МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
направления 10.05.01 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Токарева Никиты Сергеевича

Проверил
аспирант ____________ В. Н. Кутин

Саратов 2022

1 Постановка задачи

Цель работы: изучение основных понятий теории полугрупп.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества. Разработать алгоритм построения подполугрупп по по таблице Кэли.
2. Разработать алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству.
3. Рассмотреть понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений. Разработать алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.

2 Теоретические сведения по рассмотренным темам с их обоснованием

Определение 1. Полугруппа – это алгебра S = (S, ·) с одной ассоциативной бинарной операцией ·, т.е. выполняется

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

для любых $x, y, z \in S$.

Определение 2. Подмножество X полугруппы S называется подполугруппой, если X устойчиво относительно операции умножения, т.е. $\forall x, y \in X$ выполняется свойство: $x \cdot y \in X$. В этом случае множество X с ограничением на нем операции умножения исходной полугруппы S образует полугруппу.

В силу общего свойства подалгебр пересечение любого семейства X_i $(i \in I)$ подполугрупп полугруппы S является подполугруппой S и, значит, множество $Sub(S)$ всех подполугрупп полугруппы S является системой замыканий. множество X. Такая полугруппа обозначается символом $\langle X \rangle$ и называется подполугруппой S, порождённой множеством X. При этом множество X называется также **порождающим множеством** подполугруппы $\langle X \rangle$. В частности, если $\langle X \rangle = S$, то X называется порождающим множеством полугруппы S и говорят, что множество X порождает полугруппу S.

Для любой конечной полугруппы S найдется такой конечный алфавит A, что для некоторого отображения $\phi : A \to S$ выполняется равенство $\langle \phi(A) \rangle = S$ и, значит, $S \cong A^+/ker\phi$ этом случае множество A называется множеством порождающих символов полугруппы S (относительно отображения $\phi : A \to S$). Если при этом для слов $w_1, w_2 \in A$ выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, т.е. $w_1 \equiv w_2(ker\phi)$, то говорят, что на S выполняется соотношение $w_1 = w_2$ (относительно отображения $\phi : A \to S$).

Очевидно, что в общем случае множество таких соотношений $w_1 = w_2$ для всех пар $(w_1, w_2) \in ker\phi$ будет бесконечным и не представляется возможности эффективно описать полугруппу S в виде полугруппы классов конгруэнции $ker\phi$. Однако в некоторых случаях можно выбрать такое сравнительно простое подмножество $\rho \subset ker\phi$, которое однозначно определяет конгруэнцию $ker\phi$ как наименьшую конгруэнцию полугруппы A^+ , содержащую отношение ρ, т.е. $ker\phi = f_{con}(\rho) = f_{eq}(f_{reg}(\rho))$.

Так как в случае $(w_1, w_2) \in \rho$ по-прежнему выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, то будем писать $w_1 = w_2$ и называть такие выражения **определяющими**

соотношениями. Из таких соотношений конгруэнция $ker\phi$ строится с помощью применения следующих процедур к словам $u, v \in A^+$:

1. слово v непосредственно выводится из слова u, если v получается из u заменой некоторого подслова w_1 на слово w_2, удовлетворяющее определяющему соотношению $w_1 = w_2$, т.е. $(u, v) = (xw_1y, xw_2y)$ для некоторых $x, y \in A^*$;
2. слово v выводится из слова u, если v получается из u с помощью конечного числа применения процедуры 1.

Если все выполняющиеся на S соотношения выводятся из определяющих соотношений совокупности ρ, то конгруэнция $ker\phi$ полностью определяется отношением ρ и выражение $< A : w_1 = w_2 : (w_1, w_2) \in \rho >$ называется **копредставлением полугруппы** S.

3 Результаты работы

3.1 Алгоритм 1 - Построение подполугруппы по заданному порождающему множеству

Вход: Полугруппа S с таблицей Кэли $A = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ и подмножество $X \subset S$.

Выход: Подполугруппа $\langle X \rangle \subset S$.

