Universität Hamburg
Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene
Sommer-Semester 2014

Versuch: SALOME (Simple Accelerator for Learning Optics and Manipulation of Electrons)

Praktikanten:	Alexander Okupnik
	Vincent Koppen
Betreuer:	Dr. Velizar Miltchev

durchgeführt vom 1.9. bis zum 5.9.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel eines Teilchenbeschleuniger ist es einen Teilchenstrahl oder -bunch zu beschleunigen und möglichst fokussiert auf einer Sollbahn zu halten. Einerseits um keine Teilchen zu verilieren, andersetits um z.B. bei einem Collider die Teilchendichte hoch zu halten. In unserem Versuch werden wir mit einem einfachen Linearbeschleuniger arbeiten und die Energie sowie die Emittanz, eine die Qualität des Strahls charakterisierende Größe die wir im Theorieteil erklären werden, zu messen.

1.1 Aufbau

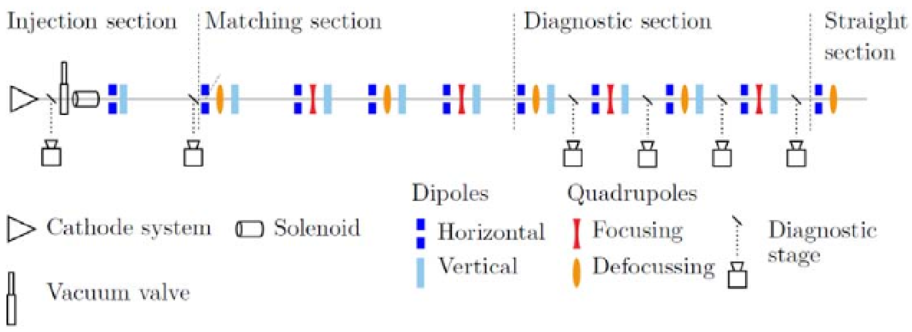

Abbildung 1.1: (Matching section wurde abgebaut)

Der Teilchenbeschleuniger besteht aus einem Kathodenstrahler zur Erzeugung des Strahls, einer Spule (Solenoidmagnet) dessen äußere Streufelder fokussierend wirken, einigen Dipol- und Quadromagneten.

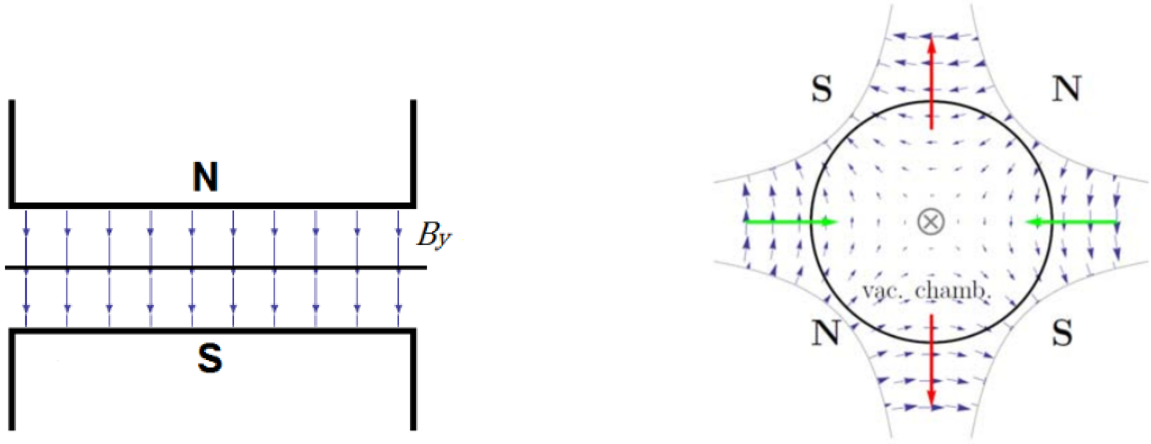

Abbildung 1.2: Di-und Quadropolschemata

Wie man im Bild xx illustriert sehen kann erzeugt der Dipolmagnet ein homogenes Magnetfeld in (vertikale) y-Richtung, das dafür geeignet ist externe Magnetfelder wie das Erdmagnetfeld zu kompensieren. Nehmen wir ein idealisierten Teilchenstrahl an, so lenkt der Dipol den Strahl auf eine Kreisbahn e/p *By= 1/R.

