Лабораторная работа №3
Преобразование Уолша

1. Цель работы

Изучение преобразования Уолша и его основных свойств, а также методики получения быстрого преобразования Уолша (БПУ).

2. Теоретические сведения

Особый класс систем ортогональных функций составляют системы кусочно-постоянных функций, таких как функции Уолша, Адамара и Хаара. Эти системы имеют большое практическое значение, особенно для цифровых систем, поскольку они характеризуются высокоэффективными алгоритмами быстрых преобразований.

В 1923 году американский ученый Уолш получил полную систему ортонормированных функций, которая дополняет систему функций Радемахера. Множество функций Уолша обычно разделяется на три группы, отличающиеся порядком расположения в системе.

Общеприняты следующие упорядочения (способы определения функций Уолша):

- упорядочение по частоте (по Уолшу с помощью функций Радемахера);
- упорядочение по Пэли (диадическое);
- упорядочение по Адамару, где под частотой функции понимается число пересечений нулевого уровня в единицу времени.

Рассмотрим способ, основанный на взаимосвязи функций Уолша с функциями Радемахера и способ, основанный на матрицах Адамара.

Функции Радемахера получаются из синусоидальных функций с помощью соотношения

$$r_k(t) = sign[\sin(2^k \pi\, t)], \quad 0 \le t < 1,$$

(3.1)

где аргумент t – безразмерное время, т.е. время, нормированное к произвольному интервалу T_0, а целое положительное число k – порядок функции. Символом sign (сигнум-функция) обозначается функция:

$$signx = \begin{cases} 1 \;\; при \;\; x > 0, \\ -1 \;\; при \;\; x \le 0. \end{cases}$$

(3.2)

Функции Радемахера принимают одно из двух значений ± 1 и имеют вид меандра.

Функции Радемахера ортонормированны с единичной весовой функцией на интервале $0 \le t < 1$, т.к. для любых двух функций $r_m(t)$, $r_n(t)$ имеют место соотношения:

$$\int_0^1 r_m(t) r_n(t) dt = \begin{cases} 1 \;\; при \;\; \mathrm{m} = \mathrm{n}, \\ 0 \;\; при \;\; \mathrm{m} \ne \mathrm{n}. \end{cases}$$

(3.3)

Все функции Радемахера являются нечетным и относительно середины интервала определения и не могут быть использованы для аппроксимации сигналов, четных относительно этой точки. Иными словами, система функций Радемахера – неполная. На рис. 3.1 приведены функции Радемахера для $N = 8$.

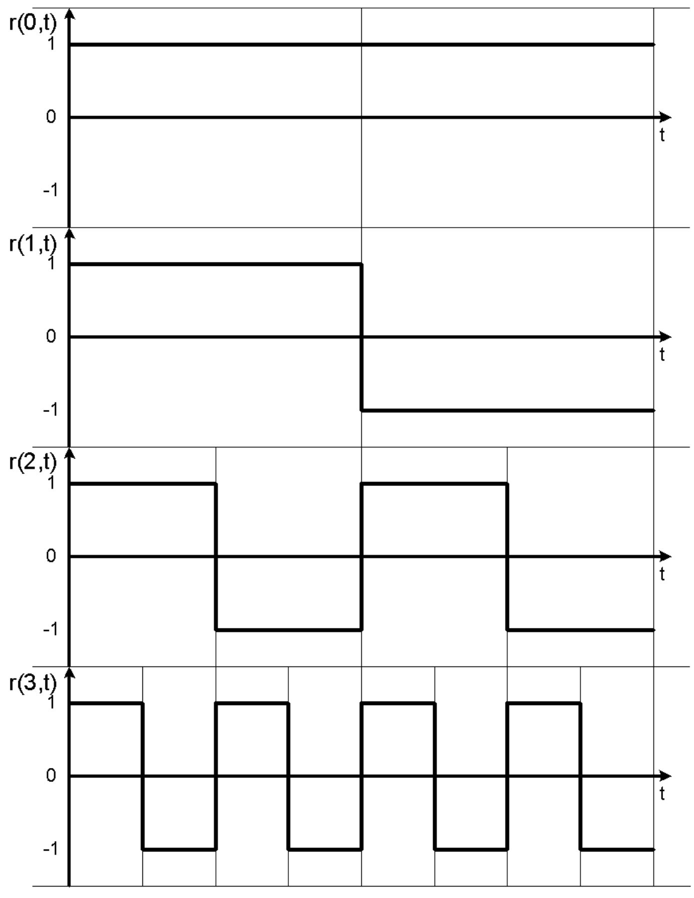

Рис. 3.1 Функции Радемахера для *N=8*

Обозначив для краткости $r(m,t)=r_m(t)$, для $N=8$ будем иметь:

Если $r_1(t) =$ $+ + + + - - - -$

$r_2(t) =$ $+ + - - + + - -$

$r_3(t) =$ $+ - + - + - + -$,

где “+” соответствует +1, а “–” соответствует –1.

Функции Уолша, образующие полную ортонормированную систему, можно сформировать, образуя произведения соответствующих функций Радемахера. Первые восемь функций Уолша представлены на рис. 3.2.

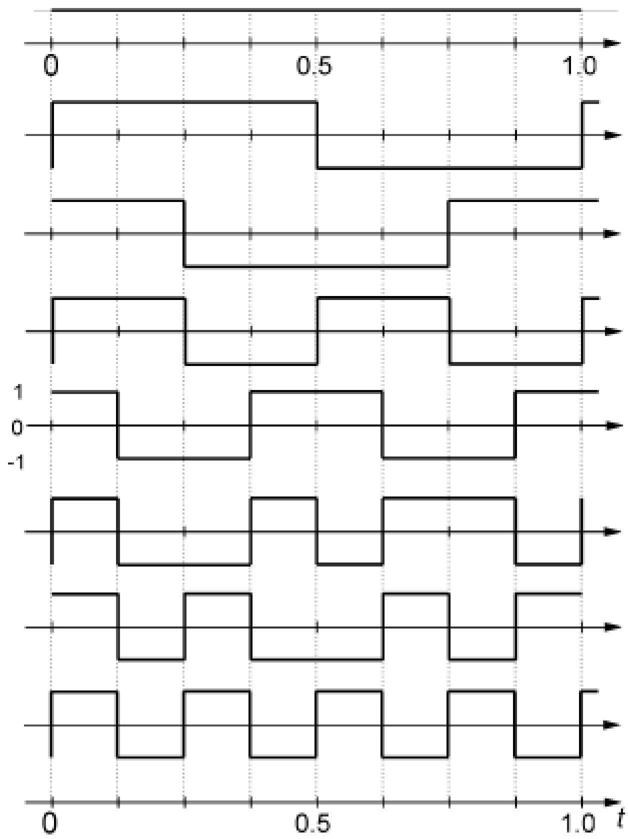

Рис. 3.2. Первые восемь функций Уолша

В свою очередь функции Уолша можно представить следующим образом:

wal(0,t)= ++++++++

wal(1,t)=r$_1$=++++−−−−

wal(2,t)=r$_1$r$_2$= ++−−−−++

wal(3,t)=r$_2$=++−−++−−

wal(4,t)=r$_2$r$_3$= +−−++−−+

wal(5,t)=r$_1$r$_2$r$_3$= +−−+−++−

wal(6,t)=r$_1$r$_3$= +−+−−+−+

wal(7,t)=r$_3$=+−+−+−+−

Сопоставление этих функций с функциями Радемахера позволяет составить очевидные соотношения, согласно которым каждая функция Уолша wal(n,t) с номером n , входящая в систему из $N = 2^r$ функций, является произведением степеней первых n функций Радемахера.

Принцип нахождения показателей этих степеней определяется двоичным представлением номера функции n. Примем следующие обозначения для разрядов, составляющих двоичное представление числа n: n_1 - первый разряд, n_2 - второй разряд, и так далее до n_r , то есть r-го разряда двоичного представления натурального числа n. При такой нумерации n_1 оказывается старшим разрядом числа n, а n_r - младшим. n_i может принимать одно из двух значений – нуль или единица. Будем считать, что $n_0 = 0$ по определению. Используя символ $\oplus$ для обозначения операции поразрядного сложения по модулю 2, способ построения функций Уолша можно выразить аналитически для любого $N = 2^r$ в виде следующего соотношения:

$$wal(n,t) = \prod_{k=}^{r} [r_k(t)]^{n_{r-k+1} \oplus n_{r-k}}$$

(3.4)

Поясним применение данной формулы на примере шестой функции Уолша (n=6), входящей в систему размером $N = 2^3 = 8$. Произведение состоит из трех множителей вида:

при k=1 $[r_1(t)]^{n_3 \oplus n_2}$,

при k=2 $[r_2(t)]^{n_2 \oplus n_1}$,

при k=3 $[r_3(t)]^{n_1 \oplus n_0}$.

