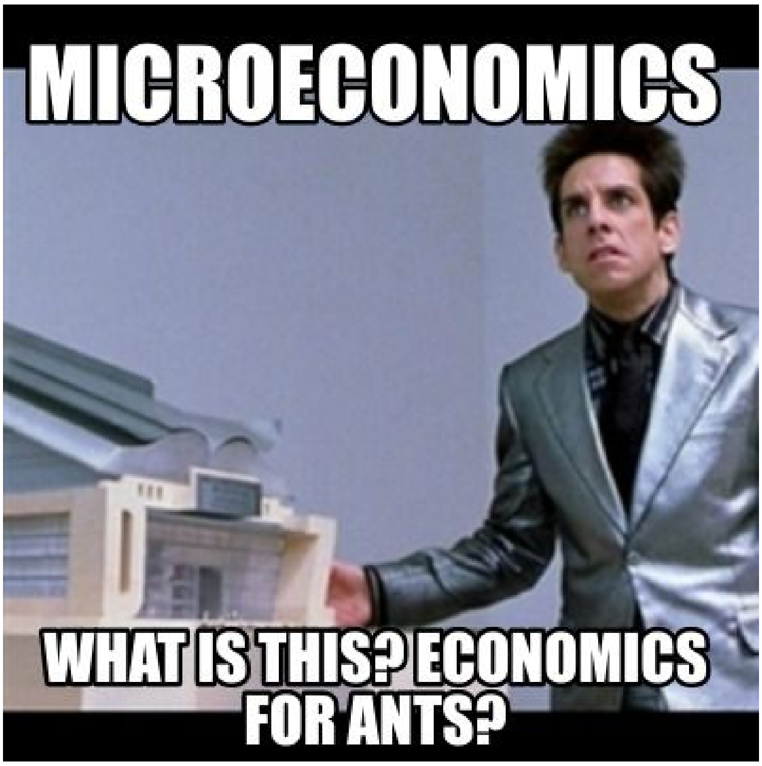
Microeconomía: economía para hormigas



Raimundo Contreras

11 de marzo de 2025

Dedicatoria:

A mis padres, cuyas preferencias siempre fueron lexicográficas en mis hermanos y yo. A mis profesores, quienes, pese a que nunca fui el mejor, nunca dejaron de sembrar en mí su conocimiento y confianza; destaco entre ellos a Nicolás Figueroa y Tibor Heumann. A mis amigos, por ser mis modelos a seguir día a día. A Flavia, por ser la mejor compañera que puedo tener y por inspirar mis preferencias. Finalmente, a mi hurón Pareto, por ser el asistente más leal.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este proyecto intenta aportar al conocimiento de estudiantes de pregrado en tópicos relacionados a Microeconomía. Mi objetivo es crear un documento donde se pueda aprender con cierto nivel de rigurosidad matemática, sin perder el enfoque de lo que importa detrás de un modelo, la historia de lo que sucede económicamente. Para esto, intentaré explicar cada modelo importante de los cursos de Microeconomía de una manera en la que, incluso no siendo un as de las matemáticas, uno pueda entender la intuición y los elementos que la componen.

Cuando comencé mi carrera universitaria, mis matemáticas eran débiles dado que no presté mucha atención en el colegio. Los cursos de cálculo los pasé a duras penas, y sentí que sería imposible dedicarme a ser economista sin haber logrado esto. Con el tiempo me dí cuenta que estaba equivocado, y que el esfuerzo lo lograba todo. Mis matemáticas mejoraron a medida que estudiaba los cursos de economía, y gran parte de lo rápido que aprendí creo que vino de intentar siempre atribuir un significado intuitivo a cada elemento matemático detrás de un modelo. Con este documento, quiero lograr lo mismo con otras personas, y que no sientan que pueden quedarse abajo de sus sueños, por no haber pasado bien un curso, o no haber entendido todo en su minuto.

El gran objetivo de aprender economía es entender cómo administramos recursos escasos cuando tenemos distintos agentes que necesitan satisfacer necesidades individuales o colectivas. Lo primero que viene a la cabeza cuando entramos a un curso introductorio de economía es que queremos entender cómo opera un mercado. Cuando hablamos de un mercado, nos referimos a un espacio, no necesariamente físico, donde distintos agentes tranzan bienes o servicios. Sin embargo, con el tiempo nos daremos cuenta que las herramientas que poseemos no nos limitan a estudiar otras dimensiones de la vida humana. De hecho, el horizonte de estudio en Economía es bastante amplio. Si lo pensamos, muchas cosas en la vida cotidiana son escasas, no sólo los recursos para administrar una empresa o hacer las compras de la semana. Por ejemplo, hay literatura económica (muy lejana a lo que veremos en este documento) donde podemos entender cómo la gente decide mentir para convencer a otras personas para hacer ciertas acciones, ¿hay cabida para nosotros en estudiar este tema? ¡Sí! Justamente, si uno miente todo el tiempo, nadie te creerá nunca. Si nunca mientes, la gente te creerá todo el tiempo, pero puedes pasar de largo en situaciones donde mentir quizás hubiera sido lucrativo (dejando fuera del análisis elementos importantes como la ética detrás de mentir). Dado esto, la acción de mentir también enfrenta una dimensión de escasez que no es obvia de entender. Así, el estudio de la Economía abarca un espacio más amplio de lo que se suele esperar. Todavía queda mucho horizonte por explorar, y también incentivo a que puedan usar parte de estas herramientas en expandir la frontera cuando podamos. Dicho esto, el punto inicial para aprender economía sí recae en entender cómo operan los mercados "tradicionales"que uno se imagina. Esto nos da una intuición fundamental gracias a la facilidad para entender conceptos como preferencias, precios, eficiencia, etc... Y por supuesto, abarca gran parte de los tópicos en los que quieren trabajar economistas.

Este documento puede tener errores de escritura, matemáticas, entre otros. Si encuentran alguno, feliz de que me contacten a rcontreras1@alumni.uc.cl. Ni esta introducción ni el resto del contenido está en su forma final.

Capítulo 2

Teoría del Consumidor

El objetivo de este primer capítulo es entender cómo **individuos** toman decisiones al enfrentar restricciones, de manera de poder predecir cuál sería la acción de un agente ante futuros casos hipotéticos. Por ejemplo, podríamos calcular cuánto debería sustituir el consumo de un bien por otro similar ante cambios en precios. Seguramente el lector ya estará familiarizado con conceptos básicos relacionados a esto, por ejemplo, los axiomas de elección o el uso básico de funciones de utilidad. Sin embargo, mi objetivo con este capítulo será hacer un repaso profundo que permita una comprensión fácil de cómo cada elemento nos otorga la posibilidad de hacer este análisis mediante modelos matemáticos.

2.1. Preferencias y Elección

Antes de usar las famosas funciones de utilidad, es importante entender porqué podemos efectivamente usarlas. Si lo pensamos duramente, no es inicialmente obvio que podamos resumir las preferencias de los agentes en simples funciones. Para esto, primero abarcaremos una mirada bien básica y general de cómo los agentes toman decisiones, para luego poder darnos cuenta que, bajo ciertas suposiciones intuitivas y razonables, podemos lograr resumir las preferencias de un agente en funciones.

