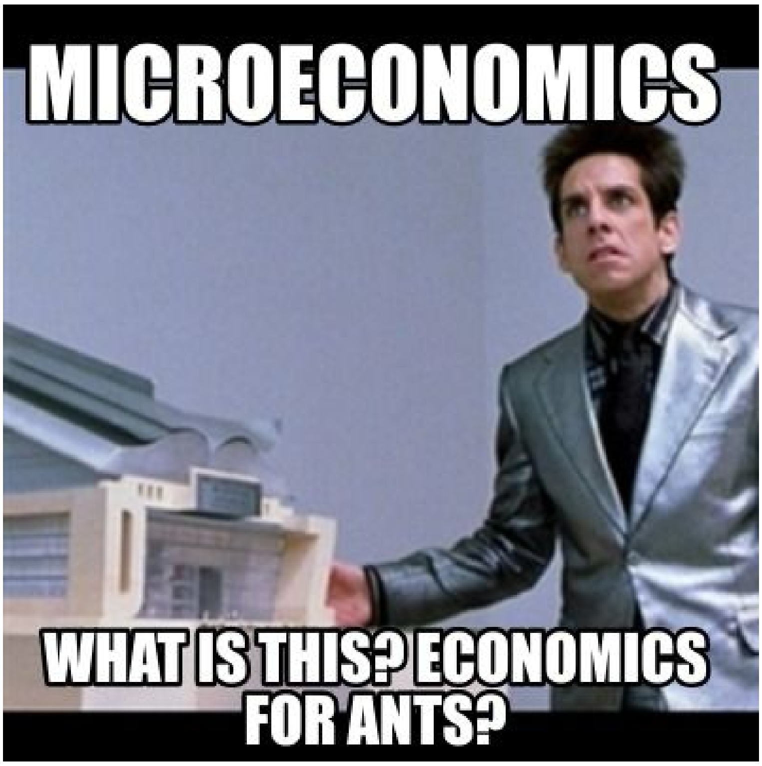
Ant-nomics: microeconomía para hormigas



Raimundo Contreras

4 de junio de 2025

Dedicatoria:

A mi hurón Pareto, por ser el asistente más leal.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este proyecto intenta aportar al conocimiento de estudiantes de pregrado en tópicos relacionados a Microeconomía. Mi objetivo es crear un documento donde se pueda aprender con cierto nivel de rigurosidad matemática, sin perder el enfoque de lo que importa detrás de un modelo, la historia de lo que sucede económicamente. Para esto, intentaré explicar cada modelo importante de los cursos de Microeconomía de una manera en la que, incluso no siendo un as de las matemáticas, uno pueda entender la intuición y los elementos que la componen.

Cuando comencé mi carrera universitaria, mis matemáticas eran débiles dado que no presté mucha atención en el colegio. Los cursos de cálculo los pasé a duras penas, y sentí que sería imposible dedicarme a ser economista sin haber logrado esto. Con el tiempo me dí cuenta que estaba equivocado, y que el esfuerzo lo lograba todo. Mis matemáticas mejoraron a medida que estudiaba los cursos de economía, y gran parte de lo rápido que aprendí creo que vino de intentar siempre atribuir un significado intuitivo a cada elemento matemático detrás de un modelo. Con este documento, quiero lograr lo mismo con otras personas, y que no sientan que pueden quedarse abajo de sus sueños, por no haber pasado bien un curso, o no haber entendido todo en su minuto.

