Ключевые операции ЦОС

Перцев Дмитрий Юрьевич
доцент кафедры ЭВМ БГУИР

2022

Ключевые операции ЦОС

- прохождение сигнала через цифровой узел:
  - свертка:
    - линейная
    - циклическая
- на сколько один процесс похож на другой:
  - автокорреляция
  - взаимная корреляция

- импульсная характеристика
- цифровая фильтрация
- дискретные преобразования
  - преобразование Фурье
  - вейвлет-преобразования
- модуляция

Линейная (апериодическая) свертка (convolution)

Пусть имеется два дискретных сигнала:

- $a(n)$, $n = 0, \dots, N{-}1$
- $b(n)$, $n = 0, \dots, M{-}1$

где N и M - длины сигналов a(n) и b(n) соответственно

Линейной сверткой сигналов $a(n)$ и $b(n)$ называется дискретный сигнал вида:

$$s(n) = a \circledast b = \sum_{m=0}^{n} a(m) \cdot b(n-m), n = \overline{0..N+M-2}.$$

Сигналы равны нулю вне заданных своих диапазонов: $a(n) = 0$ при $n < 0$ и $n > N$, $b(n) = 0$ при $n < 0$ и $n > M$

Свойства свертки

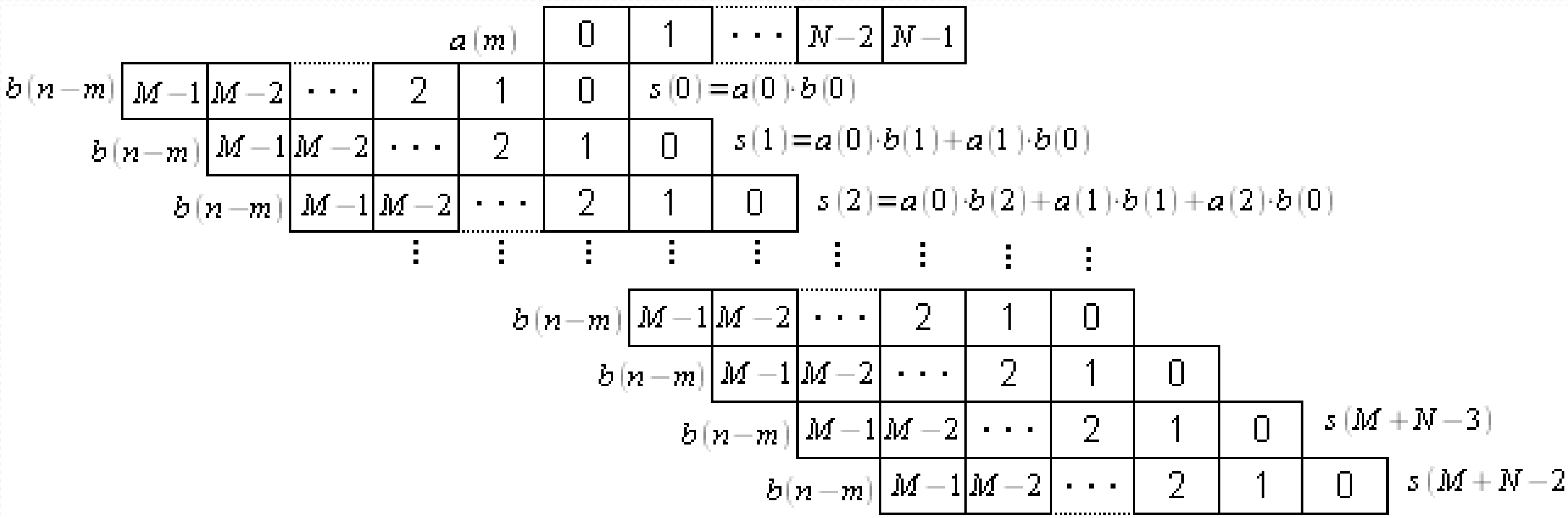
- Коммутативность
  - $a \circledast b = b \circledast a$
- Дистрибутивность
  - $a \circledast (b + c) = a * b + a * c$
- Ассоциативность
  - $a * (b \circledast c) = (a \circledast b) * c = (a * c) * b$

Линейная свертка

- Дополняем нулями слева первый сигнал до длины N+M-1.
- Инвертируем во времени второй сигнал.
- Дополняем нулями справа второй сигнал до длины N+M-1.
- В цикле от 0 до N+M-2 сдвигаем второй сигнал вправо (или первый сигнал влево)
- Вычисляем на каждом шаге цикла произведения элементов и подсчитываем сумму произведений

