



*Univerza v Ljubljani*  
*Fakulteta za matematiko in fiziko*

*Oddelek za fiziko*

---

## 11. naloga: - Stohastični populacijski model

---

POROČILO PRI PREDMETU MODELSKA ANALIZA 1

2015/2016

*Avtor:*

Klemen RAHNE  
28152028

28. februar 2016

# 1 Porazdelitev izumrlih časov

Obravnavajmo model populacije. Analitično spreminjanje populacije zapišemo:

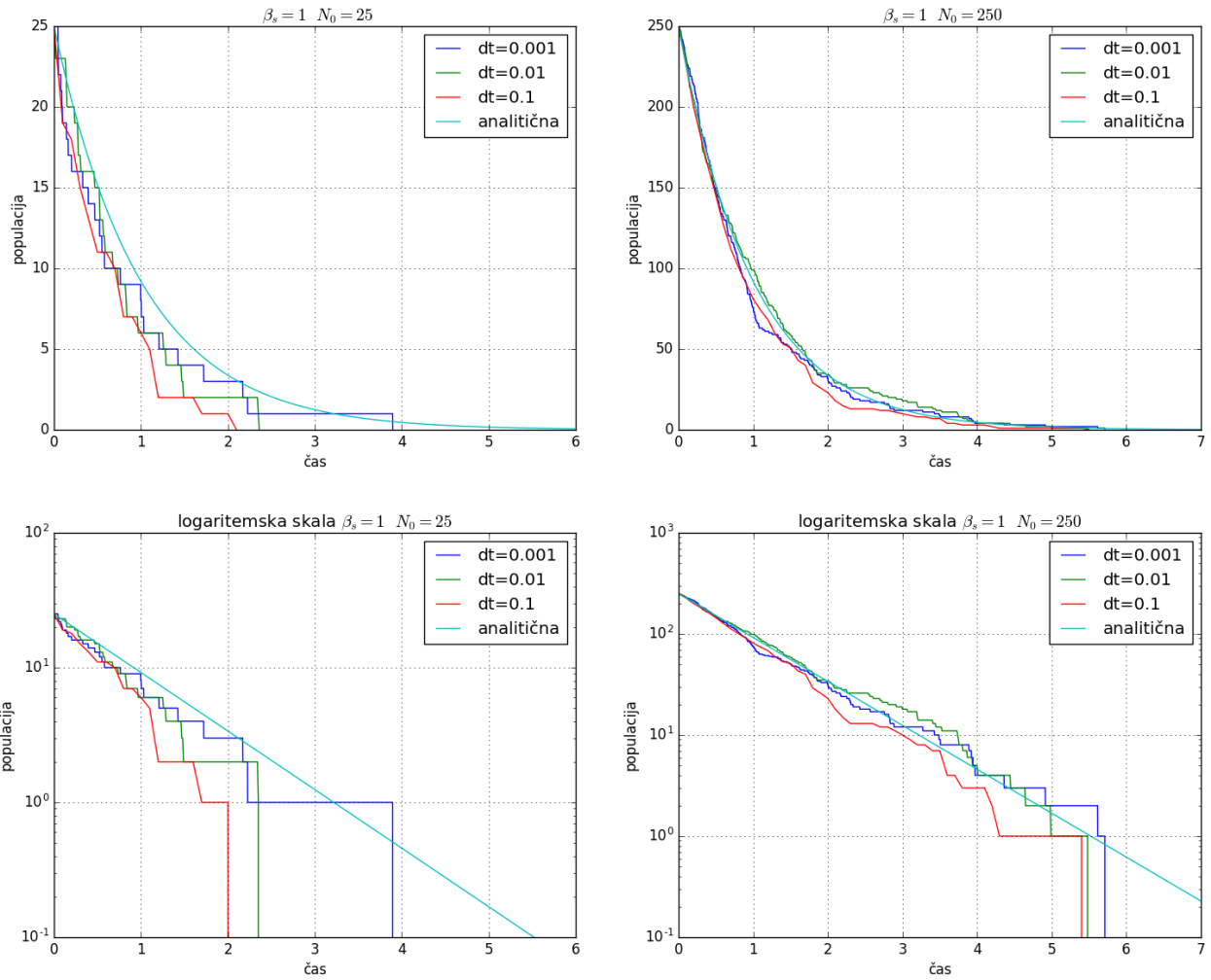
$$\frac{dN}{dt} = N(\beta_r - \beta_s) \quad (1.1)$$

