МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
направления 10.05.01 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Токарева Никиты Сергеевича

Проверил
аспирант ____________ В. Н. Кутин

Саратов 2022

1 Постановка задачи

Цель работы: изучение основных понятий теории полугрупп.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества. Разработать алгоритм построения подполугрупп по по таблице Кэли.
2. Разработать алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству.
3. Рассмотреть понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений. Разработать алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.

2 Теоретические сведения по рассмотренным темам с их обоснованием

Определение 1. Полугруппа – это алгебра S = (S, ·) с одной ассоциативной бинарной операцией ·, т.е. выполняется

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

для любых $x, y, z \in S$.

Определение 2. Пусть A – произвольное множество, называемое алфавитом. Элементы $a \in A$ называются буквами. Словом над алфавитом A называется конечная последовательность букв $a_1, \dots, a_n$ алфавита A. Слово без букв называется пустым словом и обозначается символом $\wedge$. Для слова $w = a_1, \dots, a_n$ число n букв в определяющей его последовательности называется длиной этого слова и обозначается символом $l(w)$.

Обозначим символом A^+ множество всех непустых слов над алфавитом и символом A^* - множество слов $A^* = A^+ \cup \{\wedge\}$. На этих множествах слов определена операция умножения, которая называется операцией **конкатенации** слов и определяется по правилу: любым словам $w_1 = a_1, \dots, a_n$ и $w_2 = b_1, \dots, b_m$ операция конкатенации ставит в соответствие слово $w_1 \cdot w_2 = a_1, \dots a_n b_1, \dots, b_n$. В результате множество слов A+ с операцией конкатенации образует полугруппу, которая называется **полугруппой слов над алфавитом** A, и множество слов A^* с операцией конкатенации образует полугруппу с единичным элементом $\wedge$, которая называется **моноидом слов над алфавитом** A.

Определение 3. Подмножество X полугруппы S называется подполугруппой, если X устойчиво относительно операции умножения, т.е. $\forall x, y \in X$ выполняется свойство: $x \cdot y \in X$. В этом случае множество X с ограничением на нем операции умножения исходной полугруппы S образует полугруппу.

В силу общего свойства подалгебр пересечение любого семейства X_i $(i \in I)$ подполугрупп полугруппы S является подполугруппой S и, значит, множество $Sub(S)$ всех подполугрупп полугруппы S является системой замыканий. множество X. Такая полугруппа обозначается символом $\langle X \rangle$ и называется подполугруппой S, порождённой множеством X. При этом множество X называется также **порождающим множеством** подполугруппы $\langle X \rangle$. В частности, если $\langle X \rangle = S$, то X называется порождающим множеством полугруппы S и говорят, что множество X порождает полугруппу S.

Для любой конечной полугруппы S найдется такой конечный алфавит A, что для некоторого отображения $\phi : A \to S$ выполняется равенство $\langle\phi(A)\rangle = S$ и, значит, $S \cong A^+/ker\phi$ этом случае множество A называется множеством порождающих символов полугруппы S (относительно отображения $\phi : A \to S$). Если при этом для слов $w_1, w_2 \in A$ выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, т.е. $w_1 \equiv w_2(ker\phi)$, то говорят, что на S выполняется соотношение $w_1 = w_2$ (относительно отображения $\phi : A \to S$).

Очевидно, что в общем случае множество таких соотношений $w_1 = w_2$ для всех пар $(w_1, w_2) \in ker\phi$ будет бесконечным и не представляется возможности эффективно описать полугруппу S в виде полугруппы классов конгруэнции $ker\phi$. Однако в некоторых случаях можно выбрать такое сравнительно простое подмножество $\rho \subset ker\phi$, которое однозначно определяет конгруэнцию $ker\phi$ как наименьшую конгруэнцию полугруппы A^+ , содержащую отношение ρ, т.е. $ker\phi = f_{con}(\rho) = f_{eq}(f_{reg}(\rho))$.