P:Impuls in Richtung der Sollbahn

R:Raidus der Kreisbahn

Die Stärke des Dipols werden wir im Folgendem damit charakterisieren. Der Quadropol hängt linear von x ab und wirkt in einer ebene fokussierend in der anderen defokussierend, deswegen werden sie um 90° gedreht hintereinander aufgebaut.

e/p*By(x)=kx

e/p*Bx(y)=-ky

k: Stärke des Quadropolmagneten

1.2 Theorie

1.3 Phasenraum, Emittanz und Twissparameter

Man stellt zunächst die Bewegungsgleichungen eines einzelnen Teilchens auf und guckt wie dieses sich unabhängig von den anderen Teilchen im Bezug auf die Sollbahn bewegt. Den Einfluss der Teilchen aufeinander kann hier vernachlässigt werden da der Strom sehr klein ist und vorrausgesetzt wird, dass sich die Sollbahn nicht gekrümmt ist.

$$x''(s) - k(s)x(s) = 0 \tag{1.1}$$

$$y''(s) + k(s)y(s) = 0 \tag{1.2}$$

s parametrisiert die Sollbahn.

Die Herleitung der Differentialgleichung findet man im Wille S. xx.

Hier sieht man das die Bewegung in x und y Richtung entkoppelt ist und die

Fokussierung/Defokussierung in beiden Ebenen gerade umgekehrt ist.

Die Lösung der Gleichung ist analytisch schwierig, da sich k entlang der Bahn s ändert, jedoch kann man jeden Abschnitt in der Sollbahn wo sich k ändert für sich betrachten und so ein Kalkül entwickeln der die Bewegungsgleichung in diskreten Abschnitten mithilfe von Matrizen löst. Möchte man zb. für gegebene Anfangswerte x0 und x'0 des Teilchens die Werte x1, x'1 ermitteln nachdem es einen Dipol und Quadropol durchlaufen hat, so nimmt man die einzelnen Matrizen für Dipol und Quadropol und führt sie hintereinander aus.

Diesen Kalkül werden wir später in der Berechnung der Emittanz verwenden.

Das Teilchen führt eine oszillierende Bewegung um die Sollbahn durch.Im Phasenraum ist die Bewegung durch eine Ellipse beschrieben:

$$\epsilon = \gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s) \tag{1.3}$$

x(s) ist die Ablenkung zur Sollbahn, x'(s) Der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Sollbahn.

$\gamma(s), \alpha(s), \beta(s)$ sind die sogenannten "Twissparameter", sie bestimmen die Form und Position der Ellipse, und sind auch abhängig von der Position auf der Sollbahn. Sie werden allein durch den Aufbau bzw. der Fokussierung entlang der Sollbahn bestimmt und unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Die Anfangsbedingungen x0 und x'0 gehen in die Integrationskonstanten ϵ und der Anfangsphase Φ der Schwingung ein.

ϵ ist die sogenannte Emittanz des Teilchens und wurde als Integrationskonstante eingeführt. Sie ist daher eine Erhaltungsgröße und nach der Gleichung im Phasenraum auch die Fläche der Ellipse bis auf einen Faktor π. Sie charakterisiert somit die Qualität und die Fokussierbarkeit des Strahls.

Im nächsten Schritt wollen wir charakteristische Größen für den Teilchenstrahl, bestehend aus mehreren Teilchen die den selben Differentialgleichungen unterliegen, festlegen. Da die Twissparameter unabhängig von den Anfangsbedingungen die Ellipse entlang s verformen, liegen Teilchen mit gleicher Emittanz an verschiedenen Punkten derselben Ellipse oder sie haben verschiedene Emittanzen und bewegen sich innerhalb einer kleineren bzw. größeren Ellipse.

Wir definieren die Emittanz des gesamten Teilchensstrahles als die Fläche der Ellipse die von der Standardabweichungen von x und x' aufgespannt wird.