Линейная свертка

Графическое представление линейной свертки

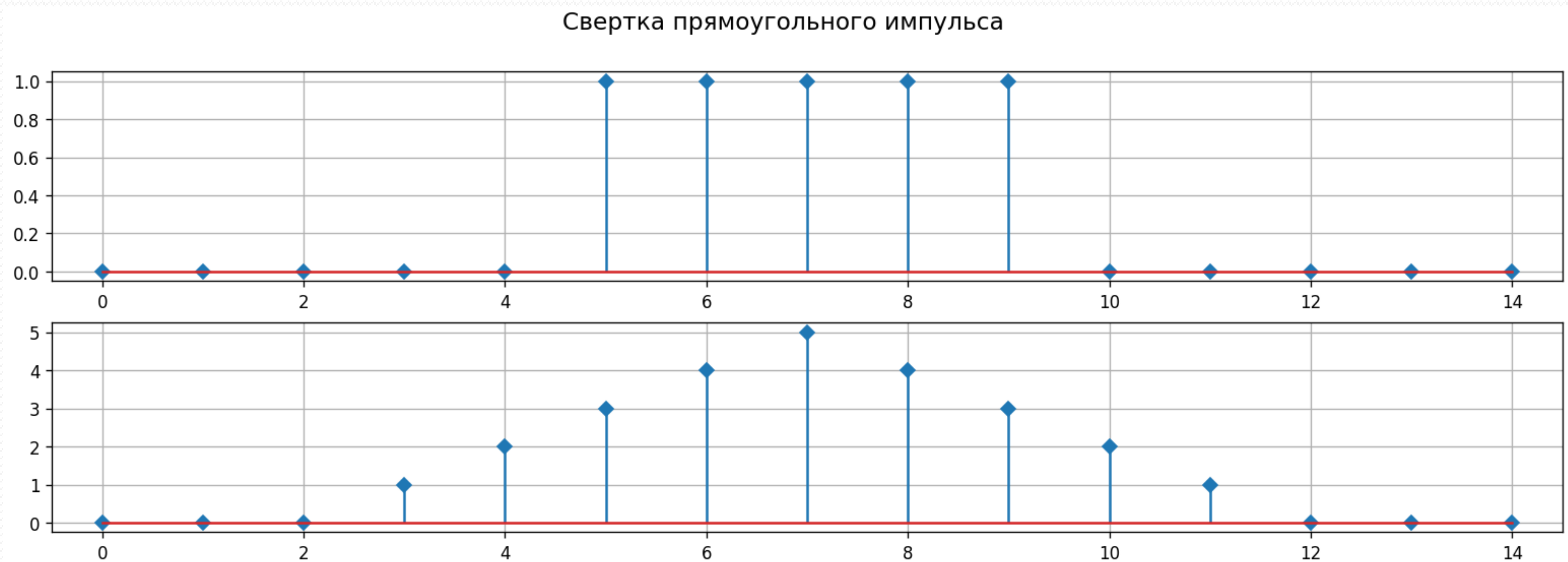


Отсчеты сигнала $b(n)$ сдвигаются относительно отсчетов последовательности $a(n)$ все возможные перекрывающиеся отсчеты почленно перемножаются и складываются.

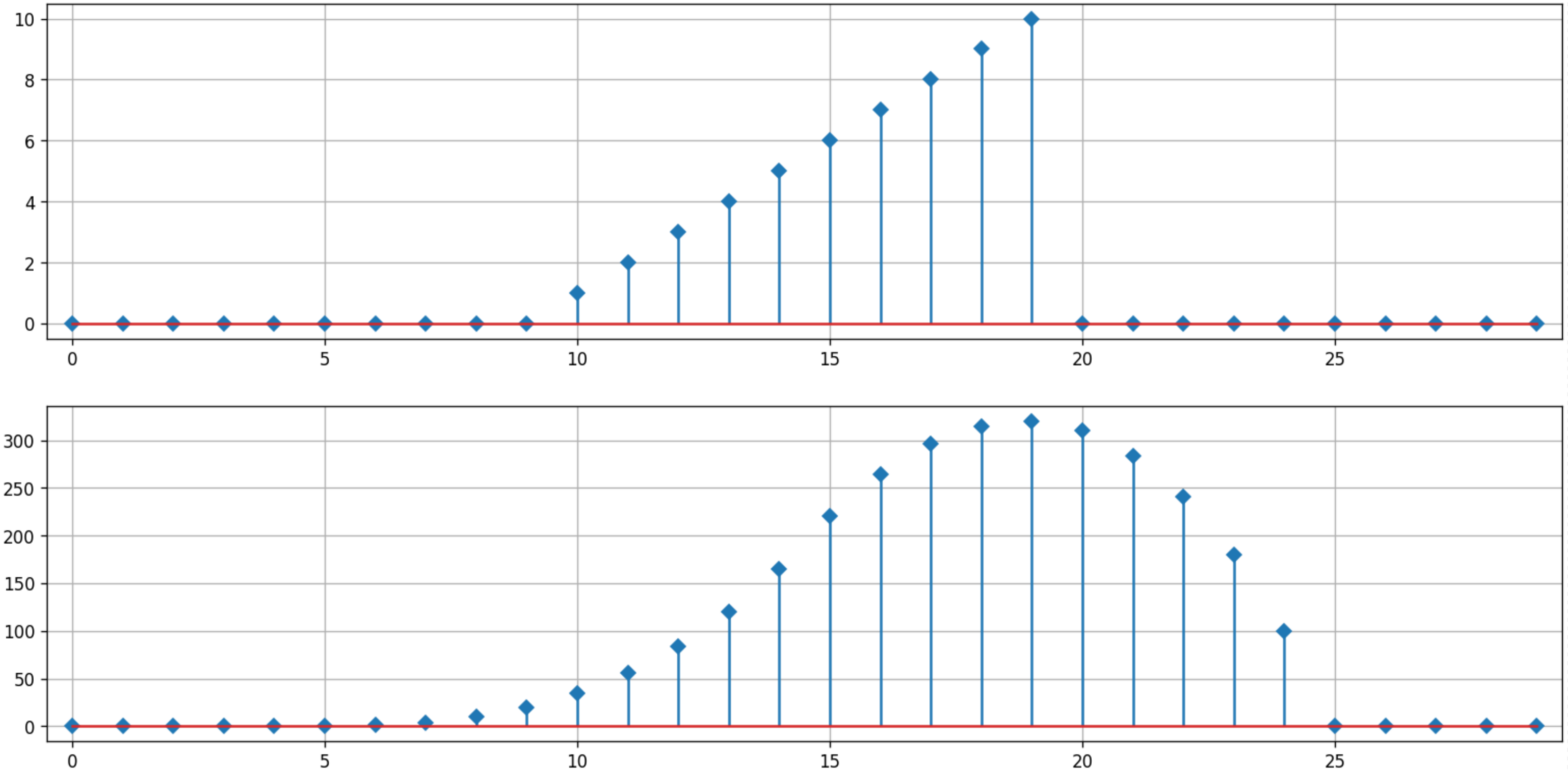
Линейная свертка

пример вычисления линейной свертки двух сигналов $a(n)$ = [2, 1, 3, -1] длиной 4 отсчета и $b(n)$ = [-1, 1, 2] длиной 3 отсчета.

$a(m)$			2	1	3	-1			
$b(0-m)$	2	1	-1						$s(0)=2\cdot(-1)=-2$
$b(1-m)$		2	1	-1					$s(1)=2-1=1$
$b(2-m)$			2	1	-1				$s(2)=2\cdot 2+1-3=2$
$b(3-m)$				2	1	-1			$s(3)=2+3+1=6$
$b(4-m)$					2	1	-1		$s(4)=2\cdot 3-1=5$
$b(5-m)$						2	1	-1	$s(5)=-2$


Свертка прямоугольного импульса
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0 2 4 6 8 10 12 14
5
4
3
2
1
0
0 2 4 6 8 10 12 14