Так как в случае $(w_1, w_2) \in \rho$ по-прежнему выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, то будем писать $w_1 = w_2$ и называть такие выражения **определяющими соотношениями**. Из таких соотношений конгруэнция $ker\phi$ строится с помощью применения следующих процедур к словам $u, v \in A^+$:

1. слово v непосредственно выводится из слова u, если v получается из u заменой некоторого подслова w_1 на слово w_2, удовлетворяющее определяющему соотношению $w_1 = w_2$, т.е. $(u, v) = (xw_1y, xw_2y)$ для некоторых $x, y \in A^*$;
2. слово v выводится из слова u, если v получается из u с помощью конечного числа применения процедуры 1.

Если все выполняющиеся на S соотношения выводятся из определяющих соотношений совокупности ρ, то конгруэнция $ker\phi$ полностью определяется отношением ρ и выражение $< A : w_1 = w_2 : (w_1, w_2) \in \rho >$ называется **копредставлением полугруппы** S.

3 Результаты работы

3.1 Алгоритм 1 – Построение подполугруппы по заданному порождающему множеству

Вход: Полугруппа S с таблицей Кэли $A = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ и подмножество $X \subset S$.

Выход: Подполугруппа $\langle X \rangle \subset S$.

Шаг 1. Положим $i = 0$, $X_0 = X$.

Шаг 2. Для X_i вычислим $\overline{X}_l = \{x \cdot y : x \in X_i \wedge y \in X\}$ и положим $X_{i+1} = X_i \cup \overline{X}_l$, где выражение $x \cdot y = a_{xy}$ в таблице Кэли A.

Шаг 3. Вычисляем

$$\langle X \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i.$$

Оценка сложности алгоритма $O(n^3)$.

3.2 Алгоритм 2 – Построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству

Вход: Конечное n-элементное множество X бинарных отношений, заданное булевыми матрицами размерности $m \times m$.

Выход: Полугруппа $\langle X \rangle$.

Шаг 1. Необходимо инициализировать список $matrices = []$. Известно, что каждому элементу $x_i \in X$ $(0 \leq i < n)$ соответствует матрица $A_i \in M$, где M – множество матриц A_i $(0 \leq i < n)$, тогда элементы списка $matrices$ будут заданы следующим образом: $matrices[i] = A_i$ $(0 \leq i < n)$. Стоит отметить, что список $matrices$ есть полугруппа $\langle X \rangle$, т.е. в этот список будут добавлятся новые элементы полугруппы.

Шаг 2. Пусть $t = 2$. Необходимо создать список $combinations$, элементы которого будут $c_k \in combinations$, где $0 \leq k < n^t$. Т.е. этот список является размещением с повторениями.

Шаг 3. Далее возьмем матрицу A_i $(0 \leq i < n)$ и умножим ее на матрицы $B_0, ..., B_l$ согласно текущей комбинации c_k $(0 \leq k < n^t)$, где матрицы $B_1, ..., B_l \in M$ составляют текущую комбинацию c_k (l – количество элементов в c_k). Таким образом получаем матрицу $C = A_i \odot B_1 \odot \cdots \odot B_l$, где $\odot$ – операция поэлементного умножения.

Шаг 4. Инициализировать булеву переменную $flag = True$. Далее, пройти по всем элементам списка $matrices$. Если матрица C равна хотя бы одной матрицы $A \in matrices$, то присвоить $flag = False$.
Шаг 5. Если после после шага 4 переменная $flag$ принимает значение $True$, то матрицу C добавить в список $matrices$ в качестве нового элемента полугруппы $\langle X \rangle$, иначе (при $flag = False$) матрица C не добавляется.
Шаг 6. Увеличить значение переменной t на 1, чтобы перейти к новой итерации.

Оценка сложности алгоритма $O((n-1) \cdot n^n \cdot n) = O((n-1) \cdot n^{n+1})$.

3.3 Алгоритм 3 – Построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям

Вход: Конечное множество символов A мощности n и конечное множество R определяющих соотношений мощности m.

Выход: Полугруппа $\langle A|R \rangle$.