Da sich die so definierte Emittanz mit Beschleunigung verkleinert führen wir die normierte Emittanz ein :

$$\epsilon_n = \gamma\beta\sqrt{< x^2 > * < x'^2 > -(< x >< x' >)^2} \tag{1.4}$$

mit dem Lorentzfaktor γ und $\beta = v/c$

2 Energiemessung

Zuerst führen wir eine Energiemessung des Elektronenstrahls mithilfe eines Dipolmagneten durch. Die Elektronen, aus dem der Strahl besteht, werden am Anfang des Beschleunigers thermisch durch die Kathode erzeugt und erhalten so ihre kinetische Energie und ihren Impulsbetrag, die sie von da an behalten, da sie im Beschleuniger nur mit den Feldern der Dipol- und Quadrupolmagnete über die Lorentzkraft wechselwirken.

Die Energiemessung geschieht, indem der Zusammenhang zwischen Ablenkung durch einen der Dipole und Stärke des Dipols gemessen wird, da erstere theoretisch linear von der letzteren abhängt. Genauer gilt:

Sei L_{eff} die Länge des Einflussbereichs des Dipols, sei dahinter eine Driftstrecke mit Länge L_{drift} und am Ende ein Schirm. Sei x der Versatz des Strahls auf dem Schirm in die Richtung, in die er vom Dipol abgelenkt wird. Es gilt dann $x = x_0 + \frac{dx}{dI}I$, wobei x_0 der Versatz auf dem Schirm ohne Wirkung des Dipols ist. (Man bedenke, dass $\frac{dx}{dI}$ negativ sein kann.) I ist der Strom des Dipols und dieser ist proportional zur Dipolfeldstärke B. Es gibt also ein κ so, dass $\kappa I = BL_{eff}$. Sei v die Geschwindigkeit der auf den Schirm treffenden Elektronen, $\beta := \frac{v}{c}$, c die Lichtgeschwindigkeit, $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, m_e die Elektronenmasse und e die Elementarladung. Dann gilt:

$$\beta\gamma = \frac{e\kappa L_{drift}}{m_e c|\frac{dx}{dI}|} \tag{2.1}$$

Wir messen eine Reihe von Wertepaaren für I und x, indem wir zuerst mit Blick auf das Kamerabild des Schirms 3 ein Intervall für den Dipolstrom I aussuchen, bei dem der Strahl ganz auf dem Schirm zu sehen ist. Dann messen wir für $(0,05$ A$)$-Schritte innerhalb dieses Intervalls Werte für x mit den Messergebnissen, die in Tabelle 2.1 dargestellt sind. Die Messung wird dabei so durchgeführt, dass zuerst der Strahl ganz vom Schirm abgelenkt wird, indem der Strom des horizontalen Dipols V14NJ um 1 A verstellt wird. Dann wird von der Kamera ein Bild aufgenommen (durch Mittelung über 50 frames), welches im Folgenden als Hintergrund von den Bildern mit Strahl abgezogen wird. Das Bildanalyse-Programm ermittelt dann jeweils nach Mittelung über 20 frames die x-Position des Intensitätsmaximums, welches der Strahlmitte entspricht, nachdem mit der Maus ein enger Bereich um den Strahlfleck im Kamerabild abgegrenzt wird.

Aus den Messwerten in Tabelle 2.1 ermitteln wir mithilfe linearer Regression einen Wert für $\frac{dx}{dI}$, woraus wir mit (2.1) einen Wert für $\beta\gamma$ erhalten. Wir finden $\frac{dx}{dI} = -0,0147 \pm 0,0002\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}}$ (siehe hierzu auch Abbildung 2.1) und daraus mit Fehlerfortpflanzung $\beta\gamma = 0,168 \pm 0,002$. Wegen $\gamma = \sqrt{1+\beta^2\gamma^2}$ erhalten wir damit $\gamma = 1,0139 \pm 0,0004$.