Шаг 1. Положим $i = 0$, $X_0 = X$.

Шаг 2. Для X_i вычислим $\overline{X}_l = \{x \cdot y : x \in X_i \wedge y \in X\}$ и положим $X_{i+1} = X_i \cup \overline{X}_l$ (выражение $x \cdot y$ означает a_{xy} в таблице Кэли A).

Шаг 3. Вычисляем

$$\langle X \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$$

. В качестве ∞ было взято фиксированное большое число – 100000.

Оценка сложности алгоритма $O(n^2 \cdot 100000)$.

3.2 Алгоритм 2 - Построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству

Вход: Конечное множество X бинарных отношений, заданное булевыми матрицами размерности $n \times n$.

Выход: Полугруппа $\langle X \rangle$.

Шаг 1. Необходимо инициализировать список $matrices = []$. Известно, что каждому элементу $x_i \in X$ ($0 \le i < n$) соответствует матрица $A_i \in M$, где M – множество матриц A_i ($0 \le i < n$), тогда элементы списка $matrices$ будут заданы следующим образом: $matrices[i] = A_i$ ($0 \le i < n$). Стоит отметить, что список $matrices$ есть полугруппа $\langle X \rangle$.

Шаг 2. Необходимо создать список $combinations$, элементы которого будут $c_k \in combinations$, где $0 \le k < (n^1 + n^2 + ... + n^n)$. Т.е. этот список является суммой размещений с повторениями.

Шаг 3. Далее возьмем матрицу A_i ($0 \le i < n$) и умножим ее на матрицы $B_0, ..., B_l$ согласно текущей комбинации c_k ($0 \le k < (n^1 + n^2 + ... + n^n)$), где матрицы $B_1, ..., B_l \in M$ составляют текущую комбинацию c_k (l – количество элементов в c_k). Таким образом получаем матрицу $C = A_i \odot B_1 \odot \cdots \odot B_l$,

где $\odot$ – операция поэлементного умножения. Добавляем C в список $matrices$ в качестве нового элемента полугруппы $\langle X \rangle$.
Шаг 4. Повторять шаг 3 k раз $(0 \leq k < (n^1 + n^2 + ... + n^n))$.

Оценка сложности алгоритма $O((m^1 + m^2 + ... + m^n) \cdot l)$, где l – количество элементов в $c_k \in combinations$.

3.3 Алгоритм 3 - Построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям

Вход: Конечное множество символов A мощности n и конечное множество R определяющих соотношений мощности m.

Выход: Полугруппа $\langle A|R \rangle$.

Шаг 1. Необходимо инициализировать список $translation = []$. Известно, что каждому элементу $r_i \in R$ $(0 \leq i < m)$ соответствует список элементов $[a_0, ..., a_j, ..a_{n-1}]$, где $a_j \in A$ $(0 \leq j < n)$, тогда список $translation$ будет состоять из элементов $translation[i] = [a_0, ..., a_j, ..a_{n-1}]$ $(0 \leq i < n)$.
Шаг 2. Необходимо создать список $combinations$, элементы которого будут $c_k \in combinations$, где $0 \leq k < (m^1 + m^2 + ... + m^n)$. Т.е. этот список является суммой размещений с повторениями.
Шаг 3. Инициализировать словарь $ans =$, где ключом будет являться комбинация $c_k \in combinations$ $(0 \leq k < (m^1 + m^2 + ... + m^n))$, а значением список $[b_0, ..., b_j, ..b_{n-1}]$. Стоит отметить, что ans есть полугруппа $\langle A|R \rangle$. Каждый элемент b_j находится по списку $translation$, т.е. $b_j = translation[i][j]$, где i – индекс элемента $r_i \in R$ $(0 \leq i < m)$, j – индекс элемента $a_j \in A$ $(0 \leq j < n)$. Далее добавить в словарь по ключу c_k список $[b_0, ..., b_j, ..b_{n-1}]$, т.е. $ans[c_k] = [b_0, ..., b_j, ..b_{n-1}]$, где $0 \leq j < n$, $0 \leq k < (m^1 + m^2 + ... + m^n)$.

