Разработка БИХ-фильтров

Перцев Дмитрий Юрьевич
доцент кафедры ЭВМ БГУИР

2022

Основные характеристики

Реальные цифровые БИХ-фильтры характеризуются следующим рекурсивным уравнением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k), \qquad (1)$$

где $h(k)$ – импульсная характеристика фильтра, длительность которой теоретически бесконечна, b_k и a_k – коэффициенты фильтра, $x(n)$ и $y(n)$ – вход и выход фильтра.

Передаточная функция БИХ-фильтра записывается следующим образом:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots a_M z^{-M}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}. \qquad (2)$$

БИХ-фильтры

- Импульсная характеристика БИХ-фильтров складывается из множества синусоид, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону.
- Порядок рекурсивных фильтров не превышает 12, что связано с проблемой устойчивости (на выходе фильтра могут возникнуть неконтролируемый рост сигнала или свободные колебания).
- Главное достоинство рекурсивных фильтров – удается избежать использования операции свертки, которая требует большого количества арифметических операций.
- Обычно проектируются по характеристике аналогового фильтра.

Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

Разработку БИХ-фильтров можно условно разбить на пять основных этапов.

1. Составление спецификации фильтра, в которой разработчик задает передаточную функцию фильтра (например, указывает, что требуется фильтр нижних частот) и желаемую производительность.

2. Аппроксимация или расчет коэффициентов, когда выбирается один из доступных методов и вычисляются значения коэффициентов b_k и a_k, передаточной функции $H(z)$, которая соответствует спецификациям, предложенным на этапе 1.

Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

3. Выбор подходящей фильтрующей структуры, в которую переводится передаточная функция. Обычно в БИХ-фильтрах используются параллельная структура и/или каскады блоков второго и/или первого порядка.

4. Анализ ошибок, которые могут появиться при представлении коэффициентов фильтра и выполнении арифметических операций, фигурирующих при фильтрации, с помощью конечного числа битов.

5. Реализация, которая включает построение аппаратного обеспечения и/или написание программного кода плюс выполнение собственно фильтрации.

Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

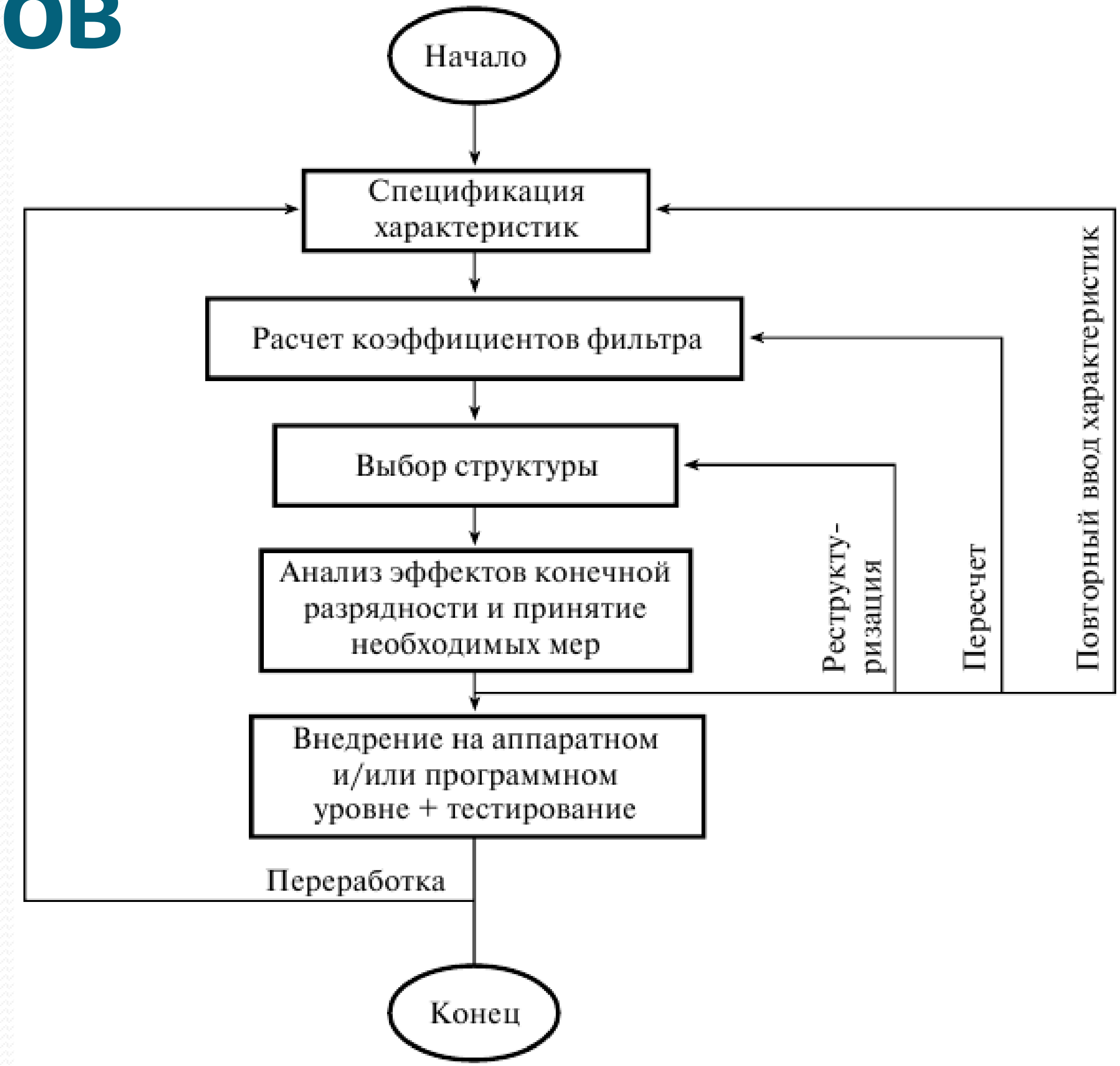


Рисунок 1 – Этапы разработки цифровых фильтров

Спецификация производительности

В спецификациях должны указываться 1) характеристики сигнала (тип источников и получателей данных, интерфейс ввода-вывода, скорости передачи данных и длины слов, а также частоты, представляющие практический интерес); 2) частотная характеристика фильтра (желаемые амплитудные и/или частотные характеристики плюс их допуски (если есть), скорость работы); 3) способ реализации (например, как компьютерная программа на языке высокого уровня или система на основе процессора ЦОС, здесь же выбирается процессор обработки сигналов и режим фильтрации (реальное или модельное время)); 4) другие условия разработки (такие как стоимость и разрешенное ухудшение сигнала при прохождении через фильтр).

Спецификация производительности

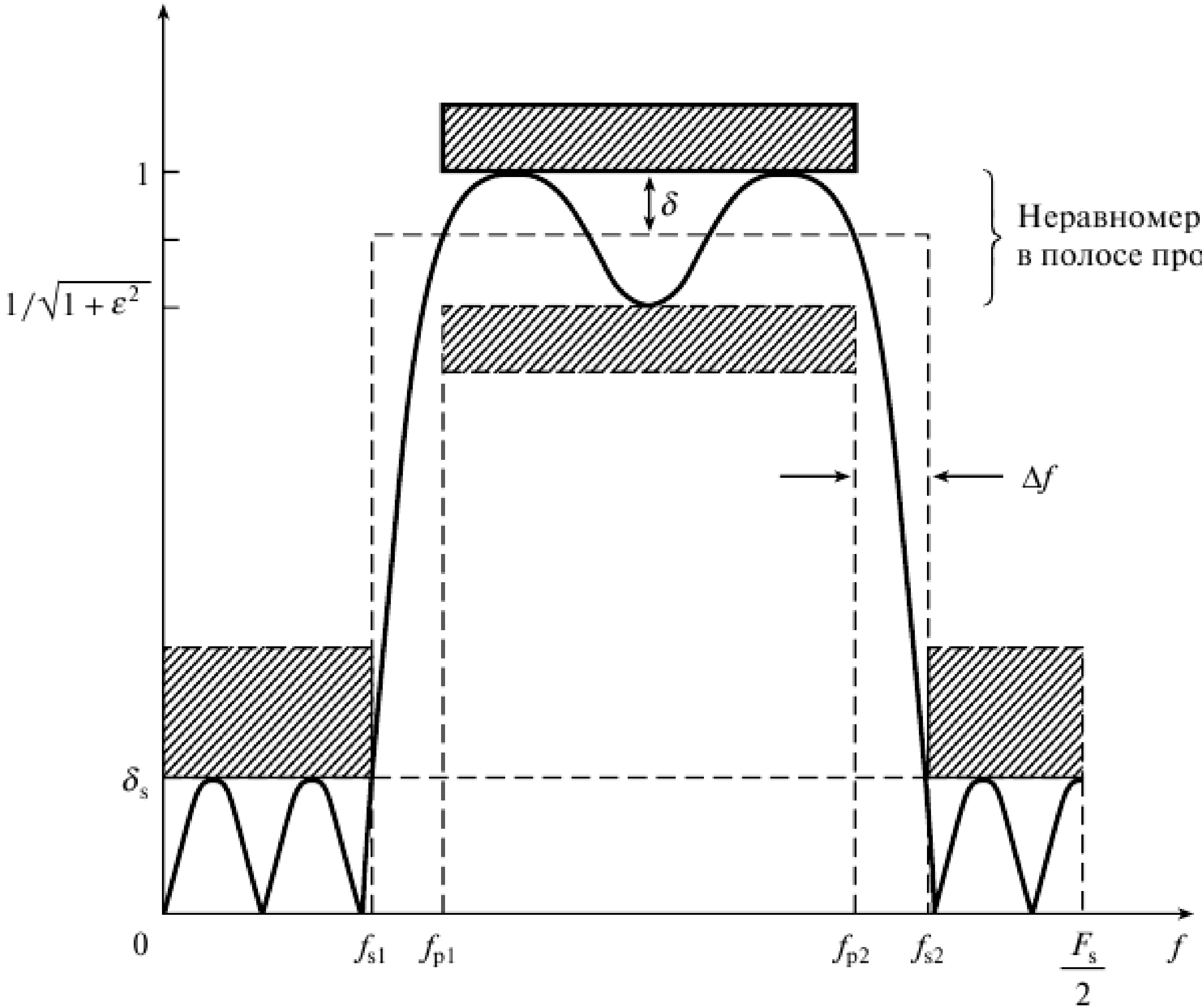


Рисунок 2 – Схема допусков для полосового БИХ-фильтра

Спецификация производительности

Для определения частотной характеристики обычно используются следующие параметры:

ε^2 – параметр неравномерности в полосе пропускания;

δ_p – амплитуда отклонений в полосе пропускания;

δ_s – амплитуда отклонений в полосе подавления;

f_{p1} и f_{p2} – граничные частоты полосы пропускания;

f_{s1} и f_{s2} – граничные частоты полосы подавления.