2.1.1. Axiomas de elección

Estas suposiciones son lo que llamamos **Axiomas de elección**. Consideremos que tenemos un conjunto de acciones posibles a hacer, ya sea elecciones de canastas, actividades que hacer, lo que uno quiera. Llamaremos a este conjunto $\mathcal{X}$, y a cada acción dentro de este lo denominaremos como x. Recordar que estamos en la versión más básica de pensar cómo las personas tomamos decisiones.

Primero, tenemos que ser capaces de tener una preferencia o indiferencia por alguna de las canastas. Puede sonar obvio, pero no lo es taaaanto. Esto implica que, ante dos elementos cualquiera que comparemos, siempre nos podemos **pronunciar** sobre estos dos. Ya sea que prefiere una o la otra, o está indiferente. Esto es lo que llamamos el axioma de **COMPLETITUD**. Si hay dos acciones donde un agente simplemente no puede **decir** nada (ojo, indiferencia sí implica decir algo), entonces no hay completitud. Nos centraremos **siempre** en escenarios donde las preferencias de los agentes son **completas.** Completitud nos permitirá poder mapear con un orden consistente, pero necesitaremos más elementos.

Axioma de Completitud

Para todo par de acciones, podemos establecer una relación de preferencia.

$$x \succeq x' \quad \text{ó} \quad x' \succeq x \quad \forall x, x' \in \mathcal{X}$$

El segundo elemento es uno de coherencia. Si yo prefiero manzanas sobre peras, y peras sobre naranjas, entonces tiene que ser que prefiera manzanas sobre naranjas. Esto es lo que llamamos **TRANSITIVIDAD**. En la mayoría de los escenarios, esto es fácil de convencer. Sin embargo, en otros escenarios, como la política, puede presentar problemas. Este axioma nos permitirá poner un orden consistente entre todas las opciones. No habrán redundancias entre la comparación de ellas.

Axioma de Transitividad

Si el agente prefiere x sobre x', y x' sobre x'', el agente debe preferir x sobre x''. Esto es:

$$x \succeq x' \text{ y } x' \succeq x'' \implies x \succeq x'' \quad \forall x, x', x'' \in \mathcal{X}$$

Cuando hablamos de **preferencia** ($\succeq$), esto significa que la canasta que esta a la izquierda es **preferida o indiferente** por sobre la otra. No quiere decir que sea "mayor".

Tampoco sería ideal que ante cambios muy chicos en acciones, nuestra preferencia salte de manera loca hacia otro lado. Matemáticamente nos puede complicar mucho, y tampoco es algo razonable. Por esto, también vamos a soler pedir lo que llamamos **CONTINUIDAD**

Axioma de Continuidad

Si $x, y, z \in \mathcal{X}$ son tales que $x \succ y \succ z$, entonces existe un número $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$y \sim \lambda x + (1 - \lambda) z.$$

Finalmente, vamos a suponer que las preferencias son **CONVEXAS** (no confundir más adelante con que las funciones de utilidad sean o no convexas). Esto implica que vamos a preferir combinar peras y manzanas, en vez de sólo peras o sólo manzanas. Esto tiene consecuencias matemáticas que nos permitirán hacer todo tipo de análisis a través de lo que implica sobre la modelación de funciones de utilidad.

Axioma de Convexidad

Las preferencias son convexas si, para cualesquiera dos canastas $x, y \in \mathcal{X}$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que:

$$x \succeq y \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + (1-\lambda)y \succeq y.$$

Esta propiedad refleja la tendencia del consumidor a favorecer combinaciones de bienes, evidenciando una preferencia por la diversidad frente a extremos.

Vamos a ver que con los primeros dos axiomas, Completitud y Transitividad, podremos construir una función de utilidad. Movernos a este mundo nos permitirá hacer una inmensidad de análisis útil, y olvidarnos de este esquema abstracto por un buen tiempo. Sin embargo, este enfoque sigue siendo sumamente importante, y un objeto de estudio de meses para varios cursos de microeconomía avanzada. Sin embargo, este material está hecho para alumnos de nivel intermedio, por lo que no adentraré en esta forma de evaluar decisiones.

2.1.2. De preferencias a curvas de utilidad

Si las preferencias de un individuo cumplen **completitud** y **transitividad**, al igual que **reflexivas** y **monótonas** en sentido fuerte, entonces tenemos que existe una función de utilidad continua $f_U = \mathbb{R}^{+n} \to \mathbb{R}$ que representa estas preferencias.

Completitud nos permitirá que podamos mapear cada acción posible a un número, y al ser un número en los reales, éste podrá ser comparado con cualquier otro. A la vez, el conjunto de los reales es transitivo, lo que implica que tenemos un orden consistente de las canastas a través de este mapeo.

Pasemos a centrarnos en la toma de decisiones sobre canastas. Es decir, vamos a elegir una cierta cantidad de bienes que el agente va a consumir. Por ahora, nos centraremos en sólo dos bienes. La forma que tenemos para graficar las preferencias a través de funciones de utilidad es a través de lo que llamamos **curvas de indiferencia**.

Al igual que el nombre, las curvas de indiferencia nos dicen **todas** las combinaciones posibles de ambos bienes, tales que un individuo está indiferente entre cualquiera de ellas. Es decir, si yo le propusiera a un agente que escoja una canasta dentro de esta curva de indiferencia, él respondería "me da lo mismo cualquiera de ellas". Esto lo podemos apreciar en la 2.1.

Figura 2.1: Curva de indiferencia

Es importante analizar y entender el porqué de esta figura, y cada elemento detrás de ella. En el eje horizontal, tenemos la cantidad del bien x_1 que el agente decide consumir, mientras que en el vertical tenemos lo que consumiría del bien x_2. La decisión de consumo se da en sólo un punto, lo cual indicaría cuanto de cada bien consumir. A través de cada posible combinación de x_1 y x_2 pasa una curva de indiferencia, es decir, un nivel de utilidad y la descripción de todas las combinaciones de bienes que dan ese nivel de utilidad. Por ejemplo, las canastas A, B y C son todas igual de preferidas por el individuo. En términos de la función de utilidad, cualquiera de esas combinaciones nos da el mismo número de salida. La curva superior es una curva de indiferencia que da más utilidad que la anterior, por lo tanto, A', B' y C' son todas igualmente preferidas entre ellas, pero cualquiera de ellas es más preferida que A, B y C. Cuál sea la decisión final a tomar dependerá de la restricción presupuestaria del individuo, que veremos más adelante. ¿Qué rol juega cada axioma visto anteriormente?