I [A]	x [mm]
$-3,50$	$4,07$
$-3,45$	$3,41$
$-3,40$	$2,71$
$-3,35$	$2,05$
$-3,30$	$1,23$
$-3,25$	$0,37$
$-3,20$	$-0,10$
$-3,15$	$-0,58$
$-3,10$	$-1,44$
$-3,05$	$-2,19$
$-3,00$	$-2,85$
$-2,95$	$-3,55$
$-2,90$	$-4,16$
$-2,85$	$-5,05$
$-2,80$	$-6,21$
$-2,75$	$-6,82$
$-2,70$	$-7,85$
$-2,65$	$-8,56$
$-2,60$	$-9,21$
$-2,55$	$-9,78$
$-2,50$	$-10,17$

Tabelle 2.1: Messung des horizontalen Versatzes x auf Schirm 3 bei Ablenkung durch den Dipol H15Match betrieben mit Strom I.

Da $\gamma = \frac{E}{m_e c^2} = 1 + \frac{E_{\text{kin}}}{m_e c^2}$ gilt, wenn E die Gesamtenergie des einzelnen Elektrons ist, erhalten wir schliesslich für seine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 7,1 \pm 0,2$ keV, wobei wir den Literaturwert $m_e c^2 = 511$ keV verwenden. Wir erhalten dann für den Impuls $p = m_e c^2 \gamma \beta \frac{1}{c} = 85,6 \pm 1,2 \frac{1}{\text{c}}\text{keV}$.

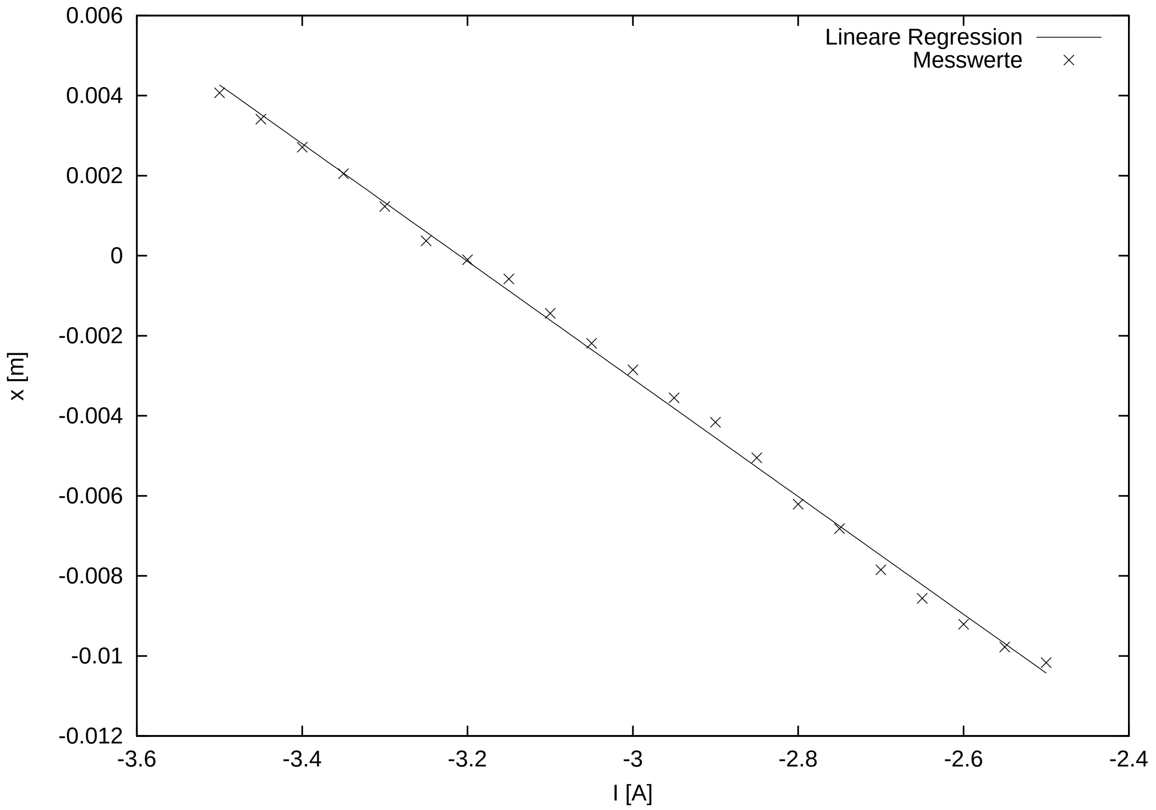

Abbildung 2.1: Messwerte aus Tabelle 2.1 mit Regressionsgerade gegeben durch $x = -0,0147 \cdot I - 0,0472$.