Оценка сложности алгоритма $O((m^1 + m^2 + ... + m^n) \cdot n^2 \cdot m)$.

3.4 Коды программ, реализующей рассмотренные алгоритмы

```
import numpy as np
import math
from itertools import product
```

```
INF = 100000


def create_subsemigroup():
    print('Enter set values:')
    s = input()
    set_list = [i for i in s.split(' ')]
    print('Enter Cayley table values:')
    c_tbl = []
    for i in range(len(set_list)):
      c_tbl.append([j for j in input().split()])
    print('Enter subset values:')
    s = input()
    subset = [i for i in s.split(' ')]
    subset_copy = subset.copy()
    for k in range(0, INF):
        tmp_sub = []
        for i in subset_copy:
            for j in subset:
                tmp_sub.append(c_tbl[subset_copy.index(i)][subset.index(j)])
        subsemigroup = set(subset_copy).union(set(tmp_sub))

    subsemigroup = list(subsemigroup)
    subsemigroup.sort()
    print('Your subsemigroup:', subsemigroup)
    choose_mode()


def find_correlation(ans):
    result = {}
    correlations = {}
    for key, value in ans.items():
        if not any(np.array_equal(value, i) for i in result.values()):
            result[key] = value
        else:
            for k, v in result.items():
                if np.array_equal(v, value):
                    correlations[key] = k

    print("Your presentations: ")
    for key, value in result.items():
```

```
        print(key, ":\n", value)

    print("Your corelations: ")
    for key, value in correlations.items():
        print(key, "->", value)


def create_bin_rel_semigroup():
    print('Enter number of binary relations:')
    n = int(input())
    print('Enter matrices dimension')
    d = int(input())
    matrices_list = {}
    for i in range(1, n + 1):
        print(f'Enter matrix values for binary relation №{i}:')
        matrix = [list(map(int, input().split())) for i in range(d)]
        matrix = np.array(matrix).reshape(d, d)
        matrices_list[str(i)] = matrix

    combinations = []
    for i in range(1, n + 1):
        comb = list(product(''.join([str(elem) for elem in range(1, n + 1)]), repeat=
        combinations += comb

    for comb in combinations:
        cur_matrix = matrices_list[comb[0]].copy()
        word = comb[0]
        for comb_i in range(1, len(comb)):
            cur_matrix *= matrices_list[comb[comb_i]]
            word += comb[comb_i]
        matrices_list[word] = cur_matrix

    find_correlation(matrices_list)
    choose_mode()

def create_semigroup_via_set():
    print('Enter semigroup values')
    s = input()
    semigroup = [i for i in s.split(' ')]
    n = len(semigroup)
    print('Enter transformation set values:')
```

```python
    s = input()
    set_list = [i for i in s.split(' ')]
    m = len(set_list)
    translation_list = []
    for i in range(m):
        print(f"Enter transformation values '{set_list[i]}' via elements of semigroup
        translation = input().split()
        translation_list.append(translation)

    combinations = []
    for i in range(1, m + 1):
        comb = list(product(''.join([str(elem) for elem in set_list]), repeat=i))
        combinations += comb

    ans = {}
    for comb in combinations:
        correlation_list = []
        for i in semigroup:
            semigroup_elem = i
            for generator in comb:
                if semigroup_elem not in semigroup:
                    semigroup_elem = "*"
                else:
                    semigroup_elem = translation_list[set_list.index(generator)] \
                                                        [semigroup.index(semigroup_elem)]
            correlation_list.append(semigroup_elem)
        ans[comb] = correlation_list

    find_correlation(ans)
    choose_mode()

# Главное меню
def choose_mode():
    print('Choose mode:')
    print('Press 1 to create subsemigroup')
    print('Press 2 to create binary relation semigroup')
    print('Press 3 to create semigroup via set')
    print('Press 4 to exit')
    bl = input()
    if bl == '1':
        create_subsemigroup()
```

```
    elif bl == '2':
        create_bin_rel_semigroup()
    elif bl == '3':
        create_semigroup_via_set()
    elif bl == '4':
        return
    else:
        print('Incorrect output')
        return choose_mode()


choose_mode()
```

3.5 Результаты тестирования программ

На рисунке 1 показана работа алгоритма построения подполугруппы.