Граничные частоты часто приводятся в нормированной форме, т.е. как доли частоты дискретизации (f/F_s).

Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтров

На этом этапе вначале выбирается метод аппроксимации, который затем используется для расчета значений коэффициентов a_k и b_k в уравнении (2), при которых спецификации частотной характеристики, полученные на первом этапе разработки, будут удовлетворены.

Тремя наиболее распространенными методами конвертации аналоговых фильтров в эквивалентные цифровые являются метод инвариантного преобразования импульсной характеристики, согласованное z-преобразование и билинейное z-преобразование.

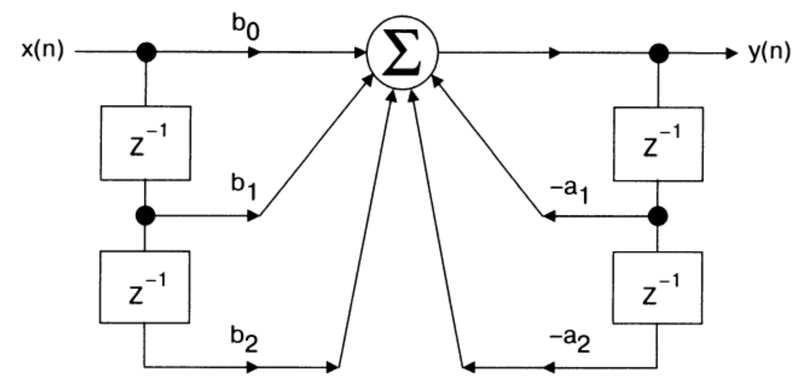
Что такое полюсы?

Преобразование Лапласа и z-преобразование позволяют описать импульсную характеристику фильтра с помощью набора синусоид и убывающих экспонент. Для этого требуется знать частотную характеристику в форме отношения двух многочленов.

Корни числителя передаточной функции называются *нулями*, а корни знаменателя – *полюсами*.

Полюсы и нули могут выражаться комплексными числами, поэтому говорят, что они «располагаются» на комплексной плоскости. Чем больше нулей и полюсов, тем выше качество системы.

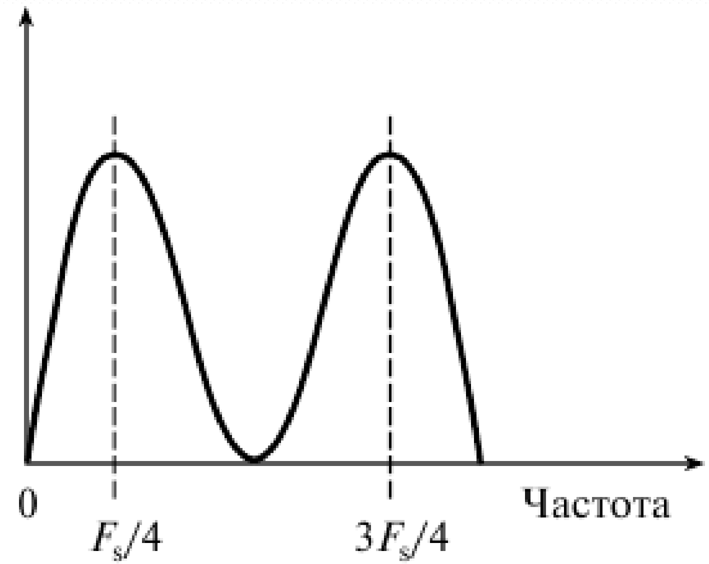
Можно использовать готовое ПО или табличный способ.



- $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$
- $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k)$
- $H(z) = \dfrac{1 + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \text{ (нули)}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \text{ (полюса)}}$

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

а)



б)

Рисунок 3 – Диаграмма нулей и полюсов простого фильтра (а); схематическое изображение частотной характеристики этого фильтра (б)

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

Требуется цифровой полосовой фильтр, удовлетворяющий следующим спецификациям:

1) полная режекция сигнала на 0 и 250 Гц;

2) узкая полоса пропускания, центрированная на 125 Гц;

3) ширина полосы пропускания по уровню 3 дБ равна 10 Гц.

Считая частоту дискретизации равной 500 Гц, определите передаточную функцию фильтра, подходящим образом расположив на комплексной плоскости полюса и нули, и запишите разностное уравнение.

