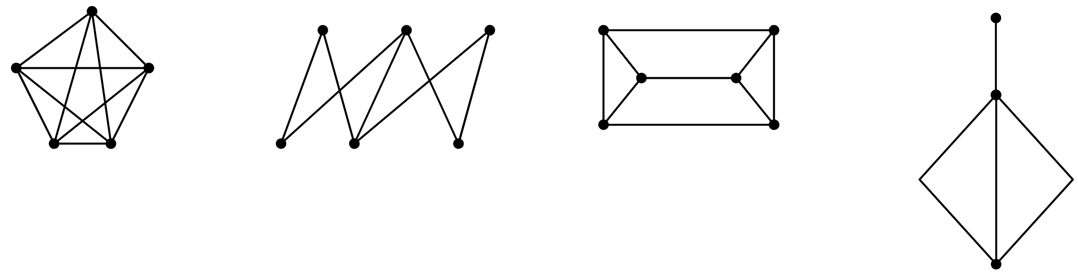
14 – Coloração de vértices

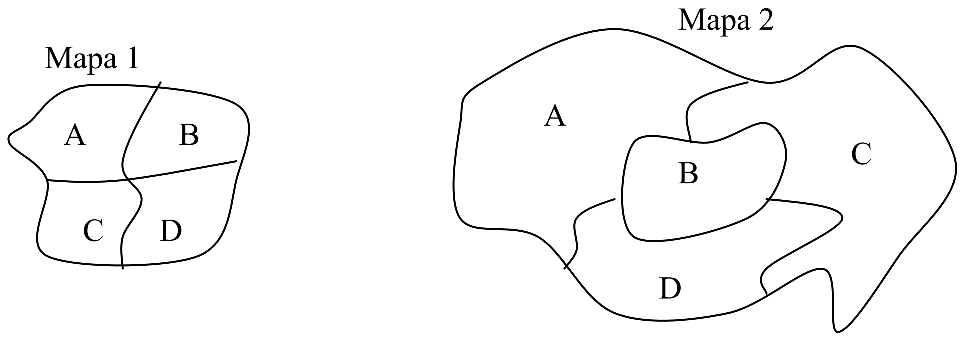
Considere cada um dos grafos abaixo:



a) Quantas cores são necessárias para colorir os vértices de um grafo de maneira que dois vértices adjacentes não recebam a mesma cor?
b) Qual é o número mínimo de cores necessárias?
c) Considerando as cores usadas no item a) agrupe os vértices que receberam a mesma cor.
d) Pense em algum problema prático que voce pudesse resolver usando a partição dos vértices obtidas acima.

Aplicações:

Coloração de mapas - Considere os mapas abaixo:

