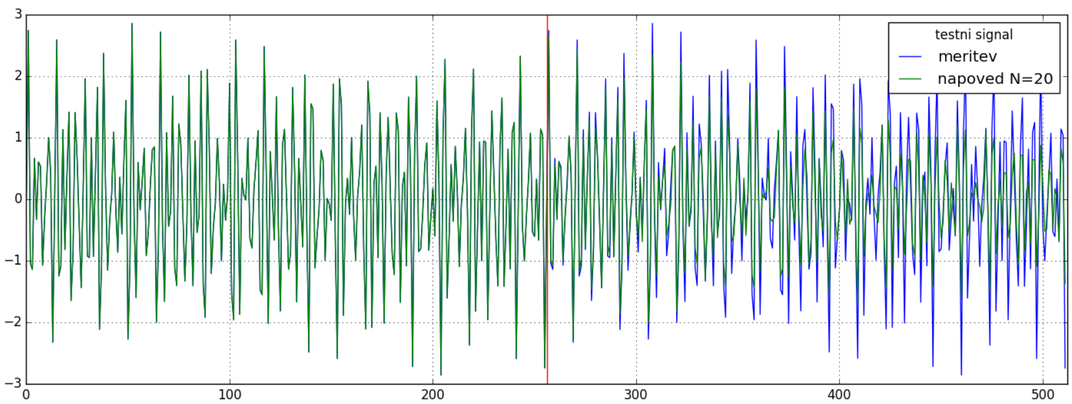
Slika 1.7: Položaji polov pri MEM metodi za podatke meritev koncentracije CO_2. V tem primeru so vsi poli ležali izven enotske krožnice in so bili ustrezno transformirani znotraj krožnice. Uporabili smo 20 polov.

2 Napoved

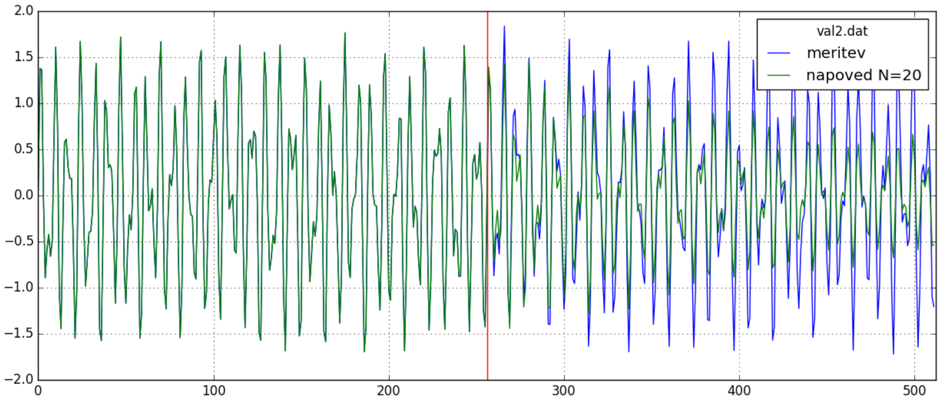
Metodo maksimalne entropije smo začeli z trditvijo:

$$y_i = \sum_{k=1}^{N} a_k y_{i-k} \tag{2.1}$$

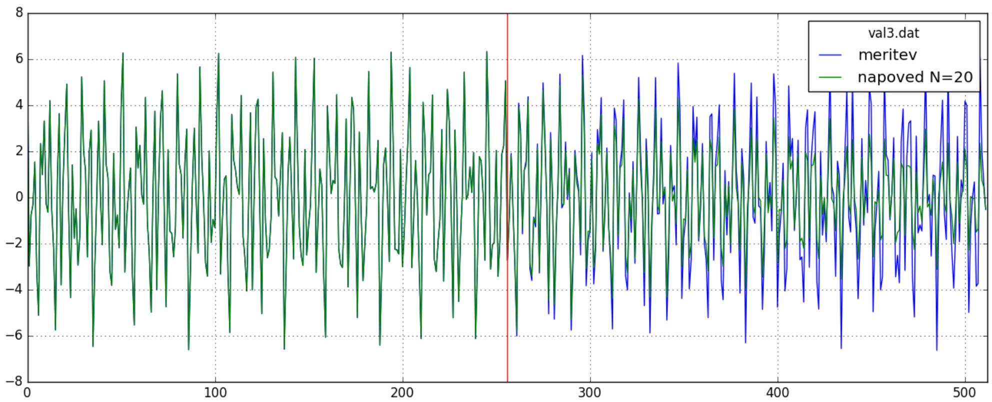
kjer je trenutna vrednost meritve vsota predhodnih merjenih točk. Če torej že poznamo pretekle merjene točke in koeficiente a_k lahko napovemo vrednost trenutne točke. To je poceni način za izračun vrednosti prihajajočih točk, saj izvajamo samo množenje in seštevanja.



