Лабораторная работа 2

Формирование случайных чисел с заданным распределением

Случайные числа с заданным распределением, как правило, формируются в результате преобразования случайных р.р. чисел R из диапазона от 0 до 1. В настоящее время известно много процедур, позволяющих имитировать непрерывные и дискретные вероятностные распределения – метод обратных функций, метод исключения, метод композиции и т.д. Рассмотрим использование этих методов на практике.

1 Имитация равномерного распределения

Равномерное распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью распределения

$$f(x)=¿\left\{\frac{1}{b-a},\ \text{при } X\in[a,b],¿¿¿¿\right.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X определяется соотношениями

$$m_x=\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D_x=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Получим машинный алгоритм для имитации равномерного распределения, используя метод обратных функций:

$$1)\, f(x)\rightarrow F(x)=\frac{x-a}{b-a},\quad (x\in[a,b]);$$

$$2)\, \frac{X-a}{b-a}=R;$$

$$3)\, X=a+(b-a)R. \qquad (9)$$

Формула (9) представляет собой искомый машинный алгоритм.

2 Имитация гауссовского распределения

Гауссовское распределение является одним из наиболее распространенных непрерывных распределений. Гауссовская аппроксимация реального распределения используется обычно в следующих случаях:

1) когда реальное распределение обусловлено теми факторами, которые определяются центральной предельной теоремой теории вероятности;

2) когда реальное распределение известно, однако допускается его гауссовская аппроксимация с целью упрощения решаемой задачи;

3) когда реальное распределение неизвестно, однако нет каких-либо оснований отвергать его гауссовскую аппроксимацию.

Гауссовское распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}},$$

где m_x и σ_x - соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение гаусовского распределения.

Машинный алгоритм для имитации гауссовского распределения можно получить, базируясь на центральной предельной теореме. Эта теорема утверждает, что сумма независимых, случайных величин с произвольными распределениями имеет асимптотически гауссовское распределение. Сходимость к гауссовскому распределению осуществляется наиболее быстро, если суммируются величины с одинаковым распределением. В этом случае даже небольшое число слагаемых приводит к гауссовскому распределению.

В основе машинного алгоритма для имитации гауссовского распределения лежит суммирование случайных р.р. чисел R.

$$x=m_x+\sigma_x\sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}R_i-\frac{n}{2}\right).$$

С возрастанием n, т.е. числа суммируемых случайных р.р. чисел R, повышается точность имитации гауссовского распределения. Обычно n выбирают в пределах от 6 до 12. При этом достаточная для многих приложений точность обеспечивается при использовании всего шести случайных р.р. чисел R. Для случая, когда $n = 6$,

$$x=m_x+\sigma_x\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{6}R_i-3\right). \qquad (10)$$

Формула (10) представляет собой искомый машинный алгоритм, который наиболее часто используется на практике. С помощью этого алгоритма имитируется гауссовская случайная величина x с заданным статистическими параметрами m_x и σ_x.

3 Имитация экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью распределения

$$f(x) = ¿ \{ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x > 0, ¿¿¿¿$$

Где λ - параметр экспоненциального распределения.

Математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсия случайной величины X определяются соотношениями

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}, \quad D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Получим машинный алгоритм для имитации экспоненциального распределения, используя метод обратной функции:

$$1)\, f(x) \rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, (x \geq 0);$$

$$2)\, 1 - e^{-\lambda x} = R;$$

$$3)\, X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R)$$

или

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln R. \tag{11}$$

Формула (11) представляет собой искомый машинный алгоритм, где R - р.р. число.

4 Имитация гамма-распределения

Гамма-распределение непрерывной случайной величины x описывается плотностью распределения:

$$f(x) = ¿ \left\{ \frac{\lambda^{\eta}}{(\eta - 1)!} x^{\eta - 1} e^{-\lambda x}, x > 0; ¿¿¿¿ \right.$$

где η и λ - параметры гамма-распределения ($\eta > 0$, $\lambda > 0$)).

При η, принимающем целочисленные значения, гамма-распределение называется распределением Эрланга.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины x

определяются соотношениями

$$m_x = \frac{\eta}{\lambda}, \quad \text{и} \quad D_x = \frac{\eta}{\lambda^2}.$$

Гамма-распределение сводится к экспоненциальному распределению, если положить η =1. Случайная величина X может быть представлена в виде суммы независимых случайных величин x_i, имеющих экспоненциальное распределение:

$$X = \sum_{i=1}^{\eta} X_i .$$

Получим машинный алгоритм для имитации гамма-распределения:

$$X = \sum_{i=1}^{\eta} \left(-\frac{1}{\lambda} \ln R_i\right) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\eta} \ln R_i$$

или

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\prod_{i=1}^{\eta} R_i\right), \qquad (12)$$

Где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ случайные р. р. числа.

5 Имитация треугольного распределения

Треугольное распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностями распределения:

$$f(x) = ¿ \left\{ \frac{2(x-a)}{(b-a)^2}, \qquad \text{при } x \in [a,b]; ¿¿¿ \right. \qquad (13)$$

или

$$f(x) = ¿ \left\{ \frac{2(b-x)}{(b-a)^2}, \qquad \text{при } x \in [a,b]; ¿¿¿ \right. \qquad (14)$$

Для имитации треугольного распределения может быть использован метод исключения, предложенный И.Нейманом.

Машинный алгоритм для имитации треугольного распределения с плотностью (13):

1. Формируются пара случайных р. р. чисел R_1 и R_2.

2. Проверяется условие $R_1 < R_2$. Если условие выполняется, то искомое число

$$x = a + (b - a) R_1 .$$

В противном случае, пара чисел R_1 и R_2 отбрасывается и осуществляется переход к шагу 1.

Машинный алгоритм для имитации треугольного распределения с плотностью (15).

1. Формируются два случайных р. р. числа R_1 и R_2 .

2. Проверяется условие $R_2 < 1 - R_1$. Если условие выполняется, то находится искомое число $x = a + (b - a) R_1$.

В противном случае пара чисел R_1 и R_2 отбрасывается и осуществляется переход к шагу 1.

Приведенные алгоритмы имеют существенный недостаток: часть пар чисел R_1 и R_2 , приходится отбрасывать. Принимая во внимание независимость случайных р. р. чисел R_1 и R_2, можно предложить более экономичные алгоритмы, основанные на использовании следующих формул:

$$x = a + (b - a) \max(R_1, R_2), \qquad (15)$$

$$x = a + (b - a) \min(R_1, R_2), \qquad (16)$$

где

max(R_1, R_2) - взятие максимального числа из совокупности двух случайных р. р. чисел R_1 и R_2;

min(R_1, R_2) - взятие минимального числа на совокупности двух случайных р. р. чисел R_1 и R_2.

Формулы (15) и (16) представляют собой машинные алгоритмы для имитации треугольного распределения с плотностями соответственно (13) и (14).

6 Имитация распределения Симпсона

Распределение Симпсона непрерывной случайной величины X

описывается плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & \text{при } x \in [a, \frac{a+b}{2}]; \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \text{при } x \in [\frac{a+b}{2}, b]; \\ & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Распределение Симпсона имеет случайная величина X, которая представляет собой следующую сумму:

$$X = y + z, \qquad (17)$$

где y и z - независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$. Следовательно, распределение Симпсона можно рассматривать как композицию двух одинаковых законов равномерного распределения.

Машинный алгоритм для имитации распределения Симпсона базируется на применении формулы (18). Согласно этой формуле необходимо получить два случайных числа y и z, распределенные равномерно на интервале $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, и просуммировать их. Найденное таким образом число X будет иметь распределение Симпсона.