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

Решение

Вначале нужно определить, где на комплексной плоскости поместить полюса и нули. Поскольку полная режекция требуется на 0 и 250 Гц, в соответствующих точках комплексной плоскости следует поместить нули. Эти точки лежат на единичной окружности в местах, соответствующих углам 0° и $360^\circ \times 250/500 = 180^\circ$.Чтобыполоса пропускания была центрирована на 125 Гц, требуется поместить полюс в точках $\pm 360^\circ \times 125/500 = \pm 90^\circ$. Чтобы коэффициенты были действительными, нужна пара комплексно-сопряженных полюсов.

Методы расчета БИХ-фильтров

- Метод инвариантности импульсной характеристики
  - Начинается с определения H(s) для аналогового фильтра
  - Взятие обратного преобразования Лапласа для получения импульсной характеристики
  - Получение z-преобразования H(z) из дискретной импульсной характеристики
  - z-преобразование выдает коэффициенты фильтра
  - Должен быть учтен эффект наложения спектров
- Метод билинейного преобразования
  - Другой метод для преобразования H(s) в H(z)
  - Характеристики определяются дифференциальным уравнением, описывающим аналоговую систему
  - Не важен эффект наложения спектра
- Метод согласованного z-преобразования
  - Отображает H(s) в H(z) для фильтров и с полюсами, и с нулями

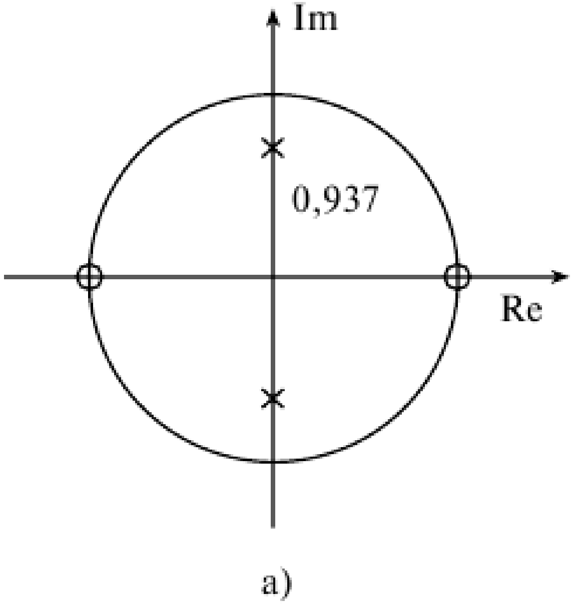
Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

Радиус r полюсов определяется желаемой шириной полосы. Для определения приблизительной ширины полосы (шп) при $r > 0{,}9$ используется следующее соотношение:

$$r \approx 1 - (\text{шп}/F_s)\pi. \qquad (18.5)$$

В данной задаче шп = 10Гц и F_s = 500 Гц, откуда
$r = 1 - (10/500)\pi = 0{,}937$. Получающаяся диаграмма нулей и полюсов изображена на рис. 18.4, а.

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов



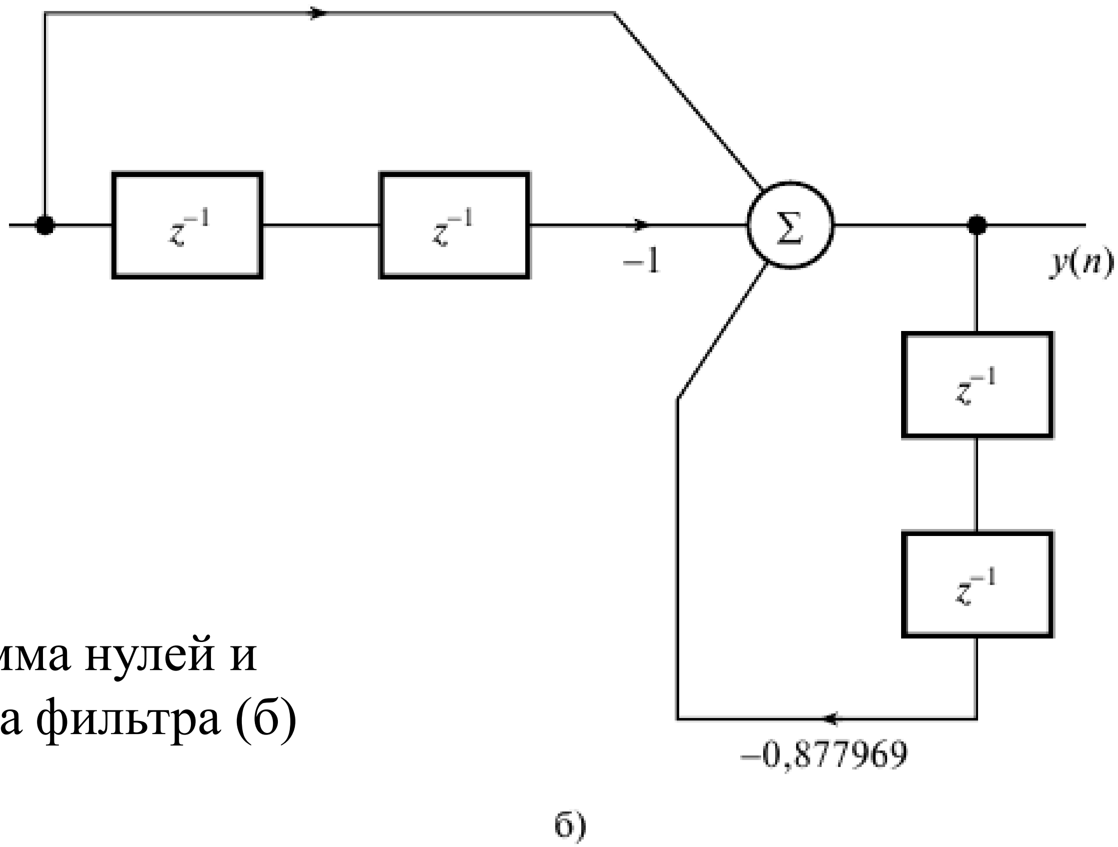


Рисунок 18.4 – Диаграмма нулей и полюсов (а). Блок-схема фильтра (б)