3 Emittanzmessung

An jedem Punkt z entlang des Orbits hat der Elektronenstrahl unter Anderem die Größen $\langle x^2\rangle(z)$, $\langle xx'\rangle(z)$ und $\langle x'^2\rangle(z)$, bzw. $\langle y^2\rangle(z)$, $\langle yy'\rangle(z)$ und $\langle y'^2\rangle(z)$. Wenn $R = \left(\begin{smallmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{smallmatrix}\right)$ die Transformationsmatrix der Größen x und x' eines einzelnen Elektrons von z_0 zu z_1 ist, dann gilt

$$\langle x^2\rangle(z_1) = \begin{pmatrix} R_{11}^2 & 2R_{12}R_{11} & R_{12}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x^2\rangle(z_0) \\ \langle xx'\rangle(z_0) \\ \langle x'^2\rangle(z_0) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

und es gilt Analoges für y.

Für die entlang des Orbits erhaltene normierte Emittanz $\varepsilon_{x,n}$ gilt

$$\varepsilon_{x,n} = \beta\gamma\sqrt{\langle x^2\rangle(z)\langle x'^2\rangle(z) - \langle xx'\rangle(z)^2} \quad \forall z \tag{3.2}$$

Wir werden hierzu die Größen $a_1 := \langle x^2\rangle$, $a_2 := \langle xx'\rangle$ und $a_3 := \langle x'^2\rangle$ (und alles Folgende analog für y) einmal direkt vor dem Quadrupolmagneten V46MATCH und einmal an Schirm 2 bestimmen und daraus dann jeweils die transversalen Emittanzen ε_x und ε_y und ihre normierten Varianten $\varepsilon_{x,n}$ und $\varepsilon_{y,n}$ erhalten.

Für ersteres werden wir den Elektronenstrahl n-mal auf verschiedene Weise transformieren (über verschiedene Strecken oder Optiken), wobei b_i die Größe $\langle x^2\rangle$ nach der i-ten Transformation und $R^{(i)}$ die entsprechende Transformationsmatrix ist. Das für großes n überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} {R_{11}^{(1)}}^2 & 2R_{12}^{(1)}R_{11}^{(1)} & {R_{12}^{(1)}}^2 \\ & \vdots & \\ {R_{11}^{(n)}}^2 & 2R_{12}^{(n)}R_{11}^{(n)} & {R_{12}^{(n)}}^2 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

an die zu ermitteltenden Unbekannten a_1, a_2, a_3 kann und wird dann Grundlage für einen χ^2-Fit sein.

3.1 Messung durch Variation des Quadrupolstroms

Zuerst lassen wir den Elektronenstrahl von dem Punkt direkt vor V46MATCH bis zum Schirm 2 auf verschiedene Weise transformieren, indem wir an V46MATCH jeweils 25, bzw. 19 verschiedene Stromstärken einstellen und dann $\langle x^2\rangle$, bzw. $\langle y^2\rangle$ an Schirm 3 messen. Dazu nehmen wir wieder zunächst ein Bild des Hintergrunds (ohne Strahl), welches wir danach von der Kameraaufnahme abziehen. Die Strahlgröße $\langle x^2 \rangle$ wird dann, nachdem manuell mit der Maus ein enger Bereich um den Strahlfleck auf dem Schirm abgegrenzt wird, von dem Bildanalyse-Programm als Varianz der Intensitätsverteilung auf dem Kamerasensor berechnet. Die Messergebnisse sind in den Tabellen 3.1 und 3.2 dargestellt.

