Основы вейвлет-преобразования

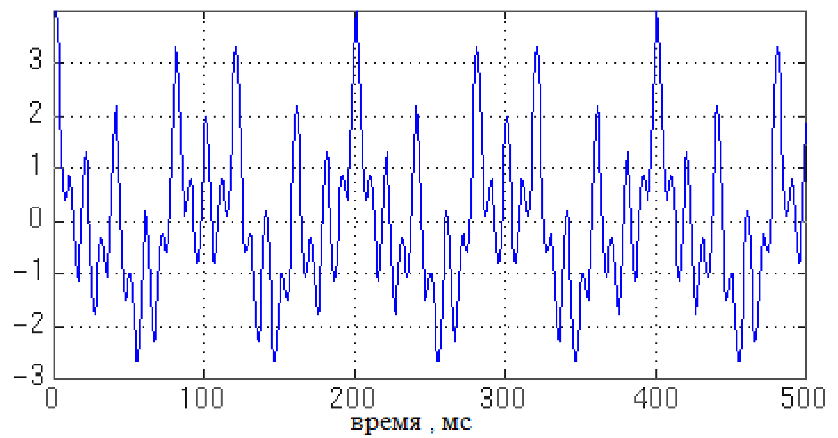
Перцев Дмитрий Юрьевич
доцент кафедры ЭВМ БГУИР

2022

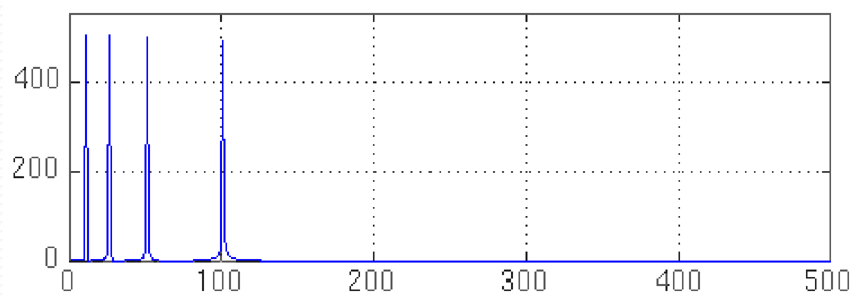
Амплитудно-временное и частотно-временное представления сигналов

Амплитудно-временное представление стационарного сигнала

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10\,t) + \cos(2\pi \cdot 25\,t) + \cos(2\pi \cdot 50\,t) + \cos(2\pi \cdot 100\,t)$$

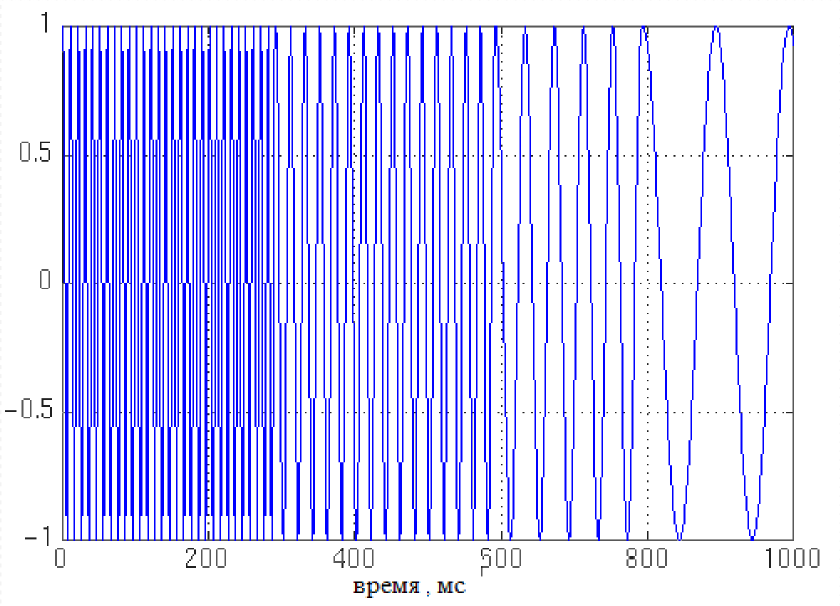


Частотно-временное представление стационарного сигнала (преобразование Фурье)