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

С помощью этой диаграммы записываем передаточную функцию:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z - re^{i\pi/2})(z - re^{-i\pi/2})} =$$

$$= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0,877969} = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0,877969 z^{-2}}.$$

Разностное уравнение:

$$y(n) = -0,877969 y(n-2) + x(n) - x(n-2).$$

Сравнивая передаточную функцию $H(z)$ с общим уравнением БИХ-фильтров (18.2), находим, что фильтр представляет собой блок второго порядка со следующими коэффициентами:

$$\begin{array}{ll} b_0 = 1 & a_1 = 0 \\ b_1 = 0 & a_2 = 0,877969 \\ b_2 = -1 & \end{array}$$

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

В данном методе с помощью преобразования Лапласа из подходящей аналоговой передаточной функции $H(s)$ получают импульсную характеристику $h(t)$.

Затем $h(t)$ дискретизуется, а получающаяся функция $h(nT)$ (где T – интервал дискретизации) подвергается z-преобразованию и дает желаемую передаточную функцию $H(z)$. Ниже данный метод иллюстрируется на примерах.

Иллюстрация метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. С помощью метода инвариантного преобразования импульсной характеристики оцифруйте простой аналоговый фильтр с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{C}{s-p}. \qquad (6)$$

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

Решение

Импульсная характеристика $h(t)$ находится через обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left(\frac{C}{s-p}\right) = Ce^{pt},$$

где L^{-1} обозначает обратное преобразование Лапласа. Согласно методу инвариантного преобразования импульсной характеристики импульсная характеристика эквивалентного цифрового фильтра $h(nT)$ равна $h(t)$ в дискретные моменты времени $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е.

$$h(nt) = h(t)\Big|_{t=nT} = Ce^{pnT}.$$

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

Передаточная функция $H(z)$ находится как результат действия z-преобразования на $h(nT)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} c e^{pnT} z^{-1} =$$

$$= \frac{c}{1 - e^{pT} z^{-1}}.$$

Значит, используя приведенный результат, можно записать:

$$\frac{C}{s-p} \rightarrow \frac{C}{1 - e^{pT} z^{-1}}. \qquad (7)$$

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

Чтобы применить метод инвариантного преобразования импульсной характеристики к БИХ-фильтрам высоких порядков (например, фильтрам M-го порядка) с простыми полюсами, передаточную функцию $H(s)$ вначале нужно разложить на простые дроби (такое разложение описывает цепь фильтров с единственным полюсом):

$$H(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{C_M}{s-p_M} = \sum_{K=1}^{M} \frac{C_K}{s-p_K}, \qquad (8)$$

где p_K – полюса функции $H(s)$. Каждый член в правой части уравнения (8) имеет вид, как в формуле (6), так что преобразование (8) правомерно.

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

Следовательно,

$$\sum_{K=1}^{M} \frac{C_K}{s-p_K} \to \sum_{K=1}^{M} \frac{C_K}{1-e^{p_K T} z^{-1}}. \tag{9}$$

БИХ-фильтры высоких порядков обычно реализуются как каскад или параллельная структура из стандартных фильтрующих блоков второго порядка. Следовательно, особый интерес представляет вариант $M = 2$. Здесь преобразование (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} \to \frac{C_1}{1-e^{p_1 T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1-e^{p_2 T} z^{-1}} &= \\ = \frac{C_1 + C_2 - (C_1 e^{p_2 T} + C_2 e^{p_1 T}) z^{-1}}{1 - (e^{p_1 T} + e^{p_2 T}) z^{-1} + e^{(p_1+p_2)T} z^{-2}}&. \end{aligned} \tag{10}$$

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

Если полюса p_1 и p_2 – комплексно-сопряженные, то C_1 и C_2 также будут комплексно-сопряженными, и уравнение (10) сводится к такому виду:

$$\frac{C_1}{1-e^{p_1T}z^{-1}}+\frac{C_1^*}{1-e^{p_1^*T}z^{-1}}= \\ =\frac{2C_{re}-[C_{re}\cos(p_{im}T)+C_{im}\sin(p_{im}T)]\,2e^{p_{re}T}z^{-1}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{2p_{re}T}z^{-2}}, \qquad (11)$$

где C_{re} и C_{im} – действительная и мнимая части C_1, p_{re} и p_{im} – действительная и мнимая части p_1, а $*$ обозначает “комплексно-сопряженное”.

Инвариантное преобразование импульсной характеристики

1. Определить нормированную характеристику аналогового фильтра $H(s)$, удовлетворяющую спецификациям желаемого частотного фильтра.

