BÀI TOÁN VẬN TẢI

CHƯƠNG 3

Khoa Toán - Thống Kê

BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

NỘI DUNG BÀI TOÁN VẬN TẢI

Giả sử cần vận chuyển một loại hàng hóa (xi măng, sắt thép, ...) từ m điểm cung cấp (trạm phát), ký hiệu là $A_1, A_2, ..., A_m$ đến n điểm tiêu thụ (trạm thu), ký hiệu là $B_1, B_2, ..., B_n$, biết rằng

(1) Số lượng hàng có ở các trạm phát $A_1, A_2, ..., A_m$ lần lượt là $a_1, a_2, ..., a_m$

(2) Số lượng hàng cần ở các trạm thu $B_1, B_2, ..., B_n$ lần lượt là $b_1, b_2, ..., b_n$.

(3) Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j là c_{ij}.

Hãy lập kế hoạch vận tải hàng hóa sao cho tổng chi phí vận tải thấp nhất và thỏa mãn yêu cầu thu – phát.

BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Đặt x_{ij} là số lượng hàng cần vận chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j.

Ta có tổng chi phí vận tải: $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$

(1) Trạm phát, phát hết hàng: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$

(2) Trạm thu, thu đủ hàng: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$

(3) Yêu cầu trạm phát, trạm thu được thỏa $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (đk cân bằng thu – phát).

BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

Vậy, mô hình toán của bài toán vận tải (BTVT) dạng tổng quát như sau:

Tìm $\{x_{ij}\}$ sao cho:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0;\ c_{ij} \ge 0;\ a_i > 0;\ b_j > 0;\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

BÀI TOÁN VẬN TẢI DƯỚI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

khai triển BTVT và xếp hệ ràng buộc dưới dạng hệ m + n phương trình của m× n biến như sau

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +\cdots & +x_{1n} & & & & & & & & & & = & a_1 \\
 & & & & x_{21} & +x_{22} & +\cdots & +x_{2n} & & & & & & = & a_2 \\
 & & & & & & & & \cdots & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & x_{m1} & +x_{m2} & +\cdots & +x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & \cdots & & & +x_{m1} & & & & = & b_1 \\
 & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & & +x_{m2} & & & = & b_2 \\
 & & \cdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & x_{1n} & & & & +x_{2n} & \cdots & & & & +x_{mn} & = & b_n
\end{array}$$

Ký hiệu $A_{m+n,m\times n}$ ma trận hệ số của hpt trên.

$X^T = (x_{11}\ x_{12}\ ...\ x_{1n}\ x_{21}\ x_{22}\ ...\ x_{2n}\ ...\ x_{m1}\ x_{m2}\ ...\ x_{mn})$ là vectơ cột gồm m×n thành phần; $C = (c_{11}\ c_{12}\ ...\ c_{1n}\ c_{21}\ c_{22}\ ...\ c_{2n}\ c_{m1}\ c_{m2}\ ...\ c_{mn})$ là vectơ dòng gồm m×n thành phần; $b^T = (a_1\ a_2\ ...\ a_m\ b_1\ b_2\ ...\ b_n)$ là vectơ cột gồm m+ n thành phần.

BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

BTVT viết dưới dạng vectơ và ma trận như sau

$$\begin{cases} z = C^T X \to \min \\ AX = b \quad (*) \\ X \ge 0 \quad (**) \end{cases}$$

❑ Một vectơ X thỏa (*) và (**) gọi là *phương án*. Một P.A đạt cực tiểu thì gọi là *P.A.T.Ư* của BTVT. Một phương án X được gọi là *P.A.C.B* khi các vectơ cột A_j của ma trận hệ số A ứng với các thành phần $x_{ij} > 0$ là độc lập tuyến tính.

❑ Một P.A.C.B của BTVT có nhiều nhất là m + n – 1 thành phần dương. Nếu một P.A.C.B của BTVT có đúng m + n – 1 thành phần dương thì được gọi là *không suy biến*. Ngược lại, được gọi là *phương án cực biên suy biến*.

MÔ TẢ BÀI TOÁN DƯỚI DẠNG BẢNG VẬN TẢI

Trạm thu B_j / Trạm phát A_i	B_1 b_1	B_2 b_2	… …	B_n b_n
A_1 a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}
A_2 a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2n} x_{2n}
… …	… …	… …	… …	… …
A_m a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}

MÔ TẢ BÀI TOÁN DƯỚI DẠNG BẢNG VẬN TẢI

(1) Ký hiệu (i, j) là ô trên *dòng i và cột j*.

(2) Chi phí vận chuyển c_{ij} được ghi ở góc trên bên trái của ô (i, j), lượng hàng cần vận chuyển x_{ij} được ghi ở góc dưới bên phải của ô (i, j) biểu diễn tuyến đường vận chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j.

(3) Trong BẢNG VẬN TẢI, một ô được gọi là *ô treo* nếu nó là ô duy nhất trên dòng hay trên cột.

(4) Những ô ứng với $x_{ij} > 0$ trong BẢNG VẬN TẢI được gọi là *ô chọn*, những ô khác gọi là *ô loại*.

(5) Một dãy các ô chọn, trong đó 3 ô liên tiếp không nằm trên cùng một dòng hay một cột thì được gọi là *một dây chuyền*.

MÔ TẢ BÀI TOÁN DƯỚI DẠNG BẢNG VẬN TẢI

(6) Một dây chuyền khép kín được gọi là *một chu trình* hay *một vòng*.

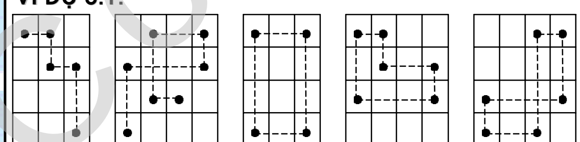
(7) Một ma trận (x_{ij}) là một *P.A* của BTVT nếu nó thoả hệ ràng buộc. Một P.A (x_{ij}) làm cực tiểu hàm mục tiêu thì (x_{ij}) là P.A.T.Ư. của bài toán.