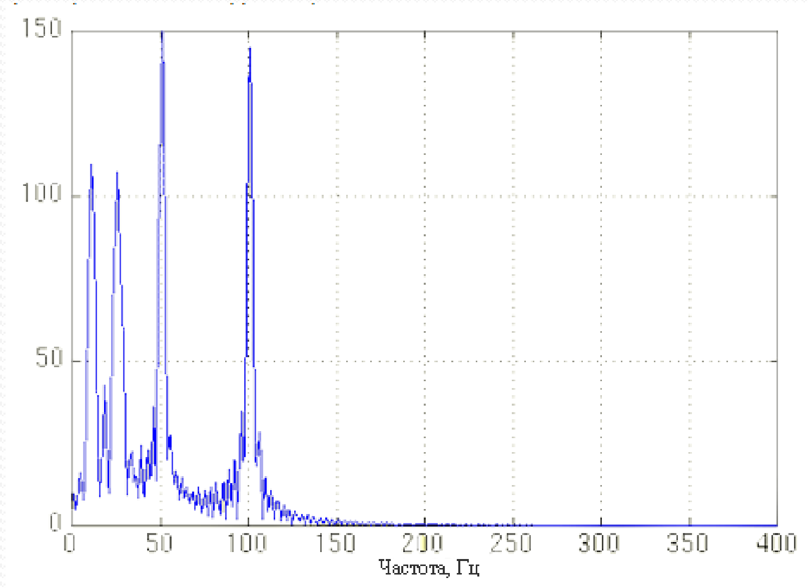


Амплитудно-временное и частотно-временное представления сигналов

Амплитудно-временное представление не стационарного сигнала



Частотно-временное представление не стационарного сигнала (преобразование Фурье)

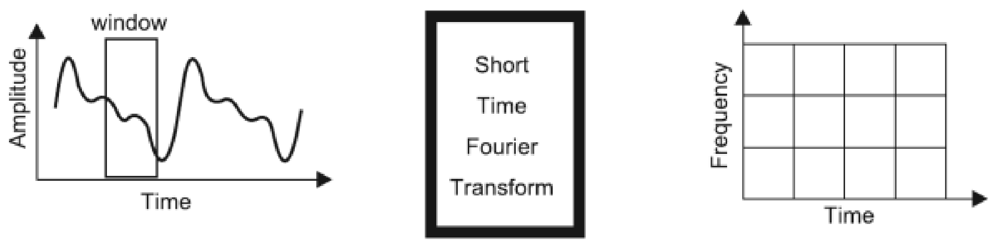


Амплитудно-временное и частотно-временное представления сигналов

- Спектральный анализ – один из методов обработки сигналов, который позволяет характеризовать частотную составляющую измеряемого сигнала.
- Главной математической основой спектрального анализа является преобразование Фурье, которое связывает пространственный и временной сигнал с его представлением в частотной области.
- НО преобразование Фурье дает информацию только про частоту, которая присутствует в сигнале и не дает никакой информации про то, в какой промежуток времени эта частота присутствует в сигнале.
- Таким образом, для двух абсолютно разных сигналов мы получаем почти одинаковые преобразования Фурье. Преобразование Фурье по своей сути не может отличать стационарный сигнал от нестационарного, что является большой проблемой для его применимости.

Оконное преобразование Фурье

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cdot w(t-b)\cdot e^{-i\omega t}\,dt.$$