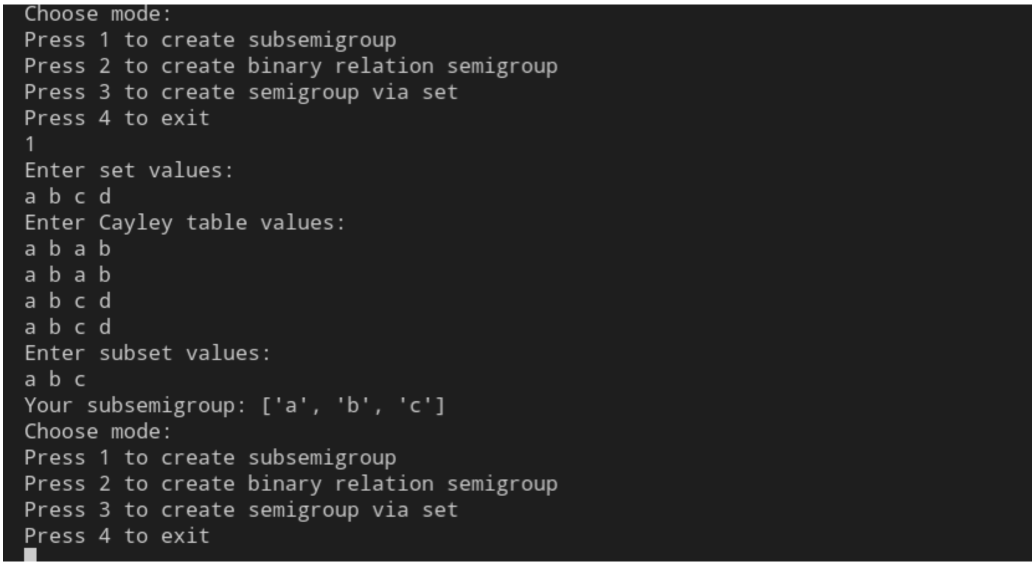

Рисунок 1 – Тест алгоритма построения подполугруппы

На рисунках 2-3 изоражен результат работы алгоритма построения полугруппы с помощью булевых матриц.

```
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
3
Enter semigroup values
1 2 3
Enter transformation set values:
a b c
Enter transformation values 'a' via elements of semigroup:
2 2 2
Enter transformation values 'b' via elements of semigroup:
1 3 3
Enter transformation values 'c' via elements of semigroup:
* 2 3
Your presentations:
('a',) :
 ['2', '2', '2']
('b',) :
 ['1', '3', '3']
('c',) :
 ['*', '2', '3']
('a', 'b') :
 ['3', '3', '3']
('b', 'c') :
 ['*', '3', '3']
('c', 'a') :
 ['*', '2', '2']
Your corelations:
('a', 'a') -> ('a',)
('a', 'c') -> ('a',)
('b', 'a') -> ('a',)
('b', 'b') -> ('b',)
('c', 'b') -> ('b', 'c')
('c', 'c') -> ('c',)
('a', 'a', 'a') -> ('a',)
('a', 'a', 'b') -> ('a', 'b')
('a', 'a', 'c') -> ('a',)
('a', 'b', 'a') -> ('a',)
('a', 'b', 'b') -> ('a', 'b')
```