На основе двоичного представления числа n=6 не сложно установить, что $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$.

Таким образом, $n_3 \oplus n_2 = 0 \oplus 1 = 1$, $n_2 \oplus n_1 = 1 \oplus 1 = 0$, $n_1 \oplus n_0 = 1 \oplus 0 = 1$ и по формуле:

$$wal(6,t) = r_1(t) r_2^0(t) r_3(t) = r_1(t) r_3(t)$$.

Функции Радемахера перемножаются при использовании кода Грея. В некоторых практических приложениях, например в аналого-цифровых преобразованиях, желательно использовать коды, у которых все следующие друг за другом кодовые слова различаются только одной цифрой в некотором разряде. Коды, обладающие таким свойством, называются циклическими.

Очень важным циклическим кодом является код Грея. Двоичное представление числа может быть легко преобразовано в код Грея с помощью полусумматоров.

Пусть $g_{n-1}g_{n-2}...g_2g_1g_0$ – кодовое слово в n-разрядном двоичном коде Грея, соответствующее двоичному числу $b_{n-1}b_{n-2}...b_2b_1b_0$. Тогда g_i может быть получена как

$g_i=b_i \oplus b_{i+1}$, $0 \le i \le n-2$;

$g_{n-1}=b_{n-1}$,

где $\oplus$ означает сложение по модулю два, которое определяется как

$0 \oplus 0=0$

1 ⊕ 0=1
0 ⊕ 1=1
1 ⊕ 1=0

Например, код Грея, соответствующий двоичному числу 101101, может быть образован как на рис. 3.3. Трехразрядный код Грэя показан в табл. 3.1.

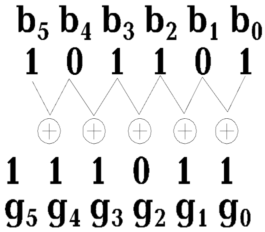

Рис. 3.3. Преобразование двоичного кода в код Грея

Таблица 3.1

Трехразрядный код Грэя

Десятичное число	**Код Грея**			**Двоичный код**		
	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	1	1	1	0
7	1	0	0	1	1	1

Преобразование кода Грея в двоичный код начинается с цифры самого левого разряда и движения вправо, принимая $b_i=g_i$, если число единиц, предшествующих g_i , четно и $b_i = \overline{g}_i$ (черта обозначает инвертирование), если число единиц, предшествующих g_i , нечетно. При этом нулевое число единиц считается четным. Пример двоичного числа, соответствующее коду Грея 1001011, показан на рис. 3.4.

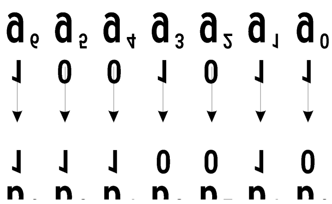

Рис. 3.4. Преобразование кода Грея в двоичный код

Приведем некоторые ***свойства функций Уолша***.

1. Функции Уолша *ортонормированны* на интервале $0 \le t \le 1$:

$$\int_0^1 wal(k,t)wal(i,t)dt = \begin{cases} 1 \ \ при \ \ \mathrm{k} = i, \\ 0 \ \ при \ \ k \neq i. \end{cases}$$

2. Функции Уолша обладают свойством *мультипликативности*, т.е. перемножение двух функций Уолша дает другую функцию Уолша, причем верно соотношение:

$$wal(k,t)wal(i,t) = wal(k \oplus i,t) .$$

3. Функции Уолша обладают свойством *симметрии*, проявляющимся в том, что все выводы относительно *i* справедливы также и относительно t. Например, свойство мультипликативности с учетом свойства симметрии запишется в виде

$$wal(i,t_1)wal(i,t_2) = wal(i,t_1 \oplus t_2) .$$

4. Умножение любой функции самой на себя дает функцию нулевого порядка $wal(0,t)$, так как в результате получаются только произведения вида (+1)(+1) и (-1)(-1). Таким образом,

$$wal(i,t)wal(i,t) = wal(0,t) .$$

5. Очевидно также, что умножение $wal(i,t)$ на $wal(0,t)$ не изменяет функцию $wal(i,t)$.