Шаг 1. Необходимо инициализировать список $semigroup = []$, в который будут добавлены все элементы $a \in A$.
Шаг 2. Пусть $t = 2$. Необходимо создать список $combinations$, элементы которого будут $c_k \in combinations$, где $0 \leq k < n^t$. Т.е. этот список является размещением с повторениями.
Шаг 3. Далее, необходимо пройти по всем элементам $c_k \in combinations$, где $0 \leq k < n^t$. Затем, взяв текущую комбинацию c_k преобразовать ее, используя определяющие соотношения $r \in R$, пока данная комбинация не перестанет изменяться.
Шаг 4. Если такой комбинации c_k еще нет в списке $semigroup$, то необходимо туда ее добавить. Такие преобразования сделать с каждой комбинацией $c_k \in combinations$, где $0 \leq k < n^t$.
Шаг 5. Увеличить значение переменной t на 1, чтобы перейти к новой итерации.

Оценка сложности алгоритма $O((n-1) \cdot n^n \cdot m)$.

3.4 Коды программ, реализующей рассмотренные алгоритмы

```
import numpy as np
import math
from itertools import product


def print_set(s, n):
    print('{', end=' ')
    k = 1
    for el in s:
        if k == n:
            print(el, '}')
        else:
            print(str(el) + ',', end=' ')
        k += 1


def create_subsemigroup():
    print('Enter set values:')
    s = input()
    set_list = [i for i in s.split(' ')]
    print('Enter Cayley table values:')
    c_tbl = []
    for i in range(len(set_list)):
      c_tbl.append([j for j in input().split()])
    print('Enter subset values:')
    s = input()
    subset_list = [i for i in s.split(' ')]
    new_subset = subset_list.copy()
    while True:
        tmp_set = []
        for el1 in set_list:
            for el2 in new_subset:
                tmp_set.append(c_tbl[set_list.index(el2)][set_list.index(el1)])
        subsemigroup = set(new_subset).union(set(tmp_set))
        if (subsemigroup == set(new_subset)):
            break
        else:
            new_subset = list(subsemigroup)

    subsemigroup = list(subsemigroup)
```

```
    subsemigroup.sort()
    print('Your subsemigroup:', end='')
    print_set(subsemigroup, len(subsemigroup))
    choose_mode()


def create_bin_rel_semigroup():
    print('Enter elements of binary relation:')
    s = input()
    br_list = [i for i in s.split(' ')]
    n = len(br_list)
    print('Enter matrices dimension')
    d = int(input())
    matrices_list = {}
    for i in range(n):
        print(f'Enter matrix values for binary relation \"{br_list[i]}\":')
        matrix = [list(map(int, input().split())) for i in range(d)]
        matrix = np.array(matrix).reshape(d, d)
        matrices_list[br_list[i]] = matrix

    new_set = br_list.copy()
    l = 2
    correlations = []
    while True:
        combinations = []
        for i in range(l, l + 1):
            comb = list(product(''.join([str(elem) for elem in br_list]), repeat=i))
            combinations += comb
        for comb in combinations:
            cur_matrix = matrices_list[comb[0]].copy()
            word = comb[0]
            for el_i in range(1, len(comb)):
                cur_matrix *= matrices_list[comb[el_i]]
                word += comb[el_i]
            fl = True
            for key, value in matrices_list.items():
                if (np.array_equal(cur_matrix, value)):
                    fl = False
                    eq_word = key
                    break
            if fl:
```

