МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
направления 10.05.01 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Токарева Никиты Сергеевича

Проверил
доцент _____ А. Н. Гамова

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 Описание алгоритма

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).Рассмотрим систему линейных уравнений с действительными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{cases}$$

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений включает в себя 2 стадии:

— последовательное (прямое) исключение;

— обратная подстановка.

1.1 Последовательное исключение

Последовательное исключение Исключения Гаусса основаны на идее последовательного исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется только одно уравнение с одной переменной в левой части. Затем это уравнение решается относительно единственной переменной. Таким образом, систему уравнений приводят к треугольной (ступенчатой) форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой (а чаще максимальный) элемент и перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк. Затем нормируют все уравнения, разделив его на коэффициент a_{i1}, где i – номер строки.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot x_2 + \ldots + \frac{a_{2n}}{a_{21}} \cdot x_n = \frac{y_2}{a_{21}} \\ \ldots \\ x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{n1}} \cdot x_2 + \ldots + \frac{a_{nn}}{a_{n1}} \cdot x_n = \frac{y_n}{a_{n1}} \end{cases}$$

Затем вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \frac{y_1}{a_{11}} \\ 0 + (\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}) \cdot x_2 + \ldots + (\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdot x_n = (\frac{y_2}{a_{21}} - \frac{y_1}{a_{11}}) \\ \ldots \\ 0 + (\frac{a_{n2}}{a_{n1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}) \cdot x_2 + \ldots + (\frac{a_{nn}}{a_{n1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdot x_n = (\frac{y_n}{a_{n1}} - \frac{y_1}{a_{11}}) \end{cases}$$

Получают новую систему уравнений, в которой заменены соответствующие коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{'} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}^{'} \cdot x_n = y_1^{'} \\ 0 + a_{22}^{'} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}^{'} \cdot x_n = y_2^{'} \\ \ldots \\ 0 + a_{n2}^{'} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn}^{'} \cdot x_n = y_n^{'} \end{cases}$$

После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают указанный процесс для всех последующих уравнений пока не останется уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{'} \cdot x_2 + a_{13}^{'} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n}^{'} \cdot x_n = y_1^{'} \\ 0 + x_2 + a_{23}^{''} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n}^{''} \cdot x_n = y_2^{''} \\ 0 + 0 + x_3 + \ldots + a_{2n}^{'''} \cdot x_n = y_3^{'''} \\ \ldots \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + x_n = y_n^{n\prime} \end{cases}$$

1.2 Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной x_n в предыдущие уравнения:

$$x_{n-1} = y_{n-1}^{(n-1)'} - a_{(n-1)n}^{(n-1)'} \cdot x_n$$
$$x_{n-2} + a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1} = y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n$$
$$\ldots$$
$$x_2 + a_{23}^{''} \cdot x_3 + \ldots + a_{2(n-1)}^{''} \cdot x_{n-1} = y_2^{''} - a_{2n}^{''} \cdot x_n$$

$$x_1 + a_{12}^{'} \cdot x_2 + a_{13}^{'} \cdot x_3 + \ldots + a_{1(n-1)}^{'} \cdot x_{n-1} = y_1^{'} - a_{1n}^{'} \cdot x_n$$

Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

$$x_{n-2} = (y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n) - a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1}$$
$$\ldots$$
$$x_2 + a_{23}^{''} \cdot x_3 + \ldots = (y_2^{''} - a_{2n}^{''} \cdot x_n) - a_{2(n-1)}^{''} \cdot x_{n-1}$$
$$x_1 + a_{12}^{'} \cdot x_2 + a_{13}^{'} \cdot x_3 + \ldots = (y_1^{'} - a_{1n}^{'} \cdot x_n) - a_{1(n-1)}^{'} \cdot x_{n-1}$$