(8) Một P.A của BTVT không tạo thành chu trình (vòng) thì được gọi là *Phương án cực biên*.

(9) Một P.A.C.B của BTVT có đủ m+n-1 ô chọn thì được gọi là *P.A.C.B không suy biến*, nếu có ít hơn m+n-1 ô chọn được gọi là *P.A.C.B suy biến*.

MÔ TẢ BÀI TOÁN DƯỚI DẠNG BẢNG VẬN TẢI

VÍ DỤ 3.1.



Hình 2.1. Hình 2.2. Hình 2.3. Hình 2.4. Hình 2.5.

- Hình 2.1. các ô chọn, có dấu "•", tạo thành dây chuyền, các ô (1,1) và (4,3) là các ô treo.
- Hình 2.2. các ô chọn tạo thành dây chuyền, các ô (4,1) và (3,3) là các ô treo.
- Hình 2.3., Hình 2.4 và Hình 2.5. các ô chọn tạo thành chu trình, không có ô treo.

CÁC TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

TÍNH CHẤT 1: Bài toán vận tải luôn luôn có phương án tối ưu.

TÍNH CHẤT 2: Với một phương án bất kỳ, số ô chọn của phương án không vượt quá tổng số trạm phát và trạm thu.

$\alpha \le m + n - 1$ (với α là số ô chọn của P.A)

TÍNH CHẤT 3: Với một phương án có đủ m+n−1 ô chọn thì với một ô loại bất kỳ được đưa vào phương án sẽ tạo thành chu trình và chu trình này là duy nhất.

TÍNH CHẤT 4: Nếu lượng cung a_i và lượng cầu b_j là số nguyên thì bài toán có lời giải nguyên.

TIÊU CHUẨN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

Xét bài toán vận tải sau

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0;\ c_{ij} \ge 0;\ a_i > 0;\ b_j > 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Viết lại bài toán

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = -a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$x_{ij} \ge 0;\ c_{ij} \ge 0;\ a_i > 0;\ b_j > 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

TIÊU CHUẨN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

Bài toán đối ngẫu của BTVT

Tìm $\{u_i, v_j\}$ sao cho: $Z^* = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max$

Với các cặp đối ngẫu:

$x_{ij} \geq 0$ và $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $\forall i,j$

Theo định lý độ lệch bù thì phương án $\{x_{ij}\}$ của BTVT có P.A.T.Ư là tồn tại hệ thống $\{u_i, v_j\}$ sao cho:

Nếu $x_{ij} > 0$ thì $v_j - u_i = c_{ij}$,

Nếu $v_j - u_i < c_{ij}$ thì $x_{ij} = 0$.

Vậy tiêu chuẩn tối ưu của BTVT: $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $\forall i,j$

u_i: được gọi là *thế vị dòng*.

v_j: được gọi là *thế vị cột*.

PHƯƠNG PHÁP CHI PHÍ BÉ NHẤT

Trên bảng vận tải, chọn ô đầu tiên có cước phí vận chuyển bé nhất và chọn x_{ij} như sau:

$$x_{ij} = \min(a_i, b_j) = \begin{cases} a_i : \text{loại dòng i}, b'_j = b_j - a_i \\ b_j : \text{loại cột j}, a'_i = a_i - b_j \\ a_i = b_j : \text{loại dòng i và cột j} \end{cases}$$

Lặp lại quá trình trên cho ô tiếp theo cho đến đến khi yêu cầu trạm phát và trạm thu được thoả mãn.

Bảng thu được với các $x_{ij} > 0$ là phương án cực biên của bài toán.

PHƯƠNG PHÁP CHI PHÍ BÉ NHẤT

Ví dụ 3.2. Dùng phương pháp chi phí bé nhất, tìm phương án cực biên của bài toán vận tải có dạng bảng sau đây

P \ T	30	40	25	35	45
42	13	8	7	2	13
28	5	1	10	5	11
45	16	5	3	7	16
60	6	3	4	14	10

Kiểm tra $\sum a_i = \sum b_j = 175$

PHƯƠNG PHÁP CHI PHÍ BÉ NHẤT

P \ T	30	40	25	35	45
42	13	8	7	2 / 35	13 / 7
28	5	1 / 28	10	5	11
45	16	5	3 / 25	7	16 / 20
60	6 / 30	3 / 12	4	14	10 / 18

P.A.C.B trên không suy biến, với giá trị Z = 980.

PHƯƠNG PHÁP VOGELS

Phương pháp Vogels (1958) cho P.A.C.B khá tốt theo nghĩa giá trị hàm mục tiêu của nó khá gần với P.A.T.Ư. Phương pháp được mô tả như sau

(1) Trên bảng vận tải, tính hiệu số giữa chi phí bé thứ hai với chi phí bé thứ nhất.

(2) Chọn số lớn nhất trong các hiệu trên và phân phối tối đa cho ô có chi phí bé nhất một lượng $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$, sau đó tính lại hiệu số dòng (cột).

(3) Quá trình trên được lặp lại cho đến khi chỉ còn lại một dòng hay một cột duy nhất.

(4) Bảng thu được với các $\{x_{ij}\}$ là phương án cực biên của bài toán.