Свертка треугольного импульса



Циклическая свертка

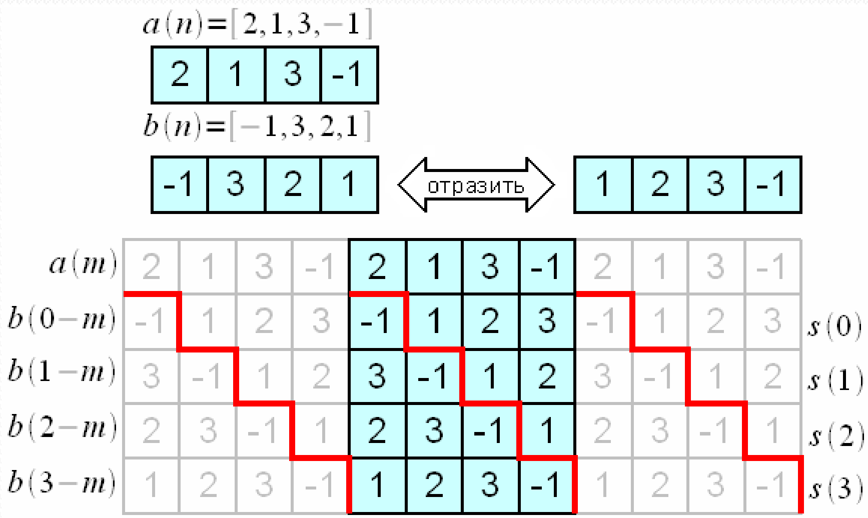
В случае циклической свертки предполагается, что дискретные сигналы $a(n)$ и $b(n)$ – периодические с одинаковым периодом N отсчетов. Тогда круговой сверткой сигналов $a(n)$ и $b(n)$ называется сигнал вида:

$$s(n) = \sum_{m=0}^{N} a(m) \cdot b(n-m), n = \overline{0..N-1}.$$

Результат циклической свертки также имеет длину N отсчетов.

Циклическая свертка

Рассмотрим циклическую свертку на примере двух сигналов $a(n)$ = [2, 1, 3, -1] и $b(n)$ = [-1, 3, 2, 1].



Красной линией отмечены границы периодов повторения сигнала $b(n–m)$. Заметим, что в силу периодичности сигналов $b(–m) = b(N–m)$.

Циклическая свертка

Приведем пример вычисления линейной свертки через циклическую для $a(n)$ = [2, 1, 3, -1] длиной 4 отсчета и $b(n)$ = [-1, 1, 2] длиной 3 отсчета (этот пример был рассмотрен выше).

Дополним нулями $a(n)$ = [2, 1, 3, -1, 0, 0] и $b(n)$ = [-1, 1, 2, 0, 0, 0], так чтобы в каждой последовательности было по 6 отсчетов.

$a(n) = [2,\ 1,\ 3,\ -1,\ 0,\ 0]$

2	1	3	-1	0	0

$b(n) = [-1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]$

-1	1	2	0	0	0	⇔ отразить	0	0	0	2	1	-1

$a(m)$	2	1	3	-1	0	0	
$b(0-m)$	-1	0	0	0	2	1	$s(0)=-2$
$b(1-m)$	1	-1	0	0	0	2	$s(1)=1$
$b(2-m)$	2	1	-1	0	0	0	$s(2)=2$
$b(3-m)$	0	2	1	-1	0	0	$s(3)=6$
$b(4-m)$	0	0	2	1	-1	0	$s(4)=5$
$b(5-m)$	0	0	0	2	1	-1	$s(5)=-2$

Корреляция (correlation)

- - это мера схожести двух сигналов
- является методом анализа сигналов

- используется для оценки схожести 2 сигналов

- может быть выражена как косинус угла между векторами

Корреляция

Приведем один из вариантов использования метода. Допустим, что имеется сигнал $s(t)$, в котором может быть (а может и не быть) некоторая последовательность $x(t)$ конечной длины T, временное положение которой нас интересует. Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу $s(t)$ временном окне длиной T вычисляются скалярные произведения сигналов $s(t)$ и $x(t)$. Тем самым мы "прикладываем" искомый сигнал $x(t)$ к сигналу $s(t)$, скользя по его аргументу, и по величине скалярного произведения оцениваем степень сходства сигналов в точках сравнения.

Смысл этой операции в том, чтобы найти наиболее вероятные периоды повторения формы исходного сигнала.

Корреляция (correlation)

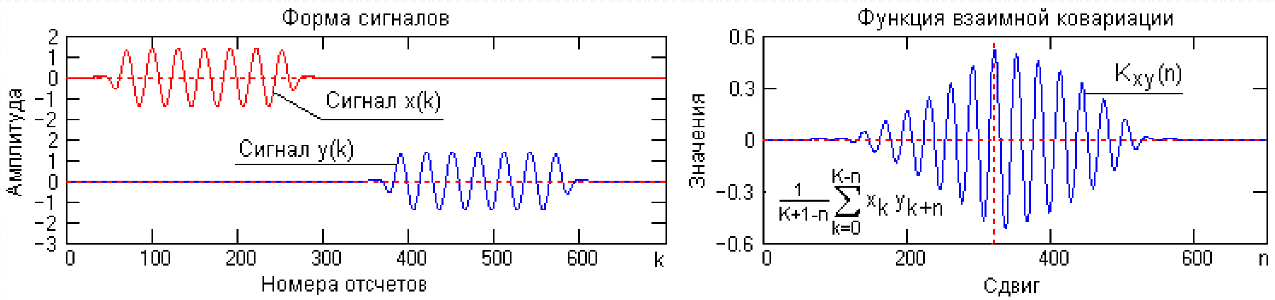
$$C_{xy}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt$$

$$C_{xy}(m) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_{n-m}$$

m, t – запаздывание (временной сдвиг)

Взаимно-корреляционная функция (cross-correlation function, CCF)

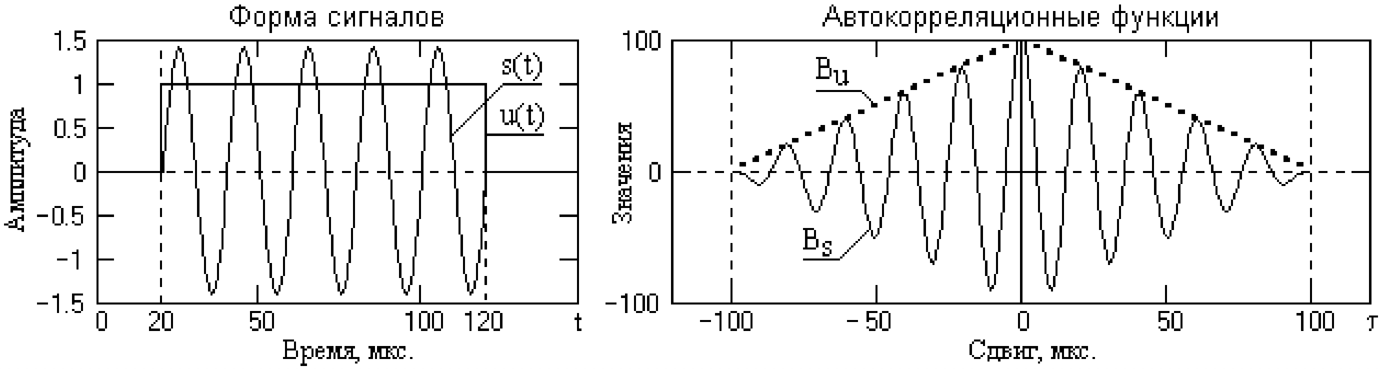
Интервал изменения значений корреляционных коэффициентов при сдвигах n может изменяться от –1 (полная обратная корреляция) до 1 (полное сходство или стопроцентная корреляция).