El gran objetivo de aprender economía es entender cómo administramos recursos escasos cuando tenemos distintos agentes que necesitan satisfacer necesidades individuales o colectivas. Lo primero que viene a la cabeza cuando entramos a un curso introductorio de economía es que queremos entender cómo opera un mercado. Cuando hablamos de un mercado, nos referimos a un espacio, no necesariamente físico, donde distintos agentes tranzan bienes o servicios. Sin embargo, con el tiempo nos daremos cuenta que las herramientas que poseemos no nos limitan a estudiar otras dimensiones de la vida humana. De hecho, el horizonte de estudio en Economía es bastante amplio. Si lo pensamos, muchas cosas en la vida cotidiana son escasas, no sólo los recursos para administrar una empresa o hacer las compras de la semana. Por ejemplo, hay literatura económica (muy lejana a lo que veremos en este documento) donde podemos entender cómo la gente decide mentir para convencer a otras personas para hacer ciertas acciones, ¿hay cabida para nosotros en estudiar este tema? ¡Sí! Justamente, si uno miente todo el tiempo, nadie te creerá nunca. Si nunca mientes, la gente te creerá todo el tiempo, pero puedes pasar de largo en situaciones donde mentir quizás hubiera sido lucrativo (dejando fuera del análisis elementos importantes como la ética detrás de mentir). Dado esto, la acción de mentir también enfrenta una dimensión de escasez que no es obvia de entender. Así, el estudio de la Economía abarca un espacio más amplio de lo que se suele esperar. Todavía queda mucho horizonte por explorar, y también incentivo a que puedan usar parte de estas herramientas en expandir la frontera cuando podamos. Dicho esto, el punto inicial para aprender economía sí recae en entender cómo operan los mercados "tradicionales"que uno se imagina. Esto nos da una intuición fundamental gracias a la facilidad para entender conceptos como preferencias, precios, eficiencia, etc... Y por supuesto, abarca gran parte de los tópicos en los que quieren trabajar economistas.

Este documento puede tener errores de escritura, matemáticas, entre otros. Si encuentran alguno, feliz de que me contacten a rcontreras1@alumni.uc.cl. Ni esta introducción ni el resto del contenido está en su forma final.

En la mayor parte de este libro, me apoyo en el libro Microeconomía (2018) de Bernardita Vial y Felipe Zurita. El libro es ampliamente usado en Latinoamérica, y creo que el objetivo óptimo de este libro es ser un acompañamiento para personas que estén estudiando de Vial y Zurita. El resto viene de mis apuntes personales que he hecho a lo largo de mis años como ayudante y, por supuesto, del gran Mas-Colell, Whinston y Green (1995). Por lo menos en la primera parte, la mayor parte de la notación es la de Vial y Zurita (2008), por la misma razón de su amplio uso.

Capítulo 2

Teoría del Consumidor

El objetivo de este primer capítulo es entender cómo **individuos** toman decisiones al enfrentar restricciones, de manera de poder predecir cuál sería la acción de un agente ante futuros casos hipotéticos. Por ejemplo, podríamos calcular cuánto debería sustituir el consumo de un bien por otro similar ante cambios en precios. Seguramente el lector ya estará familiarizado con conceptos básicos relacionados a esto, por ejemplo, los axiomas de elección o el uso básico de funciones de utilidad. Sin embargo, mi objetivo con este capítulo será hacer un repaso profundo que permita una comprensión fácil de cómo cada elemento nos otorga la posibilidad de hacer este análisis mediante modelos matemáticos.

2.1. Preferencias y Elección

Antes de usar las famosas funciones de utilidad, es importante entender porqué podemos efectivamente usarlas. Si lo pensamos duramente, no es inicialmente obvio que podamos resumir las preferencias de los agentes en simples funciones. Para esto, primero abarcaremos una mirada bien básica y general de cómo los agentes toman decisiones, para luego poder darnos cuenta que, bajo ciertas suposiciones intuitivas y razonables, podemos lograr resumir las preferencias de un agente en funciones.

2.1.1. Axiomas de elección

Estas suposiciones son lo que llamamos **Axiomas de elección**. Consideremos que tenemos un conjunto de acciones posibles a hacer, ya sea elecciones de canastas, actividades que hacer, lo que uno quiera. Llamaremos a este conjunto $\mathcal{X}$, y a cualquier acción dentro de este lo denominaremos como x. Recordar que estamos en la versión más básica de pensar cómo las personas tomamos decisiones.

Primero, tenemos que ser capaces de tener una preferencia o indiferencia por alguna de las canastas. Puede sonar obvio, pero no lo es taaaanto. Esto implica que, ante dos elementos cualquiera que comparemos, siempre nos podemos **pronunciar** sobre estos dos. Ya sea que prefiere una o la otra, o está indiferente. Esto es lo que llamamos el axioma de **COMPLETITUD**. Si hay dos acciones donde un agente simplemente no puede **decir** nada (ojo, indiferencia sí implica decir algo), entonces no hay completitud. Nos centraremos **siempre** en escenarios donde las preferencias de los agentes son **completas.** Completitud nos permitirá poder mapear con un orden consistente, pero necesitaremos más elementos.