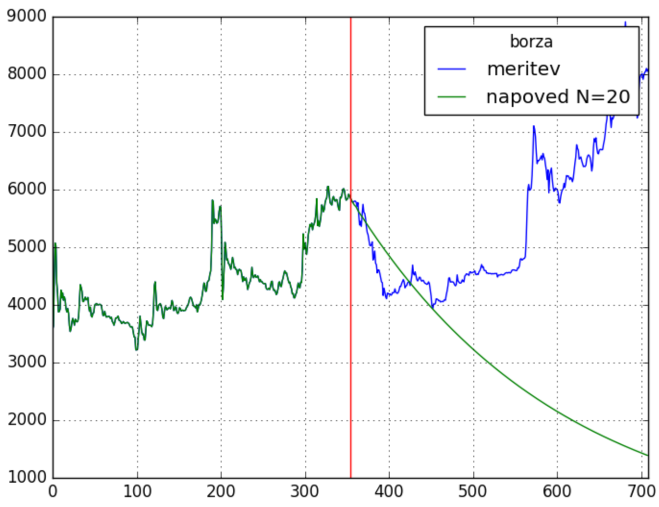
Slika 2.1: Napoved testnega signala iz prve naloge: $y_k = \sin(75x_k) + \sin(85x_k)$. Opazimo, da je frekvenca oz. položaj vrhov sovpada z izmerjenimi vrednosti. Edina razlika je v velikosti vrhov, ki pa je različna. Verjetno je tu podoben vpliv, kot pri gostotni funkciji, kjer smo imeli dva različno velika vrhova. Rdeča navpična črta napoveduje začetek napovedi točk.



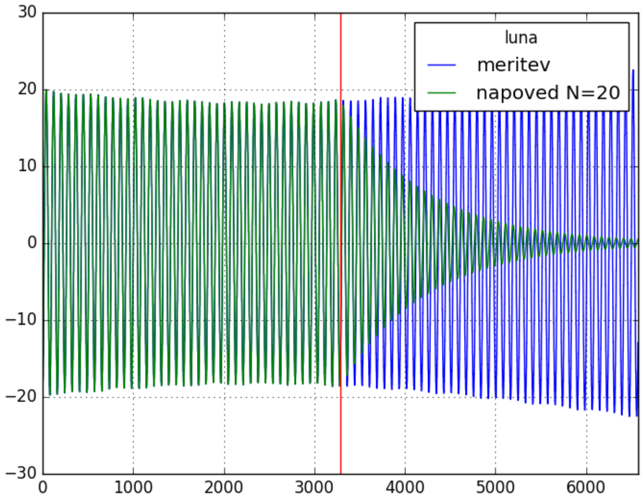
Slika 2.2: Napoved za podatke iz datoteke *val2.dat*.



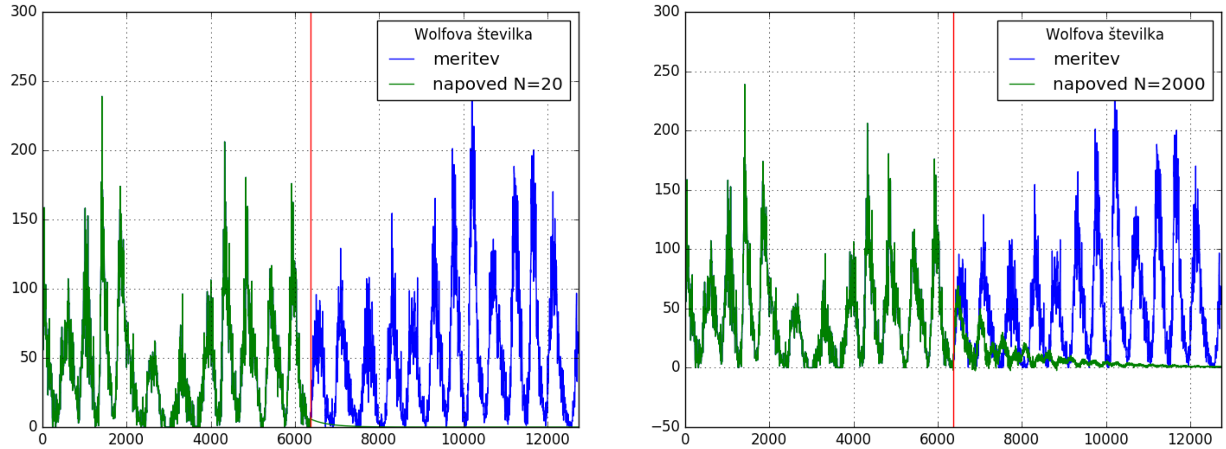
Slika 2.3: Napoved za podatke iz datoteke *val3.dat*.



Slika 2.4: Napoved za podatke iz datoteke *borza.dat*.



Slika 2.5: Napoved za podatke iz datoteke *luna.dat*.



Slika 2.6: Primerjava napovedi meritev iz datoteke *wolf.dat*.

Če si ogledamo zgornje primere opazimo, da je ujemanje vrhov pri podatkih, ki so sestavljeni iz nekih periodičnih funkcij (npr. sin ali cos). Pri napovedi *wolf.dat* je bilo potrebno za opazno periodično ujemanje povečati število koeficientov. Vzrok temu je najverjetneje majhna frekvenca, ki ima izrazit vrh v gostotni funkciji v primerjavi z vzorčno frekvenco in potrebujemo večje število koeficientov za opis sistema.
Pri "nefrekvenčnih" gibanjih (npr. borza), kjer podatki nakazujejo naključno gibanje ta metoda povsem odpove in lahko zaključimo, da je MEM metoda uporabna samo za določitev vrhov pri signalih sestavljeni iz periodičnih funkcij.