PHƯƠNG PHÁP VOGELS

Ví dụ 3.3: Dùng phương pháp Vogels, tìm phương án cực biên của bài toán vận tải có dạng bảng sau

P \ T	30	40	25	35	45
42	13	8	7	2	13
28	5	1	10	5	11
45	16	5	3	7	16
60	6	3	4	14	10

Kiểm tra $\sum a_i = \sum b_j = 175$

PHƯƠNG PHÁP VOGELS

P \ T	30	40	25	35	45	
42	13	8	7	2 / 35	13 / 7	5,1,5 K
28	5	1 / 28	10	5	11	4 K
45	16	5 / 12	3 / 25	7	16 / 8	2,11 K
60	6 / 30	3	4	14	10 / 30	1 K
	1 7 K	2 3 K	1 4 K	3 K	1 3 K	Z = 932

HƯỚNG GIẢI BÀI TOÁN

(1) Tìm P.A.C.B không suy biến đầu tiên bằng phương pháp chi phí bé nhất hoặc Vogels.

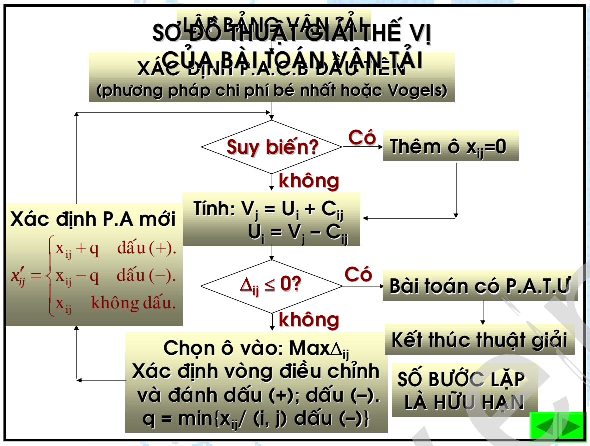
(2) Dùng tiêu chuẩn tối ưu $v_i - u_j \le c_{ij}$, $\forall i,j$ để kiểm tra P.A.C.B vừa tìm được.

(3) Nếu P.A.C.B thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì P.A.C.B đó là P.A.T.Ư.

(4) Nếu P.A.C.B vừa tìm chưa thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì tìm cách sửa đổi P.A.C.B cũ để có P.A.C.B mới.

(5) trở về bước (2), sau một số bước lặp hữu hạn, ta sẽ có P.A.T.Ư.

Phương pháp trên gọi là *thuật toán thế vị*



THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Bước 1. Lập bảng vận tải

(1) Kiểm tra điều kiện cân bằng thu – phát.

(2) Xác định P.A.C.B (bằng phương pháp chi phí bé nhất).

(3) Kiểm tra P.A.C.B có suy biến hay không

- Nếu P.A.C.B. suy biến: thêm vào ô (i,j) bất kỳ với $x_{ij} = 0$, không tạo thành chu trình.
- Nếu P.A.C.B không suy biến, chuyển sang (2)

Bước 2. Kiểm tra tính tối ưu của bài toán

(1) Tính $v_j = u_i + c_{ij}$

$u_i = v_j - c_{ij}$, trong đó ô (i,j) là ô chọn.

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Chọn $u_i = 0$ tại dòng bất kỳ.

(2) Đặt $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$

- Nếu $\Delta_{ij} \le 0$: ta có P.A.T.Ư.
- Nếu $\exists \Delta_{ij} > 0$: chuyển sang (3)

Bước 3. Xác định vòng điều chỉnh

(1) Chọn ô vào: MaxΔ_{ij} ($\Delta_{ij} > 0$)

(2) Chọn ô ra

- xác định vòng điều chỉnh
- ô vào sẽ được đánh dấu (+). Xen kẻ dấu (-) và dấu (+) trên vòng điều chỉnh.
- lượng điều chỉnh q = min{x_{ij}/ (i,j) có dấu (-)}

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Bước 4. Xác định P.A.C.B mới

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + q & \text{dấu}(+); \\ x_{ij} - q & \text{dấu}(-); \\ x_{ij} & \text{không dấu.} \end{cases}$$

Quay về bước (2).

Sau một số bước lặp hữu hạn, bài toán có phương án tối ưu.

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

CHÚ Ý.

(1) Trong thuật giải bài toán vận tải, nếu MaxΔ_{ij} đạt tại nhiều ô, ta chọn một ô tùy ý trong số các ô đó làm ô điều chỉnh.

(2) Trong P.A.T.Ư tìm được X_{opt}, nếu có $\Delta_{ij} = 0$, mà (i,j) là ô loại thì đó là dấu hiệu bài toán có nhiều P.A.T.Ư khác. Để tìm P.A.C.B.T.Ư khác, ta chọn ô (i, j) đó làm ô điều chỉnh, rồi áp dụng thuật toán thế vị để xác định P.A.C.B.T.Ư khác X'_{opt}.

(3) Tập phương án tối ưu là

$$X = \{\lambda X_{opt} + (1 - \lambda)X'_{opt},\ \lambda \in [0, 1]\}$$

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Ví dụ 3.4. Giải bài toán vận tải

P \ T	45	55	30	70	50	40
40	12	8	9	10	7	6
75	12	13	10	11	13	9
60	3	9	5	6	7	1
70	9	8	2	7	6	2
45	11	9	6	10	10	8

Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát

$\sum a_i = 40 + 75 + 60 + 70 + 45 = 290$

$\sum b_j = 45 + 55 + 30 + 70 + 50 + 40 = 290$

Baûng 1

P \ T	45	55	30	70	50	40	
40	12	8 - **30**	9	10	7 + **10**	6 +2	0
75	12 - **25**	13	10	11 + **50**	13	9 +1	-2
60	3 + **20**	9	5	6	7	1 - **40**	7
70	9	8	2 **30**	7 +1	6 - **40**	2 + +5	1
45	11	9 + **25**	6	10 - **20**	10	8 +1	-1
q= 20	10	8	3	9	7	8	