Axioma de Completitud

Para todo par de acciones, podemos establecer una relación de preferencia.

$$x \succeq x' \quad \text{ó} \quad x' \succeq x \quad \forall x, x' \in \mathcal{X}$$

El segundo elemento es uno de coherencia. Si yo prefiero manzanas sobre peras, y peras sobre naranjas, entonces tiene que ser que prefiera manzanas sobre naranjas. Esto es lo que llamamos **TRANSITIVIDAD**. En la mayoría de los escenarios, esto es fácil de convencer. Sin embargo, en otros escenarios, como la política, puede presentar problemas. Este axioma nos permitirá poner un orden consistente entre todas las opciones. No habrán redundancias entre la comparación de ellas.

Axioma de Transitividad

Si el agente prefiere x sobre x', y x' sobre x'', el agente debe preferir x sobre x''. Esto es:

$$x \succeq x' \text{ y } x' \succeq x'' \implies x \succeq x'' \quad \forall x, x', x'' \in \mathcal{X}$$

Cuando hablamos de **preferencia** ($\succeq$), esto significa que la canasta que esta a la izquierda es **preferida o indiferente** por sobre la otra. No quiere decir que sea "mayor".

Tampoco es ideal que ante cambios muy chicos en acciones, nuestra preferencia salte de manera loca hacia otro lado. Matemáticamente nos puede complicar mucho, y tampoco es algo razonable. Por esto, también vamos a soler pedir lo que llamamos **CONTINUIDAD**

Axioma de Continuidad

Si $x, y, z \in \mathcal{X}$ son tales que $x \succ y \succ z$, entonces existe un número $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$y \sim \lambda x + (1 - \lambda) z.$$

Finalmente, vamos a suponer que las preferencias son **CONVEXAS** (no confundir más adelante con que las funciones de utilidad sean o no convexas). Esto implica que vamos a preferir combinar peras y manzanas, en vez de sólo peras o sólo manzanas. Esto tiene consecuencias matemáticas que nos permitirán hacer todo tipo de análisis a través de lo que implica sobre la modelación de funciones de utilidad.

Axioma de Convexidad

Las preferencias son convexas si, para cualesquiera dos canastas $x, y \in \mathcal{X}$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que:

$$x \succeq y \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + (1-\lambda)y \succeq y.$$

Esta propiedad refleja la tendencia del consumidor a favorecer combinaciones de bienes, evidenciando una preferencia por la diversidad frente a extremos.

Vamos a ver que con los primeros dos axiomas, Completitud y Transitividad, podremos construir una función de utilidad. Movernos a este mundo nos permitirá hacer una inmensidad de análisis útil, y olvidarnos de este esquema abstracto por un buen tiempo. Sin embargo, este enfoque sigue siendo sumamente importante, y un objeto de estudio de meses para varios cursos de microeconomía avanzada. Sin embargo, este material está hecho para alumnos de nivel intermedio, por lo que no adentraré en esta forma de evaluar decisiones.

2.1.2. De preferencias a funciones de utilidad

Si las preferencias de un individuo cumplen **completitud** y **transitividad**, al igual que **reflexivas** y **monótonas** en sentido fuerte, entonces tenemos que existe una función de utilidad continua $f_U = \mathbb{R}^{+n} \to \mathbb{R}$ que representa estas preferencias.

Completitud nos permitirá que podamos mapear cada acción posible a un número, y al ser un número en los reales, éste podrá ser comparado con cualquier otro. A la vez, el conjunto de los reales es transitivo, lo que implica que tenemos un orden consistente de las canastas a través de este mapeo. Por ejemplo, si una canastas A nos da una utilidad de 10, B nos da 15 y C nos da 20, entonces por transitividad de los reales, C será preferida a B, y B a A.

El paso de preferencias a funciones de utilidad es no menor, de hecho, economistas y matemáticos tomaron harto tiempo en hacer este paso. Sin embargo, no es el enfoque de cursos de microeconomia de pregrado.

Pasemos a centrarnos en la toma de decisiones sobre canastas, usando funciones de utilidad. Es decir, vamos a elegir una cierta cantidad de bienes que el agente va a consumir. Por ahora, nos centraremos en sólo dos bienes.

La forma que tenemos para graficar las preferencias a través de funciones de utilidad es a través de lo que llamamos **curvas de indiferencia**.