Пример определения сдвига между двумя детерминированными сигналами, представленными радиоимпульсами, по максимуму ФВК приведен на рисунке. По максимуму ФВК может определяться и сдвиг между сигналами, достаточно различными по форме.

Автокорреляционная функция (correlation function, CF)

подразумевает существование только одного сигнала и дает информацию о структуре сигнала и его поведении во времени



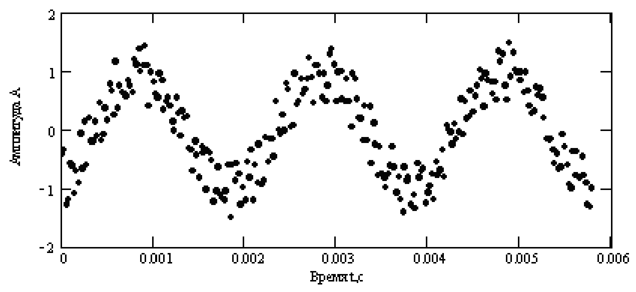
В качестве примера приведены два сигнала – прямоугольный импульс и радиоимпульс одинаковой длительности Т. Максимумы АКФ совпадают, что говорит о равной энергии сигналов.

Автокорреляция

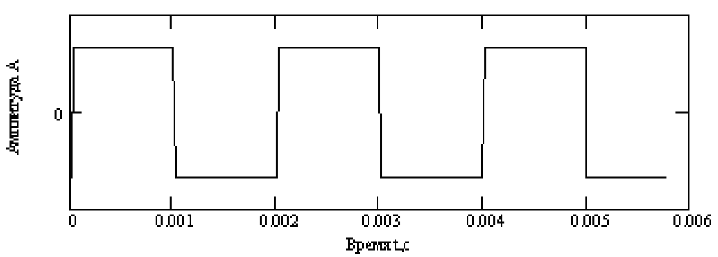
- физический смысл АКФ - энергия сигнала
- свойства:
  - симметричная и четная функция
  - имеет максимум в нуле (равна энергии сигнала)
  - АКФ периодической последовательности - периодическая функция
  - АКФ суммы двух некоррелированных сигналов - сумма АКФ этих сигналов
  - АКФ бесконечного во времени белого шума имеет пик в нулевом значении и нули во всех остальных

Корреляция

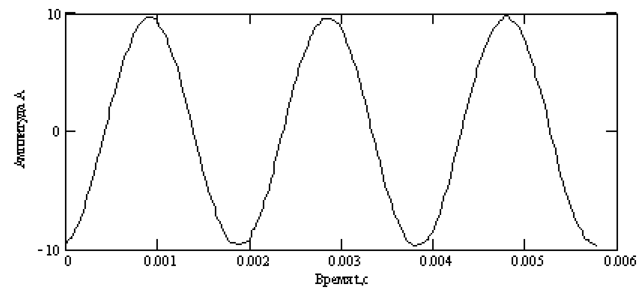
Исходный сигнал с шумами:



Меандр той же частоты:

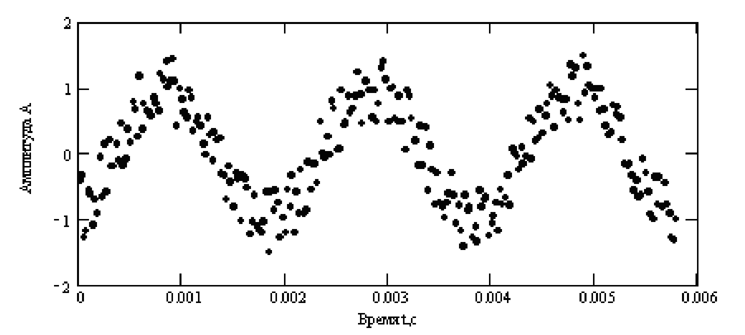


Корреляция исходного сигнала и меандра:

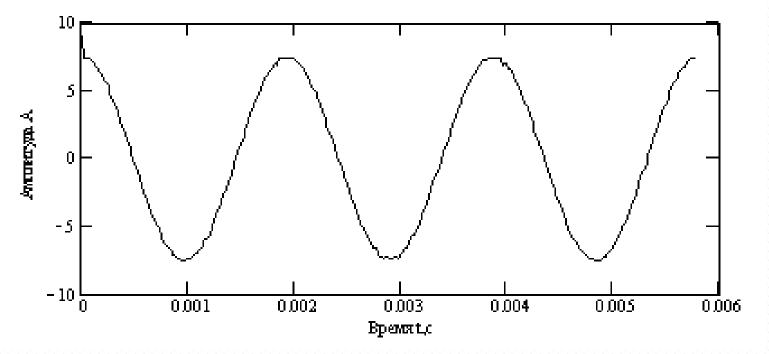


Корреляции

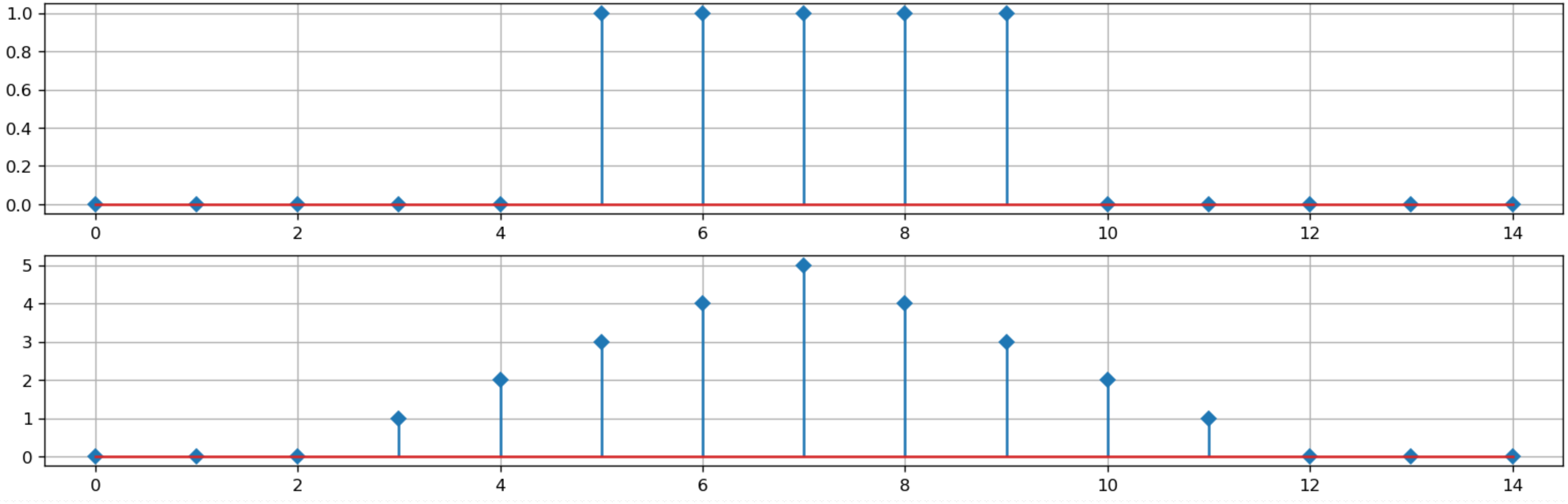
Исходный сигнал с шумами:



Автокорреляционная функция исходного сигнала:



АКФ прямоугольного импульса



Операции свертка и корреляция

Свертка (convolution)

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

где $h[n]$ – ядро свертки (kernel) или импульсная характеристика линейной системы.

Корреляция (correlation)

$$y[n] = x[n] * g[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n+k] \cdot g[k]$$

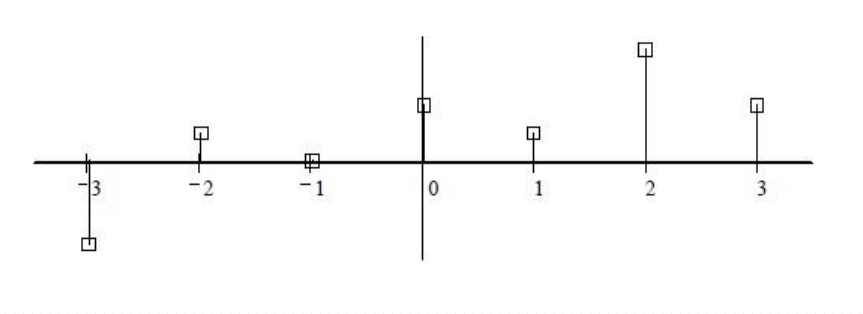
где $g[k]$ – искомый сигнал.

Эта формула совпадает с формулой свертки, если положить ядро свертки $h[k] = g[-k]$. Корреляцию можно вычислять как свертку, положив в качестве ядра свертки искомый сигнал, развернутый относительно нулевой точки.

Импульсная характеристика

Мы рассматриваем *дискретные линейные системы*, т.е. системы, работающие с *дискретными сигналами*.

На вход такой системы подается последовательность чисел $x[n]$ (*дискретный сигнал*), и на выходе получается последовательность чисел $y[n]$.



По оси абсцисс отложены дискретные моменты времени.

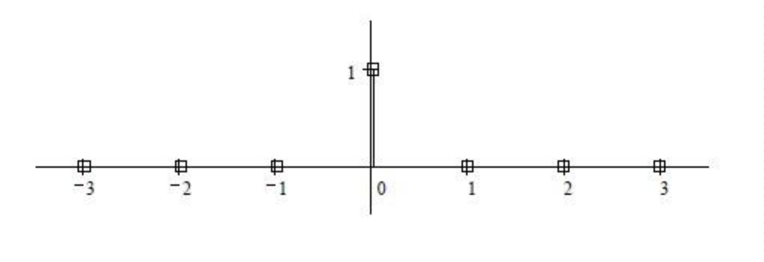
По оси ординат – амплитуды сигнала в эти моменты времени.

Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Цифровая дельта-функция (функция Кронекера) – это сигнал вида

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

т.е. короткий единичный импульс



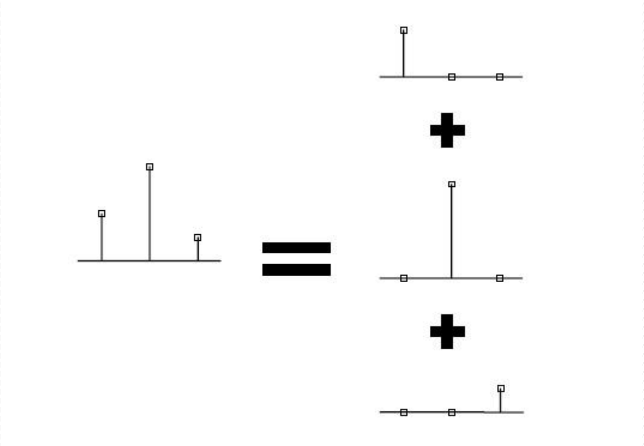
Цифровой единичный импульс

Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Любой дискретный сигнал можно разложить сумму функций, сдвинутых во времени. Например, бесконечный сигнал $x[n]$ можно представить в виде

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \cdot \delta[n-1].$$

Здесь дельта-функция – «базисные функции», а $x[i]$ – это их коэффициенты в линейной комбинации.