Способ нумерации функций в системе называется упорядочением. Функции Уолша, сформированные в соответствии с выражением (3.4), упорядочены по Уолшу.

В ряде практических задач целесообразно пользоваться иными способами упорядочения. Часто применяются функции Уолша, упорядоченные по Адамару [had(h,t)] и по Пэли [pal(p,t)].

Независимо от упорядочения функции Уолша, составляющие систему из $N = 2^r$ функций, всегда можно представить в виде произведения степеней первых r функций Радемахера. Принцип же нахождения показателей этих степеней индивидуален для каждого упорядочения.

Остановимся на упорядочении по Адамару. При $N=2^n$ матрица Адамара может быть получена с помощью соотношения

$$H(n) = \begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix};$$

$$H(0) = 1 .$$

Матрица Адамара также может быть получена из ядра $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ с помощью кронекеровского произведения, т.е.

$$H(2) = H_1 \otimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее (табл. 3.2, 3.3) приводятся нумерация функций Уолша в базисе из 16 функций при различных способах упорядочения и нумерация для базиса из 8 функций. Сравнение таблиц показывает, что нумерация одних и тех же функций в упорядочении Адамара меняется в зависимости от размерности базиса.

Таблица 3.2

Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочения, N=16

wal(n,t)	had(h,t)	pal(p,t)
0	0	0
1	8	1
2	12	3
3	4	2
4	6	6
5	14	7
6	10	5
7	2	4
8	3	12
9	11	13
10	15	15
11	7	14
12	5	10
13	13	11
14	9	9
15	1	8

Таблица 3.3

Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочения, N=8

wal(n,t)	had(h,t)	pal(p,t)
0	0	0
1	4	1
2	6	3
3	2	2
4	3	6
5	7	7
6	5	5
7	1	4

Быстрое преобразование Уолша можно получить с помощью технологии разбиения матриц. Графическая схема алгоритма показана на рис. 3.5. Рассмотрим вывод алгоритма для *N=8*. При *N=8* в матричном виде преобразование Уолша можно записать как

$$C_x(3) = \frac{1}{8} H(3) X(3).$$

Используя соотношение $H(k) = \begin{bmatrix} H(k-1) & H(k-1) \\ H(k-1) & -H(k-1) \end{bmatrix}$, *H(3)* можно выразить через *H(2)*, что приводит к

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \\ C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} H(2) & H(2) \\ H(2) & -H(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

Из разбиения матрицы следует, что

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix},$$

где $x_1(l) = x(l) + x(4+l); l = \overline{0,3}$;

$x_1(l) = x(l-4) - x(l); l = \overline{4,7}$.

Подставляя вместо $H_2 = \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix}$, будем иметь

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(0) + x_1(2) \\ x_1(1) + x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(0) - x_1(2) \\ x_1(1) - x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(4) + x_1(6) \\ x_1(5) + x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(4) \\ x_2(5) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_1(4) - x_1(6) \\ x_1(5) - x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(1) \begin{bmatrix} x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix}.$$

Так как $H(1) = \begin{bmatrix} H(0) & H(0) \\ H(0) & -H(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, то окончательно получим

$$8C_x(0) = x_2(0) + x_2(1) = x_3(0);$$
$$8C_x(1) = x_2(0) - x_2(1) = x_3(1);$$
$$8C_x(2) = x_2(2) + x_2(3) = x_3(2);$$
$$8C_x(3) = x_2(2) - x_2(3) = x_3(3);$$
$$8C_x(4) = x_2(4) + x_2(5) = x_3(4);$$
$$8C_x(5) = x_2(4) - x_2(5) = x_3(5);$$
$$8C_x(0) = x_2(6) + x_2(7) = x_3(6);$$
$$8C_x(0) = x_2(6) - x_2(7) = x_3(7).$$

Для $N=2^n$:

1. Общее число итераций равно $n=log_2N$. Индекс r принимает значения $r=1,2,\dots, n$.