Baûng 2

P \ T	45	55	30	70	50	40	
40	12	8 - **10**	9	10	7 + **30**	6	0
75	12 - **5**	13 + +2	10	11 **70**	13 +1	9 +1	-7
60	3 + **40**	9	5	6	7	1 - **20**	2
70	9	8	2 **30**	7	6 - **20**	2 + **20**	1
45	11	9 **45**	6	10	10	8	-1
q= 5	5	8	3	4	7	3	

Baûng 3

P \ T	45	55	30	70	50	40	
40	12	8 **5**	9	10	7 **35**	6	-1
75	12	13 **5**	10	11 **70**	13	9	-6
60	3 **45**	9	5	6	7	1 **15**	1
70	9	8	2 **30**	7	6 **15**	2 **25**	0
45	11	9 **45**	6	10	10	8	-2
	4	7	2	5	6	2	

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Do các $\Delta_{ij} \le 0\ \forall i,j$ nên P.A.T.Ư của bài toán là

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 15 & 25 \\ 0 & 45 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Và Z_{min} = 1.875 đơn vị tiền tệ.

Ngoài ra, bài toán không có P.A.T.Ư khác vì không có $\Delta_{ij} = 0$, với (i, j) là ô loại

THUẬT TOÁN THẾ VỊ

Ví dụ 3.5. Giải bài toán vận tải

P \ T	76	62	88	45	40
79	10	19	15	6	7
102	13	11	8	7	4
70	12	17	10	5	3
60	12	18	18	10	9

Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát

$\sum a_i = 79 + 102 + 70 + 60 = 311$

$\sum b_j = 76 + 62 + 88 + 45 + 40 = 311$

Bảng 1

P \ T	76	62	88	45	40	
79	10 - 64	19	15	6 + 15	7	0
102	13	11 + 14	8 - 88	7	4	5
70	12	17	10 + +2	5 - 30	3 40	1
60	12 + 12	18 - 48	18	10	9	-2
q=30	10	16	13	6	4	

Bảng 2

P \ T	76	62	88	45	40	
79	10 34	19	15	6 45	7	0
102	13	11 44	8 58	7	4	5
70	12	17	10 30	5	3 40	3
60	12 42	18 18	18	10	9	-2
	10	16	13	6	6	

THUẬT GIẢI THẾ VỊ

Do các $\Delta_{ij} \le 0\ \forall i,j$ nên

P.A.T.Ư của bài toán vận tải

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 44 & 58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 40 \\ 42 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Và Z_{min} = 2.806 đơn vị tiền tệ.

Bài toán không có P.A.T.Ư nào khác vì không có $\Delta_{ij} = 0$, với (i, j) là ô loại.

CÁC DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU – PHÁT (Xem)
2. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ DẠNG HÀM MỤC TIÊU LÀ MAX (Xem)
3. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ Ô CẤM (Xem)
4. BÀI TOÁN VẬN TẢI XE KHÔNG (Xem)

BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU-PHÁT

1. TRƯỜNG HỢP 1. $\sum a_i > \sum b_j$
   - Thêm trạm thu giả thứ B_{n+1}
   - Với nhu cầu thu $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$
   - Cước phí vận tải $c_{i,n+1} = 0$, i = 1, 2, ..., m.
2. TRƯỜNG HỢP 2. $\sum a_i < \sum b_j$
   - Thêm trạm phát giả thứ A_{m+1}
   - Với nhu cầu phát $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$
   - Cước phí vận tải $c_{m+1,j} = 0$, j = 1, 2, ..., n.

Với các ô có cước phí vận tải bằng không được gọi là *ô giả*. Lưu ý khi dùng thuật toán thế vị để giải bài toán trên, với P.A.C.B đầu tiên, ta ưu tiên phân phối vào các ô thực.

BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU-PHÁT

Ví dụ 3.6. Giải bài toán vận tải sau

P \ T	65	45	50	30
60	10	9	12	7
55	9	11	10	15
50	8	7	14	12

Kiểm tra điều kiện cân bằng thu – phát

$\Sigma a_i = 165 < \Sigma b_j = 190$

Thêm một trạm phát giả A_4, với

$a_4 = 190 - 165 = 25$ và $c_{4j} = 0$, j=1, 2, 3, 4

Bảng 1

P \ T	65	45	50	30	
60	10 + 5	9	12 - 25	7 30	0
55	9 - 55	11	10 + +1	15	1
50	8 5	7 45	14	12	2
25	0	0	0 25	0	12
	10	9	12	7	q = 25

Bảng 2

P \ T	65	45	50	30	
60	10 - 30	9 + 0	12	7 30	0
55	9 30	11	10 25	15	1
50	8 + 5	7 - 45	14	12	2
25	0	0	0 25	0	11
	10	9	11	7	q = 30

Có P.A.T.Ư khác

BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU-PHÁT

Phương án cực biên tối ưu của bài toán vận tải là

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 30 \\ 30 & 0 & 25 & 0 \\ 5 & 45 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và Z_{min} = 1.385

P \ T	65	45	50	30	
60	10	9 30	12	7 30	0
55	9 30	11	10 25	15	1
50	8 35	7 15	14	12	2
25	0	0	0 25	0	11
	10	9	11	7	

BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU-PHÁT

P.A.C.B.T.Ư khác của bài toán

$$x'_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 30 \\ 30 & 0 & 25 & 0 \\ 35 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Và Z'_{min} =1.385

Tập P.A.T.Ư của bài toán

$Z_{opt} = \lambda X_{opt} + (1 - \lambda) X'_{opt}$

Hay $$Z_{opt} = \begin{pmatrix} 30\lambda & 30-30\lambda & 0 & 30 \\ 30 & 0 & 25 & 0 \\ 35-30\lambda & 15+30\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ HÀM MỤC TIÊU LÀ MAX