kjer je  $N$  število populacije, ter  $\beta_s$ ,  $\beta_r$  koeficienta umrljivosti, rojstva populacije. Rešitev enačbe je eksponentno naraščanje/padanje populacije. Pri stohastični modelu spreminjamo populacijo po naključnem številu, ki je porazdeljen po nekem zakonu. Iz zgornje enačbe lahko zapišemo:

$$\Delta N = N(\beta_r - \beta_s)\Delta t \quad (1.2)$$

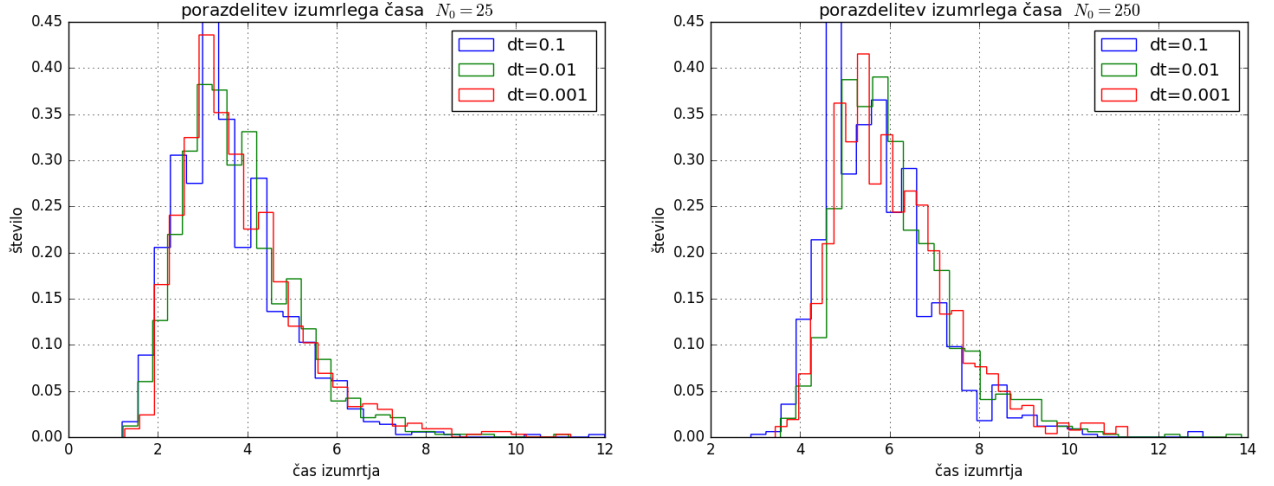
Spreminjanje populacije je porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi, s povprečno vrednostjo  $\bar{N} = N\beta\Delta t$ . Torej v vsakem koraku k trenutni populaciji prištejemo spremembo populacije:

$$N_{i+1} = N_i - \mathcal{P}(N_i\beta\Delta t) \quad (1.3)$$



Slika 1.1: Primerjava reštev populacijskih modelov. Spodnja slika je enaka zgornji sliki, le da je  $y$  ordinata v logaritemski skali. Na levi strani imamo začetno populacijo 25, na desni 250. Opazimo, da se pri večji začetni populaciji stohastično dobljene spremembe populacije bolje prilagajajo analitični rešitvi. Prav tako opazimo, da se manjši časovni intervali bolje prilagajajo analitični rešitvi.

Kot posledica stohastične obravnave naše populacije, pride število naše populacije na nič. Takrat naša populacija umre, saj v njej ni več oseb. V primerjavi z analitično rešitvijo (pri kateri se vrednost populacije približuje priti 0) pridemo sedaj do novega podatka v našem modelu-izumrlem času. Zaradi stohastičnega modela naše populacije dobimo pri vsaki generaciji populacijskega modela do drugega časa izumrtja. Zato si oglejmo porazdelitve teh časov.



