МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
направления 10.05.01 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Токарева Никиты Сергеевича

Проверил
аспирант ______________ В. Н. Кутин

Саратов 2022

1 Постановка задачи

Цель работы – изучение основных понятий универсальной алгебры и операций над бинарными отношениями.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть понятие алгебраической операции и классификацию свойств операций. Разработать алгоритмы проверки свойств операций: ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, обратимость, дистрибутивность.
2. Рассмотреть основные операции над бинарными отношениями. Разработать алгоритмы выполнения операции над бинарными отношениями.
3. Рассмотреть основные операции над матрицами. Разработать алгоритмы выполнения операций над матрицами.

2 Теоретические сведения по рассмотренным темам с их обоснованием

2.1 Понятие алгебраической операции

Отображение $f : A^n \to A$ называется алгебраической n-арной операцией или просто **алгебраической операцией** на множестве A. При этом n называется порядком или арностью алгебраической операции f.

Далее для бинарной операции f по возможности будем использовать мультипликативную запись с помощью символа «·», т.е.вместо $f(x, y)$ писать $x \cdot y$. При необходимости для бинарной операции f используется также аддитивная запись с помощью символа «+», т.е. вместо $f(x, y)$ записывается $x + y$.

2.2 Классификация свойств операций

Бинарная операция · на множестве A называется:

1. ассоциативной, если $\forall x, y, z \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$
2. коммутативной, если $\forall x, y \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot y = y \cdot x;$$
3. идемпотентной, если $\forall x \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot x = x;$$
4. обратимой, если $\forall x, y \in A$, если уравнения $x \cdot a = y$ и $b \cdot x = y$ имеют решение, причем единственное;
5. дистрибутивной относительно операции +, если для любых $x, y, z \in A$ выполняются равенства
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x);$$

2.3 Основные операции над бинарными отношениями

1. Теоретико-множественные операции ($\cup, \cap, \neg$)
2. Обращение бинарных отношений: обратным для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ называется бинарное отношение $\rho^{-1} \subset B \times A$, определяющееся по формуле:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \rho\}.$$

3. Композиция бинарных отношений: композицией бинарных отношений $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ называется бинарное отношение $\rho\sigma \subset A \times C$, определяющееся по формуле:

$$\rho\sigma = \{(a, c) : (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in \sigma \text{ для некоторого } b \in B\}.$$

2.4 Основные операции над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц.
   Суммой $A + B$ матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.
   Разностью $A - B$ матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.
2. Умножение матрицы на число.
   Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.
3. Произведение двух матриц.
   Произведением матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.
4. Транспонирование матрицы.
   Транспонированной по отношению к матрице $A_{m\times n} = (a_{ij})$ называется матрица $A^T_{n\times m} = (a^T_{ij})$ для элементов которой $a^T_{ij} = a_{ji}$.
5. Обращение матрицы.
   Обращение матрицы $A_{m\times n}$ - получение матрицы A^{-1}, обратной к исходной матрице A. Обратная матрица A^{-1} — такая, при умножении которой на исходную матрицу A получается единичная матрица E. Это такая матрица, которая удовлетворяет равенству

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

3 Результаты работы

3.1 Коды программ, реализующей рассмотренные алгоритмы

3.2 Результаты тестирования программ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате лабораторной работы были рассмотрены теоретические сведения об отношении эквивалентности, разобраны определения фактор-множества, отношения порядка и диаграммы Хассе, контекста и концепта. Опираясь на изложенную выше теорию, были разработаны алгоритмы построения эквивалентного замыкания бинарного отношения и системы представителей фактор-множества, алгоритмы вычисления минимальных (максимальных) и наименьших (наибольших) элементов и построения диаграммы Хассе, а также алгоритмы построения решетки концептов. Была произведена оценка сложности каждого из построенных алгоритмов. Была реализована программа, написанная на языке Python.