Tìm $\{x_{ij}\}$ sao cho:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0;\ c_{ij} \ge 0;\ a_i > 0;\ b_j > 0;\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ HÀM MỤC TIÊU LÀ MAX

Giống như bài toán QHTT có hàm mục tiêu là max, chúng ta có thể đưa bài toán vận tải có hàm mục tiêu $Z \to$ max về $Z' = -Z \to$ min, sau đó dùng thuật toán thế vị để giải. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể giải trực tiếp bài toán này bằng thuật toán thế vị với một vài thay đổi trong thuật giải như sau:

1. Khi xây dựng P.A.C.B đầu tiên, ta phân phối tối đa vào ô có cước phí lớn nhất.

2. Tiêu chuẩn tối ưu là $v_j - u_i \ge c_{ij}$, $\forall i,j$

3. Ô điều chỉnh là ô có $\{\min\Delta_{ij}$, với $\Delta_{ij} < 0\}$

THUẬT GIẢI THẾ VỊ VỚI HÀM MỤC TIÊU Z → Max

Ví dụ 3.7. Một công ty có 3 xí nghiệp cùng sản xuất một loại bóng đèn. Năng suất trong tháng của 3 xí nghiệp lần lượt là A_i = (650, 1.000, 350) bóng. Hợp đồng công ty phải giao cho 4 nhà phân phối là B_j = (200, 400, 600, 800) bóng. Đơn giá bán của mỗi bóng đèn tương ứng với các nhà phân phối được cho bởi ma trận sau:

Đvt: 1.000 đồng

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 25 & 20 & 18 \\ 30 & 32 & 25 & 28 \\ 29 & 28 & 25 & 23 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm kế hoạch phân phối hàng sao cho công ty đạt doanh số lớn nhất

THUẬT GIẢI THẾ VỊ VỚI HÀM MỤC TIÊU Z → Max

P \ T	200	400	600	800	
650	22 -2	25 -3	20 + 250	18 – 400	10
1000	30 – 200	32 400	25	28 + 400	0
350	29 + -4	28 -1	25 – 350	23	5
	30	32	30	28	q = 200

THUẬT GIẢI THẾ VỊ VỚI HÀM MỤC TIÊU Z → Max

P \ T	200	400	600	800	
650	22	25 + -3	20 450	18 – 200	10
1000	30	32 – 400	25	28 + 600	0
350	29 200	28 -1	25 150	23	5
	34	32	30	28	q = 200

THUẬT GIẢI THẾ VỊ VỚI HÀM MỤC TIÊU Z → Max

P \ T	200	400	600	800	
650	22	25 200	20 450	18	7
1000	30	32 200	25	28 800	0
350	29 200	28	25 150	23	2
	31	32	27	28	Z = 52.350

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ HÀM MỤC TIÊU LÀ MAX

Do các $\Delta_{ij} \geq 0, \forall i, j$

P.A.T.Ư CỦA BÀI TOÁN

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 200 & 450 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 800 \\ 200 & 0 & 150 & 0 \end{pmatrix}$$

Và $Z_{Max} = 52.350$

BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ Ô CẤM

Bài toán vận tải có ô cấm là bài toán vận tải với P.A.T.Ư của nó phải thỏa điều kiện cho trước.

Để giải bài toán này, ta lập bài toán vận tải mở rộng VT_M bằng cách cho giá cước vận chuyển ở các ô cấm bằng M, với M > 0 lớn tùy ý rồi dùng thuật toán thế vị. Có 2 trường hợp xảy ra

1.Trong P.A.T.Ư của bài toán VT_M, nếu các ô cấm có $x_{ij} = 0$ thì P.A.T.Ư của bài toán VT_M cũng chính là P.A.T.Ư của bài toán gốc.

2.Trong P.A.T.Ư của bài toán VT_M, nếu các ô cấm có $x_{ij} \neq 0$ thì bài toán gốc không có P.A.T.Ư.

BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ Ô CẤM

Ví dụ 3.8. Giải bài toán vận tải sau đây với

Nhu cầu trạm phát a = (150, 100, 145, 100)

Nhu cầu trạm thu b = (140, 150, 180)

Ma trận cước vận chuyển

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 9 \\ 11 & 6 & 12 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

với điều kiện

trạm A_3, A_4 phải phát hết hàng.

❑ Kiểm tra điều kiện cân bằng thu – phát

$\sum a_i = 150 + 100 + 145 + 100 = 495$

$\sum b_j = 140 + 150 + 180 = 470$

❑ Lập trạm thu giả, với $b_4 = 25$ và M > 0 tùy ý.

Bảng 1

P \ T	140	150	180	25	
150	5 / 0	4 / 150	6 / +3	0 / M-4	4
100	8 / – 100	5 / +2	9 / +3	0 / + M-1	1
145	11	6 / +1	12 / 145	M	1
100	9 / + 40	7 / +1	13 / 35	M / – 25	0
	9	8	13	M	q = 25

Bảng 2

P \ T	140	150	180	25	
150	5 / 0	4 / 150	6 / +3	0	4
100	8 / – 75	5 / +2	9 / + +3	0 / 25	1
145	11	6 / +1	12 / 145	M	1
100	9 / + 65	7 / +1	13 / – 35	M	0
	9	8	13	1	q = 35

Bảng 3

P \ T	140	150	180	25	
150	5 / + 0	4 / – 150	6	0	3
100	8 / – 40	5 / +2	9 / + 35	0 / 25	0
145	11	6 / + +4	12 / – 145	M	-3
100	9 / 100	7 / +1	13	M	-1
	8	7	9	0	q = 40

Bảng 4

P \ T	140	150	180	25	
150	5 40	4 − 110	6 + +4	0 +1	0
100	8	5	9 75	0 25	1
145	11	6 + 40	12 − 105	M	-2
100	9 100	7 +1	13 +1	M	-4
	5	4	10	1	q =105