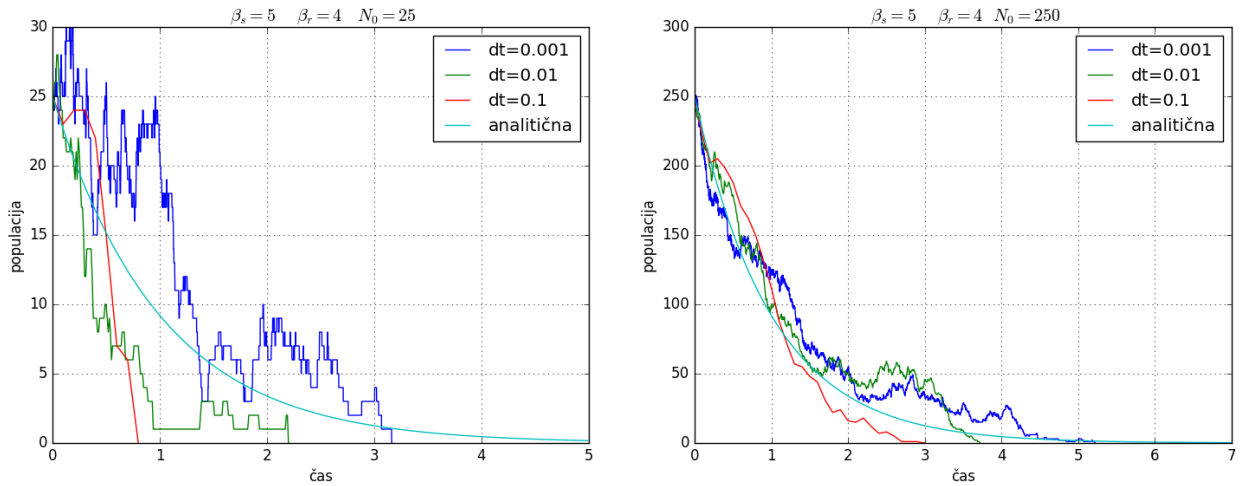
Slika 1.2: Porazdelitve časa izumrtja za populaciji z različnima začetnima populacijama (levo  $N_0 = 25$ , desno  $N_0 = 250$ ). Opazimo, da v posameznem modelu porazdelitve bistveno ne odstopaje med seboj z različnimi diferencialnimi časi ( $dt$ ). Porazdelitev ima pri obeh populacijah en izrazit vrh, ki pa se razlikujeta v položaju med populacijama (pri  $N_0 = 25$  pri okoli 3.5, pri  $N_0 = 250$ , pa okoli 5). To je povsem pričakovano, saj za izumrtje večje populacije pri enakem koeficientu umrljivosti potrebno več časa. Pri vsaki populaciji sem generiral 1000 razpradnih časov. Histogrami se normalizirani.

## 1.1 Umrljivost z rodnostjo

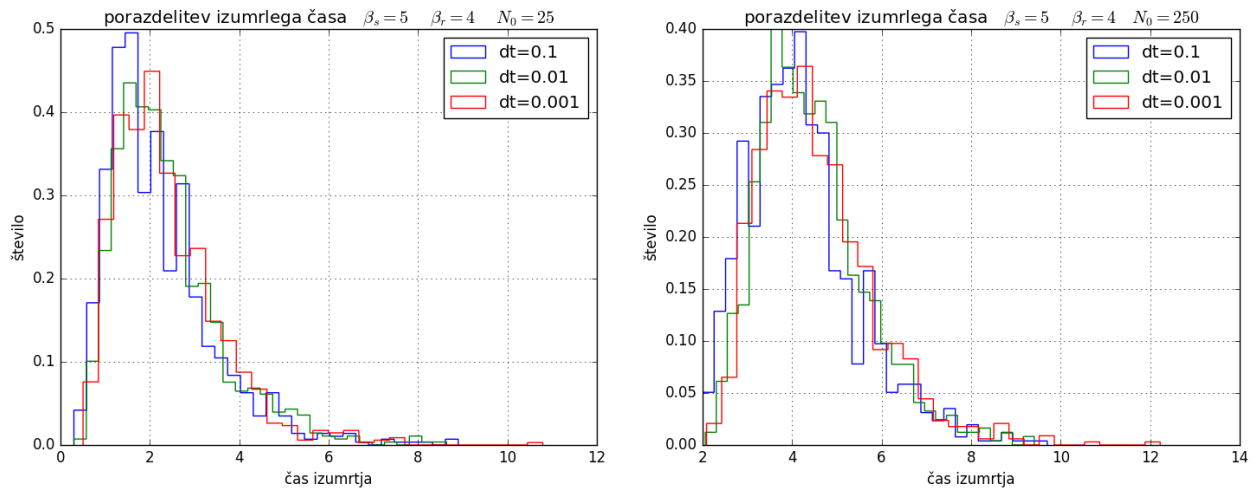
Do sedaj smo v našem populacijskem modelu upoštevali le smrtnost. Po enačbi 1.3 sedaj generirajmo spremembo populacije, tako da upoštevamo še rojstvo:

$$N_{i+1} = N_i - \mathcal{P}(N_i\beta_s\Delta t) + \mathcal{P}(N_i\beta_r\Delta t) \quad (1.4)$$