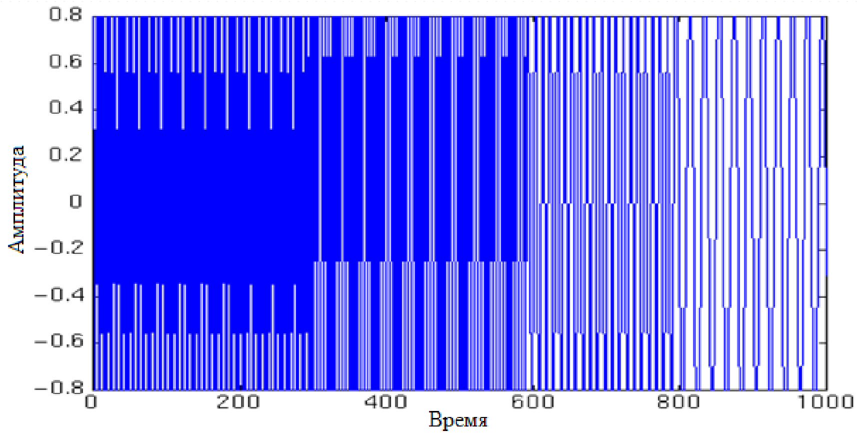


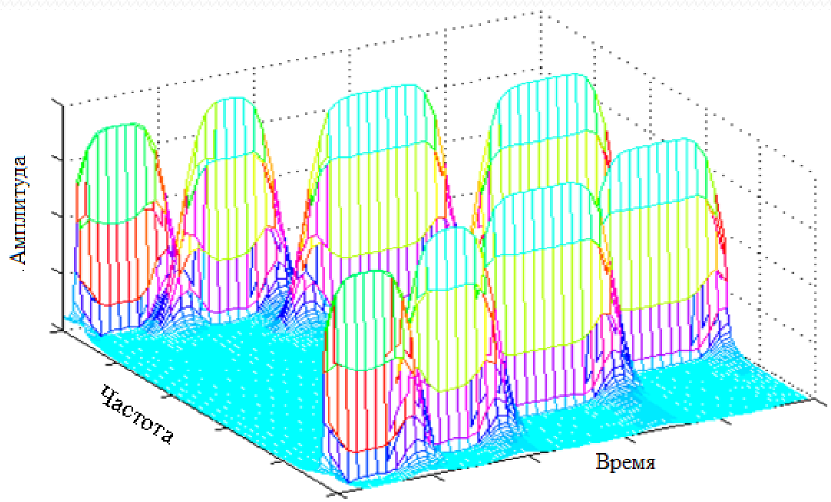
Функция *y(t)* под знаком интеграла дополнительно умножается на оконную функцию *w(t-b)*. Параметр *b* окна задает его сдвиг на временной оси. Обычно задается ряд фиксированных значений *b* в пределах полного окна.

Оконное преобразование Фурье, в отличие от обычного преобразования Фурье, уже является функцией от времени, частоты и амплитуды. Т.е. оно позволяет получить характеристику распределения частоты сигнала (с амплитудой) во времени.

Идея – временной интервал существования сигнала разбивается на ряд промежутков – временных окон. В каждом промежутке вычисляется свое преобразование Фурье. Если в каком-то окне существовали частотные составляющие некоторого сигнала, то они будут присутствовать в спектре. Если нет – будут отсутствовать. Таким образом можно перейти к частотно-временному представлению сигнала – особый раздел ЦОС,

Оконное преобразование Фурье





Оконное преобразование Фурье, в отличие от обычного преобразования Фурье, является функцией от времени, частоты и амплитуды. Позволяет получать характеристику распределения частоты сигнала (с амплитудой от времени.)

Рассмотрим не стационарный сигнал: сигнал является стационарным каждые 250 мс (на первом отрезке длиной 250 мс он имеет частоту 300 Гц, на втором – 200 Гц, на третьем – 100 Гц и на четвертом 50 Гц).

Трехмерный (время, частота и амплитуда) график оконного преобразования Фурье: четыре ярко выраженных максимума, которые соответствуют частотам, присутствующим в сигнале. В отличие от преобразования Фурье мы получаем значения частот относительно оси времени, т.е. получаем **частотно-временную характеристику** сигнала.

НО главной проблемой в использовании оконного преобразования является **принцип неопределенности Гейзенберга**.

Принцип неопределенности Гейзенберга

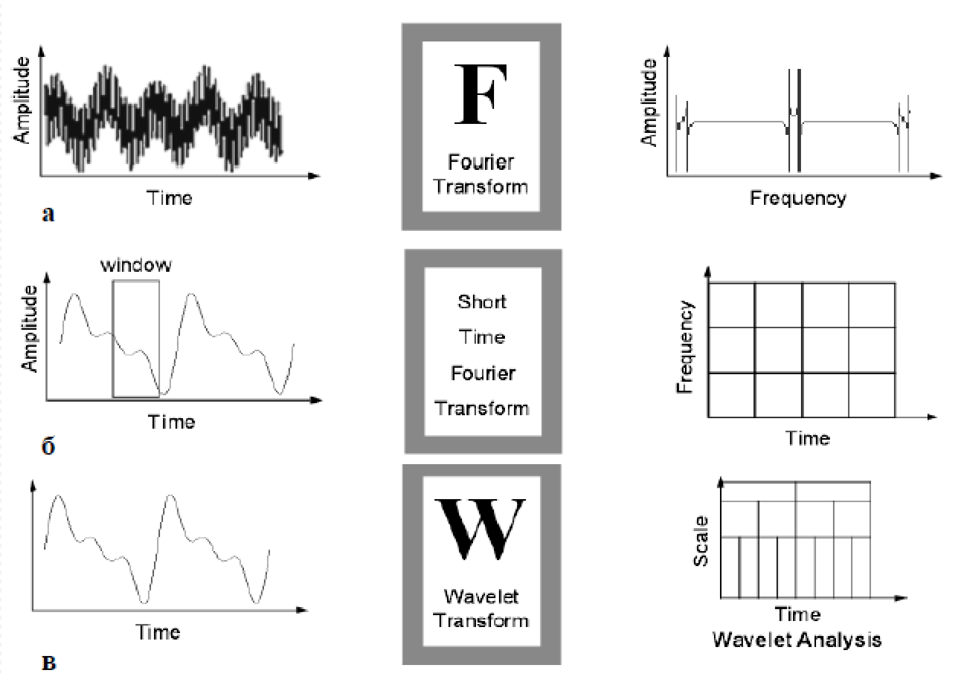
Суть: чем точнее будут измерения одной характеристики частицы, тем менее точным окажется измерение второй.

Невозможно получить одновременно высокое **частотное** и высокое **временное** разрешение.