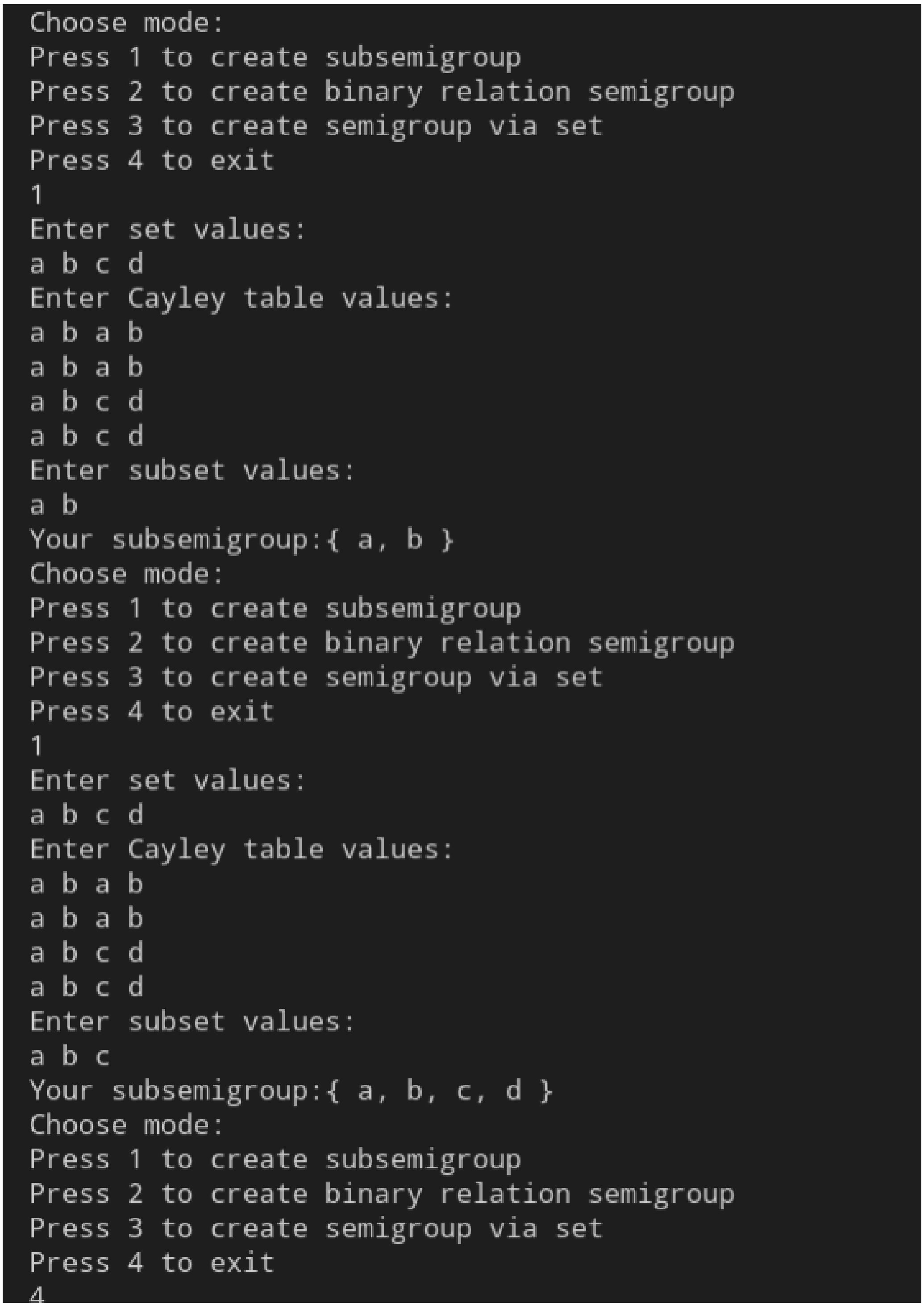
```
                matrices_list[word] = cur_matrix
                new_set.append(word)
            else:
                correlations.append(str(word + '->' + eq_word))
        if l == len(br_list):
            break
        l += 1

    print("Your semigroup: ")
    print_set(new_set, len(new_set))

    print("Your semigroup (matrices): ")
    for key, value in matrices_list.items():
        print(key, ":\n", value)

    print("Your correlations: ")
    for el in correlations:
        print(el)
    choose_mode()


def create_semigroup_via_set_simply():
    print('Enter elements of set:')
    s = input()
    set_list = [i for i in s.split(' ')]
    print('Number of elements in presentation:')
    k = int(input())
    presentation = {}
    for i in range(k):
        print(f'Enter element №{i + 1}')
        key = input()
        print(f'Enter equivalent of element №{i + 1}')
        val = input()
        presentation[key] = val
    semigroup = set_list.copy()
    l = 2
    while True:
        combinations = []
        for i in range(l, l + 1):
            comb = list(product(''.join([str(elem) for elem in set_list]), repeat=i))
            for el in comb:
```

```
                tmp = ''
                for i in el:
                  tmp += str(i)
                combinations.append(tmp)
        check_semgr = semigroup.copy()
        for comb in combinations:
            k = 1
            while True:
                tmp = str(comb)
                for key, val in presentation.items():
                    if key in comb and comb not in semigroup:
                        comb = comb.replace(key, val)
                if tmp == comb:
                    break
            if comb not in semigroup:
                semigroup.append(comb)
        if set(check_semgr) == set(semigroup):
            break
        l += 1

    print("Your semigroup:")
    print(semigroup)
    choose_mode()

# Главное меню
def choose_mode():
    print('Choose mode:')
    print('Press 1 to create subsemigroup')
    print('Press 2 to create binary relation semigroup')
    print('Press 3 to create semigroup via set')
    print('Press 4 to exit')
    bl = input()
    if bl == '1':
        create_subsemigroup()
    elif bl == '2':
        create_bin_rel_semigroup()
    elif bl == '3':
        create_semigroup_via_set_simply()
    elif bl == '4':
        return
    else:
```

```
        print('Incorrect output')
        return choose_mode()


choose_mode()
```