- El axioma de completitud permite que nos podamos pronunciar ante cualquier combinación de x_1 y x_2, y que no hayan puntos en el gráfico por donde no pase una curva de utilidad y no nos podamos pronunciar sobre ella.
- Transitividad implica varias cosas. Primero, implica que si A es igual de preferida que B, y B es igual de preferida que C, entonces A también es igual de preferida que C. Las tres están en la misma curva de indiferencia por esta misma razón. Por otro lado, Cualquier canasta sobre $\overline{u_1}$ es más preferida que cualquiera entre $\overline{u_1}$ y $\overline{u_0}$, y cualquiera en el espacio entre las dos curvas también es más preferida que cualquier combinación sobre $\overline{u_0}$, por lo tanto cualquier combinación de $\overline{u_1}$ es también preferida sobre $\overline{u_0}$. **De manera importante, esto también implica que las curvas de indiferencia nunca se tocan.** En caso de tocarse, transitividad no se cumpliría. Es por esto, que saltar de cualquier canasta A,B,C a A',B',C' nos daría un aumento de utilidad.
- Convexidad nos da la forma convexa de la curva de indiferencia. Noten que el punto B, siendo una combinación en menor cantidad de cada bien, es igual de preferida que mucho de un bien o del otro. De hecho, si yo combinara dos puntos dos canasta de una misma curvas de indiferencia, la resultante sería preferida (pasa una curva de indiferencia más arriba).
- Continuidad nos otorga que estas curvas de indiferencia sean suaves, y que no hayan saltos bruscos, lo que podría complicar el análisis.

¿Cómo obtenemos matemáticamente una curva de indiferencia? Por definición, esta es:

$$\overline{u} = u(x_1, x_2),$$

para cualquier utilidad $\overline{u}$. Por ejemplo, consideremos un agente que tiene una función de utilidad Cobb-Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Dada la característica multiplicativa de esta función, hay varias combinaciones de x_1 y x_2 tal que tenemos el mismo nivel de utilidad, de hecho, de ser graficado es muy parecido a la figura 2.1. Para quienes tengan dificultad en imaginar funciones, siempre pueden despejar el eje x_2 y observar cómo se forma la ecuación en el gráfico. Dejemos x_2 a la izquierda de la ecuación sola y veamos cómo se ve.

$$x_2 = \left(\frac{x_1^{\alpha}}{\overline{u}}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Notemos que, si se consume mucho de x_1, x_2 tiende a 0, y viceversa. De hecho, si consumo un número muy alto de x_1, basta con que me den poco x_2 para estar con un nivel de utilidad mucho mayor. Esto se debe a características que veremos más adelantes, específicamente la utilidad marginal decreciente de la función de utilidad. La pendiente de la curva de indiferencia la llamaremos **Tasa Marginal de Sustitución** (TMS), y la definiremos de la siguiente manera:

$$du = \frac{\partial u}{x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{x_2} dx_2 = 0.$$

Reordenando, tenemos lo siguiente:

$$TMS \quad = \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}.$$

Esto es, en la práctica, cuánto estamos a sacrificar de un bien, con tal de ser igual de felices con más del otro bien. Veremos que este concepto es uno de los más importantes en microeconomia, y lo usaremos constantemente a lo largo de toda la profesión.

Hay dos componentes que son claves que aún no hemos mencionado: $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1}$. Estas son las famosas **utilidades marginales**, estas significan cuánta utilidad extra nos aporta una unidad de cada bien. Por eso su nombre, es la utilidad **marginal** de una unidad extra de cada bien. La forma que toman estas derivadas son fundamentales para entender el comportamiento de los agentes. Si, por ejemplo la derivada respecto a x_1 depende positivamente del consumo de x_2, entonces el consumo es complementario, porque cuánto obtenga de utilidad por consumir x_1 dependerá de cuántas unidades tenga de x_2. Mientras más unidades tenga de x_2, más feliz seré si tengo una unidad extra de x_1. Imaginen que están comiendo unas ricas papas fritas, y tienen muchas papas fritas pero nada más. Claro, son felices porque pueden comer mucho de eso, sin embargo, una bebida les daría muchísima utilidad porque ahora pueden seguir comiendo papas fritas sin quedar secos de la garganta. Lo mismo sucederá más adelante en las producciones de las firmas. Si hay operadores de máquinas y máquinas, cada máquina aportará mucho más si tengo varios trabajadores, porque pueden usarlas sin problemas de toparse entre ellos con las mismas máquinas. Pero si tuviéramos pocos trabajadores, y compramos una máquina más, no aporta mucho la máquina debido a que sólo pueden operar una cierta cantidad de máquinas hasta coparse.

Esta intuición es fundamental detrás de las decisiones de consumo. Será esta complementariedad (o no-complementariedad) junto con los precios lo que determine cuánto consumir de cada bien. De hecho, usualmente veremos que el óptimo se dará cuando el ratio de utilidades marginales sea igual al de los precios, es decir, la relación de lo que estamos recibiendo en utilidad es exactamente lo mismo que la relación de cuánto estamos pagando. De ser diferente, podemos cambiar la locación de consumo a una donde recibo más utilidad a cambio de comprar menos de un bien y más del otro. **La clave es balancear el consumo de manera de aprovechar la complementariedad al máximo, y así obtener la mayor cantidad de utilidad marginal de cada bien.**

- $\frac{\partial u}{\partial x_1}$: utilidad marginal del bien i;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j m}$: complementariedad del bien i con el bien j.

Usualmente requeriremos algunas condiciones más en términos de propiedades de preferencias, me limitaré a mencionar sólo una porque creo que el resto no vale la pena para el enfoque de este documento. Los agentes van a soler tener **no saciedad**, significando que siempre tendremos una mejor canasta a la cual aspirar. Nunca el agente dirá "no más". Si le damos más de cada bien, a pesar de que tenga mucho, algo de utilidad le dará, por más baja que sea.

Antes de pasar a ver cómo un agente elige la canasta óptima, necesitamos un segundo componente: la restricción presupuestaria.

2.1.3. Restricción Presupuestaria

Obviamente, cuando uno va a comprar algo, siempre se enfrenta a algún tipo de restricción, ya sea monetaria, o de capacidad de traslado, etc. En particular, llamaremos restricción presupuestaria a aquella que está dada por precios y cuánto dinero posee una persona para gastar. Siempre un agente tendrá un nivel de ingreso m para gastar, y enfrentará precios p_1 y p_2.

La ecuación que describe una restricción presupuestaria está dada entonces por:

$$m \geq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2.$$

Examinemos con cuidado:

- m es el ingreso que tenemos para gastar
- $p_1 \cdot x_1$ es el **gasto total** en el bien x_1. Si cada manzana cuesta diez pesos, y compro diez manzanas, entonces claramente gasto 100 pesos en manzanas. Tenemos el mismo análisis para $p_2 \cdot x_2$. Sumando ambos términos, tenemos todo el gasto total.

Dado que mencioné a fines de la sección pasada que tendremos individuos con **no-saciedad,** podemos olvidarnos de la desigualdad de la restricción presupuestaria, y plantear con igualdad. Esto ocurre porque, dado que siempre puedo comprar algo, y estamos ante un modelo donde sólo puedo gastar en bienes y quedarme con dinero en el bolsillo no me da utilidad, entonces siempre preferiré gastarme el dinero, y nunca exploraremos áreas donde está sobrando dinero.