2. При необходимости разложить $H(s)$ на элементарные дроби, чтобы упростить следующий этап.

3. Применить z-преобразование к каждой дроби и получить выражение в форме (9).

4. Получить $H(z)$, сгруппировав результаты п. 3 в члены второго порядка и, возможно, один член первого порядка. Если используется реальная частота дискретизации, $H(z)$ нужно затем умножить на T.

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

Согласованное z-преобразование позволяет преобразовать аналоговый фильтр в эквивалентный цифровой. В данном методе каждый полюс и нуль аналогового фильтра непосредственно переводятся с s- на z-плоскость (комплексную плоскость):

$$(s-a) \rightarrow (1 - z^{-1}e^{aT}), \qquad (12)$$

где T – период дискретизации. Преобразование (12) отображает полюс (или нуль), находящийся в точке $s = a$ s-плоскости, в полюс (или нуль) комплексной плоскости, находящийся в точке $z = e^{aT}$.

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

Для аналоговых фильтров высоких порядков передаточная функция имеет несколько полюсов и/или нулей, которые нужно отобразить с *s*- на *z*-плоскость. Для аналогового фильтра наивысшего порядка с различными полюсами и нулями передаточную функцию можно записать в следующем виде

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_N)}, \qquad (13)$$

где z_k и p_k – нули и полюса $H(s)$ соответственно.

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

Далее на каждый множитель действуем согласованным *z*-преобразованием

$$(s - z_k) \to (1 - z^{-1} e^{z_k T}),$$

$$(s - p_k) \to (1 - z^{-1} e^{p_k T}).$$

В БИХ-фильтрах высокого порядка основной составляющей является фильтрующий блок второго порядка. Следовательно, особый интерес представляет случай, когда в уравнении (13) $M = N = 2$. При этом аналоговая передаточная функция сводится к виду

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}. \qquad (14)$$

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

Применяя к этой функции согласованное z-преобразование, получаем

$$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} \to \frac{1-(e^{z_1T}+e^{z_2T})z^{-1}+e^{(z_1+z_2)T}z^{-2}}{1-(e^{p_1T}+e^{p_2T})z^{-1}+e^{(p_1+p_2)T}z^{-2}}. \quad (15)$$

Если полюса и нули звена второго порядка формируют комплексно-сопряженные пары, тогда $p_2 = p_1{}^*$ и $z_2 = z_1{}^*$ и правая часть уравнения (15) сводится к виду

$$\frac{1-2e^{z_{re}T}\cos(z_{im}T)z^{-1}+e^{z_{re}T}z^{-2}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{p_{re}T}z^{-2}}, \quad (16)$$

где z_{re} и z_{im}, p_{re} и p_{im} – действительная и мнимая части z_1 и p_1 соответственно.

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

На практике аналоговые фильтрующие блоки второго порядка удобнее представить в знакомой форме рациональной дроби:

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2}.$$

В такой форме полюса и нули $H(s)$ определяются следующими выражениями:

$$p_{1,2} = -\frac{B_1}{2B_2} \pm \left[\left(\frac{B_1}{2B_2}\right)^2 - \frac{B_0}{B_2}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (17а)$$

$$z_{1,2} = -\frac{A_1}{2A_2} \pm \left[\left(\frac{A_1}{2A_2}\right)^2 - \frac{A_0}{A_2}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (17б)$$

Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

1. Определить подходящую аналоговую передаточную функцию $H(s)$, удовлетворяющую спецификациям искомого цифрового фильтра.
2. Найти положение полюсов и нулей $H(s)$. При этом может потребоваться факторизация аналоговой передаточной функции $H(s)$.
3. Отобразить полюса и нули с s- на z-плоскость, используя формулу (12). Для блоков второго порядка можно использовать формулы (15) и (16).
4. Объединить уравнения, записанные на z-плоскости, для получения передаточной функции $H(z)$.

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

В данном методе для преобразования характеристики аналогового фильтра $H(s)$ в характеристику эквивалентного цифрового фильтра применяется следующая замена:

$$s = k\frac{z-1}{z+1}, \quad k = 1 \text{ или } \frac{2}{T}. \tag{18a}$$

Приведенное выше преобразование отображает аналоговую передаточную функцию $H(s)$, записанную на s-плоскости, в дискретную передаточную функцию $H(z)$ комплексной плоскости, как показано на рис. 5.

