Класс несинусоидальных ортогональных функций

Перцев Дмитрий Юрьевич
доцент кафедры ЭВМ БГУИР

2023

Класс несинусоидальных ортогональных функций

ПЛАН

- Класс несинусоидальных ортогональных функций в задачах цифровой обработки сигналов и изображений.
- Системы функций Радемахера, Уолш, Хаара.
- Преобразование Уолша-Адамара, основные свойства.
- Алгоритм быстрого преобразования Уолша-Адамара.
- Преобразование Хаара.

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ УОЛША

Общеприняты следующие упорядочения (способы определения функций Уолша, 1923):

- упорядочение по частоте (по Уолшу с помощью функций Радемахера);
- упорядочение по Пэли (диадическое);
- упорядочение по Адамару,

где под частотой функции понимается число пересечений нулевого уровня в единицу времени.

ФУНКЦИИ РАДЕМАХЕРА

- Непрерывная функция Радемахера с индексом *m*, которая обозначается как *Rad*(*m*, *x*), имеет вид последовательности прямоугольных импульсов, содержит периодов на интервале [0; 1) и принимает значения +1 или –1.
- Исключением является *Rad*(0, *x*), которая имеет вид единичного импульса.
- Функции Радемахера периодические с периодом 1, т.е. *Rad*(*m*, *x*) = *Rad*(*m*, *x*+1).
- Функции Радемахера получаются из синусоидальных функций с помощью соотношения:

$$r_k(t) = sign[\sin(2^k \pi t)], 0 \le t < 1,$$

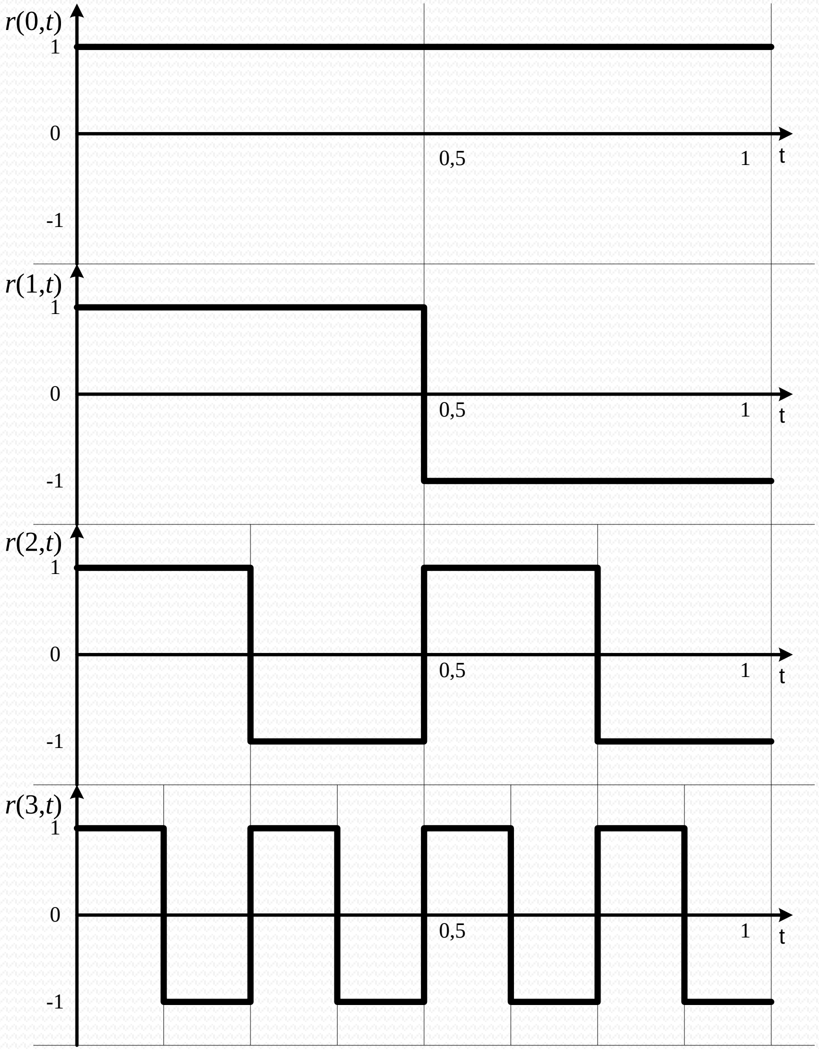
где аргумент *t* – безразмерное время, т.е. время, нормированное к произвольному интервалу T_0, а целое положительное число *k* – порядок функции.