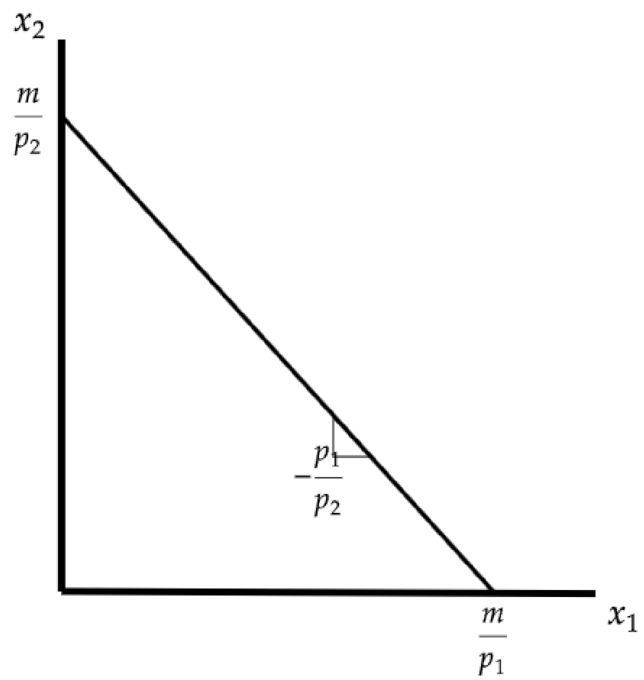


Figura 2.2: Restricción presupuestaria

En el gráfico 2.2 tenemos la representación gráfica de la restricción presupuestaria. Cualquier punto a lo largo de la línea es una combinación de bienes tales que nos gastamos exactamente la cantidad de dinero m. El corte en el eje vertical se da cuando nos gastamos todo el dinero en el bien x_2, mientras que el corte en el eje horizontal se da cuando nos gastamos todo en x_1. La pendiente de esta restricción se da por $-\frac{p_1}{p_2}$. Esto último es lo que llamamos **costo de oportunidad**, es cuánto estamos renunciando de un bien a cambio de otro. Por ejemplo, si la pendiente fuera de -1/2, esto significa que cada unidad de x_2, sacrificamos dos unidades de x_1 (notar que se lee un poco al revés, el denominador nos dice cuánto renunciamos del primer bien en este caso).

Si el precio del bien 1 aumenta, la pendiente es más alta, y puedo comprar menos de ese bien. Si sólo aumenta el precio del bien 2, la pendiente es más plana. Si ambos aumentan en la misma cantidad, la pendiente no cambia, pero si cambia el nivel. Notar que un desplazamiento de los precios en misma magnitud, es exactamente lo mismo que una caída en ingreso.

2.1.4. Elección del consumidor en un mercado competitivo

Teniendo ya todos los elementos, podemos proceder a ver cómo elegir una canasta de manera óptima. Para esto, usaremos cálculo multivariable con restricciones, o el famoso método del Lagrangeano. Como dije en la introducción de este libro, no porque hayan pasado Cálculo con duras penas, no es posible que entiendan qué vamos a hacer.

El problema del consumidor es entonces elegir la combinación de bienes que maximiza la utilidad del agente, **sujeto a** no gastar más que nuestro dinero, y a no consumir negativo (que por ahora omitiremos en el análisis hasta ver Karush-Kuhn-Tucker, recordemos que el objetivo en este libro es dar un poco de intuición a alumnos que tengan dificultades con matemáticas pero les gusta la economía). Dado lo mencionado sobre no saciedad, esta restricción la limitaremos a gastarnos exactamente todo nuestro dinero. Es decir, la restricción se cumple con igualdad.

Gráficamente, el problema y su solución lo representamos con la figura 2.3

- Dado una restricción presupuestaria **fija,** ¿qué combinación de ambos bienes me otorga la curva de indiferencia más alta? Es decir, de las infinitas posibles curvas de indiferencia, veremos aquella que pasa lo más lejos del origen (la utilidad resultante más alta), pero que sea posible pagar.

- Notemos que, como resultado visual inicial, tenemos que la canasta que da más utilidad es aquella donde la **pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria.** Es decir, el costo de oportunidad entre ambos bienes es el mismo que la tasa a la cual cambio un bien por otro y soy igual de feliz.

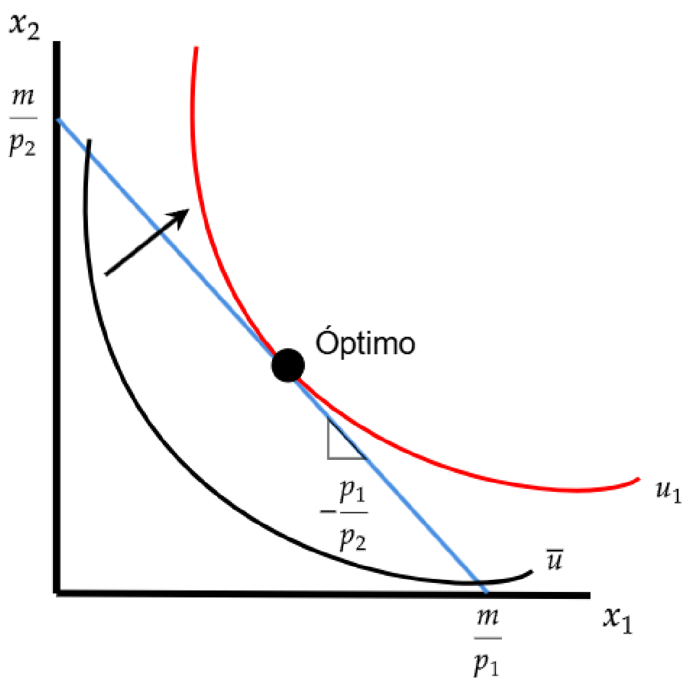


Figura 2.3: Elección óptima

- En caso de que sean distintas, por ejemplo que el costo de oportunidad sea más bajo en términos de x_1, significa que estoy dispuesto a cambiar de x_1 por x_2, y la utilidad que recibo por el lado de más x_2 es más alta que la que pierdo por reducir mi consumo de x_1.

El problema a plantear es entonces:

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) \quad \text{sujeto a:} \quad m = p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot x_2.$$

Y, como mencionamos anteriormente, solucionaremos este problema usando el método del lagrangeano. Iré con mucho cuidado en esta sección, porque creo que suele ser el área que más estudiantes suelen mecanizar sin ninguna comprensión de lo que estamos haciendo. Esto, ante ejercicios que pueden salir de la norma, puede provocar resultados completamente equivocados. Una alerta: el método correcto para resolver esto es el método Karush-Kuhn-Tucker, que se hace cargo de no-negatividad y la holgura de las restricciones, pero lo veré más a profundidad más adelante. Por ahora, para no asustar a los lectores, asumiremos que todo está bien y no examinaremos a profundidad esto, lo cual agrega unas restricciones extra. Pero es sumamente importante entenderlo porque otorga intuiciones claves para solucionar problemas difíciles.

Usemos una función de utilidad común, una Cobb-Douglas con exponentes de 0,5. Notemos que esta función cumple con todos los supuestos y axiomas que hemos mencionado, y de manera importante, también cumple con no saciedad, que dijimos que vamos a cumplirla siempre. Veamos cómo es esta función en el plano 3D.