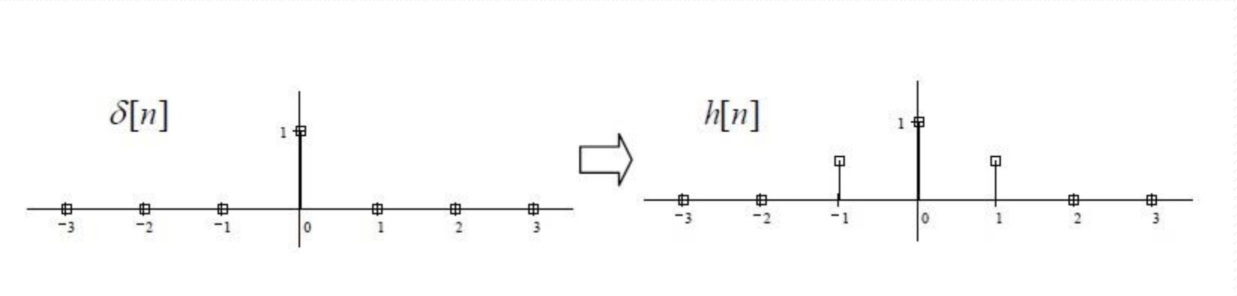


Представление сигнала в виде линейной комбинации сдвинутых во времени дельта-функций.

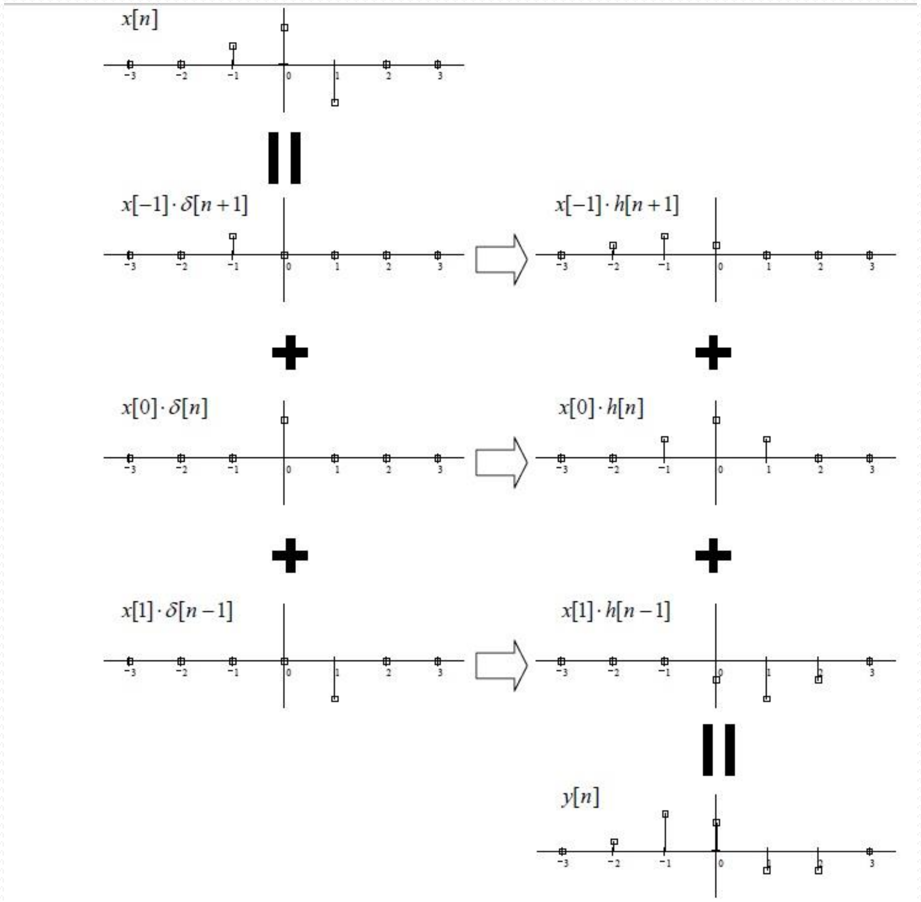
Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Исследуем отклик (выходной сигнал) линейной системы на цифровую дельта-функцию. Для этого подадим дельта-функцию в систему и измерим выходной сигнал.

Пусть выходной сигнал равен $h[n]$, т. е. $\delta[n] \longrightarrow h[n]$.



Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию



Зная $h[n]$ (отклик системы на дельта–функцию), можно вычислить отклик системы на любой входной сигнал.

Действительно, так как любой входной сигнал является линейной комбинацией сдвинутых во времени дельта-функций, то выходной сигнал будет той же самой линейной комбинацией сдвинутых во времени функций $h[n]$.

Результирующая формула для вычисления выходного сигнала $y[n]$ по входному сигналу $x[n]$ такова:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\cdot h[k]$$

Сигнал $h[n]$ называется ***импульсной характеристикой*** (*impulse response*) системы, т.к. он является откликом системы на единичный импульс (дельта-функцию).

Цифровая фильтрация

Линейная цифровая фильтрация определяется как:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k),$$

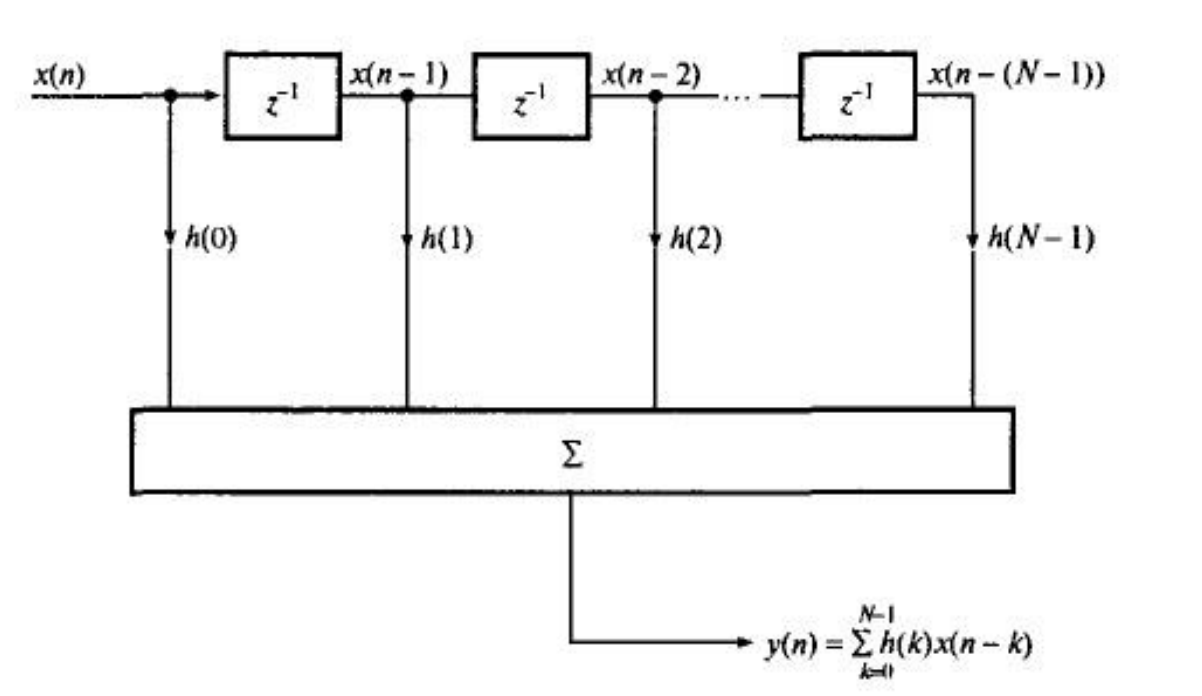
где *h(k), k=0,1,…,N-1* – коэффициенты фильтра,
x(k), y(k) – вход и выход фильтра.