Bảng 5

P \ T	140	150	180	25	
150	5 40	4 − 5	6 + 105	0	0
100	8	5 + +2	9 − 75	0 25	-3
145	11	6 145	12	M	-2
100	9 100	7 +1	13	M	-4
	5	4	6	-3	q = 5

Bảng 6

P \ T	140	150	180	25	
150	5 − 40	4	6 + 110	0	3
100	8 + 0	5 5	9 − 70	0 25	0
145	11	6 145	12	M	-1
100	9 100	7	13	M	-1
P.A.T.Ư khác		5	9	0	Z =3.285 q = 40

BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ Ô CẤM

Do các $\Delta_{ij} \le 0\ \forall i,j$ nên

P.A.C.B.T.Ư của bài toán vận tải trên là

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 110 \\ 0 & 5 & 70 \\ 0 & 145 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và Z_{min}= 3.285

Bảng 7

P \ T	140	150	180	25	
150	5 0	4	6 150	0	3
100	8 40	5 5	9 30	0 25	0
145	11	6 145	12	M	-1
100	9 100	7	13	M	-1
	8	5	9	0	Z =3.285

BÀI TOÁN VẬN TẢI CÓ Ô CẤM

P.A.C.B.T.Ư khác của bài toán vận tải trên là

$$X'_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 40 & 5 & 30 \\ 0 & 145 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và Z_{min}= 3.285

Tập phương án tối ưu

$Z_{opt} = \lambda X_{opt} + (1 - \lambda) X'_{opt}$

Hay $$Z_{opt} = \begin{pmatrix} 40\lambda & 0 & 150 - 40\lambda \\ 40 - 40\lambda & 5 & 30 + 40\lambda \\ 0 & 145 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI XE KHÔNG

- Điều kiện ràng buộc của bài toán vận tải xe không là một số trạm phát A_i phải phát đủ hàng cho trạm B_j (được chỉ định). Xác định lộ trình xe chạy không tải từ B_j đến A_i là ít nhất.
- Khi đó trạm phát A_i trở thành trạm thu xe không, trạm thu B_j trở thành trạm phát xe không và khi đó ma trận (c_{ij}) là ma trận khoảng cách tương ứng giữa A_i và B_j.

Qui ước sử dụng các ký hiệu như sau:

- x_{ij}: lượng hàng hóa có vận tải.
- $\boxed{x_{ij}}$: lượng hàng của xe không tải.
- ⟶: tuyến xe chạy có tải.
- - - ➔: tuyến xe chạy không tải

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN XE KHÔNG TẢI

1. Lập bảng vận tải tương ứng với ma trận khoảng cách. Dùng thuật toán thế vị tìm P.A.T.Ư của bài toán xe không tải.
2. Tạo bảng phối hợp P.A.T.Ư của bài toán xe không tải với kế hoạch vận tải đã cho trước. Lập tuyến điều động tương ứng.
3. Giảm lượng chênh lệch giữa "ô tròn" và "ô vuông" để có bảng mới thu gọn.
4. Lập vòng điều động gồm các ô có tải và ô không tải liên tiếp nhau, lượng điều động q= min{x_{ij}}, với x_{ij} có tải và $\boxed{x_{ij}}$ không tải. Trở về (3).

Sau một số bước lặp hữu hạn (3) và (4), ta sẽ thu được kế hoạch điều động hàng hóa tối ưu.

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN XE KHÔNG TẢI

Ví dụ 3.9. Một công ty vận tải có kế hoạch vận chuyển hàng hóa theo hợp đồng, được thể hiện qua bảng yêu cầu như sau

Địa điểm cấp hàng A_i	Loại hàng	Lượng (tấn)	Nơi nhận hàng B_j	Ký hiệu
A_1	Cam	20	Công ty rau quả	B_2
		30	Cửa hàng số 3	B_3
A_2	Dưa hấu	25	Cửa hàng số 1	B_1
		15	Công ty rau quả	B_2
		10	Cửa hàng số 3	B_3
A_3	Sầu riêng	50	Cửa hàng số 4	B_4
		20	Công ty rau quả	B_2

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN XE KHÔNG TẢI

Cho biết khoảng cách giữa địa điểm cung cấp hàng và địa điểm nhận hàng (km) được thể hiện qua ma trận như sau:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hãy xác định lộ trình vận chuyển hàng hóa thỏa yêu cầu hợp đồng và tổng tấn – km xe chạy không tải nhỏ nhất.

Bước 1 (tìm P.A.T.Ư của bài toán xe không tải)

Bảng 1

A_i \ B_j	25	55	40	50	
50	2	1 50	4	3	2
50	5	2 5	6	4 45	1
70	3 25	4	2 40	5 5	0
	3	3	2	5	

Z_{min}= 420 tấn – km

Bước 2 (tạo bảng phối hợp)

Bảng 2

A_i \ B_j	25	55	40	50
50	2	1 20 50	4 30	3
50	5 25	2 15 5	6 10	4 45
70	3 25	4 20	2 40	5 50 5

$A_1 \longrightarrow B_2 \xrightarrow{1km}$ A_1: 20 T X 1km = 20T – km

$A_2 \longrightarrow B_2 \xrightarrow{2km}$ A_2: 5 T X 2km = 10T – km

$A_3 \longrightarrow B_4 \xrightarrow{5km}$ A_3: 5 T X 5km = 25T – km

Bước 3 (lập tuyến điều động) — Bảng 3

B_j / A_i	25	55	40	50
50	2	1 **30**	4 (30)	3
50	5 (25)	2 (10)	6 (10)	4 **45**
70	3 **25**	4 (20)	2 **40**	5 (45)

q=20

$A_2 \to B_1 \xrightarrow{3km} A_3 \to B_2 \xrightarrow{1km} A_1 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 20T x 10km = 200T-km

Bước 3 (lập tuyến điều động) — Bảng 4

B_j / A_i	25	55	40	50
50	2	1 **10**	4 (10)	3
50	5 (5)	2 (10)	6 (10)	4 **25**
70	3	4 **5**	2 **20**	5 (25)

q=5

$A_2 \to B_1 \xrightarrow{3km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 5T x 7km = 35T-km.