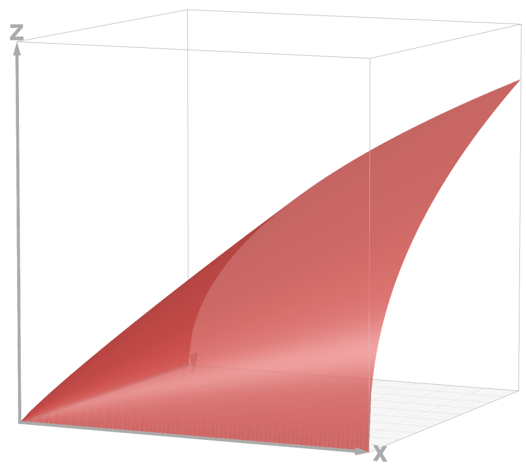


Figura 2.4: Función de utilidad en tres dimensiones. Z es el nivel de utilidad, X el consumo de x_1 e Y el consumo de x_2

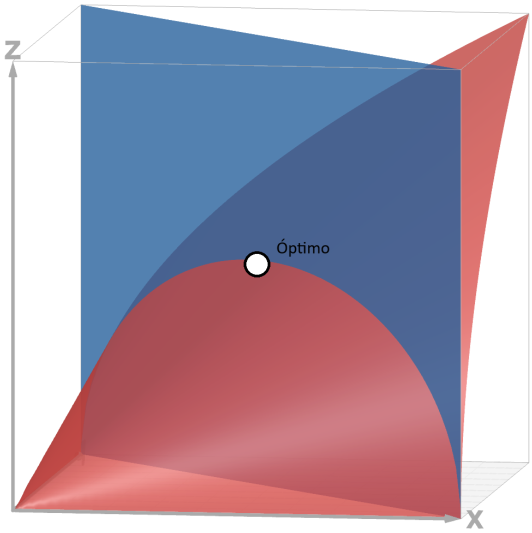


Figura 2.5: Representación del lagrangeano

Dado que es una función estrictamente creciente y monótona, y en consecuencia, las preferencias son no saciables, tenemos que la utilidad del individuo crece hacia el infinito y más allá. Sin embargo, no es posible elegir cualquier punto, de manera contraria, elegiríamos el infinito (si se pudiera elegir). Es aquí donde entra en juego la restricción presupuestaria. Si imaginamos que la función de utilidad es una montaña, y quiero llegar al punto más alto de la montaña posible, de no haber una restricción, seguiría siempre subiendo y nunca llegaría a nada. Pero la restricción actúa como una muralla que impide ir más allá de ella. Por lo tanto, nuestro problema se reduce solamente a elegir cuál es el punto más alto de la montaña, que esté pegado a la muralla. Así, encontraremos el punto más alto posible. Esto lo podemos apreciar en la figura 2.5.

Entonces, primero, queremos ver cuales condiciones son necesarias para encontrar un óptimo, y luego en qué punto de la restricción presupuestaria podemos encontrar una canasta que cumpla con aquello. Notar que esta figura es lo mismo que 2.3 pero tomando una dimensión extra. Ahora solucionaremos paso a paso el problema.

- Paso 1: Formulación del Lagrangeano.

  Definimos la función Lagrangeano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda\Big(m - p_1x_1 - p_2x_2\Big).$$

  Siempre habrán dos términos en el caso clásico, el primero es la función de utilidad, después la restricción a hacerse cero. En caso de agregar más restricciones, sumamos más multiplicadores lagrangenanos multiplicados por la restricción. La interpretación de λ es lo que llamamos **precio sombra**, en cuánto aumenta la utilidad y si aumentáramos el ingreso. Es el costo de nuestra restricción.

- Paso 2: Obtención de las Condiciones de Primer Orden (FOC). Se derivan parcialmente $\mathcal{L}$ respecto a x_1, x_2 y λ, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = u_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0, \quad (1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = u_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0, \quad (2)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \quad (3)$$

- Paso 3: Condición de Optimalidad (MRS).

  Dividiendo la ecuación (1) entre la (2) se obtiene:

$$\frac{u_{x_1}(x_1, x_2)}{u_{x_2}(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

  Esta relación expresa que, en el punto óptimo, la tasa marginal de sustitución (MRS) es igual a la razón de precios.

- Paso 4: Formulación del Sistema de Ecuaciones Implícitas.

  El óptimo se define implícitamente mediante el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{x_1}(x_1, x_2)}{u_{x_2}(x_1, x_2)} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

  Este sistema determina el punto de tangencia entre la curva de indiferencia (donde la utilidad es constante) y la línea de la restricción presupuestaria.

  Esto es fundamental. Estas dos ecuaciones describen las dos cosas relevantes que deben pasar en un óptimo. Primero, el costo de oportunidad tiene que ser igual al ratio de las utilidades marginales. Recordemos que, en caso contrario, conviene moverse hacia alguna dirección para ganar más utilidad consumiendo un bien de la que perdemos dejando de lado el otro bien. Pero notemos que esta condición puede cumplirse en una infinidad de puntos en el gráfico y abajo de la restricción presupuestaria. El problema ahora se convierte en elegir qué punto que cumple esa condición es el óptimo. Aquí es donde entra la restricción presupuestaria con igualdad, la cual nos asegura que **debemos** estar en el borde de la restricción presupuestaria, gastando todo el dinero. Sin esto, bastaría con ponerse en cualquier punto que cumpla la primera condición. Esto se aprecia en la Figura 2.6.

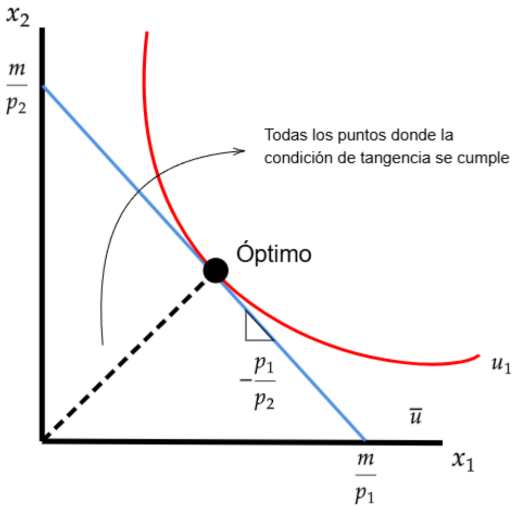


Figura 2.6: La sección punteada muestra todos los puntos donde se cumple sólo la primera restricción.

- Paso 5: Conclusión.

  Bajo las hipótesis de diferenciabilidad, crecimiento estricto y cuasi-concavidad de $u(x_1, x_2)$, el teorema del máximo garantiza la existencia y unicidad del óptimo. Así, el par (x_1^*, x_2^*) que satisface:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{u_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{u_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m, \end{array}}$$

  es la solución óptima del problema del consumidor.

La demanda encontrada de cada bien es lo que llamamos una **demanda marshalliana.** Tal cual como hemos hecho, esta demanda surge del proceso de maximización de utilidad. Más adelante veremos que no es la única forma de abordar la toma de decisiones.