Рисунок 2 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью булевых матриц

```
('c',) :
 ['*', '2', '3']
('a', 'b') :
 ['3', '3', '3']
('b', 'c') :
 ['*', '3', '3']
('c', 'a') :
 ['*', '2', '2']
Your corelations:
('a', 'a') -> ('a',)
('a', 'c') -> ('a',)
('b', 'a') -> ('a',)
('b', 'b') -> ('b',)
('c', 'b') -> ('b', 'c')
('c', 'c') -> ('c',)
('a', 'a', 'a') -> ('a',)
('a', 'a', 'b') -> ('a', 'b')
('a', 'a', 'c') -> ('a',)
('a', 'b', 'a') -> ('a',)
('a', 'b', 'b') -> ('a', 'b')
('a', 'b', 'c') -> ('a', 'b')
('a', 'c', 'a') -> ('a',)
('a', 'c', 'b') -> ('a', 'b')
('a', 'c', 'c') -> ('a',)
('b', 'a', 'a') -> ('a',)
('b', 'a', 'b') -> ('a', 'b')
('b', 'a', 'c') -> ('a',)
('b', 'b', 'a') -> ('a',)
('b', 'b', 'b') -> ('b',)
('b', 'b', 'c') -> ('b', 'c')
('b', 'c', 'a') -> ('c', 'a')
('b', 'c', 'b') -> ('b', 'c')
('b', 'c', 'c') -> ('b', 'c')
('c', 'a', 'a') -> ('c', 'a')
('c', 'a', 'b') -> ('b', 'c')
('c', 'a', 'c') -> ('c', 'a')
('c', 'b', 'a') -> ('c', 'a')
('c', 'b', 'b') -> ('b', 'c')
('c', 'b', 'c') -> ('b', 'c')
('c', 'c', 'a') -> ('c', 'a')
('c', 'c', 'b') -> ('b', 'c')
('c', 'c', 'c') -> ('c',)
```

Рисунок 3 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью булевых матриц

На рисунках 4-6 изоражен результат работы алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований.

```
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
2
Enter number of binary relations:
3
Enter matrices dimension
3
Enter matrix values for binary relation №1:
1 0 1
0 1 1
1 1 0
Enter matrix values for binary relation №2:
0 0 0
1 1 0
1 0 1
Enter matrix values for binary relation №3:
1 1 1
1 0 0
1 0 1
Your presentations:
1 :
 [[1 0 1]
 [0 1 1]
 [1 1 0]]
2 :
 [[0 0 0]
 [1 1 0]
 [1 0 1]]
3 :
 [[1 1 1]
 [1 0 0]
 [1 0 1]]
12 :
 [[0 0 0]
 [0 1 0]
```

Рисунок 4 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований

```
Your presentations:
1 :
 [[1 0 1]
 [0 1 1]
 [1 1 0]]
2 :
 [[0 0 0]
 [1 1 0]
 [1 0 1]]
3 :
 [[1 1 1]
 [1 0 0]
 [1 0 1]]
12 :
 [[0 0 0]
 [0 1 0]
 [1 0 0]]
13 :
 [[1 0 1]
 [0 0 0]
 [1 0 0]]
23 :
 [[0 0 0]
 [1 0 0]
 [1 0 1]]
123 :
 [[0 0 0]
 [0 0 0]
 [1 0 0]]
Your corelations:
11 -> 1
21 -> 12
22 -> 2
31 -> 13
32 -> 23
33 -> 3
```

Рисунок 5 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований

```
 [1 0 1]]
123 :
 [[0 0 0]
 [0 0 0]
 [1 0 0]]
Your corelations:
11 -> 1
21 -> 12
22 -> 2
31 -> 13
32 -> 23
33 -> 3
111 -> 1
112 -> 12
113 -> 13
121 -> 12
122 -> 12
131 -> 13
132 -> 123
133 -> 13
211 -> 12
212 -> 12
213 -> 123
221 -> 12
222 -> 2
223 -> 23
231 -> 123
232 -> 23
233 -> 23
311 -> 13
312 -> 123
313 -> 13
321 -> 123
322 -> 23
323 -> 23
331 -> 13
332 -> 23
333 -> 3
```