Выбирая окно с малой шириной по времени, мы получаем высокое разрешение, но низкое частотное разрешение. Взяв окно с большой шириной во времени, получаем хорошее разрешение по частоте, но плохое во времени.

Оконное преобразование Фурье оперирует с окнами, имеющими одинаковую ширину, поэтому данное противоречие для него неразрешимо.

Исследование сигнала: преобразование Фурье, оконное преобразование Фурье, вейвлет-преобразование



Схематичное изображение исследования сигнала:

а – преобразование Фурье;

б – оконное преобразование Фурье;

в - вейвлет-преобразование.

Преобразование Фурье показывает амплитудно-частотную характеристику сигнала – наличие и амплитуду различных гармоник в сигнале.

Оконное преобразование Фурье демонстрирует наличие гармоник в сигнале в заданном диапазоне движущегося вдоль временной оси окна.

Вейвлет-преобразование демонстрирует масштабные сравнения сигнала с заданными базовыми вейвлетами в каждый момент времени существования сигнала.

Вейвлет-преобразование

Вейвлет-преобразование *хорошо приспособлено для изучения структуры неоднородных сигналов*.

В отличие от преобразования Фурье, анализирующая функция которого покрывает всю временную ось, *двухпараметрическая анализирующая функция одномерного вейвлет-преобразования хорошо локализована и во времени, и по частоте*.

Термин «вейвлет» (дословный перевод – маленькая волна) появился сравнительно недавно – его ввели Гроссман и Морле (Grossman & Morlet) в середине 80-х годов в связи с анализом сейсмических и акустических сигналов.

В настоящее время широко применяется в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе различных сигналов (например, речевых); при анализе изображений самой различной природы (радужная оболочка глаз, рентгенограмма, спутниковые снимки и др.); для свертки (упаковки) больших объемов информации.

Вейвлет-преобразование

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по **базису**, сконструированному из обладающей **определенными свойствами** функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

В отличие от традиционно применяемого для анализа сигналов преобразования Фурье вейвлет-преобразование **обеспечивает двумерную развертку** исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном пространствах.

В зарубежной литературе: *single spectrum* – спектр Фурье; *time-scale spectrum* или *wavelet spectrum* - спектр, полученный на основе коэффициентов вейвлет-преобразования.

Вейвлет-функции

Противоположностью гармоническим базисным функциям являются импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера, которые предельно локализованы во временной области и «размыты» по всему частотному диапазону.

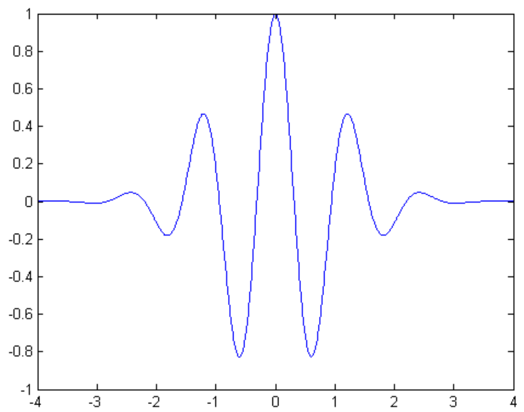
Вейвлеты по локализации в этих двух представлениях можно рассматривать как функции, занимающие промежуточное положение между гармоническими и импульсными функциями.

При вейвлет-анализе имеется возможность выбора между семействами вейвлетных функций.

Вейвлет-функции

Вейвлеты – это сдвинутые и масштабированные копии $\psi_{a,b}(t)$ («дочерние вейвлеты») некоторой быстро затухающей осциллирующей функции $\psi(t)$ («материнского вейвлета»)

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\,\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$



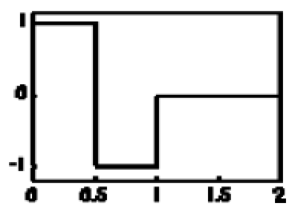
где b – параметр сдвига, *a* – параметр масштаба.

Используются для изучения частотного состава функций в различных масштабах и для разложения/синтеза функций в компрессии и обработке сигналов.

Примеры часто используемых вейвлетов

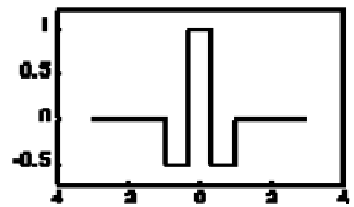
Haar-вейвлет:

$$\psi(t)=\begin{cases}+1, & 0\le t<0.5\\ -1, & 0,5\le t<1\\ 0, & t<0,\ \ t\ge 1\end{cases}$$



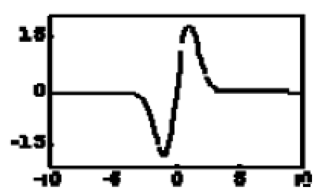
Fhat-вейвлет ("Французская шляпа" – French hat):

$$\psi(t)=\begin{cases}+1, & |t|<1/3\\ -0,5, & 1/3<t\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$