Recuerden, para obtener una demanda marshalliana, tenemos que maximizar la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria. El resultado nos dará una función que nos dice cuánto consumir según **los precios y el nivel de ingreso.**

Solución para Función Cobb-Douglas con Exponentes 0.5 y precios unitarios

Consideremos el problema del consumidor:

$$\max_{x_1,x_2} \; u(x_1,x_2) = x_1^{0,5}\,x_2^{0,5} \quad \text{sujeto a} \quad x_1 + x_2 = 10,$$

donde $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ y el ingreso es $m = 10$.

Paso 1: Formulación del Lagrangeano. Definimos:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = x_1^{0,5}\,x_2^{0,5} + \lambda\,(10 - x_1 - x_2).$$

Paso 2: Condiciones de Primer Orden. Derivamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0,5\,x_1^{-0,5}\,x_2^{0,5} - \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0,5\,x_1^{0,5}\,x_2^{-0,5} - \lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - x_2 = 0. \quad (3)$$

Paso 3: Relación entre x_1 y x_2. Dividiendo (1) entre (2) obtenemos:

$$\frac{0,5\,x_1^{-0,5}\,x_2^{0,5}}{0,5\,x_1^{0,5}\,x_2^{-0,5}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Paso 4: Sustitución en la Restricción. Usando $x_1 = x_2$ en (3):

$$10 - 2x_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^* = 5,$$

y por lo tanto,

$$x_2^* = 5.$$

Conclusión: La solución óptima del problema es:

$$\boxed{x_1^* = 5, \quad x_2^* = 5.}$$

Este escenario es completamente simétrico, es decir, valoramos de misma manera cada bien, y también de manera cruzada entre cada bien. Finalmente, también los precios son iguales entre ellos. Dado esto, el óptimo tiene que darse en el punto donde la tasa de utilidades marginales sean 1 a 1, debido a que el ratio de los precios es 1. Por lo tanto, en la restricción, deberíamos comprar la misma cantidad de cada bien.

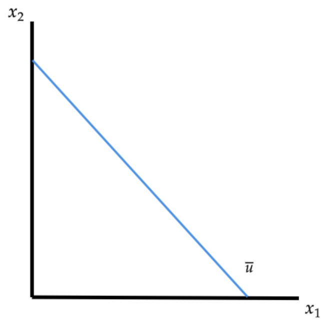


Figura 2.7: Sustitutos perfectos

2.1.5. Cuando el método de lagrangeano no funciona

En mi experiencia como ayudante, el gran problema era cuando teníamos funciones no doblemente diferenciables. Tales son casos famosos como sustitutos perfectos o complementos perfectos. Al no comprender qué es lo que está pasando cuando hacemos un lagrangeano, los alumnos intentaban solucionar el problema de la misma forma que hicimos ahora, sólo para no encontrar nada. Es por esto que encontré buena idea dedicar una sección a mostrar cómo suelo pensar este tipo de problemas.

En general, siempre sabremos cómo abordar el problema observando la función de utilidad. Si la función de utilidad es **cuasi-cóncava** y **doblemente diferenciable**, podremos seguir el camino usual que vimos recién. En caso contrario, hay que tomar otro camino, uno más precavido que requiere entender qué esta pasando.

Caso: Sustitutos perfectos.

El caso de sustitutos perfectos sucede cuando tenemos la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

El nombre lo explica todo, dado que la utilidad se da como suma de ambos bienes, no importa cual de los dos elija, cada unidad aportará utilidad de manera unitaria. Si no puedo comprar de un bien, puedo comprar del otro y se sustituye por completo el nivel de utilidad que el otro otorgaba. El clásico ejemplo es el de bebidas. Imaginemos por un momento que preferimos de igual manera Coca-Cola que Pepsi (a pesar de que la segunda sea mejor). Para el agente, ambas dan el mismo nivel de utilidad. Las curvas de indiferencia se ven según la Figura 2.7.

Notemos que es una recta en 45 grados. Esto se debe justamente a que

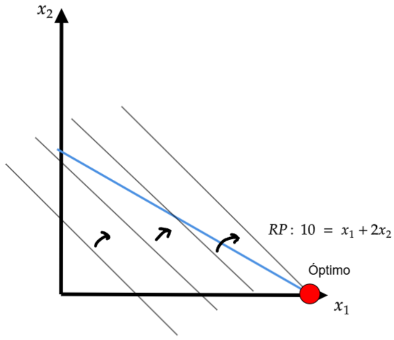


Figura 2.8: Solucionando gráficamente el problema de sustitutos perfectos

la tasa marginal de sustitución es 1. Estoy dispuesto a cambiar exactamente una unidad por otra, con tal de mantener el mismo nivel de utilidad.

Obviamente, si intentáramos derivar y solucionar el problema típico a través de derivación, no llegaríamos a nada porque x_1 y x_2 desaparecen en las derivadas del lagrangeano. Por lo tanto, tenemos que solucionarlo de una forma más manual.

Cómo pensar el problema: lo más importante siempre son los precios

Cuando enfrento un problema no diferenciable, siempre intento primero graficar la curva de indiferencia, y una restricción presupuestaria cualquiera. Luego, el paso más importante es, dejando constante la restricción presupuestaria, donde es lo más lejos que puedo llevar la curva de indiferencia. Esto **siempre** terminará dependiendo de los precios que forman la pendiente de la restricción presupuestaria.

Supongamos que los precios que enfrenta el agente es de $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$, y también posee un ingreso de $m = 10$. Por lo que la pendiente de la restricción presupuestaria es -0,5. Una manera, en la práctica, de ver hacia donde va la respuesta, es dibujar entonces la curva de indiferencia y llevarla lo más lejos posible que cumpla la restricción presupuestaria.

Observemos esto en la figura 2.8, llevamos las curvas de indiferencia lo más lejano posible, lo que nos da un resultado bastante intuitivo: si cada uno nos aporta la misma utilidad, y no hay ningún beneficio en combinar bienes (a diferencia del caso de la Cobb-Douglas), entonces es conveniente simplemente comprar el bien más barato, debido a que si comprara del otro bien, estaría perdiendo la posibilidad de comprar dos unidades del otro y obtener dos útiles extras en vez de uno.

$$x_1^* = 10; \quad x_2^* = 0.$$

Ejercicio para el estudio: imaginen qué pasa si los precios son iguales. En este caso, si hiciéramos el mismo ejercicio gráfico, veríamos que las rectas se superpondrían, dará lo mismo qué combinación de bienes comprar. Da lo mismo cuál sea la combinación, siempre que me gaste todo el ingreso mi utilidad será máxima.

Caso: complementos perfectos

El segundo caso donde todos fallan es el de complementos perfectos, la famosa Leontieff:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$$

El ejemplo intuitivo de estas preferencias son los zapatos. Tener un zapato izquierdo o derecho no nos da utilidad sin el otro, solamente tendremos utilidad si es que tenemos un par de cada uno. Si tuviéramos cero de alguno de ellos,la función mínimo nos devuelve cero. Dado esto, es intuitivo pensar que no hay razón para comprar más de un bien que de otro, debido a que no dará utilidad. Sólo a medida que compremos ambos bienes tendremos utilidad.

La curva de indiferencia tiene forma de letra L. Si tenemos un zapato izquierdo, da lo mismo cuantos zapatos derechos tengamos, siempre nos dará la misma utilidad que tener un zapato (a menos que tengamos 0, en ese caso la utilidad es 0).