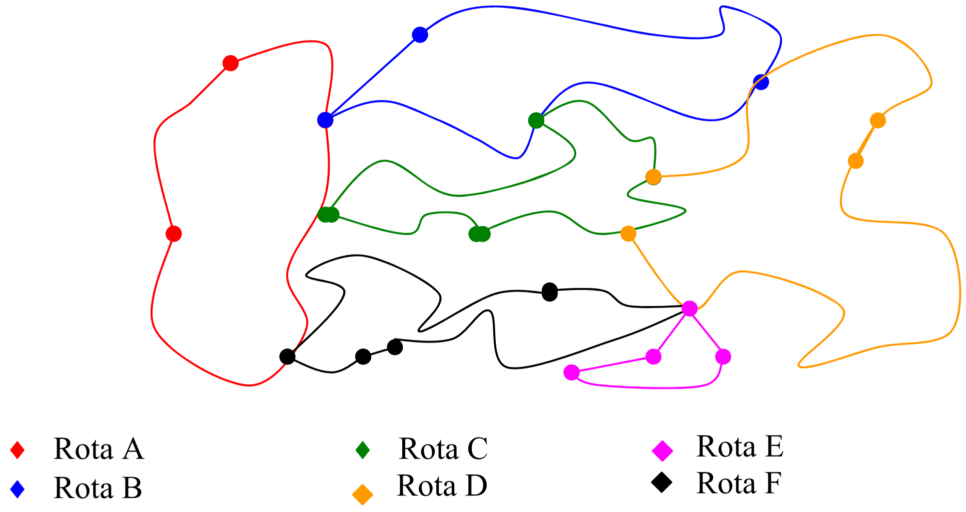


Qual é o menor número de cores necessário para pintar os mapas acima de forma que duas regiões adjacentes não recebam a mesma cor? Duas regiões são ditas adjacentes se elas possuem uma linha de fronteira em comum. Note que no mapa 1 as regiões A e D possuem apenas um ponto em comum e portanto não são consideradas adjacentes.
Vamos representar os mapas através de grafos.
Vértices – regiões do mapa
Arestas – existe uma aresta se duas regiões são adjacentes

Problema das 4 cores – Quatro cores são suficientes para colorir as regiões de qualquer mapa sem que duas regiões adjacentes recebam a mesma cor. Este resultado foi provado computacionalmemte em 1976. Foi um problema proposto em 1852. (Wilson, 1990)

Exemplo de Aplicação

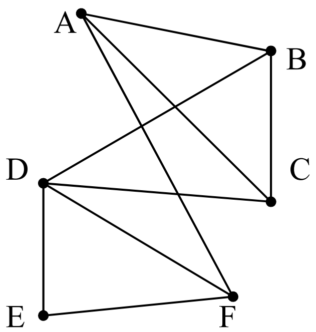
Problema da Coleta de lixo – Uma prefeitura determinou um conjunto de rotas para a coleta de lixo da cidade. O problema é que as rotas pré-definidas possuem pontos de coleta em comum. Considere, por exemplo o conjunto de rotas abaixo:



O problema consiste em determinar como dividir o conjunto de 6 rotas em três dias da semana de tal forma que nenhum ponto de coleta é visitado mais que uma vez no mesmo dia.

Representando o problema através de grafos, temos:
- Vértices: rotas
- Aresta - existe uma aresta entre duas rotas que possuam pontos de coleta em comum.

Para esta conjunto de rotas temos o seguinte grafo:



A partição satisfaz as condições do problema: {A,D}, {B,E}, {C,F}. Existem outras? É possível fazer a coleta em dois dias da semana? O que muda na solução do problema se as rotas A e F se tornarem uma rota única?

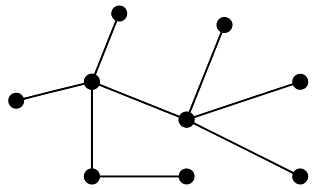
Para formalizar as idéias expostas acima considereção a Definição 1.

Definição 1 - Coloração – Seja G(V,A) um grafo e C= { c1,c2,c3,...,cm} um conjunto de cores. Uma coloração de G é uma atribuição de cores aos vértices de G de tal forma que dois vértices adjacentes recebam cores diferentes. **O número cromático** de um grafo G é o menor número de cores necessário para obter uma coloração de G. Se o número cromático é $\chi(G)$ dizemos que o grafo é $\chi(G)$-cromático

Como determinar o número cromático de um grafo? Não é uma tarefa muito fácil. Na verdade este é um problema de difícil resolução no caso de grafos quaisquer, no entanto, para alguns tipos de grafos é possível resolver o problema facilmente.

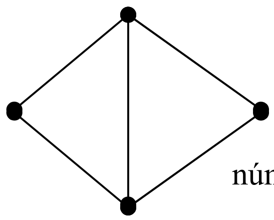
Considere os seguintes casos:

Grafo nulo
Grafo Completo
Grafo circuito: n >= 3, se n é par G é 2-cromático e se n é ímpar G é 3-cromático
Uma árvore é 2 –cromático - Defina um vértice v_j do grafo e atribua a cor 1. A partir deste vértice, todos os vértices que estiverem a uma distância par atribua a cor 2 e os que estiverem a uma distância ímpar atribua a cor 1. Como existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices não teremos dois vértices adjacentes com a mesma cor.



Lema - Um grafo é 2-cromático se e somente se for bipartido.