2 Код программы, реализующий алгоритм

Далее представлена реализация алгоритма решения системы линейных уравнений методом Гаусса, написанная на языке $C++$.

```
#include <iostream>
#include<vector>

using namespace std;


void print_system(vector<vector<double>>& a, vector<double>& y, int n)
{
  for (int i = 0; i < n; i++)
  {
    for (int j = 0; j < n; j++)
    {
      cout << a[i][j] << "*x" << j + 1;
      if (j < n - 1)
        cout << " + ";
    }
    cout << " = " << y[i] << endl;
  }
  return;
}

pair<vector<double>, bool> gauss(vector<vector<double>>& a, vector<double>& y, int n)
{
  vector<double> x(n);
  double max, tmp;
  int k, index;
  const double eps = 10e-6;
  k = 0;
  while (k < n) {
    // Поиск строки с максимальным a[i][k]
    max = abs(a[k][k]);
    index = k;
    for (int i = k + 1; i < n; i++) {
      tmp = abs(a[i][k]);
      if (tmp > max) {
        max = tmp;
        index = i;
```

```
      }
    }
    if (max < eps) {
      // нет ненулевых диагональных элементов
      cout << "Решение получить невозможно из-за нулевого столбца ";
      cout << index << " матрицы A" << endl;
      return make_pair(x, false);
    }

    // Перестановка строк
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      swap(a[k][j], a[index][j]);
    }

    swap(y[k], y[index]);
    // Нормализация уравнений
    for (int i = k; i < n; i++) {
      tmp = a[i][k];
      if (abs(tmp) < eps) continue; // для нулевого коэффициента пропустить
      for (int j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = a[i][j] / tmp;
      y[i] = y[i] / tmp;
      if (i == k)  continue; // уравнение не вычитать само из себя
      for (int j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = a[i][j] - a[k][j];
      y[i] = y[i] - y[k];
    }
    k++;
  }
  // обратная подстановка
  for (k = n - 1; k >= 0; k--) {
    x[k] = y[k];
    for (int i = 0; i < k; i++)
      y[i] = y[i] - a[i][k] * x[k];
  }
  return make_pair(x, true);
}


int main() {
  int n;
```

```
  cout << "Введите количество уравнений: ";
  cin >> n;
  vector<vector<double>> a(n);
  vector<double> y(n);
  pair<vector<double>, bool>  ans;
  double tmp;
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      cout << "a[" << i + 1 << "][" << j + 1<< "]= ";
      cin >> tmp;
      a[i].push_back(tmp);
    }
  }
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << "y[" << i + 1 << "]= ";
    cin >> y[i];
  }
  print_system(a, y, n);
  ans = gauss(a, y, n);
  if (ans.second) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
      cout << "x[" << i + 1 << "]=" << ans.first[i] << endl;
  }
  return 0;
}
```

Далее приведем пример, подав в качестве входных данных коэффициенты системы линейных уравнений (СЛУ), чтобы проверить корректность, написанного кода.

Решим следующую СЛУ:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = -1 \\ 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 13 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 9 \end{cases}$$

На рисунке 1 показан ввод значений коэффициентов, и вывод решения СЛУ.