ФУНКЦИИ РАДЕМАХЕРА

Обозначив для краткости $r(m, t) = r_m(t)$, для N=8 получим:

Если $r_1(t)$ = ++++−−−−
$r_2(t)$ = ++−−++−−
$r_3(t)$ = +−+−+−+−,

где “+” соответствует +1,
а “–” соответствует –1.



Функции Радемахера для N=8

ФУНКЦИИ РАДЕМАХЕРА

Функции Радемахера принимают одно из двух значений и имеют вид меандра. Функции Радемахера ортонормированы с единичной весовой функцией на интервале $0 \le t < 1$, т.к. для любых двух функций $r_m(t)$, $r_n(t)$ имеют место соотношения:

$$\int_0^1 r_m(t) r_n(t) dt = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ \mathrm{m} = \mathrm{n}, \\ 0 \ \text{при} \ \mathrm{m} \neq \mathrm{n}. \end{cases}$$

Все функции Радемахера являются нечетными относительно середины интервала определения и не могут быть использованы для аппроксимации сигналов, четных относительно этой точки. Иными словами, система функций Радемахера – неполная

ФУНКЦИИ УОЛША

В свою очередь функции Уолша можно представить следующим образом, используя функции Радемахера:

$Wal(0,t) =$ + + + + + + + +
$Wal(1,t) = r_1 =$ + + + + − − − −
$Wal(2,t) = r_1 r_2 =$ + + − − − − + +
$Wal(3,t) = r_2 =$ + + − − + + − −
$Wal(4,t) = r_2 r_3 =$ + − − + + − − +
$Wal(5,t) = r_1 r_2 r_3 =$ + − − + − + + −
$Wal(6,t) = r_1 r_3 =$ + − + − − + − +
$Wal(7,t) = r_3 =$ + − + − + − + −

Сопоставление этих функций с функциями Радемахера позволяет составить очевидные соотношения, согласно которым каждая функция Уолша $Wal(n,t)$ с номером n, входящая в систему из $N=2^r$ функций, является произведением степеней первых n функций Радемахера.

ФУНКЦИИ УОЛША

Принцип нахождения показателей этих степеней определяется двоичным представлением номера функции n. Примем следующие обозначения для разрядов, составляющих двоичное представление числа n: n_1 – первый разряд, n_2 – второй разряд, и так далее до n_r, то есть r-го разряда двоичного представления натурального числа n. При такой нумерации n_1 оказывается старшим разрядом числа n, а n_r – младшим. n_i может принимать одно из двух значений – нуль или единица. Будем считать, что $n_0 = 0$ по определению. Используя символ ⊕ для обозначения операции поразрядного сложения по модулю 2, способ построения функций Уолша можно выразить аналитически для любого $N = 2^r$ в виде следующего соотношения:

$$Wal(n,t) = \prod_{k=1}^{r} [r_k(t)]^{n_{r-k+1} \oplus n_{r-k}}.$$

ФУНКЦИИ УОЛША

Поясним применение данной формулы на примере шестой функции Уолша (n = 6), входящей в систему размером $N = 2^3 = 8$. Произведение состоит из трех множителей вида:

при k=1 $[r_1(t)]^{n_3 \oplus n_2}$,

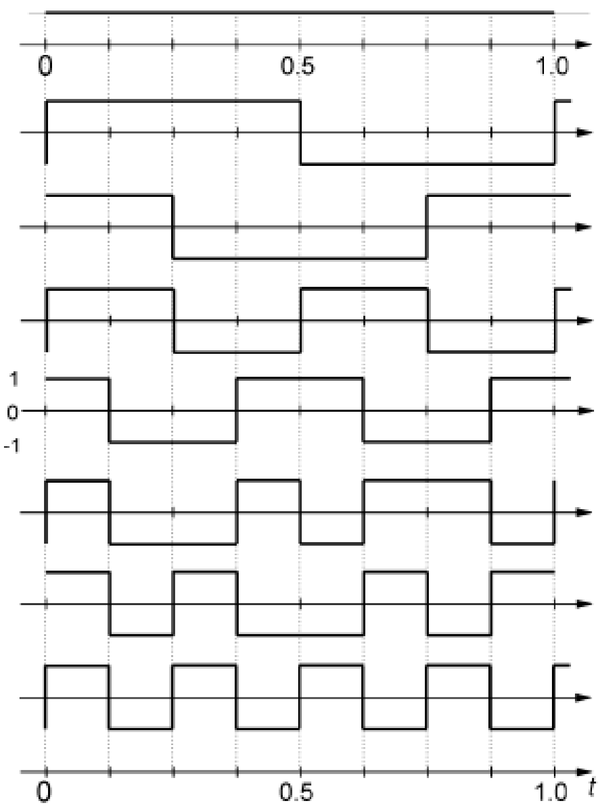
при k=2 $[r_2(t)]^{n_2 \oplus n_1}$,

при k=3 $[r_3(t)]^{n_1 \oplus n_0}$.

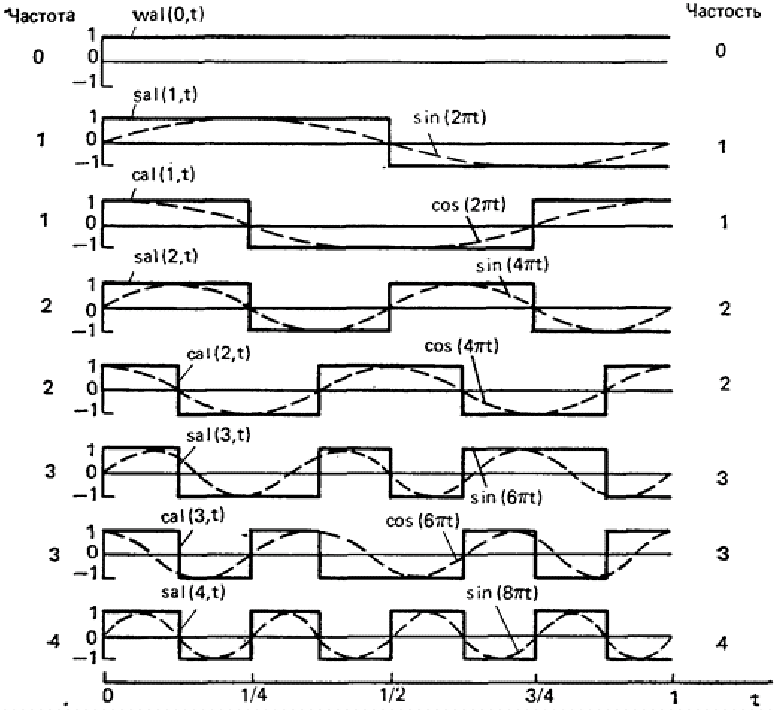
На основе двоичного представления числа n=6 несложно установить, что $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$. Таким образом, $n_3 \oplus n_2 = 0 \oplus 1 = 1$, $n_2 \oplus n_1 = 1 \oplus 1 = 0$, $n_1 \oplus n_0 = 1 \oplus 0 = 1$ и по формуле:

$$Wal(6,t) = r_1(t) r_2^0(t) r_3(t) = r_1(t) r_3(t)$$

ФУНКЦИИ УОЛША



Первые восемь функций Уолша



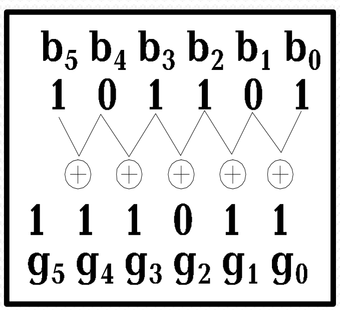
Если число перемен знака в секунду функции $f(t)$ равно η, то частотность определяется как η/2 или (η+1)/2 при η четном и нечетном соответственно.