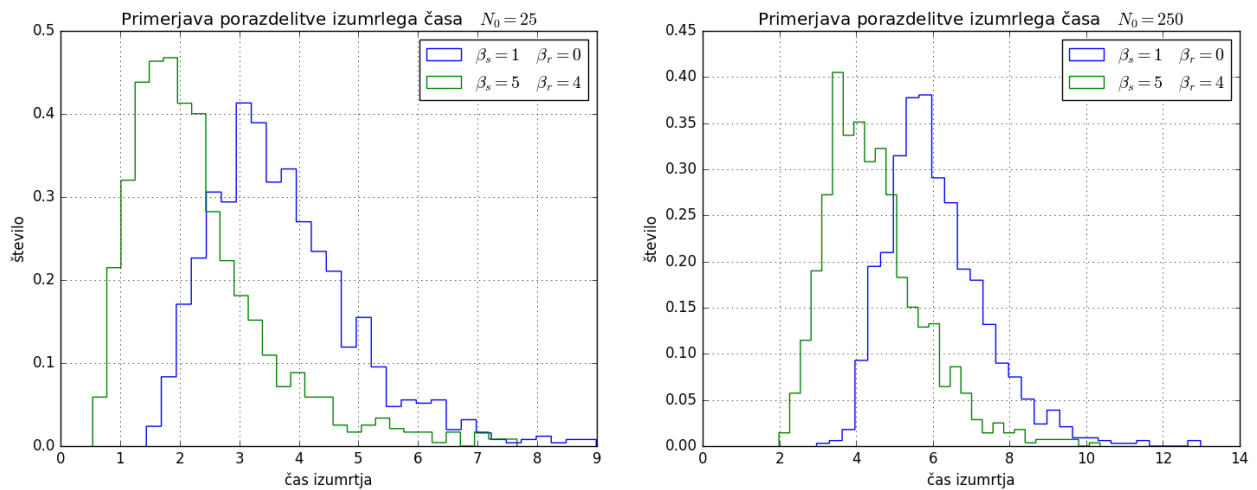
Analitično je rešitev eksponentna funkcija, s parametrom  $\beta$  v eksponentu, ki je razlika koeficienta rojstva in umrljivosti. Posledično je ponovno analitična rešitev eksponentno padanje/naraščanje populacije.



Slika 1.3: Primerjava populacijskih modelov. Na levi strani imamo modele z začetno populacijo  $N_0 = 25$ , na desni z  $N_0 = 250$ . Sklepamo, da model z začetno vrednostjo populacije  $N_0 = 250$  lažje sledi analitični rešitvi.



Slika 1.4: Primerjava porazdelitev časov izumrtja. Ponovno ima porazdelitev vrh, pri začetni populaciji  $N_0 = 25$  je okoli 2, pri  $N_0 = 250$  je okoli 4. Opazimo, da so porazdelitve pri modelih z enako začetno vrednostjo skoraj enake. Histogram je normaliziran, za vsako porazdelitev je bilo generiranih 1000 časov izumrtja.