Al igual que el nombre, las curvas de indiferencia nos dicen **todas** las combinaciones posibles de ambos bienes, tales que un individuo está indiferente entre cualquiera de ellas. Es decir, si yo le propusiera a un agente que escoja una canasta dentro de esta curva de indiferencia, él respondería "me da lo mismo cualquiera de ellas". Esto lo podemos apreciar en la figura 2.1.

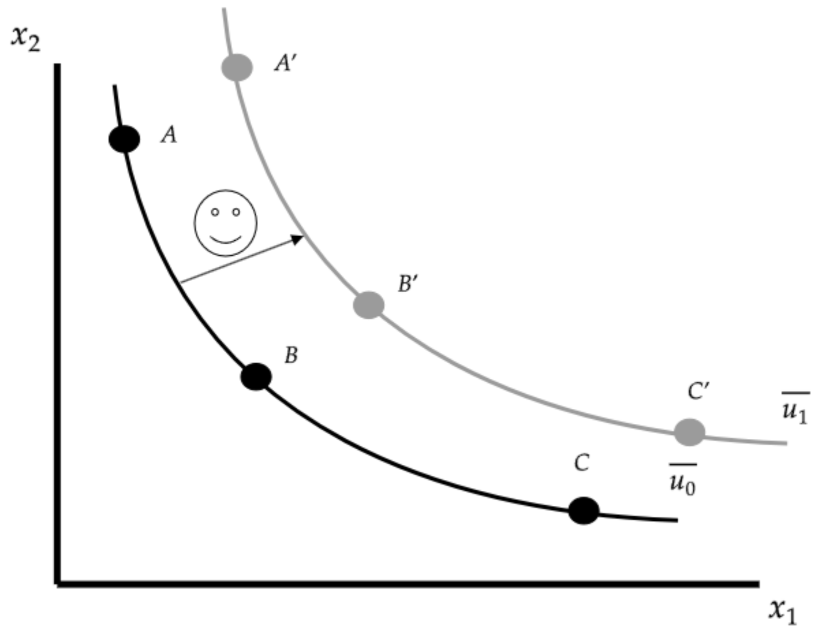


Figura 2.1: Curva de indiferencia

Es importante analizar y entender el porqué de esta figura, y cada elemento detrás de ella. En el eje horizontal, tenemos la cantidad del bien x_1 que el agente decide consumir, mientras que en el vertical tenemos lo que consumiría del bien x_2. La decisión de consumo se da en sólo un punto, lo cual indicaría cuanto de cada bien consumir. A través de cada posible combinación de x_1 y x_2 pasa una curva de indiferencia, es decir, un nivel de utilidad y la descripción de todas las combinaciones de bienes que dan ese nivel de utilidad. Por ejemplo, las canastas A, B y C son todas igual de preferidas por el individuo. En términos de la función de utilidad, cualquiera de esas combinaciones nos da el mismo número de salida. La curva superior es una curva de indiferencia que da más utilidad que la anterior, por lo tanto, A', B' y C' son todas igualmente preferidas entre ellas, pero cualquiera de ellas es más preferida que A, B y C. Cuál sea la decisión final a tomar dependerá de la restricción presupuestaria del individuo, que veremos más adelante. ¿Qué rol juega cada axioma visto anteriormente?

- El axioma de completitud permite que nos podamos pronunciar ante cualquier combinación de x_1 y x_2, y que no hayan puntos en el gráfico por donde no pase una curva de utilidad y no nos podamos pronunciar sobre ella.

- Transitividad implica varias cosas. Primero, implica que si A es igual de preferida que B, y B es igual de preferida que C, entonces A también es igual de preferida que C. Las tres están en la misma curva de indiferencia por esta misma razón. Por otro lado, Cualquier canasta sobre $\overline{u_1}$ es más preferida que cualquiera entre $\overline{u_1}$ y $\overline{u_0}$, y cualquiera en el espacio entre las dos curvas también es más preferida que cualquier combinación sobre $\overline{u_0}$, por lo tanto cualquier combinación de $\overline{u_1}$ es también preferida sobre $\overline{u_0}$. **De manera importante, esto también implica que las curvas de indiferencia nunca se tocan.** En caso de tocarse, transitividad no se cumpliría. Es por esto, que saltar de cualquier canasta A,B,C a A',B',C' nos daría un aumento de utilidad.