КОД ГРЕЯ

Пусть $g_{n\text{-}1}g_{n\text{-}2}\ldots g_2g_1g_0$ – кодовое слово в n-разрядном двоичном коде Грея, соответствующее двоичному числу $b_{n\text{-}1}b_{n\text{-}2}\ldots b_2b_1b_0$. Тогда g_i может быть получена как

$$g_i=b_i \oplus b_{i+1},\ 0 \le \mathrm{i} \le n\text{-}2;$$
$$g_{n\text{-}1}=b_{n\text{-}1},$$

где $\oplus$ означает сложение по модулю два, которое определяется как



$0 \oplus 0=0;$
$1 \oplus 0=1;$
$0 \oplus 1=1;$
$1 \oplus 1=0.$

КОД ГРЕЯ

Десятичное число	Код Грея			Двоичный код		
	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	1	1	1	0
7	1	0	0	1	1	1

КОД ГРЕЯ

Преобразование кода Грея в двоичный код начинается с цифры самого левого разряда и движения вправо, принимая b_i=g_i, если число единиц, предшествующих g_i , четно и (черта обозначает инвертирование), если число единиц, предшествующих g_i , нечетно. При этом нулевое число единиц считается четным.

g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0
b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ УОЛША

1. Функции Уолша *ортонормированны* на интервале $0 \le t < 1$:

$$\int_0^1 Wal(k,t)Wal(i,t)dt = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ \mathrm{k} = i, \\ 0 \ \text{при} \ k \ne i. \end{cases}$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ УОЛША

2. Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, т.е. перемножение двух функций Уолша дает другую функцию Уолша, причем верно соотношение:

$$Wal(k,t)Wal(i,t) = Wal(k \oplus i, t)$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ УОЛША

3. Функции Уолша обладают свойством *симметрии*, проявляющимся в том, что все выводы относительно i справедливы также и относительно t. Например, свойство мультипликативности с учетом свойства симметрии запишется в виде

$$Wal(i,t_1)Wal(i,t_2) = Wal(i,t_1 \oplus t_2)$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ УОЛША

4. Умножение любой функции самой на себя дает функцию нулевого порядка $Wal(0,t)$, так как в результате получаются только произведения вида (+1)(+1) и (-1)(-1). Таким образом, получим

$$Wal(i,t)Wal(i,t) = Wal(0,t).$$

5. Умножение $Wal(i,t)$ на $Wal(0,t)$ не изменяет функцию $Wal(i,t)$.

УПОРЯДОЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

В ряде практических задач целесообразно пользоваться иными способами упорядочения. Часто применяются функции Уолша, упорядоченные по Адамару [$Had(h,t)$] и по Пэли [$Pal(p,t)$].

Независимо от упорядочения функции Уолша, составляющие систему из $N=2^r$ функций, всегда можно представить в виде произведения степеней первых r функций Радемахера. Принцип же нахождения показателей этих степеней индивидуален для каждого упорядочения.

При $N=2^n$ матрица Адамара может быть получена с помощью соотношения

$$H(n)=\begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix} \qquad H(0)=1$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ КРОНЕКЕРА

Произведение Кронекера — бинарная операция над матрицами произвольного размера, обозначается ⊗. Результатом является блочная матрица.

Если *A* — матрица размера *m*×*n*, *B* — матрица размера *p*×*q*, тогда произведение Кронекера есть блочная матрица размера *mp*×*nq*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

УПОРЯДОЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Нумерация функций Уолша

при различных способах упорядочения,

N=8

Wal(*n*,*t*)	*Had*(*h*,*t*)	*Pal*(*p*,*t*)
0	0	0
1	4	1
2	6	3
3	2	2
4	3	6
5	7	7
6	5	5
7	1	4

Сравнение таблиц показывает, что нумерация одних и тех же функций в упорядочении Адамара меняется в зависимости от размерности базиса.

Нумерация функций Уолша

при различных способах упорядочения, N=16

Wal(*n*,*t*)	*Had*(*h*,*t*)	*Pal*(*p*,*t*)
0	0	0
1	8	1
2	12	3
3	4	2
4	6	6
5	14	7
6	10	5
7	2	4
8	3	12
9	11	13
10	15	15
11	7	14
12	5	10
13	13	11
14	9	9
15	1	8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША–АДАМАРА

Является частным случаем обобщённого преобразования Фурье, в котором базисом выступает система функций Уолша.
Пара дискретных преобразований Уолша-Адамара

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i Wal(k,i), k = \overline{0..N-1}$$

$$x_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_k Wal(k,i),\ k = \overline{0..N-1}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША-АДАМАРА

$$H(n) = \begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix}$$

Матрица Адамара также может быть получена из ядра

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

с помощью кронекеровского произведения, т.е.

$$H(2) = H_1 \otimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА

Быстрое преобразование Уолша-Адамара можно получить с помощью разбиения матриц.