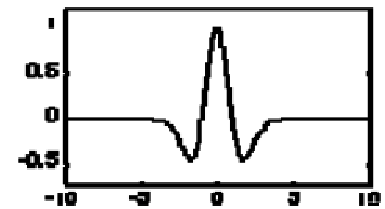
Wawe-вейвлет:

$$\psi(t)=t\ \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



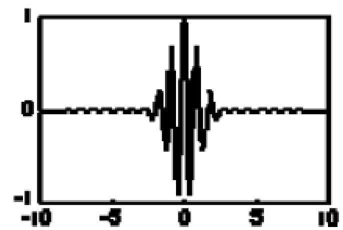
Mhat-вейвлет ("Мексиканская шляпа" – Mexican hat):

$$\psi(t)=(1-t^2)\ \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



Вейвлет Морле (образует комплексный базис, изображена действительная часть):

$$\psi(t)=\exp\left(ik_0t-\frac{t^2}{2}\right)$$



Примеры часто используемых вейвлетов

Вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета на заданном масштабе и анализируемого сигнала, вейвлет-коэффициенты $W_f(a,b)$ содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, которые содержат информацию о сигнале и о синусоидальной волне).

Можно выделить следующие **классы вейвлетов**:

- вещественные непрерывные базисы:

Гауссовы: первого порядка или WAVE-вейвлеты, второго порядка или MHAT-вейвлеты «мексиканская шляпа» - mexican hat);

DOG – difference of gaussians;

LP – Littlewood & Paley;

- вещественные дискретные базисы: вейвлет Хаара (Haar);
- комплексные базисы: Морле (Morle), Пауля (Paul).

Примеры часто используемых вейвлетов

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временной и в частотной области, поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала. Это обусловлено тем, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

Наиболее распространенные *вещественные базисы* конструируются на основе производных функций Гаусса:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Наиболее простой пример *дискретного* вейвлета – это вейвлет Хаара (Haar).

Среди *комплексных* вейвлетов наиболее часто используется базис, основанный на хорошо локализованном и во временной и в частотной областях вейвлете Морле (Morlet).

Большинство вейвлет-функций не имеют аналитического описания в виде одной формулы, а задаются итерационными выражениями. Пример таких вейвлетов – функции Добеши (Daubechies).

Выбор вейвлета

Выбор конкретного материнского вейвлета (будь то непрерывный или дискретный) целиком зависит от характера поставленной задачи и от конкретного анализируемого сигнала. Разные сигналы удается анализировать тем или иным способом, и критерием успеха обычно служит простота получаемого разложения. При этом решающим фактором оказываются **интуиция и практический опыт** исследователя.

Вейвлет-функция

Параметр масштаба в вейвлет-анализе имеет аналогию с масштабом географических карт. Большое значение масштаба соответствуют малому количеству деталей, глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. Аналогично, в терминах частоты, низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале (которая содержится на всей его протяженности), а высокие частоты – детальной информации, скрытым особенностям, которые имеют обычно малую протяженность. Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал.

Поэтому, при $a>1$ сигнал расширяет, а при $a<1$ сжимает сигнал.

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\,\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Вейвлет-функции, признаки вейвлета

Условия, обычно накладываемые на ψ(t):

- *Локализация*. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованные базисные функции. Вейвлет должен быть локализован (определен на конечном интервале) как во временной области, так и в частотной. Например, дельта-функция и гармоническая функция не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временной и частотной области.

Вейвлет-функции, признаки вейвлета

Условия, обычно накладываемые на ψ(t):

- *Ограниченность*: квадрат нормы функции должен быть конечным

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

- *Нулевое среднее*: график вейвлет-функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

- *Нулевые моменты* (vanishing moments): такой вейвлет называется вейвлетом m-го порядка. Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$$

Вейвлет-функции, признаки вейвлета

Условия, обычно накладываемые на $\psi(t)$:

- *Автомодельность*: характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{a,b}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов. Т.е. форма вейвлета должна оставаться одной и той же при сдвигах и масштабировании.

Непрерывное вейвлет-преобразование

- *Вейвлет-преобразование* одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\,\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

сконструированных из *материнского* (порождающего) вейвлета $\psi(t)$, обладающего определенными свойствами, за счет операций сдвига во времени – b и изменения временного масштаба – a . Множитель $|a|^{-1/2}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a . Итак, для заданных значений параметров a и b функция $\psi_{a,b}(t)$ и есть вейвлет, порождаемый материнским вейвлетом $\psi(t)$.