- Convexidad nos da la forma convexa de la curva de indiferencia. Noten que el punto B, siendo una combinación en menor cantidad de cada bien, es igual de preferida que mucho de un bien o del otro. De hecho, si yo combinara dos puntos dos canasta de una misma curvas de indiferencia, la resultante sería preferida (pasa una curva de indiferencia más arriba).

- Continuidad nos otorga que estas curvas de indiferencia sean suaves, y que no hayan saltos bruscos, lo que podría complicar el análisis.

Notar que las curvas se mueven hacia la derecha, porque estamos tomando un nivel de utilidad constante. Gráficamente, equivale a mirar el gráfico de tres dimensiones que es compuesto por x_1, x_2 y $\bar{u}$, y mirarlo desde arriba, tomando una rebanada en el eje de $\bar{u}$. Esto nos permite observarlo de estas forma. Son curvas de nivel. ¿Cómo obtenemos matemáticamente una curva de indiferencia? Por definición, esta es:

$$\overline{u} = u(x_1, x_2),$$

para cualquier utilidad $\overline{u}$. Por ejemplo, consideremos un agente que tiene una función de utilidad Cobb-Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Dada la característica multiplicativa de esta función, hay varias combinaciones de x_1 y x_2 tal que tenemos el mismo nivel de utilidad, de hecho, de ser graficado es muy parecido a la figura 2.1. Para quienes tengan dificultad en imaginar funciones, siempre pueden despejar el eje x_2 y observar cómo se forma la ecuación en el gráfico. Dejemos x_2 a la izquierda de la ecuación sola y veamos cómo se ve.

$$x_2 = \left(\frac{x_1^\alpha}{\overline{u}}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Notemos que, si se consume mucho de x_1, x_2 tiende a 0, y viceversa. De hecho, si consumo un número muy alto de x_1, basta con que me den poco x_2 para estar con un nivel de utilidad mucho mayor. Esto se debe a características que veremos más adelantes, específicamente la utilidad marginal decreciente de la función de utilidad. La pendiente de la curva de indiferencia la llamaremos **Tasa Marginal de Sustitución** (TMS), y la definiremos de la siguiente manera:

$$du = \frac{\partial u}{x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{x_2}dx_2 = 0.$$

Reordenando, tenemos lo siguiente:

$$TMS \quad = \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}.$$

Tasa Marginal de Sustitución

Llamamos a la pendiente de la curva de indiferencia como Tasa Marginal de Sustitución:

$$TMS \quad = \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}.$$

Este corresponde a la cantidad de bienes que un agente está dispuesto a cambiar por otro, sin que por esta pierda su nivel de utilidad.

Esto es, en la práctica, cuánto estamos a sacrificar de un bien, con tal de ser igual de felices con más del otro bien. Veremos que este concepto es uno de los más importantes en economía, y lo usaremos constantemente a lo largo de toda la profesión.

Hay dos componentes que son claves que aún no hemos mencionado: $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_1}$. Estas son las famosas **utilidades marginales**, estas significan cuánta utilidad extra nos aporta una unidad de cada bien. Por eso su nombre, es la utilidad **marginal** de una unidad extra de cada bien. La forma que toman estas derivadas son fundamentales para entender el comportamiento de los agentes. Si, por ejemplo la derivada respecto a x_1 depende positivamente del consumo de x_2, entonces el consumo es complementario, porque cuánto obtenga de utilidad por consumir x_1 dependerá de cuántas unidades tenga de x_2. Mientras más unidades tenga de x_2, más feliz seré si tengo una unidad extra de x_1. Imaginen que están comiendo unas ricas papas fritas, y tienen muchas papas fritas pero nada más. Claro, son felices porque pueden comer mucho de eso, sin embargo, una bebida les daría muchísima utilidad porque ahora pueden seguir comiendo papas fritas sin quedar secos de la garganta. Lo mismo sucederá más adelante en las producciones de las firmas. Si hay operadores de máquinas y máquinas, cada máquina aportará mucho más si tengo varios trabajadores, porque pueden usarlas sin problemas de toparse entre ellos con las mismas máquinas. Pero si tuviéramos pocos trabajadores, y compramos una máquina más, no aporta mucho la máquina debido a que sólo pueden operar una cierta cantidad de máquinas hasta coparse.