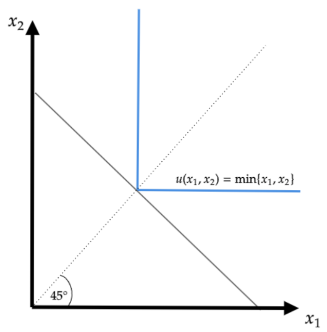


Figura 2.9: Complementos perfectos

Dado cómo opera la función mínimo, es obvio que nunca compraremos más de un bien que de otro, por lo que $x_1^* = x_2^*$. Es decir, **siempre la solución estará en la línea de 45 grados.** ¿Dónde? Bueno, en el punto más lejano donde activemos la restricción presupuestaria, dado que este sería donde gastamos todo el dinero, y además estamos comprando la mayor cantidad de pares de bienes.

$$x_1^* = x_2^* = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

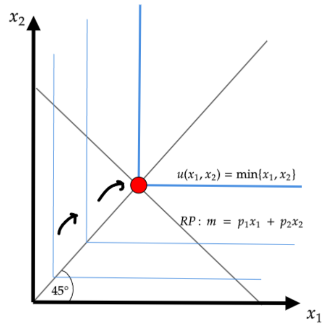


Figura 2.10: Solución del caso de complementos perfectos

Lo importante de estos últimos dos casos es entender qué está pasando. No ver la función y hacer algo mecanizado. Entender cómo funciona la función de utilidad es lo más fundamental del análisis de un consumidor. Profundizaremos más de esto en la próxima sección.

Como se habrán dado cuenta, mi forma favorita de aproximarme a los problemas es siempre ver cómo se comporta la función, luego veo qué herramientas matemáticas usar, el método del lagrangeano sólo lo reservo para casos estándar donde se que la la función es cuasi cóncava, doblemente diferenciable, estrictamente monótona, etc. Más adelante veremos que el método general en profundidad, el famoso Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que es lo que usamos en el caso estándar, pero saltándonos varios pasos importantes que sirven para omitir negatividad en el consumo (no podemos consumir negativo de bienes) y checkear cada condición. De todas formas es importante entenderlo para obtener un marco matemático más riguroso.

Mi caso favorito: un mínimo raro...

Como se habrán dado cuenta, mi forma favorita de aproximarme a los problemas es siempre ver cómo se comporta la función, luego veo qué herramientas matemáticas usar, el método del lagrangeano sólo lo reservo para casos estándar donde se que la la función es cuasi cóncava, doblemente diferenciable, estrictamente monótona, etc. Más adelante veremos que el método general en profundidad, el famoso Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que es lo que usamos en el caso estándar, pero saltándonos varios pasos importantes que sirven para omitir negatividad en el consumo (no podemos consumir negativo de bienes) y checkear cada condición. De todas formas es importante entenderlo para obtener un marco matemático más riguroso.

Mi caso favorito es el siguiente:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1\}$$

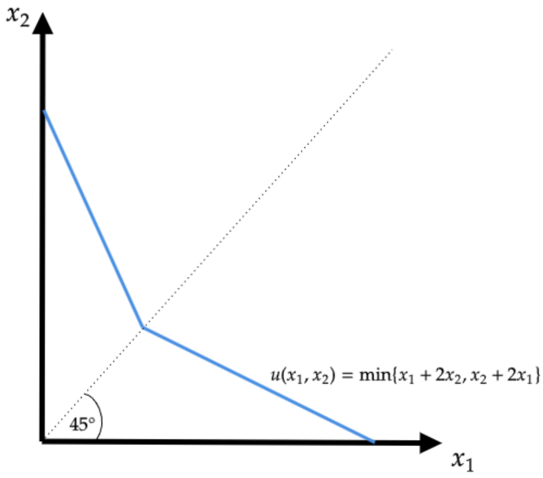


Figura 2.11: Una función muy interesante

Es una mezcla entre los casos de complementos y sustitutos. Y me gusta mucho porque resalta cómo entender la función de utilidad, antes de cualquier otra cosa, nos otorga rápidamente la respuesta que queremos encontrar. Ilustremos esta curva de indiferencia en la figura 2.11.

Notemos que esta preferencia implica intuitivamente lo siguiente: si consumo más de x_2 que de x_1 (estar a la izquierda de la diagonal), entonces la TMS es de 2, lo que implica que estoy dispuesto a cambiar dos unidades de x_2 por una de x_1, por lo que x_1 me da más utilidad marginal que x_2. En el lado derecho de la diagonal, el análisis es al revés. Si estamos consumiendo a la par, estoy igual de feliz que dos unidades de un bien y una del otro.

Si hacemos el mismo método gráfico de dibujar la curva de indiferencia y llevarla lo más lejos posible, nos daremos cuenta que depende **crucialmente** de cómo son los precios para saber dónde debería consumir el agente. De la misma forma que mencióne anteriormente en el caso de Sustitutos que el precio era lo más importante, acá sigue siendo cierto (en todos los casos es cierto, sólo que en complementos perfectos estás obligado a pagar lo que sea para tener uno de cada bien).

Si el precio p_2 es muy bajo, entonces será mejor tomar una canasta del lado izquierdo, porque prefiero ganar la mayor cantidad de mi utilidad a través de consumir x_2. De hecho, para cualquier ratio $\frac{p_1}{p_2} > 2$, tomaremos este camino. Al revés, si el precio p_1 es muy bajo, prefiero ganar toda mi utilidad por el lado derecho de la curva de indiferencia y consumir sólo x_2. Por lo tanto, si $\frac{p_1}{p_2} < 1/2$, nuestro consumo será todo x_1. ¿Qué pasa en otros casos? Bueno, notemos que si $\frac{p_1}{p_2} = 2$, entonces el lado izquierdo de la curva de indiferencia se superpone con la restricción presupuestaria. Lo mismo pasa con el lado izquierdo si $\frac{p_1}{p_2} = 1/2$. Por lo tanto, si el ratio de

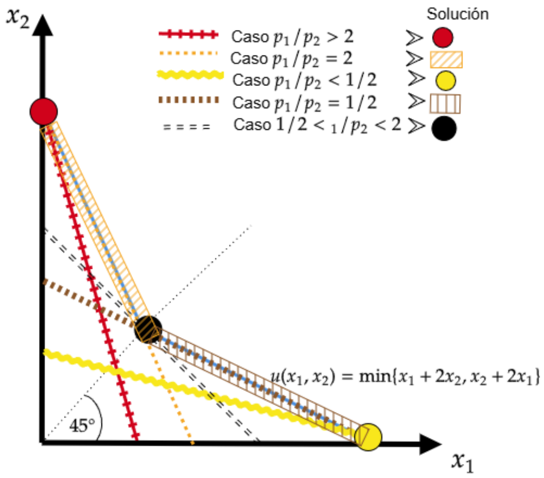


Figura 2.12: Posibles óptimos de una función muy interesante. Cada recta de color representa un caso de precios, mientras que los círculos y rectángulos muestran la solución al color correspondiente.

precios es 2, entonces consume cualquier canasta que esté en la superposición correspondiente la izquierda. Si el ratio de precios es $1/2$, consumirá cualquier canasta que esté en la superposición correspondiente la derecha. Finalmente, si el ratio de precios está entre $1/2$ y 2, notemos que la solución será la de consumir ambos bienes por igual.