3.5 Результаты тестирования программ

На рисунке 1 показана работа алгоритма построения подполугруппы.



```
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
1
Enter set values:
a b c d
Enter Cayley table values:
a b a b
a b a b
a b c d
a b c d
Enter subset values:
a b
Your subsemigroup:{ a, b }
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
1
Enter set values:
a b c d
Enter Cayley table values:
a b a b
a b a b
a b c d
a b c d
Enter subset values:
a b c
Your subsemigroup:{ a, b, c, d }
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
4
```

Рисунок 1 – Тест алгоритма построения подполугруппы

На рисунках 2-4 изоражен результат работы алгоритма построения полугруппы с помощью булевых матриц.

```
Press 4 to exit
2
Enter elements of binary relation:
a b c
Enter matrices dimension
3
Enter matrix values for binary relation "a":
1 0 1
0 0 1
1 1 1
Enter matrix values for binary relation "b":
1 1 1
0 1 1
1 0 0
Enter matrix values for binary relation "c":
0 0 1
1 1 0
0 1 1
```

Рисунок 2 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью булевых матриц

```
Your semigroup:
{ a, b, c, ab, ac, bc, abc }
Your semigroup (matrices):
a :
 [[1 0 1]
 [0 0 1]
 [1 1 1]]
b :
 [[1 1 1]
 [0 1 1]
 [1 0 0]]
c :
 [[0 0 1]
 [1 1 0]
 [0 1 1]]
ab :
 [[1 0 1]
 [0 0 1]
 [1 0 0]]
ac :
 [[0 0 1]
 [0 0 0]
 [0 1 1]]
bc :
 [[0 0 1]
 [0 1 0]
 [0 0 0]]
abc :
 [[0 0 1]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
```

Рисунок 3 – Вывод полугруппы, выраженной матрицами бинарных отношений

```
Your correlations:
aa->a
ba->ab
bb->b
ca->ac
cb->bc
cc->c
aaa->a
aab->ab
aac->ac
aba->ab
abb->ab
aca->ac
acb->abc
acc->ac
baa->ab
bab->ab
bac->abc
bba->ab
bbb->b
bbc->bc
bca->abc
bcb->bc
bcc->bc
caa->ac
cab->abc
cac->ac
cba->abc
cbb->bc
cbc->bc
cca->ac
ccb->bc
ccc->c
Choose mode:
```

Рисунок 4 – Вывод соотношений полугруппы

На рисунке 5 изоражен результат работы алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований.

```
Choose mode:
Press 1 to create subsemigroup
Press 2 to create binary relation semigroup
Press 3 to create semigroup via set
Press 4 to exit
3
Enter elements of set:
x y
Number of elements in presentation:
3
Enter element №1
xy
Enter equivalent of element №1
yx
Enter element №2
xx
Enter equivalent of element №2
y
Enter element №3
yyy
Enter equivalent of element №3
x
Your semigroup:
['x', 'y', 'yx', 'yy', 'yyx']
```