Definição 2 – Clique é um subgrafo completo de G.



Este grafo contém um clique de tamanho 3. Qual é o seu número cromático?

O número cromático de um grafo é maior ou igual do que o tamanho do maior clique de G (o tamanho de um clique é dado pelo seu número de vértices). Ou seja, o número de vértices do maior clique do grafo, $K_{\max}$, fornece um limite inferior para o número cromático de G.

E um limite superior, como pode ser determinado? Se Δ é grau máximo dos vértices de G então o número cromático de G é menor ou igual a $\Delta + 1$. Isto é:

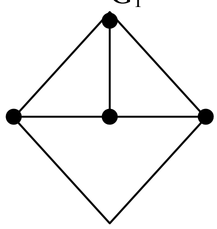
$$K_{\max} \leq \chi(G) \leq \Delta + 1$$

Observe que para mostrar que um grafo é $\chi(G)$-cromático, é necessário mostrar que usar ($\chi(G)$-1) cores força dois vértices adjacentes a receberem a mesma cor.

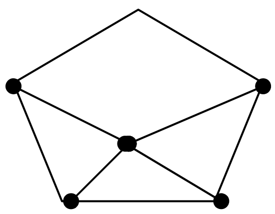
Exercícios: Encontre o numero cromático dos grafos a seguir.

a)

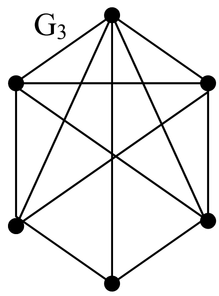
G_1



G_2

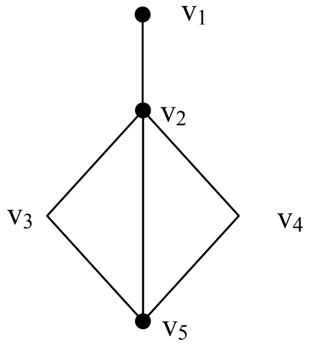


G_3

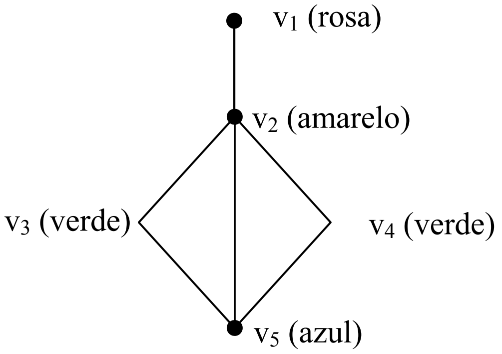


b) K_7 c) $K_{3,5}$

PARTIÇÃO CROMÁTICA
Seja o grafo G_1

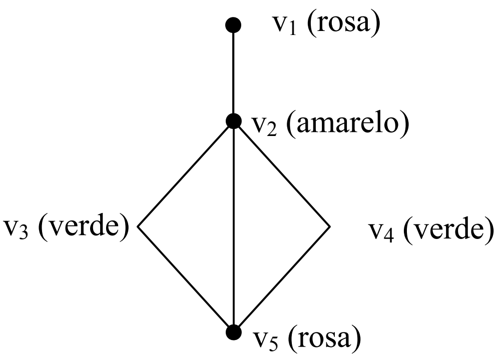


Uma coloração deste grafo, pode ser:



Esta coloração particiona o conjunto de vértices do grafo em:
a) $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3,v_4\}, \{v_5\}$

Mas vimos ainda que o número cromático deste grafo é 3 e uma coloração pode ser:



E a partição associada é:

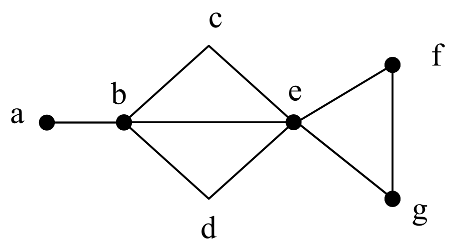
b) $\{v_1, v_5\}, \{v_2\}, \{v_3,v_4\}$

Observe que estes conjuntos de vértices tem em comum o fato que os vértices de um mesmo conjunto não são adjacentes.