Непрерывное вейвлет-преобразование

Сконструируем базис $\psi_{a,b}(t)$ с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов материнского вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров a и b. Тогда по определению прямое вейвлет-преобразование сигнала $f(t)$ будет представлено в виде:

$$W_f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,$$

Обратное преобразование:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a,b)\psi_{ab}(t)\frac{da\,db}{a^2}.$$

где $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega < \infty$ $\Psi(\Omega)$ - преобразование Фурье функции $\psi(t)$.

Свойства вейвлет-преобразования

1. Линейность

$$W[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha W[f_1]+\beta W[f_1]=\alpha W_1(a,b)+\beta W_2(a,b)$$

2. Инвариантность к сдвигу

$$W[f(t-b_0)]=W(a,b-b_0)$$

3. Инвариантность к растяжению – сжатию

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right]=\frac{1}{a_0}W\left(\frac{a}{a_0},\frac{b}{a_0}\right)$$

Частотно-временная локализация

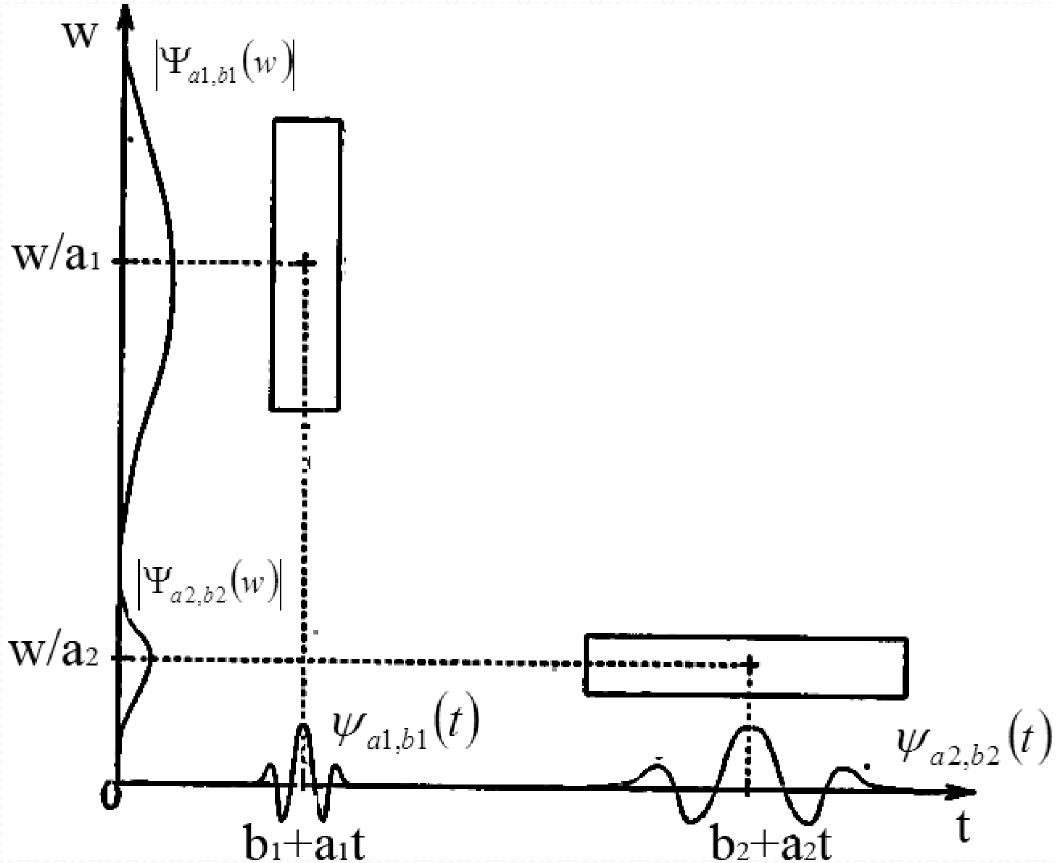
Постоянство относительной разрешающей способности по частоте

$$\frac{dw}{w} = const$$

Постоянство площади частотно-временного (частотно-пространственного) окна

$$dw \cdot dt = const$$

Постоянство частотно-временного окна



Свойства вейвлет-преобразования

Поэтому неслучайно многие исследователи называют вейвлет-анализ *«математическим микроскопом»*. Это название хорошо отражает замечательные свойства метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a – увеличение, и, наконец, выбором материнского вейвлета $\psi(t)$ определяют оптические качества микроскопа.

Дискретное вейвлет-преобразование

Субполосное кодирование – это результат свертки сигнала с несколькими полосовыми фильтрами и децимацией результата.

Банк фильтров – совокупность набора фильтров и дециматоров.
Каждый получившийся в результате преобразования сигнал несет в себе информацию о спектральной составляющей исходного сигнала при некотором пространственном (временном) масштабе.