Рисунок 5 – Тест алгоритма построения полугруппы с помощью множества преобразований

3.6 Решение задач

Задание 1. Найдите полугруппу S = $\langle f, g\rangle$ преобразований множества $X = 1, 2, 3$, порожденную следующими преобразованиями f, g в симметрической полугруппе $T(X)$ преобразований множества X:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Известно, что множество преобразований f, g порождает полугруппу S = $\langle f, g\rangle$ преоб- разований множества X, которая состоит из элементов $f, g, f^2, fg, gf, g^2, \ldots$ и является подполугруппой конечной полугруппы $T(X)$.

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 \\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 2 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 2 \\ \text{f} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 2 \\ \text{g} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 2 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем полугруппу: $S = \langle f, g, fg, g^2, \dots \rangle$. Стоит отметить, что $gf \notin S$, так как $gf = f$.

Задание 2.

Найдите индекс и период следующих элементов a полугруппы преобразований множества $X = 1, 2, 3, 4, 5$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем:

$$aa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$aaa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$aaaa = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ \text{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Видно, что $aaaa \to aa$. Т.е. на 4 преобразовании наблюдается цикличность, тогда, если считать элементы полугруппы $\langle a, aa, aaa, aaaa, ...\rangle$, начиная с единицы, то каждый $2k$-й элемент будет иметь преобразование $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, а каждый $(2k+1)$-й элемент равен – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{N}$. Получается, что период будет равен 2.

Задание 3.

Найдите полугруппу S по следующему ее копредставлению:

$$S = \langle x, y : xy = yx, x^2 = y, y^3 = x\rangle$$

Выделим полную систему представителей классов конгруэнции ϵ, которая определяется соотношениями данного копредставления. Для этого последовательно рассмотрим слова фиксированной длины и выделим те, которые не будут эквивалентны между собой относительно конгруэнции ϵ.

Рассмотрим слова длины 1: x, y — эти слова не эквивалентны между собой относительно конгруэнции ϵ.

Рассмотрим слова длины 2, которые получаются из слов длины 1 путем последовательного умножения их справа на буквы x и y: $x^2 = y, xy, yx = xy, y^2$ – из этих слов только слова xy, y^2 не эквивалентны относительно конгруэнции ϵ другим ранее выделенным словам.

Теперь рассмотрим слова длины 3, которые получаются из выделенных слов длины 2 путем последовательного умножения их справа на буквы x и y: $xyx = y^2$, xy^2, $y^2x = x^2y$, $y^3 = x$ — из этих слов только слово xy^2 не эквивалентно относительно конгруэнции ε другим ранее выделенным словам.

Наконец рассмотрим слова длины 4, которые получаются из выделенного слова длины 3 путем последовательного умножения его справа на буквы x и y: $xy^2x = x^2y^2 = y^3 = x, xy^3 = x^2 = y$ - все эти слова эквивалентны относительно конгруэнции ε ранее выделенным словам.

Значит, $S = \{x, y, xy, y^2, xy^2\}$ — полная система представителей классов конгруэнции ε. Операция умножения $\cdot$ таких слов определяется с точностью до конгруэнции ε по следующей таблице Кэли:

$\cdot$	x	y	xy	y^2	xy^2
x	x	xy	xy	xy^2	xy^2
y	xy	y^2	xy^2	y	xy
xy	xy	xy^2	xy^2	xy	xy
y^2	xy^2	y	xy	y^2	xy^2
xy^2	xy^2	xy	xy	xy^2	xy^2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате лабораторной работы были рассмотрены теоретические сведения о полугруппах, подполугруппах и порождающих множествах. Опираясь на изложенную выше теорию, были разработаны алгоритмы проверки свойств операций: ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, обратимость, дистрибутивность, алгоритмы построения подполугруппы по таблице Кэли, построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству, построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям. Была произведена оценка сложности каждого из построенных алгоритмов. Была реализована программа, написанная на языке Python с использованием библиотеки Numpy, Math, Itertools для работы с большими массивами данных.