Conjunto Independente - Um subconjunto de vértices de um grafo é chamado de <u>conjunto independente de vértice</u> se não existem dois vértices adjacentes neste conjunto. Um <u>Conjunto independente de vértices</u> é <u>maximal</u> se nenhum vértice pude ser adicionado ao conjunto.

<u>Exemplo.</u> Em relação a G_1 :
conjunto independente: $\{v_1, v_5\}, \{v_1\}$
conjunto independente de vértices maximal $\{v_1, v_5\}$.

Aplicação
Suponha que o grafo G_2:



descreve o seguinte problema. Cada um dos sete vértices é uma palavra código a ser usada em algum tipo de comunicação. Algumas dessas palavras são parecidas com outras (por exemplo, em relação ao som) e podem ser confundidas. Tais pares de palavras são ligadas por arestas. Encontre o maior conjunto possível de palavras código que podem ser usadas para se obter uma comunicação segura.

{a, c, d, f} é uma solução → conjunto independente de vértices maximal

Este grafo possuem 5 conjuntos independentes de vértices maximais:

{a, e, d, j}, {a, c, d, g}, {b, g}, {b, j}, e {a, e}

qual é o número cromático do grafo?
É o menor número de conjuntos independentes cuja união contém todos os vértices do grafo. Por exemplo:

{a, c, d, j}, {b, g}, {a, e}.

Assim o problema de determinar uma coloração mínima de *G* pode ser formulado em termos de particionar *V* em um número mínimo de conjuntos independentes.

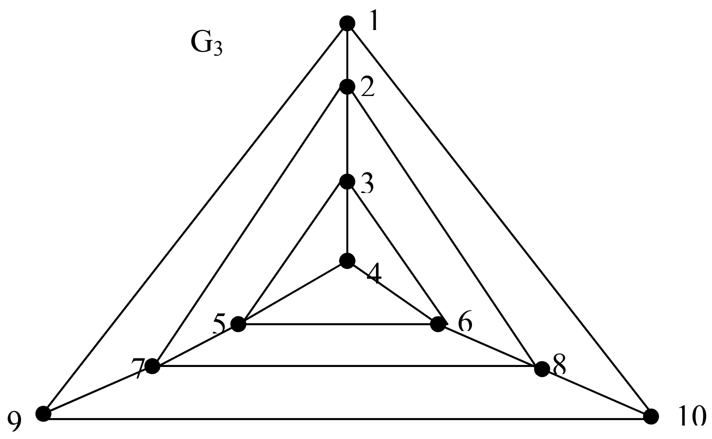
Partição Cromática Dado um grafo conexo, simples, a partição do conjunto de vértices no menor número possível de conjuntos independentes de vértices é chamada de partição cromática.
Exemplos:
{ (a, c, d, f), (b, g), (e) }
{ (a, c, d, g), (b, j), (e) }
{ (c, d, f), (b, g), (a, e) }
{ (c, d, g), (b, j), (a, e) }
São 4 exemplos de partições cromáticas do grafo G_2.

Algoritmo Guloso de Coloração
Como encontrar uma partição cromática de um grafo? Vamos ver a seguir um algoritmo guloso (ou míope) baseado na idéia de construção de conjuntos independentes.
Dado um grafo G(V,A).
Ordene o conjunto de vértices em ordem não crescente de graus: $v_1, v_2, ..., v_n$.
Faça $S_1=S_2=...=S_n=\emptyset$
Inclua v_1 em S_1.
Para j=2, ...,n faça:

> encontre o conjunto S_r , tal que o vértice v_j não seja adjacente a nenhum vértice já incluído a ele e r = min {i, i=1,...,n}.
> Inclua o vértice v_j em a S_r .

Fim

Note que ao fim do algoritmo teremos obtido no máximo *n* conjuntos independentes de vértices. Vamos usar esta idéia para obter uma partição cromática do grafo G_3.