При N=8 в матричном виде преобразование Уолша можно записать как

$$C_x(3) = \frac{1}{8} H(3) X(3)$$

Используя соотношение

$$H(k) = \begin{bmatrix} H(k-1) & H(k-1) \\ H(k-1) & -H(k-1) \end{bmatrix}$$

H(3) можно выразить через H(2), что приводит к

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \\ C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} H(2) & H(2) \\ H(2) & -H(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА

Из разбиения матрицы следует, что

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad x_1(l) = x(l) + x(4+l); l = \overline{0,3}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix} \quad x_1(l) = x(l-4) - x(l); l = \overline{4,7}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА

Подставляя вместо $H(2) = \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix}$

получим

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(0) + x_1(2) \\ x_1(1) + x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(0) - x_1(2) \\ x_1(1) - x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(4) + x_1(6) \\ x_1(5) + x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(4) \\ x_2(5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(4) - x_1(6) \\ x_1(5) - x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix}$$

$$x_2(l) = x_1(l) + x_1(2+l); l = \overline{0,1}, \overline{4,5}$$

$$x_2(l) = x_1(l-2) - x_1(l); l = \overline{2,3}, \overline{6,7}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА

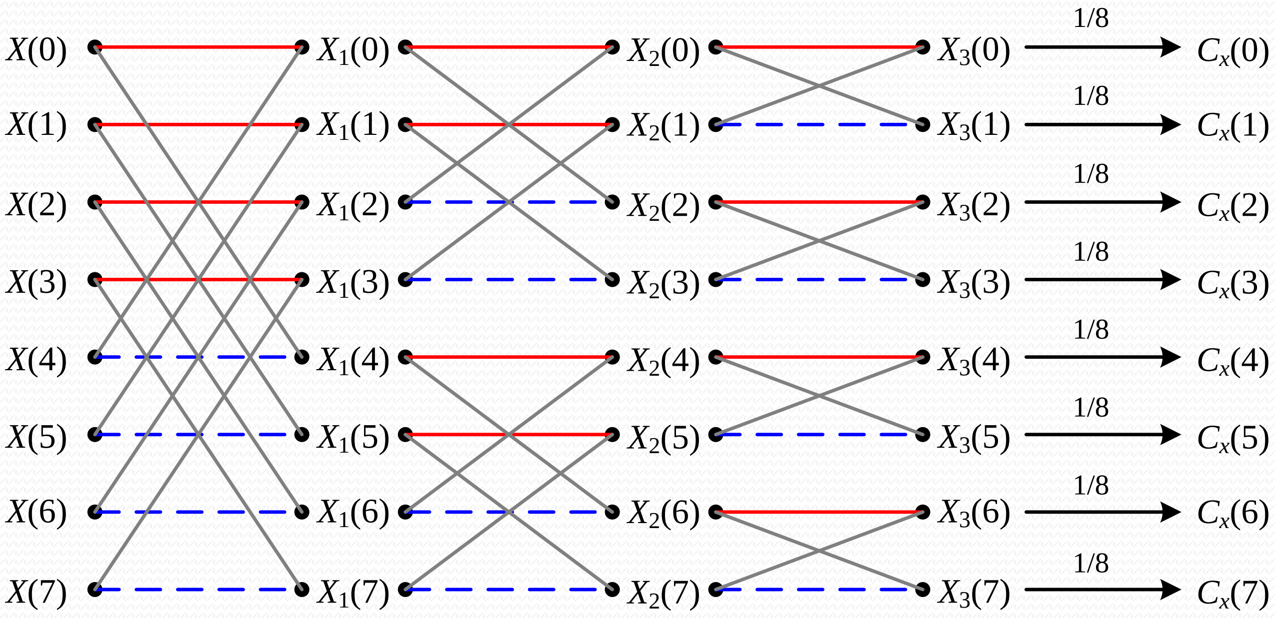
Так как

$$H(1)=\begin{bmatrix} H(0) & H(0) \\ H(0) & -H(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned}
8C_x(0) &= x_2(0)+x_2(1)=x_3(0);\\
8C_x(1) &= x_2(0)-x_2(1)=x_3(1);\\
8C_x(2) &= x_2(2)+x_2(3)=x_3(2);\\
8C_x(3) &= x_2(2)-x_2(3)=x_3(3);\\
8C_x(4) &= x_2(4)+x_2(5)=x_3(4);\\
8C_x(5) &= x_2(4)-x_2(5)=x_3(5);\\
8C_x(0) &= x_2(6)+x_2(7)=x_3(6);\\
8C_x(0) &= x_2(6)-x_2(7)=x_3(7).
\end{aligned}$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА



БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША -АДАМАРА

Для $N=2^n$:

1. Общее число итераций равно $n=log_2N$. Индекс r принимает значения $r=1, 2,..., n$.