Así, ¿cuántas posibles soluciones tenemos? ¡Pues infinitas! Dependerá de los precios. Hay cinco casos, uno para cada escenario, entres de ellos la solución es única, pero en dos casos las soluciones son infinitas (posicionarse en cualquier parte de ese segmento de la recta superpuesta con la curva de indiferencia).

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}, \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & \text{si } \frac{p_1}{p_2} > 2, \\ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ p_1x_1 + p_2x_2 = m, \ x_2 > x_1\} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = 2, \\ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ p_1x_1 + p_2x_2 = m, \ x_1 > x_2\} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{m}{p_1+p_2}, \frac{m}{p_1+p_2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \frac{p_1}{p_2} < 2. \end{cases}$$

Este ejercicio es mi favorito porque resalta la importancia de (i) los precios, y (ii) entender cómo funciona la función de utilidad. Recomiendo fielmente estudiarlo y entenderlo, ayuda mucho a abrir los ojos.

2.1.6. El método de Karush-Kuhn-Tucker

Como dije anteriormente, cometí un gran pecado para todo profesor de microeconomia (so what!), que es solucionar el problema omitiendo elementos relevantes, como las condiciones de holgura complementaria. Cuando solucioné los problemas anteriores, omití casi por completo la condición de no-negatividad y de holgura complementaria. A menos que tengas un profesor que quiera hacer una pregunta muy difícil, mantenerse con los métodos de arriba funciona bien para llegar al grano. De todas formas, alguna vez necesitaremos saber cómo se soluciona esto de manera más formal a través del método KKT.

Este método lo usaremos para lidiar con no-negatividad y holgura de la restricción presupuestaria. Lo primero lo omití, sí, lo acepto. Lo segundo nos lo sacamos de encima rápidamente porque mencioné que sólo nos íbamos a centrar en casos donde los agentes eran no saciables, y siempre que podían consumirían más.

Así, el problema es el mismo, pero con la restricción que antes omitimos en cierta manera.

Considera el problema del consumidor:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & u(x_1,x_2) \\ \text{sujeto a} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \le m, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Sea la función Lagrangiana

$$L(x_1,x_2,\lambda,\mu_1,\mu_2) = u(x_1,x_2) + \lambda\big(m - p_1x_1 - p_2x_2\big) + \mu_1x_1 + \mu_2x_2,$$

donde los multiplicadores de Lagrange cumplen:

$$\lambda \ge 0, \quad \mu_1 \ge 0, \quad \mu_2 \ge 0.$$

Las condiciones de primer orden y de holgura complementaria (KKT) son:

1. Estacionariedad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= u_{x_1}(x_1,x_2) - \lambda p_1 + \mu_1 = 0, \qquad \mu_1x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= u_{x_2}(x_1,x_2) - \lambda p_2 + \mu_2 = 0, \qquad \mu_2x_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Factibilidad primal:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le m, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

3. Factibilidad dual:

$$\lambda \ge 0, \quad \mu_1 \ge 0, \quad \mu_2 \ge 0.$$

4. Holgura complementaria para la restricción presupuestaria:

$$\lambda\Big(m - p_1x_1 - p_2x_2\Big) = 0.$$

Dada una función cualquiera, tendremos que navegar entre los múltiples escenarios para encontrar el máximo global y así solucionar el problema. De hecho, hay ocho casos:

- $x_1, x_2 > 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$. Este es el caso más común, y el que hicimos primero. Dado no saciedad, y complementariedad de las preferencias, consumimos positivo de cada bien. Esta será la solución común cuando hay una interacción entre los bienes en nuestra función de utilidad. Por ejemplo, se multiplican. Si se multiplican, entonces tiene que ser consumo positivo para ambos, de manera contraria tendríamos utilidad cero. Por otro lado, si el agente es no saciable (función siempre creciente), entonces también se cumplirá la restricción presupuestaria de manera activa. Un *tip* popular que hago para verificar que esta sea la solución, es evaluar si se cumple el siguiente límite

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty.$$

  De ser así, entonces tenemos que consumir de ambos bienes, de otra forma convendría tomar una sola unidad del otro bien y obtenemos utilidad marginal infinita.

- $x_1 = 0, x_2 > 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 = 0$. En este caso, se consume sólo un bien. Este caso suele aparecer en sustitutos perfectos o similares, donde no hay interacción entre las variables. A veces surge cuando la restricción presupuestaria es muy acotada y los retornos decrecientes de un bien no alcanzan a agotarse lo suficiente. Si la función de utilidad no tiene una interacción entre las variables, vale la pena ver este caso.

- $x_1 > 0, x_2 = 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 = 0, \mu_2 > 0$. Lo mismo que la anterior pero al revés.

- $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. En este caso, todos los bienes son males, es decir, consumir causa desutilidad.

  Los siguientes casos sólo si dan si las funciones de utilidad no son no-saciables, es decir, si el consumidor puede decidir no querer más de ningún bien. Para estos casos, vale la pena revisar si la función se comporta de forma parabólica.

- $x_1, x_2 > 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$.

- $x_1 = 0, x_2 > 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 > 0, \mu_2 = 0$. E

- $x_1 > 0, x_2 = 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 > 0$.
- $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

Revisando los tips de arriba, debería ser fácil identificar cual caso es el indicado. Mi regla es que si la función de utilidad es cuasi cóncava, monótona y continuamente diferenciable, tomaremos el primer enfoque de inmediato y lo más probable es que estaremos en lo cierto. En caso de que las funciones no tengan interacciones (por ejemplo, que tenga sumas), entonces vale la pena revisar los demás casos.

Notemos que a la derecha de las ecuaciones de Estacionariedad tenemos lo siguiente:

$$\mu_1 x_1 = 0,$$
$$\mu_2 x_2 = 0.$$

Por mucho tiempo omití entender esta restricción, pero con el tiempo me dí cuenta que resumen todos los casos posibles y son bien intuitivas una vez que les das vueltas. Notemos que estas restricciones son con **igualdad**, da lo mismo lo que pase. Esto nos ayuda a evaluar todos los casos. Tomemos como ejemplo la primera.

Tiene que ser **sí o sí** que, o $\mu_1 = 0$, o que $x_1 = 0$, porque la multiplicación siempre tiene que terminar en 0. Esto es porque, en caso de haber consumo positivo del bien 1, entonces la restricción de no-negatividad no está activa, por lo tanto el multiplicador lagrangeano debe ser cero para que se cumpla la ecuación. De caso contrario, si x_1 es cero, entonces la igualdad se cumplirá de todas formas y $\mu_1 > 0$ por definición de la restricción. Esto resume todos los escenarios posibles una vez que vemos el sistema de ecuaciones completo. Por esto, si uno quiere hacerlo cien por ciento correcto (aburrido), entonces vale la pena pasearse por todos los casos. Sin embargo, en una mayoría de los casos esto no es necesario. Basta con guiarse con los tips de arriba.