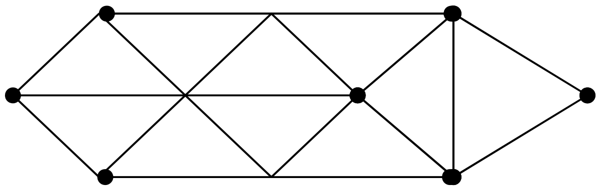
Ordenação dos vértices:
{2, 5, 9}
{3,7,1}
{6, 10}
{8,,4}

Uma outra partição é dada por:
{2, 4, 9},{1, 3, 7},{6, 10},{5,8}

Aplicação:

O senado possui várias comissões que se reúnem durante uma hora por semana. Deseja-se fazer um calendário de reuniões que minimiza o número total de horas de reuniões e tal que duas comissões que possuam membros em comum não se reúnam no mesmo horário. Supondo que existem 10 comissões mostre que este problema pode ser resolvido como um problema de coloração.

Se as comissões não possuíssem membros em comum elas poderiam se reunir simultaneamente. Como resolver então? A informação chave é o fato de que um mesmo membro pertencem a mais de uma comissão. Para representar o problema através de um grafo, precisamos definir os vértices e as arestas. Sejam as comissões os vértices. E as arestas vão ligar comissões que possuem membros em comum. Vamos supor que o grafo abaixo representa uma situação particular:



Para definir um calendário de reuniões basta encontrar o número cromático deste grafo e uma coloração associada.

Exercícios –

1) Modele o problema de encontrar o número cromático de G utilizando variáveis 0/1.

2) Encontre um grafo tal que o número cromático seja 2 mas que a coloração obtida através do algoritmo guloso descrito acima é maior ou igual a 3.

3) Qual é o número cromático do mapa do Brasil? (ver em: A. Rabelo, M. Moreira e S. Rangel, O número cromático do Brasil, Anais do CNMAC 2010, SBMAC, disponível em http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/691.pdf (última visita 08/01/2015).

O número cromático do Brasil

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Campus de São José do Rio Preto

Ariane S. Rabelo   Madonna Moreira   Socorro Rangel
IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP

1. Introdução

Este trabalho tem como foco abordar a teoria dos grafos de forma simples, permitindo a aplicação de atividades divertidas e dinâmicas nas escolas a fim de estimular o interesse dos alunos nessa área tão rica [4,5]. A atividade que mostramos a seguir tem caráter interdisciplinar e consiste em determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa do Brasil (político).

2. Coloração de mapas e grafos

Desafio: Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa do Brasil, considerando-se que estados vizinhos tenham cores diferentes e estados que só se tocam num ponto não são considerados vizinhos?

Podemos representar um mapa através de um grafo [2,3]:

- Cada região do mapa corresponde a um vértice;
- Cada fronteira entre as regiões, a uma aresta;
- Regiões que só se tocam num ponto não constituem uma aresta.

Definição: O *número cromático* corresponde ao número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo tal que vértices adjacentes recebam cores diferentes. Se um grafo que pode ser colorido com k cores é chamado *k-cromático*.

Definição: Um grafo é *planar* se puder ser representado num plano de tal forma que não haja cruzamento de arestas. Caso contrário o grafo é dito não planar.

Teorema das Quatro Cores Mapas[3]:

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores chegam para o colorir, de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Grafos [1]:

Todo grafo planar é 4-cromático.

3. Tipos de grafos

- Um ***grafo circuito*** ***(C_n)*** é um grafo formado por um único circuito [8].

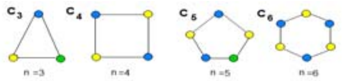


Fig. 2) O número cromático de C_n será 2 se n for par, senão será 3

- Um ***grafo completo*** ***(K_n)*** tem todos os seus vértices mutuamente adjacentes [8] (Figura 3).

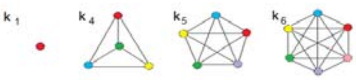


Fig. 3) O número cromático de um grafo completo é igual ao número n de vértices desse grafo.