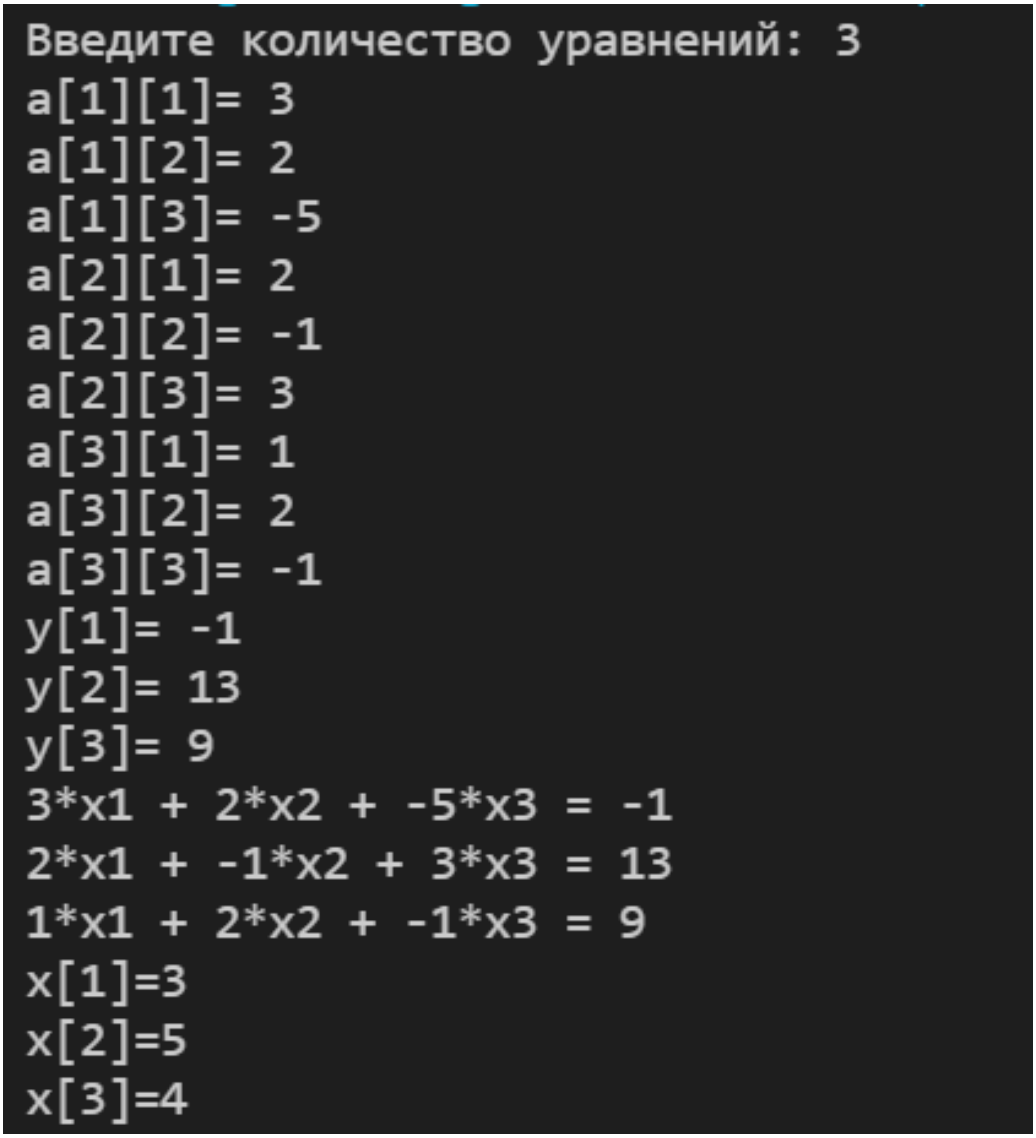

Рисунок 1 – Результат работы алгоритма

Проверим полученные выходные данные, подставив эти значения в СЛУ. Как видно из данной подстановки, значения x_1, x_2, x_3 были найдены корректно.

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = -1 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 13 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 9 \end{cases}$$

3 Анализ алгоритма

Для того, чтобы алгоритм работал корректно, необходимо пройти по всем n уравнениям ($O(n)$). С учетом оценки сложности поиска максимального элемента и перестановки строки, содержащей этот опорный элемент, равной $O(n+n) = O(n)$. и оценки сложности нормализации уравнений, равной $O(n^2)$, итоговая оценка сложности равна $O(n \cdot (n^2 + n)) = O(n^3)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе был рассмотрен алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса и был проведен анализ оценки его сложности. Это послужило созданием её программной реализации, написанной на языке $C++$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Статья "Решение систем линейных уравнений методом Гаусса"/ [Электронный ресурс] URL: https://function-x.ru/systems_gauss.html (дата обращения 27.02.2022), Яз. рус

2 Книга Маховенко Е.Б. "Теоретико-числовые методы в криптографии Москва, "Гелиос АРВ 2006 г., Яз. рус.