2. В r итерации участвует 2^{r-1} групп по $N/2^{r-1}$ элементов. Половина элементов в каждой группе связана с операцией сложения, а другая половина – с операцией вычитания.

3. Общее число арифметических операций, необходимое для вычисления всех коэффициентов преобразования, равняется приблизительно $Nlog_2N$.

Ортогональные функции Хаара

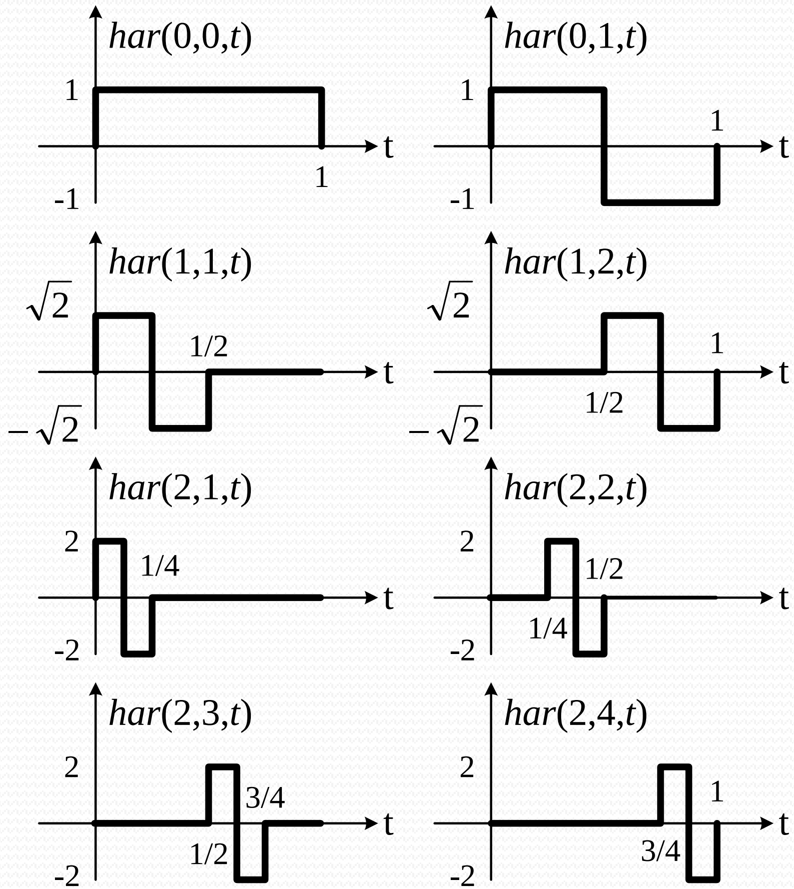
Множество функций Хаара *har*(*n*,*m*,*t*), образующих периодическую, ортонормированную и полную систему функций, было предложено в 1910 году. Рекуррентное соотношение, позволяющее получить *har*(*n*,*m*,*t*), имеет вид

$$har(0,0,t) = 1, \forall t \in [0,1);$$

$$har(r,m,t) = \begin{cases} 2^{r/2}, & \dfrac{m-1}{2^r} \le t < \dfrac{m-1/2}{2^r}, \\ -2^{r/2}, & \dfrac{m-1/2}{2^r} \le t < \dfrac{m}{2^r}, \\ 0, & \text{при остальных } t \in [0,1), \end{cases}$$

где $0 \le r < \log_2 N$, $1 \le m \le 2^r$.