- O ***grafo roda*** ***(Wn)*** é formado pela soma de um grafo circuito C_n e um grafo completo K_1 [1]. Veja um exemplos nas Figuras 4 e 5.

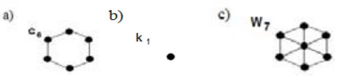


Fig. 4) A soma G_1 + G_2 é formada por G_1 U G_2 e de arestas ligando cada vértice de G_1 a cada vértice de G_2.
a) Esquema do C_6 b)Esquma do K_1. c)Esquema do W_7, obtido da soma de C_6 com K_1

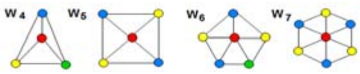


Fig. 5) O número cromático do grafo roda será 3 se o número de vértices for impar e 4 se o número de vértices for par.

4. Solução do desafio

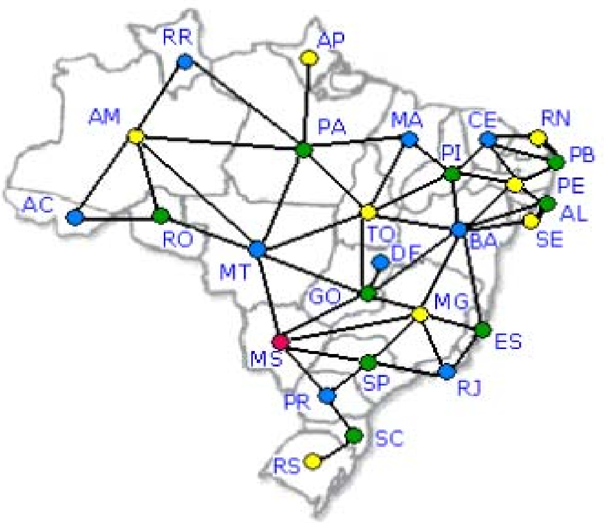


Fig. 1) Esquema do grafo associado ao mapa do Brasil (político).

5. Analisando o resultado

Voltando ao grafo associado ao mapa do Brasil, encontramos o subgrafo formado pelo vértice GO, e cinco vértices adjacentes a este que estão interligados (MT, MS, MG, BA, TO formam um circuito) , como vemos na Figura 6. Ou seja, esses vértices formam um grafo roda, com **n** par. Isto determina seu número cromático, que é 4.

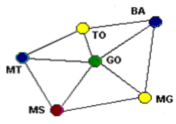


Fig. 6) Grafo roda [7].

Referências

[1] *BOAVENTURA NETTO* **,** *P. O. Grafos* **–** *Teoria***,** *Modelos* e *Algoritmos*. São Paulo, Edgard Blücher, 2006.
[2] *BOAVENTURA*, P. O.; *JURKIEWICZ*, S.; "Grafos: Introdução e Prática*"*, Blucher, 2009.
[3] CARNEIRO, C.; "Colorindo Mapas", RPM 29, pp. 31-38, 1995.
[4] *JURKIEWICZ*, S.; "Matemática discreta em sala de aula" História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 115–161. Carvalho, L. M.; Guimarães, L. C. (org.), IME-UERJ, *v1* (2002),.
[5] *JURKIEWICZ*, S.; FRIDEMANN, C. V. P.; "Modelagem matemática na escola e na formação do professor". ZETETIKE– Cempem – FE – Unicamp – v. 15 – n. 28 -jul./dez. - 2007
[6] LOZANO, D.; Rangel, S.; Pires, C.; "Uma proposta de oficina de coloração de mapas e grafos para o ensino fundamental e médio", Relatório Técnico, DCCE – UNESP, 2006.
[7] MOREIRA, M. "Introdução à Teoria dos Grafos", Relatório semestral – Bolsa BAAE, Universidade Estadual Paulista, 2008.
[8] WILSON, R. J.;WATKINS, J. J.; "Graphs: an introdutory approach", Wiley, 1990, New York.

Para citar este trabalho: "A. Rabelo, M. Moreira e S. Rangel, O número cromático do Brasil, Anais do CNMAC 2010, SBMAC, disponível em http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/691.pdf (última visita 08/01/2015).