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

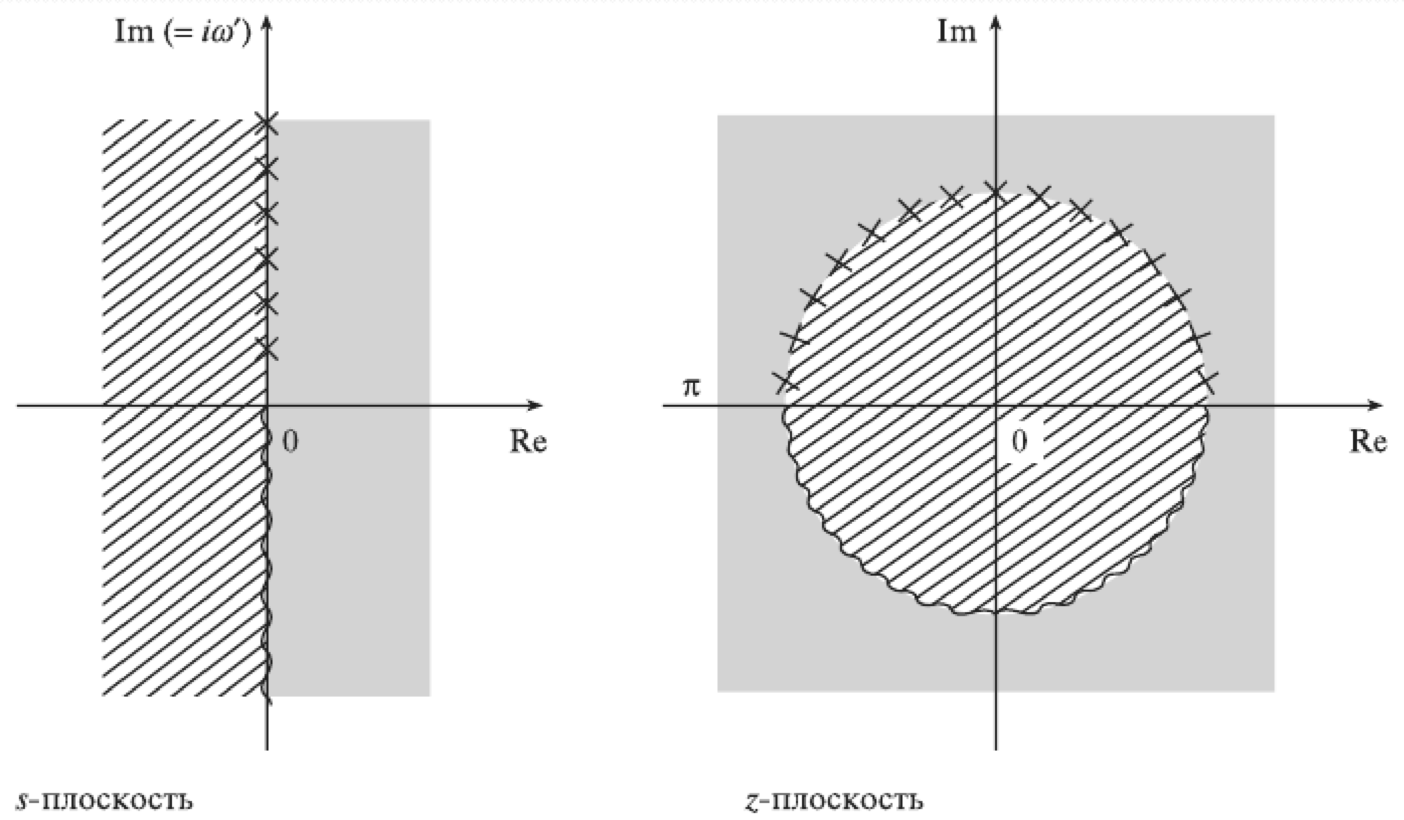


Рисунок 5 – Иллюстрация отображения с *s*-плоскости на комплексную (*z*) плоскость с использованием билинейного *z*-преобразования. Обратите внимание на то, что положительная часть оси *i*ω’ на *s*-плоскости (т.е. точки от $s = 0$ до $s = i\infty$) отображается в верхнюю половину единичной окружности, а отрицательная часть оси *i*ω’ переводится в нижнюю половину

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

Прямая замена s в H(s), как она записана в формуле (18а) может привести к получению цифрового фильтра с нежелательной характеристикой. Это легко показать, сделав в уравнении (18а) замену $z = e^{i\omega T}$ и $s = i\omega'$. Упрощая, находим, что аналоговая частота ω' и цифровая частота ω связаны соотношением

$$\omega' = k \,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right), \quad k = 1 \text{ или } \frac{2}{T}. \qquad (18б)$$

Зависимость (18б) схематически изображена на рис. 6. Видно, что связь аналоговой частоты ω' с цифровой частотой ω почти линейна при малых значениях ω, но становится нелинейной при больших значениях ω, что приводит к искажению (или деформации) цифровой частотной характеристики.