I [A]	$\langle x^2 \rangle$ [mm]
$0,70$	$0,66$
$0,75$	$0,616$
$0,80$	$0,58$
$0,85$	$0,55$
$0,90$	$0,5$
$0,95$	$0,48$
$1,00$	$0,44$
$1,05$	$0,4$
$1,10$	$0,4$
$1,15$	$0,39107$
$1,20$	$0,382277$
$1,25$	$0,381375$
$1,30$	$0,380214$
$1,35$	$0,396236$
$1,40$	$0,403774$
$1,45$	$0,429807$
$1,50$	$0,450623$
$1,55$	$0,466817$
$1,60$	$0,500828$
$1,65$	$0,525564$
$1,70$	$0,548818$
$1,75$	$0,572263$
$1,80$	$0,627355$
$1,85$	$0,659232$
$1,90$	$0,673288$

Tabelle 3.1: Messung der horizontalen Strahlgröße $\langle x^2 \rangle$ an Schirm 2 in Abhängigkeit des Quadrupolstroms I bei V46MATCH.

Mit einem Matlab-Skript wird dann jeweils aus den verschiedenen Stromeinstellungen die Matrix B aus Gleichung (3.3) bestimmt und daraus der χ^2-Fit für a_1, a_2, a_3 bestimmt. Mittels Fehlerfortpflanzung erhalten wir dann nach (3.2) einen Wert und Fehler für $\varepsilon_{x,n}$ und $\varepsilon_{y,n}$.

I [A]	$\langle y^2 \rangle$ [mm]
$-1,90$	$0,710957$
$-1,85$	$0,658355$
$-1,80$	$0,609792$
$-1,75$	$0,573970$
$-1,70$	$0,533938$
$-1,65$	$0,509606$
$-1,60$	$0,490458$
$-1,55$	$0,470464$
$-1,50$	$0,462698$
$-1,45$	$0,464849$
$-1,40$	$0,469504$
$-1,35$	$0,475496$
$-1,30$	$0,497975$
$-1,25$	$0,530275$
$-1,20$	$0,561653$
$-1,15$	$0,593314$
$-1,10$	$0,632141$
$-1,05$	$0,705271$
$-1,00$	$0,733322$

Tabelle 3.2: Messung der vertikalen Strahlgröße $\langle y^2 \rangle$ an Schirm 2 in Abhängigkeit des Quadrupolstroms I bei V46MATCH.

In horizontale Richtung x haben wir

$$B = \begin{pmatrix} 0,0267 & 0,1297 & 0,1572 \\ 0,0111 & 0,0832 & 0,1554 \\ 0,0023 & 0,0375 & 0,1537 \\ 0,0001 & -0,0075 & 0,1519 \\ 0,0045 & -0,0519 & 0,1501 \\ 0,0154 & -0,0955 & 0,1484 \\ 0,0327 & -0,1385 & 0,1467 \\ 0,0563 & -0,1807 & 0,1449 \\ 0,0862 & -0,2223 & 0,1432 \\ 0,1223 & -0,2632 & 0,1416 \\ 0,1645 & -0,3034 & 0,1399 \\ 0,2128 & -0,3430 & 0,1382 \\ 0,2670 & -0,3819 & 0,1366 \\ 0,3270 & -0,4201 & 0,1350 \\ 0,3929 & -0,4577 & 0,1333 \\ 0,4645 & -0,4947 & 0,1317 \\ 0,5417 & -0,5310 & 0,1301 \\ 0,6245 & -0,5667 & 0,1286 \\ 0,7128 & -0,6017 & 0,1270 \\ 0,8066 & -0,6361 & 0,1254 \\ 0,9057 & -0,6699 & 0,1239 \\ 1,0101 & -0,7031 & 0,1224 \\ 1,1197 & -0,7357 & 0,1208 \\ 1,2344 & -0,7676 & 0,1193 \\ 1,3542 & -0,7990 & 0,1178 \end{pmatrix}$$

wobei die zweite Spalte in m und die dritte in m^2 angegeben sind. Der χ^2-Fit ergibt daraus:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,063\ \mathrm{m}^2 \\ 0,0762\ \mathrm{m} \\ 0,197 \end{pmatrix}$$

Schliesslich erhalten wir damit

$$\varepsilon_{x,n} = (0,136 \pm 0,005)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{mrad}.$$