Для обратного синтеза сигнала выполняется операция интерполяции субполосных сигналов, фильтрация и их сложение. Использование субполосного кодирования вкупе с ***кратномасштабным анализом***, который представляет собой процесс декомпозиции сигнала на различных частотах и различном разрешении одновременно, позволяет получить масштабно-временное представление сигнала. Разрешение сигнала изменяется за счет фильтрации сигнала и является мерой количества детальной информации в нем, масштаб изменяется за счет интерполяции и децимации.

Дискретное вейвлет-преобразование

В ходе ДВП сигнал анализируется в различных частотных полосах с различным разрешением путем декомпозиции на грубую аппроксимацию (полусуммы соседних значений сигнала) и детали (полуразности соседних значений сигнала). Таким образом, определены два множества функций: масштабирующие функции и вейвлеты, соответствующие низкочастотным (НЧ) и высокочастотным (ВЧ) фильтрам

$$\text{масштабирующие коэфициенты}: a_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} + a_{j,2k+1})$$

$$\text{вейвлет коэфициенты}: b_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} - a_{j,2k+1})$$

Маллат:

$$Y_{low}[k] = \sum_n x(n)h(2k-n)$$

$$Y_{high}[k] = \sum_n x(n)g(2k-n)$$

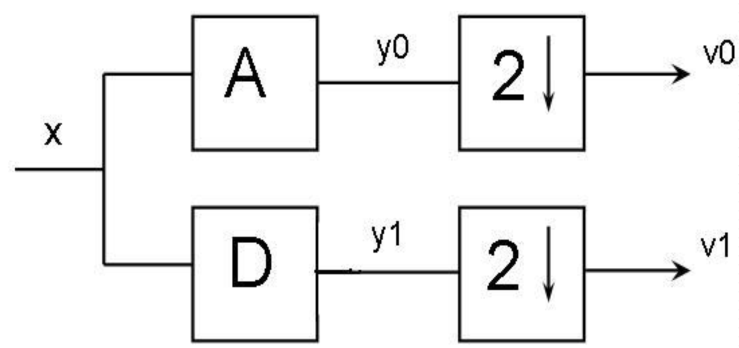
Дискретное вейвлет-преобразование

Единичное применение такого банка фильтров к сигналу делит его на две части, в одной из которых содержатся высокие частоты сигнала, а в другой низкие.

$$\begin{bmatrix} A_n \\ D_n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

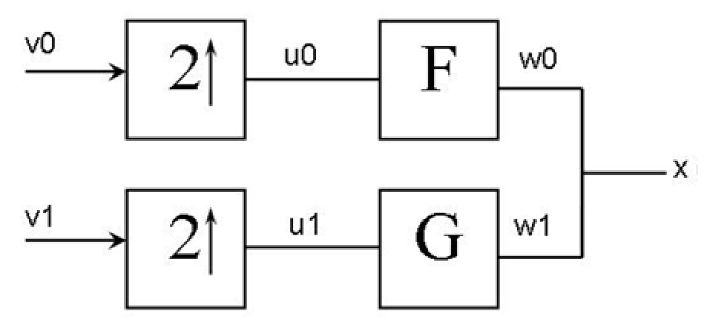
где A_n, D_n фильтрующие матрицы размерностью $2^{n-1} \times 2^n$, построенные на основании коэффициентов фильтра в зависимости от разрядности x и претерпевшие децимацию – удаление нечетных строк; x – исходный сигнал; a_{n-1} и d_{n-1} – низкочастотная и высокочастотная составляющие сигнала x.

Дискретное вейвлет-преобразование



ДВП. Процедура анализа: *A*, *D* – фильтрующие матрицы (низкочастотная и высокочастотная), 2↓ – дециматор, *v*0 и *v*1 – $a_{n\text{-}1}$ и $d_{n\text{-}1}$ соответственно