Фильтрация – это свертка сигнала с импульсной характеристикой фильтра во временных координатах.

Цифровая фильтрация. Блок-схема фильтра

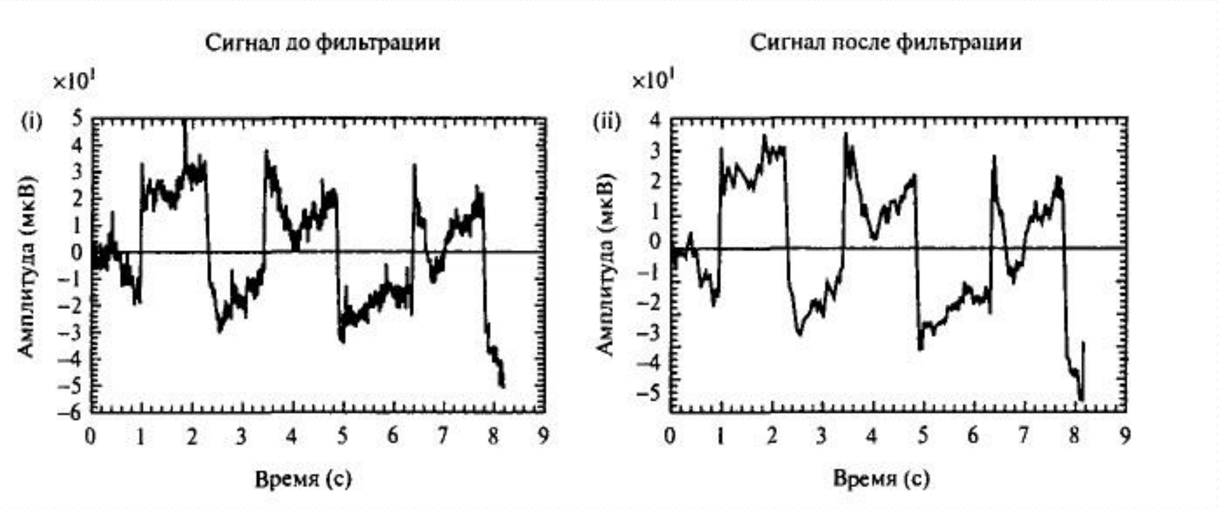
В таком виде данный фильтра известен как трансверсальный фильтр.

z^{-1} - задержка на один интервал дискретизации.



Цифровая фильтрация. Пример

Цифровая низкочастотная фильтрация биомедицинского сигнала с целью устранения шума.



Дискретные преобразования

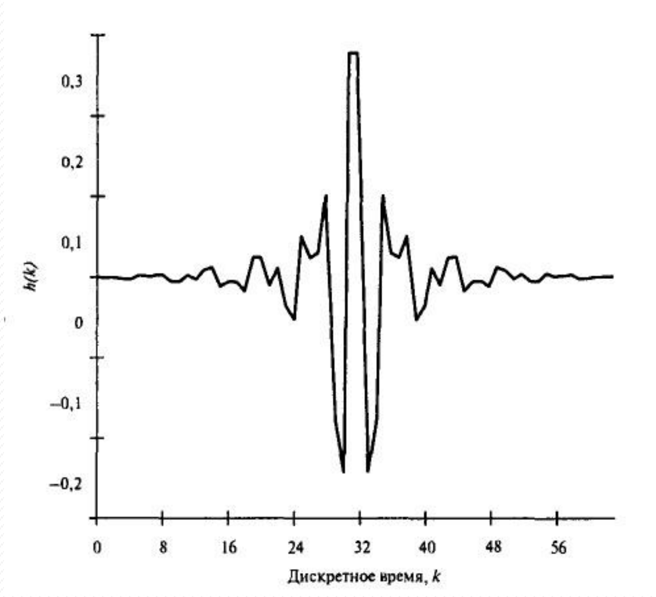
Дискретные преобразования позволяют описывать сигналы с дискретным временем в частотных координатах или переходить от описания во временной области к описанию в частотной области.

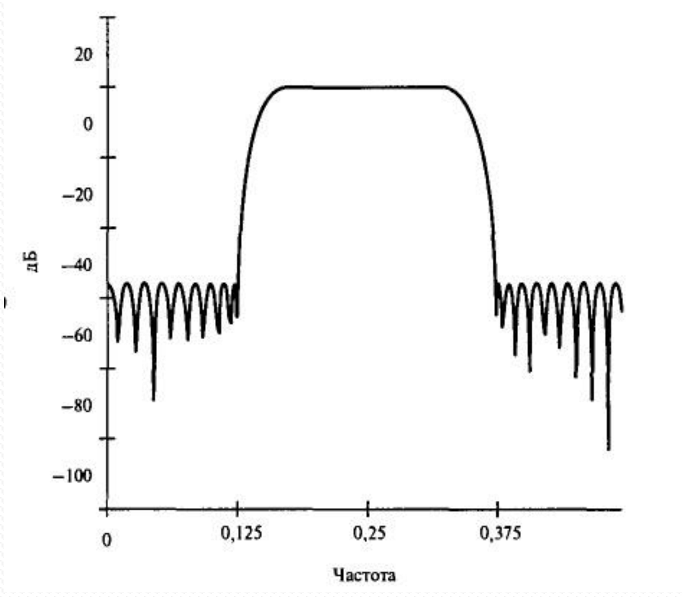
Для получения спектра сигнал раскладывается на частотные составляющие с помощью дискретного преобразования. Это часто используется при реализации операций фильтрации, свертки и корреляции.

Существует много дискретных преобразований, из которых самым распространенным является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое определяется следующим образом:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{kn}, \text{ где } W = \exp(-2\pi i/N)$$

Дискретные преобразования. Пример





Описание цифрового фильтра во временных и частотных координатах (импульсная характеристика и спектр фильтра). Спектр фильтра был получен с помощью ДПФ.