Für die vertikale Richtung y haben wir analog

$$B = \begin{pmatrix} 1,3542 & -0,7990 & 0,1178 \\ 1,2344 & -0,7676 & 0,1193 \\ 1,1197 & -0,7357 & 0,1208 \\ 1,0101 & -0,7031 & 0,1224 \\ 0,9057 & -0,6699 & 0,1239 \\ 0,8066 & -0,6361 & 0,1254 \\ 0,7128 & -0,6017 & 0,1270 \\ 0,6245 & -0,5667 & 0,1286 \\ 0,5417 & -0,5310 & 0,1301 \\ 0,4645 & -0,4947 & 0,1317 \\ 0,3929 & -0,4577 & 0,1333 \\ 0,3270 & -0,4201 & 0,1350 \\ 0,2670 & -0,3819 & 0,1366 \\ 0,2128 & -0,3430 & 0,1382 \\ 0,1645 & -0,3034 & 0,1399 \\ 0,1223 & -0,2632 & 0,1416 \\ 0,0862 & -0,2223 & 0,1432 \\ 0,0563 & -0,1807 & 0,1449 \\ 0,0327 & -0,1385 & 0,1467 \end{pmatrix}$$

mit der zweiten Spalte in m und der dritten in m^2,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,111\ \mathrm{m}^2 \\ 0,2063\ \mathrm{m} \\ 0,5421 \end{pmatrix}$$

und

$$\varepsilon_{y,n} = (0,222 \pm 0,011)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{mrad}.$$

3.2 Messung durch Variation der Schirme

Als nächstes wird der Elektronenstrahl von Schirm 2 auf verschiedene Weise transformiert, indem alle Quadrupol- und Dipolströme (die *Optik*) konstant gehalten werden und dafür die Strecken, die der Strahl zurücklegt, variiert werden. Wir messen hierzu die Strahlgrößen $\langle x^2 \rangle$ und $\langle y^2 \rangle$ an den Schirmen 2, 3, 4 und 5. Die Messergebnisse sind in Tabelle 3.3 dargestellt.

	Schirm 2	Schirm 3	Schirm 4	Schirm 5
$\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ [mm]	$0,9018$	$0,8594$	$1,0907$	$1,2662$
$\sqrt{\langle y^2 \rangle}$ [mm]	$1,0049$	$2,4088$	$2,9551$	$1,3854$

Tabelle 3.3: Messung der Strahlgrößen $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ und $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$ an den Schirmen 2, 3, 4 und 5.

Es gibt dann für jeden der vier Schirme eine Transformationsmatrix, die den Elektronenstrahl zu diesem Schirm transformiert. (Für Schirm 2 ist dies die Identität.) Aus diesen vier Transformationsmatrizen wird durch Matlab wieder jeweils die Matrix B im Sinne von (3.3) berechnet:

$$B_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2188 & 0,4660 & 0,2481 \\ 0,0673 & -0,6866 & 1,7499 \\ 0,3917 & -2,0083 & 2,5742 \end{pmatrix}$$

für die horizontale Richtung x und

$$B_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2,4056 & 2,3135 & 0,5562 \\ 1,4058 & 1,9500 & 0,6762 \\ 0,0511 & -0,1980 & 0,1916 \end{pmatrix}$$

für die vertikale Richtung y. (Die zweiten Spalten sind wieder in m, die dritten in m^2.) Der mit Matlab errechnete χ^2-Fit ergibt

$$\begin{pmatrix} a_{x,1} \\ a_{x,2} \\ a_{x,3} \end{pmatrix} = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0,8417 \text{ m}^2 \\ 0,5456 \text{ m} \\ 0,9037 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a_{y,1} \\ a_{y,2} \\ a_{y,3} \end{pmatrix} = 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,035 \text{ m}^2 \\ -0,063 \text{ m} \\ 1,284 \end{pmatrix}$$

woraus (mit Fortpflanzung des χ^2-Fit-Fehlers) folgt:

$$\varepsilon_{x,n} = (0,119 \pm 0,016)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{mrad}$$

und

$$\varepsilon_{y,n} = (0,35 \pm 0,02)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{mrad}.$$

4

4.1

5

5.1

6

6.1

7 Literaturverzeichnis