Bước 3 (lập tuyến điều động) — Bảng 5

B_j / A_i	25	55	40	50
50	2	1 **10**	4 (10)	3
50	5	2 (10)	6 (10)	4 **20**
70	3	4	2 **20**	5 (20)

q=10

$A_2 \to B_2 \xrightarrow{1km} A_1 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 10T x 7km = 70T-km

Bước 3 (lập tuyến điều động) — Bảng 6

B_j / A_i	25	55	40	50
50	2	1	4	3
50	5	2	6 (10)	4 **10**
70	3	4	2 **10**	5 (10)

q=10

$A_2 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 10 T x 6km = 60T-km

THUẬT GIẢI BÀI TOÁN XE KHÔNG TẢI

BẢNG ĐIỀU ĐỘNG XE

$A_1 \to B_2 \xrightarrow{1km} A_1$: 20 T

$A_2 \to B_2 \xrightarrow{2km} A_2$: 5 T

$A_3 \to B_4 \xrightarrow{5km} A_3$: 5 T

$A_2 \to B_1 \xrightarrow{3km} A_3 \to B_2 \xrightarrow{1km} A_1 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 20 T

$A_2 \to B_1 \xrightarrow{3km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 5 T

$A_2 \to B_2 \xrightarrow{1km} A_1 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 10 T

$A_2 \to B_3 \xrightarrow{2km} A_3 \to B_4 \xrightarrow{4km} A_2$: 10 T

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

LẬP MÔ HÌNH CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

[1] [2]

TÌM PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN ĐẦU TIÊN

[3a] [3b] [3c] [3d] [3e]

GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU - PHÁT

[4] [5] [6] [7] [8] [9]

CÁC DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

[10a] [10b] [10c]

[11a] [11b] [11c] [11d]

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

LẬP MÔ HÌNH CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI DƯỚI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

[1] Một công ty vận tải biển cần 110 người để bố trí vào các nhiệm vụ: 10 máy trưởng; 25 thợ máy 1; 30 thợ máy 2; 45 thợ máy 3. Phòng tổ chức nhân sự công ty tuyển được 90 người, trong đó gồm 25 kỹ sư máy; 20 kỹ thuật viên trung cấp và 45 công nhân có kinh nghiệm. Phòng tổ chức nhân sự đánh giá trình độ nhân sự tương ứng với từng công việc theo thang điểm 5, ví dụ $a_{ij} = 5$ nghĩa làvới trình độ i có khả năng hoàn thành xuất sắc công việc j (đạt điểm tối đa là 5), còn $a_{ij} = 0$ là với trình độ i không có khả năng hoàn thành công việc j (đạt điểm 0), được thể hiện chi tiết trong bảng sau

Nhiệm vụ / Trình độ	Điểm đánh giá năng lực (a_{ij})			
	Máy trưởng	Máy 1	Máy 2	Máy 3
Kỹ sư	5	4	0	0
Trung cấp	3	5	4	0
Công nhân	0	1	5	4

Hãy lập kế hoạch bố trí nhân lực sao cho công việc đạt tối ưu.

[2] Hai đội tuyển bóng bàn, mỗi đội có 5 người. Qua thống kê nhiều trận đấu trong quá khứ, người ta dự đoán xác suất thắng cuộc mỗi đấu thủ của mỗi đội được thể hiện qua bảng sau

Đội II / Đội I	Đấu thủ 1	Đấu thủ 2	Đấu thủ 3	Đấu thủ 4	Đấu thủ 5
Đấu thủ 1	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Đấu thủ 2	0	0,3	0,4	0,4	0,7
Đấu thủ 3	0,2	0,6	0,4	0,3	0,5
Đấu thủ 4	0,6	0,3	0,4	0,7	0,6
Đấu thủ 5	0	0,2	0,3	0,4	0,6

Giả sử các đấu thủ của đội I được quyền chọn thi đấu với các tuyển thủ đội II. Hãy sắp xếp các đấu thủ của đội I sao cho xác suất thắng toàn đoàn của đội I cao nhất.

TÌM PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN ĐẦU TIÊN

[3] Tìm phương án cực biên đầu tiên bằng hai phương pháp chi phí bé nhất và phương pháp Vogels của các bài toán vận tải sau đây

a)

B_j / A_i	20	25	30	15
40	4	5	1	2
20	3	4	7	8
30	2	6	9	3

b)

B_j / A_i	3	5	10	14
10	1	3	7	1
15	2	4	2	3
7	6	5	4	1

c)*

B_j / A_i	10	30	50
25	7	6	5
10	2	1	4
45	3	5	2

d)

A_i \ B_j	40	30	20	50
30	3	7	4	6
40	4	6	2	5
70	1	5	7	8

e)

A_i \ B_j	30	20	25	35	40
30	13	7	6	2	12
20	5	1	10	5	11
40	10	5	3	7	14
60	6	3	2	11	10

GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI BẰNG THUẬT TOÁN THẾ VỊ

[4] Giải bài tập **[3]**, với phương án cực biên đầu tiên thu được bằng phương pháp chi phí bé nhất.

<u>Đs</u>: a) $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ và $Z_{min} = 215$; **b)** $x_{opt} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ và $Z_{min} = 57$;

c)* $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$ và $Z_{min} = 245$; **d)** $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $Z_{min} = 510$;

e) $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 5 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$ và $Z_{min} = 800$.