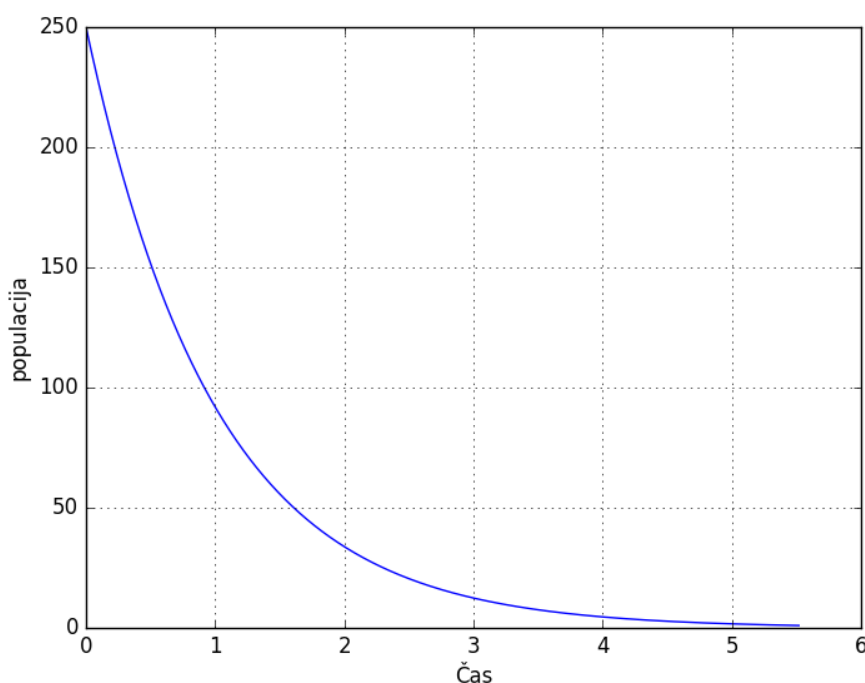
Slika 1.5: Primerjava porazdelitev časov izumrtja. Na levi je model z začetno populacijo  $N_0 = 25$ , na desni model z začetno populacijo  $N_0 = 250$ . V vseh primerih je časovna diferenca 0.01. V obeh populacijah opazimo, da z vpeljavo rodnosti se vrh porazdelitve pomakne levo (zmanjša čas izumrtja).

## 2 Matrika prehodov

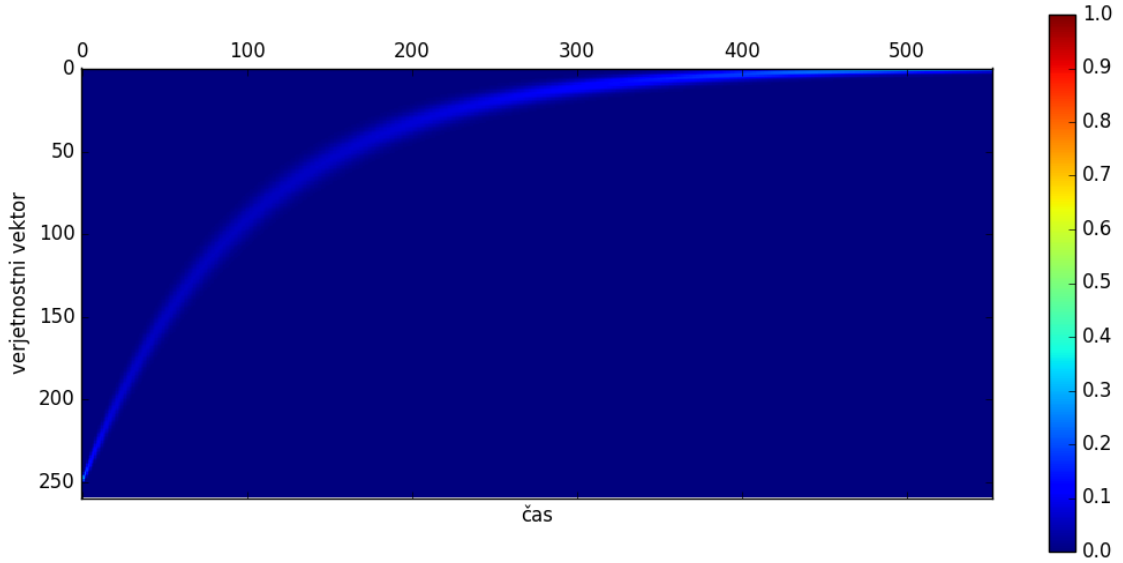
Spreminjanje populacije lahko zapišemo tudi s pomočjo matrike, s pomočjo katere napovemo verjetnostne prehode iz trenutnega stanja v naslednje stanje:

$$x_{i+1} = Mx_i \quad (2.1)$$

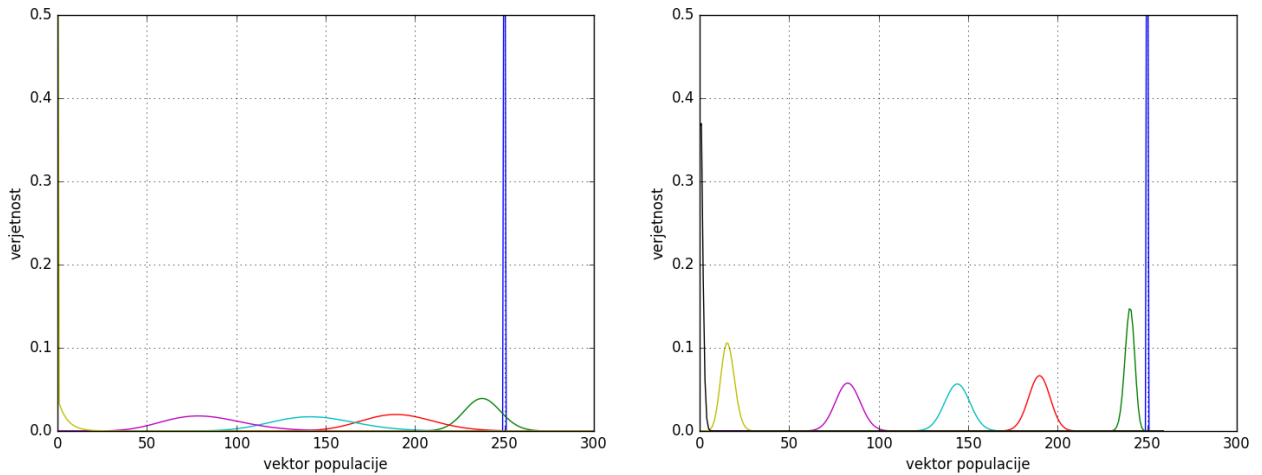
kjer je  $x$  vektor populacije in  $M$  prehodna matrika. V vektorju populacije se skrivajo verjetnosti oz. delež populacije v stanju s številom populacije s pripadajočim indeksom. Primer:  $x = (0, 0.25, 0.75, 0)$ , pomeni, da je verjetnost, da ima sistem 1 osebo enako 25% in 2 osebi 75%. V matriko  $M$  na mesto  $ij$  zapišemo verjetnost za prehod števila populacije iz stanja  $i$  v stanje  $j$ . Spremembe števila populacije so porazdeljene po Poissonovi porazdelitvi. V našem primeru bomo naredili dve poenostavitvi: 1) Stanje sistema se lahko spremeni le za ena; 2) verjetnost za preho bo majhna in enaka  $r_i = n_i\beta dt$ , kjer je  $n_i$  število populacije v stanju  $i$  (je enako  $i$ ),  $\beta$  konstanta umrljivosti/rojstva, ter  $dt$  diferencial časa. Torej ima naša matrika na diagonalah vrednosti  $1 - r_s - r_r$ , nad diagonalo  $r_s$ , pod diagonalo  $r_r$ .



Slika 2.1: Časovni potek spreminjanje populacije s uporabo matrike prehodov. Začetno število populacije je 250, na vrednost pod 0 pade v času 5.5129. Analitična rešitev zavzame povsem enako obliko. Prav tako enako obliko zavzame, če upoštevamo samo smrtnost ( $\beta = 1$ ) ali smrtnost in rojstvo ( $\beta_r = 4, \beta_s = 5$ ).



Slika 2.2: Kako se spreminja verjetnost, da je v danem stanju sistem.



Slika 2.3: Primerjava, kako se širina verjetnostnega vektorja spreminja s časom. Na začetku imamo  $\delta$  funkcijo pri 250, nato se zelo hitro približa gaussovi funkciji. Oblika se ohranja, dokler se skupna populacija ne približa 0. Tam se preoblikuje v  $\delta$  funkcijo pri 0. Na levi strani je uporabljena samo umrljivost ( $\beta_s=1$ ), medtem ko je na desni uporabljena še rodnost ( $\beta_s = 5, \beta_r = 4$ ). Na desni strani se na začetku (zeleni krivulji) opazi še verjetnost, ki presega začetno vrednost populacije. To je posledica vpeljave rodnosti, vendar to na povprečno/pričakovano vrednost nima vpliva-glej 2.1. Diferencial časa na levi je bil 0.001, na desni pa 0.0001.