Рисунок 6 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований

3.6 Решение задач

Задание 1. Найдите полугруппу S = $\langle f, g\rangle$ преобразований множества $X = 1, 2, 3$, порожденную следующими преобразованиями f, g в симметрической полугруппе $T(X)$ преобразований множества X:

$$f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Известно, что множество преобразований f, g порождает полугруппу S = $\langle f, g\rangle$ преоб- разований множества X, которая состоит из элементов $f, g, f^2, fg, gf, g^2, \ldots$ и является подполугруппой конечной полугруппы $T(X)$.

$$f^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3\\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 1 & 1 & 1\\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 1 & 1 & 1\end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$fg = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3\\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 1 & 1 & 1\\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 2 & 2 & 2\end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3\\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 2 & 3 & 2\\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 1 & 1 & 1\end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$g^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3\\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 2 & 3 & 2\\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ & 3 & 2 & 3\end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Таким образом получаем полугруппу: $S = \langle f, g, fg, g^2, \ldots\rangle$. Стоит отметить, что $gf \notin S$, так как $gf = f$.

Задание 2.

Найдите индекс и период следующих элементов a полугруппы преобразований множества $X = 1, 2, 3, 4, 5$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем:

$$aa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$aaa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$aaaa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Видно, что $aaaa \to aa$. Т.е. на 4 преобразовании наблюдается цикличность, тогда, если считать элементы полугруппы $\langle a, aa, aaa, aaaa, ...\rangle$, начиная с единицы, то каждый $2k$-й элемент будет иметь преобразование $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, а каждый $(2k+1)$-й элемент равен – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{N}$. Получается, что период будет равен 2.

Задание 3.

Найдите полугруппу S по следующему ее копредставлению:

$$S = \langle x, y : xy = yx, x^2 = y, y^3 = x \rangle$$

Выделим полную систему представителей классов конгруэнции ϵ, которая определяется соотношениями данного копредставления. Для этого последовательно рассмотрим слова фиксированной длины и выделим те, которые не будут эквивалентны между собой относительно конгруэнции ϵ.

Рассмотрим слова длины 1: x, y — эти слова не эквивалентны между собой относительно конгруэнции ϵ.

Рассмотрим слова длины 2, которые получаются из слов длины 1 путем последовательного умножения их справа на буквы x и y: $x^2 = y, xy, yx = xy, y^2$ – из этих слов только слова xy, y^2 не эквивалентны относительно конгруэнции ϵ другим ранее выделенным словам.

Теперь рассмотрим слова длины 3, которые получаются из выделенных слов длины 2 путем последовательного умножения их справа на буквы x и y: $xyx = y^2$, xy^2, $y^2x = x^2y$, $y^3 = x$ — из этих слов только слово xy^2 не эквивалентно относительно конгруэнции ε другим ранее выделенным словам.

Наконец рассмотрим слова длины 4, которые получаются из выделенного слова длины 3 путем последовательного умножения его справа на буквы x и y: $xy^2x = x^2y^2 = y^3 = x, xy^3 = x^2 = y$ - все эти слова эквивалентны относительно конгруэнции ε ранее выделенным словам.

Значит, $S = \{x, y, xy, y^2, xy^2\}$ — полная система представителей классов конгруэнции ε. Операция умножения $\cdot$ таких слов определяется с точностью до конгруэнции ε по следующей таблице Кэли:

$\cdot$	x	y	xy	y^2	xy^2
x	x	xy	xy	xy^2	xy^2
y	xy	y^2	xy^2	y	xy
xy	xy	xy^2	xy^2	xy	xy
y^2	xy^2	y	xy	y^2	xy^2
xy^2	xy^2	xy	xy	xy^2	xy^2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате лабораторной работы были рассмотрены теоретические сведения о полугруппах, подполугруппах и порождающих множествах. Опираясь на изложенную выше теорию, были разработаны алгоритмы проверки свойств операций: ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, обратимость, дистрибутивность, алгоритмы построения подполугруппы по таблице Кэли, построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству, построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям. Была произведена оценка сложности каждого из построенных алгоритмов. Была реализована программа, написанная на языке Python с использованием библиотеки Numpy, Math, Itertools для работы с большими массивами данных.