Модуляция

- это процесс изменения одного или нескольких параметров сигнала
- модулируемый сигнал называется "**несущим**" (на частоте этого сигнала передается модулируемое сообщение, как правило, *высокочастотный*)
- информационный сигнал называется **модулирующим** (как правило, *низкочастотный*).
- в процессе модуляции несущего сигнала спектр модулирующего сигнала переносится в область несущей частоты
- гармонические сигналы можно модулировать во времени по амплитуде, частоте и фазе
- обычно сигналы модулируются таким образом, чтобы их частотных характеристики совпадали с характеристиками средств передачи и/или хранения, для минимизации искажения сигнала, эффективного использования доступной ширины полосы и придания сигналам некоторых желаемых свойств
- область применения: связь и цифровые аудиосистемы

Модуляция

Модуляция - это процесс преобразования одного или нескольких информационных параметров несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями информационного сигнала.

В результате модуляции сигналы переносятся в область более высоких частот.

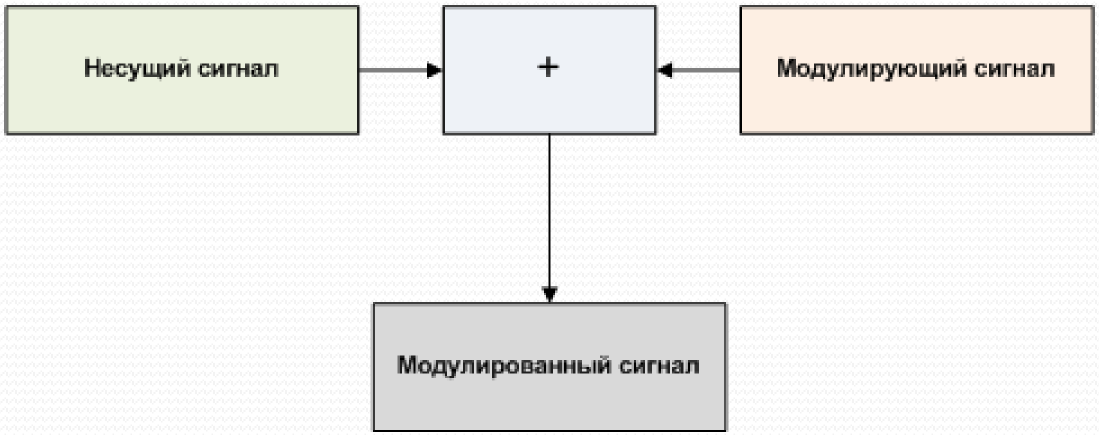
Использование модуляции позволяет:

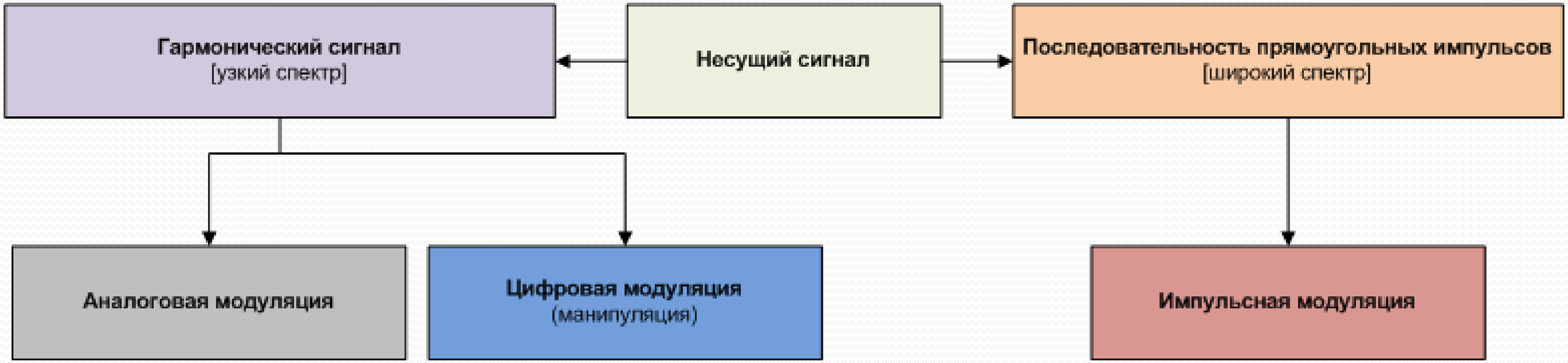
- согласовать параметры сигнала с параметрами линии;
- повысить помехоустойчивость сигналов;
- увеличить дальность передачи сигналов;
- организовать многоканальные системы передачи.

При модуляции на вход модулятора подаются сигналы:

- u(t) — *модулирующий*, данный сигнал является информационным и низкочастотным (его частоту обозначают W или F);
- S(t) — *модулируемый (несущий)*, данный сигнал является неинформационным и высокочастотным (его частота обозначается w_0 или f_0);
- Sм(t) — *модулированный сигнал*, данный сигнал является информационным и высокочастотным.

Модуляция


Несущий сигнал
+
Модулирующий сигнал
Модулированный сигнал


Гармонический сигнал
[узкий спектр]
Несущий сигнал
Последовательность прямоугольных импульсов
[широкий спектр]
Аналоговая модуляция
Цифровая модуляция
(манипуляция)
Импульсная модуляция

Модуляция

В качестве несущего сигнала может использоваться:

- гармоническое колебание, при этом модуляция называется *аналоговой* или *непрерывной*;
- периодическая последовательность импульсов, при этом модуляция называется *импульсной*;
- постоянный ток, при этом модуляция называется *шумоподобной*.

1. Виды аналоговой модуляции:

- *амплитудная модуляция (АМ),* происходит изменение амплитуды несущего колебания;
- *частотная модуляция (ЧМ),* происходит изменение частоты несущего колебания;
- *фазовая модуляция (ФМ),* происходит изменение фазы несущего колебания.

2. Виды импульсной модуляции:

- *амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)*, происходит изменение амплитуды импульсов несущего сигнала;
- *частотно-импульсная модуляция (ЧИМ)*, происходит изменение частоты следования импульсов несущего сигнала;
- *Фазо-импульсная модуляция (ФИМ)*, происходит изменение фазы импульсов несущего сигнала;
- *Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)*, происходит изменение длительности импульсов несущего сигнала.