Ортогональные функции Хаара



Функции Хаара для N=8

Коэффициенты преобразования Хаара

Коэффициенты преобразования Хаара $Y(k)$, $k = 0, \ldots, N\text{-}1$, соответствующие входной последовательности $\{X(m)\}$, получаются в результате преобразования:

$$Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} H^*(k)X(m), \;\; k = \overline{0, N-1}$$

где $H^*(n)$ – матрица Хаара размерностью $N \times N$.

$$H^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & & & & & & \\ & & 2 & -2 & & & & \\ & & & & 2 & -2 & & \\ & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}N/N \\ \}N/N \\ \left.\begin{matrix} \, \\ \, \end{matrix}\right\} N/4 \\ \left.\begin{matrix} \, \\ \, \\ \, \\ \, \end{matrix}\right\} N/2 \end{matrix}$$

Быстрое преобразование Хаара

В исходной матрице преобразования Хаара необходимо переупорядочить столбцы $H(3)$, пользуясь последовательно двоичной инверсией при N=8,4,2.

Шаг 1. Переставим столбцы $H^*(3)$ в соответствии с двоичной инверсией их номеров при N=8, т.е. $\{0,1,2,3,4,5,6,7\} \rightarrow \{0,4,2,6,1,5,3,7\}$, что приведет к

$$H^*(3)=\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}N/N \\ \}N/N \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\}N/4 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}N/2 \end{array}$$

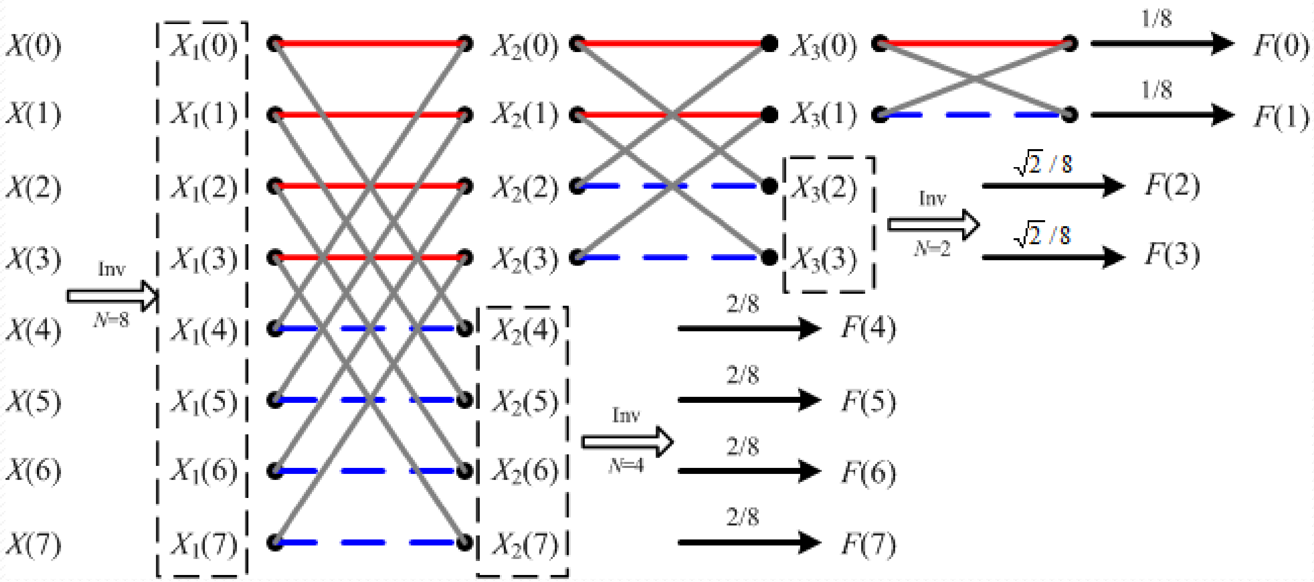
Быстрое преобразование Хаара

Шаг 2. Переставим столбцы (4×4) матриц, заключенных в квадраты в соответствии с двоичной инверсией номеров столбцов при N=4, т.е. $\{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,2,1,3\}$, что приведет к матрице

$$H^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Быстрое преобразование Хаара

Шаг 3. Переставим столбцы (2×2) матриц, заключенных в квадраты в соответствии с двоичной инверсией номеров столбцов при N=2, т.е. {0,1} → →{0,1}, что приводит к матрице, совпадающей с $H^*(3)$.



Быстрое обратное преобразование Хаара

Обратное преобразование Хаара осуществляется согласно выражения

$$X(m) = \sum_{m=0}^{N-1} H^*(k) Y(m), \quad k = \overline{0, N-1}$$

Быстрое обратное преобразование Хаара