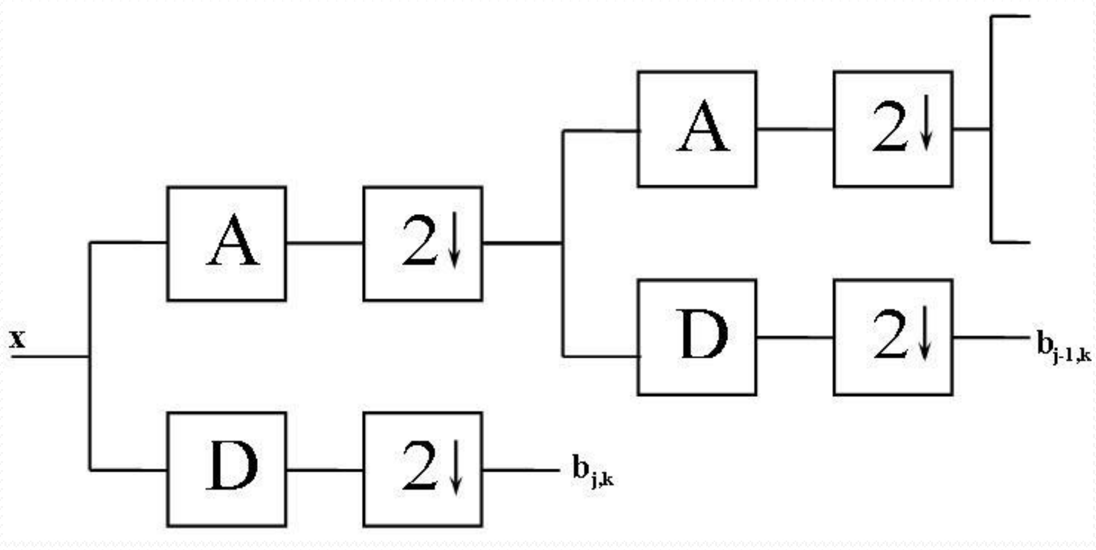
Дискретное вейвлет-преобразование



ДВП. Процедура синтеза: *v*0 и *v*1 – $a_{n\text{-}1}$ и $d_{n\text{-}1}$ соответственно, 2↑ – интерполятор, *F* и *G* – добавляющий и вычитающий фильтры соответственно

Быстрое вейвлет – преобразование (БВП, FWT)

БВП вытекает из классического ДВП рекурсивным применением последнего, что возможно благодаря принципу кратномасштабного анализа. Логарифмическое дерево банков фильтров



Быстрое вейвлет – преобразование (БВП, FWT)

Алгоритм:

Сигнал *x* поступает на вход первого банка фильтров в дереве.

После преобразования и децимации коэффициенты ВЧ фильтра $b_{j,k}$ сохраняются, так как они являются выходом на своем уровне «логарифмического дерева».

Выходы же НЧ фильтра после децимации, когда в выходном сигнале остались только четные компоненты, поступают на вход следующего банка фильтров, где процедура повторяется.

Выходом второго уровня являются коэффициенты $b_{j-1,k}$.

Эта схема будет повторяться $L=\log_2 N$ раз, где N - это число компонент в исходном сигнале.

В итоге мы получим L-1 векторов с ВЧ фильтров и общее среднее – выход последнего НЧ фильтра, то есть полную декомпозицию сигнала.

Применение такого рекурсивного алгоритма и есть БВП.

Быстрое вейвлет – преобразование (БВП, FWT)

Это преобразование подходит для любого сигнала, длина которого есть степень двойки, а также для любых вейвлетов, относящихся к классу ортогональных. Следует также добавить, что БВП обладает и обратным преобразованием, которое строится с использованием инверсного ДВП, когда в соответствие каждому блоку анализа на каждом уровне ставится блок синтеза. Таким образом, имеет место обратная рекурсия. Впервые такая связь между вейвлетами и фильтрами была открыта Стивеном Маллатом, поэтому в его честь этот алгоритм называют «алгоритмом Маллата» или «пирамидой Маллата».

Пример

1. Для заданного сигнала выполнить БВП (алгоритм Маллата). Сигнал представить в базисе Хаара. Максимальный уровень разложения N=4.

Фильтры анализа: НЧ [1/2, 1/2];

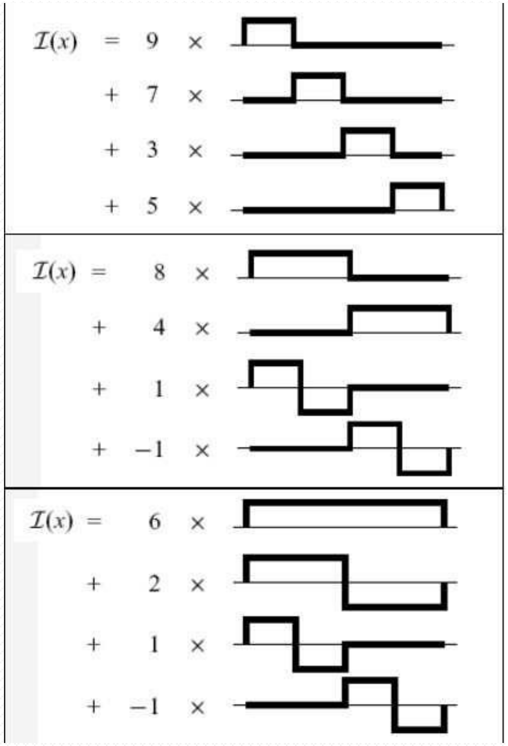
ВЧ [1/2, -1/2].

Фильтры синтеза: НЧ [1, 1];

ВЧ [1, -1].

2. Вывести сигнал на каждом из четырех уровней разложения.

Пример



Шаг за шагом

[$\underline{9\ 7\ 3\ 5}$]

[$\underline{8\ 4}$ | 1 −1]

[$\underline{6}$ | 2 1 −1]