[5] a) Giải bài toán vận tải

A_i \ B_j	50	160	120	80
220	5	4	3	10
100	5	9	7	12
90	10	6	8	15

b) Bài toán có phương án tối ưu khác hay không?

<u>Đs</u>: a) $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 120 & 30 \\ 50 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $z_{min} = 2330$; b) không có PATU khác.

[6] a) Giải bài toán vận tải

A_i \ B_j	20	100	45	15
90	10	6	4	1
40	3	4	2	5
50	9	4	3	7

b) Bài toán có P.A.T.Ư khác hay không? Nếu có, hãy chỉ ra tập phương án tối ưu.

Đs: a) $x_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 50 & 25 & 15\\ 20 & 0 & 20 & 0\\ 0 & 50 & 0 & 0\end{pmatrix}$; b) $x'_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 30 & 45 & 15\\ 20 & 20 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $Z_{min}=Z'_{min}=715$;

$$T_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 30+20\lambda & 45-20\lambda & 15\\ 20 & 20-20\lambda & 20\lambda & 0\\ 0 & 50 & 0 & 0\end{pmatrix},\lambda\in[0,1]\cdot$$

[7] Cho bài toán vận tải có dạng sau đây:

$$a_i=(20 \quad 110 \quad 120) \qquad b_j=(70 \quad 40 \quad 30 \quad 60 \quad 50)$$

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 5 & 7 & 6\\ 5 & 8 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

a) Tìm phương án tối ưu của bài toán trên.

b) Theo anh (chị) dấu hiệu nào cho ta biết bài toán vận tải có nhiều phương án tối ưu? Phương án tối ưu tìm được ở câu a) có duy nhất không? Nếu có hãy chỉ ra phương án cực biên tối ưu khác.

c) Tìm tập các phương án tối ưu và chỉ ra 3 phương án tối ưu khác nhau.

a) Đs: $x_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 20 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30 & 60 & 20\\ 70 & 20 & 0 & 0 & 30\end{pmatrix}$ và $z_{min}=690$; **b) Đs:** $x'_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 20 & 0 & 0 & 0\\ 20 & 0 & 30 & 60 & 0\\ 50 & 20 & 0 & 0 & 50\end{pmatrix}$

[8] Cho bài toán vận tải có dạng sau đây:

$$a_i=(38, \quad 45, \quad 66, \quad 45) \quad b_j=(52, \quad 45, \quad 38, \quad 59)$$

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}9 & 5 & 6 & 14\\ 10 & 7 & 9 & 15\\ 10 & 10 & 6 & 7\\ 4 & 8 & 13 & 14\end{pmatrix}$$

a) Tìm phương án tối ưu của bài toán trên.

b) Phương án tối ưu vừa tìm được có duy nhất không? (có giải thích). Chỉ ra một phương án tối ưu khác? (nếu có).

a) Đs: $x_{opt}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 31 & 0\\ 7 & 38 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 59\\ 45 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ và $Z_{min}=1.192$; **b) P.A.T.Ư.** trên duy nhất.

[9] Giải bài tập **[1], [2]**.

CÁC DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

[10] Giải các bài toán vận tải sau đây và tìm phương án tối ưu khác (nếu có)

a)

A_i \ B_j	60	60	80	100
80	4	5	6	12
70	10	3	9	5
100	6	4	7	9

Đs: $x_{opt} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \end{pmatrix}$ và Z_{min} = 1.230; **P.A.T.Ư.** trên duy nhất.

b) Trạm phát: $(a_i) = (100 \quad 20 \quad 30 \quad 50)$; Trạm thu $(b_j) = (70 \quad 60 \quad 25 \quad 50)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 24 & 8 \\ 30 & 20 & 18 & 14 \\ 2 & 12 & 6 & 7 \\ 8 & 16 & 14 & 36 \end{pmatrix}$

Đs: $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 50 \\ 0 & 5 & 15 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Z_{min} = 1.970; $x'_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và Z'_{min} = 1.970.

c) Trạm phát: $(a_i) = (79, \quad 50, \quad 60, \quad 50)$; trạm thu : $(b_j) = (46, \quad 45, \quad 76, \quad 20, \quad 52)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 & 13 & 8 \\ 5 & 6 & 10 & 8 & 13 \\ 3 & 2 & 8 & 9 & 6 \\ 13 & 5 & 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

Đs: $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 34 & 0 & 0 \\ 38 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 42 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ Z_{min} = 1.211; **P.A.T.Ư.** trên duy nhất.

[11] Giải các bài toán vận tải có ô cấm sau đây và tìm phương án tối ưu khác (nếu có)

a) Trạm phát: $(a_i) = (90 \quad 40 \quad 50)$; trạm thu : $(b_j) = (20 \quad 100 \quad 45)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Điều kiện trạm A_3 phải phát hết hàng.

b) Trạm phát: $(a_i) = (100 \quad 80 \quad 50)$; trạm thu : $(b_j) = (65 \quad 90 \quad 50 \quad 30)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 12 & 7 \\ 9 & 11 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 14 & 12 \end{pmatrix}$

Điều kiện trạm B_2 phải thu đủ hàng.

c) Trạm phát: $(a_i) = (220, \quad 100, \quad 90)$; trạm thu : $(b_j) = (50, \quad 160, \quad 120, \quad 80)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 10 \\ 5 & 9 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}$

Điều kiện trạm phát A_3 không được phát cho trạm thu B_2.

d) Trạm phát: $(a_i) = (90 \quad 40 \quad 50)$; trạm thu : $(b_j) = (20 \quad 100 \quad 45)$

Ma trận cước phí vận tải $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Điều kiện trạm thu B_2 không được thu của trạm phát A_1.