МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАДАЧИ НА NP-ПОЛНОТУ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
направления 10.05.01 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Токарева Никиты Сергеевича

Проверил
доцент ____________ А. Н. Гамова

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 Доказательство NP полноты

NP-полная задача — в теории алгоритмов задача с ответом «да» или «нет» из класса NP, к которой можно свести любую другую задачу из этого класса за полиномиальное время (то есть при помощи операций, число которых не превышает некоторого полинома в зависимости от размера исходных данных). Таким образом, NP-полные задачи образуют в некотором смысле подмножество «типовых» задач в классе NP: если для какой-то из них найден «полиномиально быстрый» алгоритм решения, то и любая другая задача из класса NP может быть решена так же «быстро».

Чтобы показать NP полноту задачи необходимо доказать, что задача принадлежит классу NP, и она является NP-трудной.

1.1 Постановка задачи

Дано множество целых чисел S; Выяснить, можно ли разбить его на две части с равными суммами, то есть найти множество $A \subseteq S$, для которого $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in S \setminus A} x$. Покажите, что эта задача (SPP) является NP-полной.

1.2 Доказательство поставленной задачи

1. Докажем, что задача SPP принадлежит классу NP:

   Известно, что нам дано множество S. Пусть существует такое разбиение, что $S = A \cup \overline{A}$. Тогда алгоритм будет выглядеть следующим образом:

   а) Необходимо проверить, чтобы каждый элемент $x \in A$ и $\overline{x} \in \overline{A}$ принадлежал множеству S.

   б) Пусть $s_1 = 0$ и $s_2 = 0$.

   в) $\forall x \in A$ выполнить $s_1 = s_1 + x$.

   г) $\forall \overline{x} \in \overline{A}$ выполнить $s_2 = s_2 + \overline{x}$.

   д) Убедиться, что $s_1 = s_2$.

   Алгоритм занимает линейное время в размере набора чисел множества S.

2. Докажем, что задача SPP является NP-трудной:

   Известно что задача о сумме подмножеств (Subset sum problem) относится к классу NP: $SSP \in NP$.

   Постановка задачи о сумме подмножеств: дано множесвто S, содержащее n целых чисел и целое число s. Требуется выяснить возможно ли выбрать подмножество $\overline{S} \subseteq S$ с суммой S: $\exists \overline{S} \subseteq S : \sum_{s_i \in \overline{S}} s_i = s$.

Тогда чтобы доказать NP-трудную задачу, необходимо произвести сведение SSP к SPP. Пусть в качестве входных данных дано множество S и искомая сумма t. Тогда необходимо найти подмножество $A \subset S$, сумма чисел которого равна t. Пусть s будет суммой элементов множества S. Заметим, что $t = \frac{1}{2}\sum_{x \in A} x$. Тогда получим следующее разбиение $\overline{A} = A \cup \{s - 2t\}$ в SPP.

Теперь покажем, что задача SPP сводится к вычислению суммы подмножества.

Рассмотрим подмножество A, сумма которых равна t, тогда остальные элементы множества S (обозначим $S \backslash A = \overline{A}$) будут иметь сумму $s - t = d$. Предположим, что исходное разбиение $A' = A \cup \{s - 2t\}$, сумма которого равна t'.

Справедливы следующие наблюдения:

$$
\begin{gathered}
d = s - t \\
d - t = s - t - t \\
t' = t + (s - 2t) \\
s - t = d, \text{ т.е. суммы } A' \text{ и } \overline{A} \text{ равны.}
\end{gathered}
$$

Следовательно, исходный набор можно разбить на два подмножества суммы (s - t) каждое. Таким образом, поставленная задача SPP решается.

Теперь предположим, что существует разбиение равной суммы (A, $\overline{A}$) множества $S' = S \cup s - 2t$. Сумма каждого подмножества определяется как:

$$
l = \frac{s + (s - 2t)}{2} = s - t
$$

Таким образом, A является подмножеством S с суммой, равной t.

Сдедовательно, задача SPP является NP-полной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Книга Томаса Кормена «Алгоритмы» / [Электронный ресурс] URL: https://e-maxx.ru/bookz/files/cormen.pdf (дата обращения 02.05.2022), Яз. рус.

2 Статья «NP-полнота задачи о сумме подмножества» / [Электронный ресурс] URL: https://inlnk.ru/Ken0wA (дата обращения 02.05.2022), Яз. рус.

3 Статья «NP-полная задача» / [Электронный ресурс] URL: https://clck.ru/gmbKK (дата обращения 05.05.2022), Яз. рус.