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

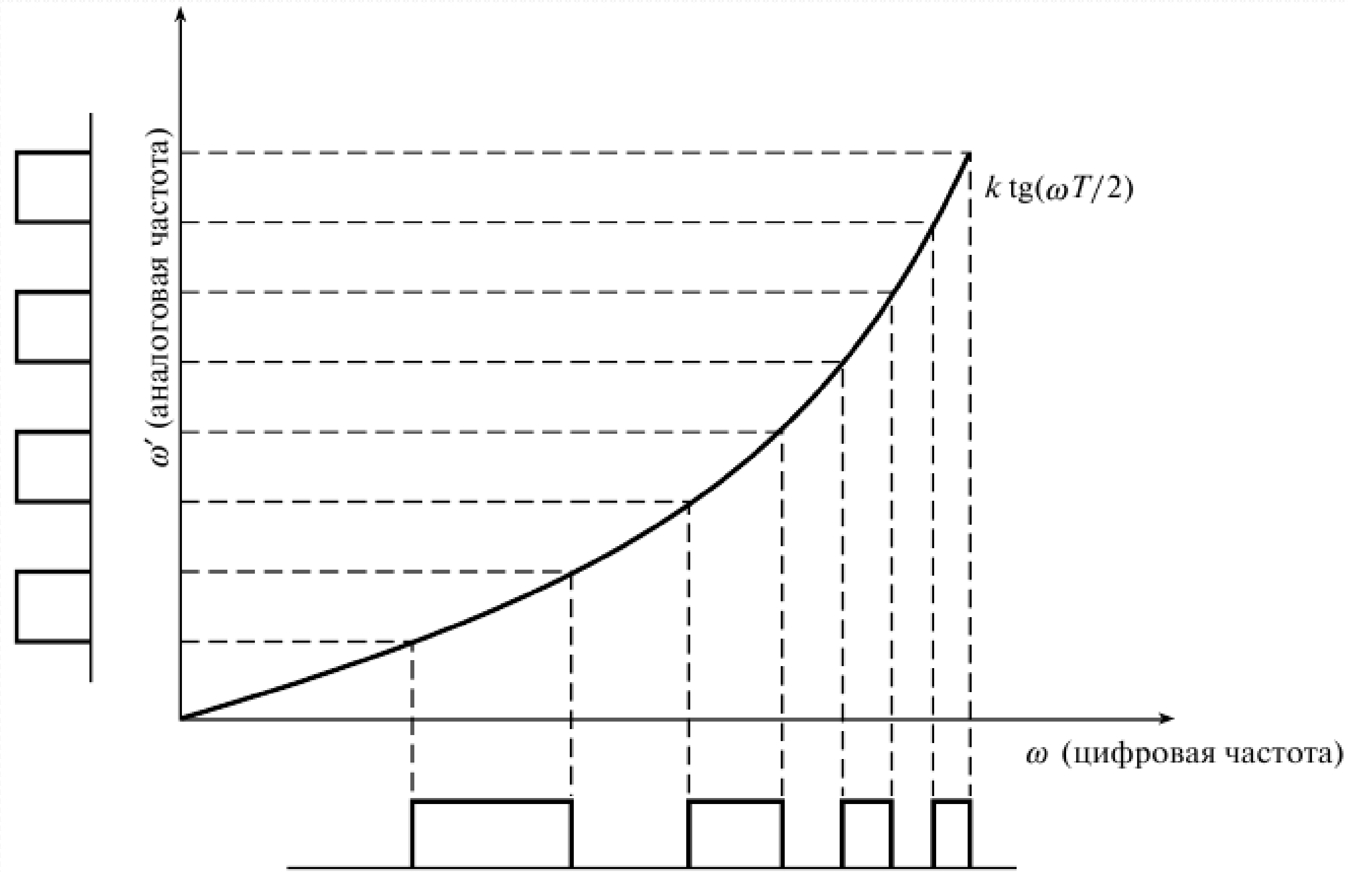


Рисунок 6 – Связь между аналоговыми и цифровыми частотами, демонстрирующая эффект деформации. Обратите внимание на то, что равноотстоящие аналоговые полосы после преобразования в цифровую область на высоких частотах сжимаются и располагаются плотнее

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

Для стандартных частотно-избирательных БИХ-фильтров можно следующим образом обобщить этапы использования билинейного z-преобразования.

1. На основе спецификаций цифрового фильтра определить подходящий нормированный аналоговый фильтр-прототип с передаточной функцией $H(s)$.

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

2. Определить и деформировать граничные или критичные частоты нужного фильтра. Для фильтров нижних или верхних частот существует единственная граничная частота, или частота среза (скажем, ω_p). Для полосовых и режекторных фильтров имеем верхнюю и нижнюю граничные частоты полосы пропускания ω_{p1} и ω_{p2},каждую из которых нужно деформировать (также могут задаваться граничные частоты полосы подавления):

$$\omega'_p = \mathrm{tg}\left(\frac{\omega_p T}{2}\right); \qquad (20а)$$

$$\omega'_{p1} = \mathrm{tg}\left(\frac{\omega_{p1} T}{2}\right); \quad \omega'_{p2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\omega_{p2} T}{2}\right). \qquad (20б)$$

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

3. Денормировать аналоговый фильтр-прототип, заменив s в передаточной функции с помощью одного из следующих преобразований (в зависимости от типа требуемого фильтра):

$$s = \frac{s}{\omega'_p} \quad \text{нижних частот в нижних частот,} \qquad (21а)$$

$$s = \frac{\omega'_p}{s} \quad \text{нижних частот в верхних частот,} \qquad (21б)$$

$$s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{W\, s} \quad \text{нижних частот в полосовой,} \qquad (21в)$$

$$s = \frac{W\, s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{нижних частот в режекторный.} \qquad (21г)$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \omega'_{p2}\omega'_{p1},\, W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}. \qquad (22)$$

Расчет коэффициентов с помощью билинейного z-преобразования

4. Применить билинейное z-преобразование и получить передаточную функцию нужного цифрового фильтра $H(z)$, следующим образом заменив s в масштабированной (т.е. денормированной) передаточной функции $H'(s)$:

$$s = \frac{z-1}{z+1}.$$