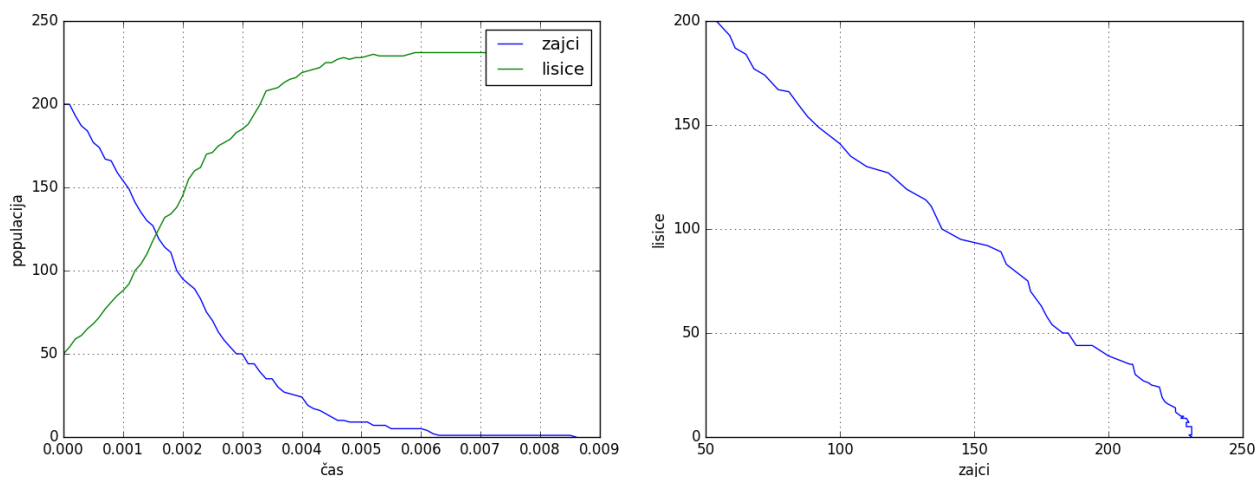
### 3 Lisice in zajci

Imamo model zajcev in lisic:

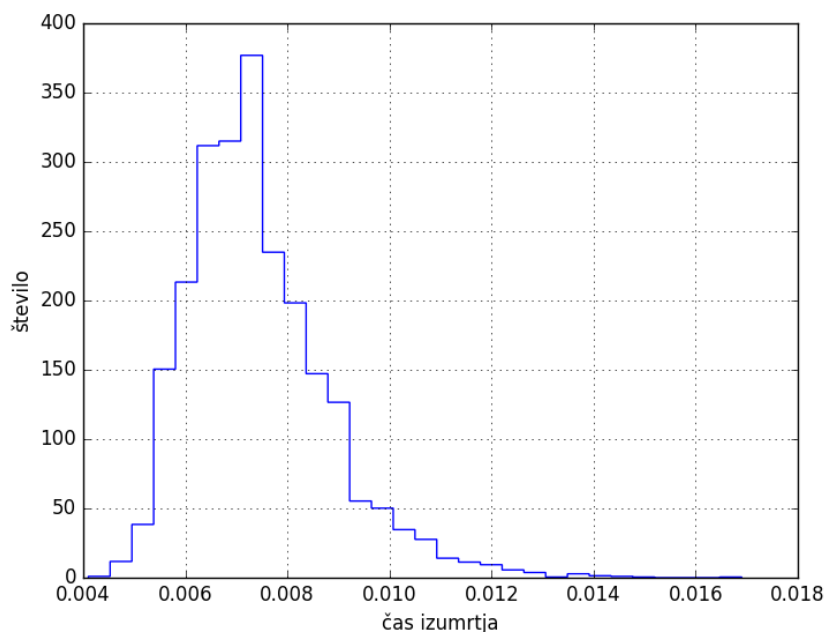
$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL\end{aligned}\tag{3.1}$$

Podobno kot v prvem delu te naloge računamo novo populacijo s pomočjo naključnih števil, ki so porazdeljeni po Poissonovi porazdelitvi:

$$\begin{aligned}Z_{i+1} &= Z_i + \mathcal{P}(Z_i \alpha \Delta t) - \mathcal{P}(Z_i L_i \beta \Delta t) \\ L_{i+1} &= L_i + \mathcal{P}(L_i \gamma \Delta t) - \mathcal{P}(Z_i L_i \delta \Delta t)\end{aligned}\tag{3.2}$$



Slika 3.1: Rešitev populacije zajce in lisic po enačbi 3.2. Parametri:  $L_0 = 50$ ,  $Z_0 = 200$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 5$ ,  $\delta = 4$  ter  $\Delta t = 10^{-4}$ .



Slika 3.2: Porazdelitev časov izumiranja zajcev. Parametri so enaki, kot v zgornjem primeru. Generiranih je bilo 5000 časov. Povprečna vrednost je 0.00743.