2. В r итерации участвует 2^{r-1} групп по $N/2^{r-1}$ элементов. Половина элементов в каждой группе связана с операцией сложения, а другая половина – с операцией вычитания.

3. Общее число арифметических операций, необходимое для вычисления всех коэффициентов преобразования, равняется приблизительно $Nlog_2N$.

На рис. 3.5 приведена граф-схема процедуры быстрого алгоритма Уолша.

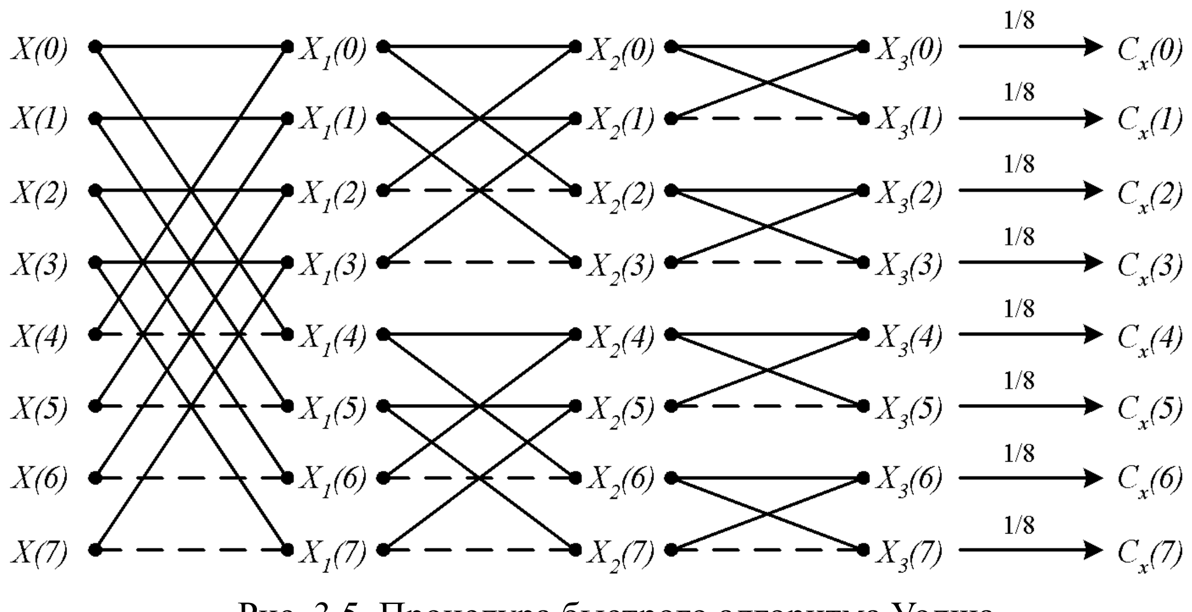

Рис. 3.5. Процедура быстрого алгоритма Уолша

3. Задание

1. Ознакомьтесь с теоретической частью.
2. Реализовать БПУ. Исходные данные для БПУ аналогичный ЛР№1.
3. Пояснить результаты работы программы.
4. Напишите отчет.

Содержание отчета:

- исходные данные;
- краткое описание алгоритма работы программы;
- заданная функция, результаты БПУ;
- анализ и пояснение полученных результатов;
- выводы.

ОСНОВНОЕ ПРИ ЗАЩИТЕ ЛР – понимание того, «что такое» класс несинусоидальных ортогональных функций (функции Радемахера, Уолша, Адамара) и того, как они формируются?

4. Контрольные вопросы

1. Для чего используются ортогональные преобразования?
2. Доказать, что базис Уолша является ортогональным.
3. Дать определение преобразованию Уолша.
4. Каковы основные свойства преобразования Уолша?
5. Каким образом осуществляется быстрое преобразование Уолша?
6. В чем заключается преимущество быстрого преобразования Уолша?