Utilidad Marginal

La utilidad marginal de un bien x_i es cuánto aumenta la utilidad de un agente al aumentar marginalmente su consumo. Es decir, es la derivada parcial de la función de utilidad respecto a x_i:

$$U_{x_i} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i}.$$

Esta intuición es fundamental detrás de las decisiones de consumo. Será esta complementariedad (o no-complementariedad) junto con los precios lo que determine cuánto consumir de cada bien. De hecho, usualmente veremos que el óptimo se dará cuando el ratio de utilidades marginales sea igual al de los precios, es decir, la relación de lo que estamos recibiendo en utilidad es exactamente lo mismo que la relación de cuánto estamos pagando. De ser diferente, podemos cambiar la locación de consumo a una donde recibo más utilidad a cambio de comprar menos de un bien y más del otro. **La clave es balancear el consumo de manera de aprovechar las utilidades marginales al máximo, y así obtener la mayor cantidad de utilidad marginal de cada bien.**

- $\frac{\partial u}{\partial x_1}$: utilidad marginal del bien i;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j m}$: complementariedad del bien i con el bien j.

Usualmente requeriremos algunas condiciones más en términos de propiedades de preferencias, me limitaré a mencionar sólo una porque creo que el resto no vale la pena para el enfoque de este documento. Los agentes van a soler tener **no saciedad**, significando que siempre tendremos una mejor canasta a la cual aspirar. Nunca el agente dirá "no más". Si le damos más de cada bien, a pesar de que tenga mucho, algo de utilidad le dará, por más baja que sea.

Antes de pasar a ver cómo un agente elige la canasta óptima, necesitamos un segundo componente: la restricción presupuestaria.

2.1.3. Restricción Presupuestaria

Obviamente, cuando uno va a comprar algo, siempre se enfrenta a algún tipo de restricción, ya sea monetaria, o de capacidad de traslado, etc. En particular, llamaremos restricción presupuestaria a aquella que está dada por precios y cuánto dinero posee una persona para gastar. Siempre un agente tendrá un nivel de ingreso m para gastar, y enfrentará precios p_1 y p_2.

La ecuación que describe una restricción presupuestaria está dada entonces por:

$$m \geq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2.$$

Examinemos con cuidado:

- m es el ingreso que tenemos para gastar
- $p_1 \cdot x_1$ es el **gasto total** en el bien x_1. Si cada manzana cuesta diez pesos, y compro diez manzanas, entonces claramente gasto 100 pesos en manzanas. Tenemos el mismo análisis para $p_2 \cdot x_2$. Sumando ambos términos, tenemos todo el gasto total.

Dado que mencioné a fines de la sección pasada que tendremos individuos con **no-saciedad,** podemos olvidarnos de la desigualdad de la restricción presupuestaria, y plantear con igualdad. Esto ocurre porque, dado que siempre puedo comprar algo, y estamos ante un modelo donde sólo puedo gastar en bienes y quedarme con dinero en el bolsillo no me da utilidad, entonces siempre preferiré gastarme el dinero, y nunca exploraremos áreas donde está sobrando dinero.

En el gráfico 2.2 tenemos la representación gráfica de la restricción presupuestaria. Cualquier punto a lo largo de la línea es una combinación de bienes tales que nos gastamos exactamente la cantidad de dinero m. El corte en el eje vertical se da cuando nos gastamos todo el dinero en el bien x_2, mientras que el corte en el eje horizontal se da cuando nos gastamos todo en x_1. La pendiente de esta restricción se da por $-\frac{p_1}{p_2}$. Esto último es lo que llamamos **costo de oportunidad**, es cuánto estamos renunciando de un bien a cambio de otro. Por ejemplo, si la pendiente fuera de -1/2, esto significa que cada unidad de x_2, sacrificamos dos unidades de x_1 (notar que se lee un poco al revés, el denominador nos dice cuánto renunciamos del primer bien en este caso).

Si el precio del bien 1 aumenta, la pendiente es más alta, y puedo comprar menos de ese bien. Si sólo aumenta el precio del bien 2, la pendiente es más plana. Si ambos aumentan en la misma cantidad, la pendiente no cambia, pero si cambia el nivel. Notar que un desplazamiento de los precios en misma magnitud, es exactamente lo mismo que una caída en ingreso.

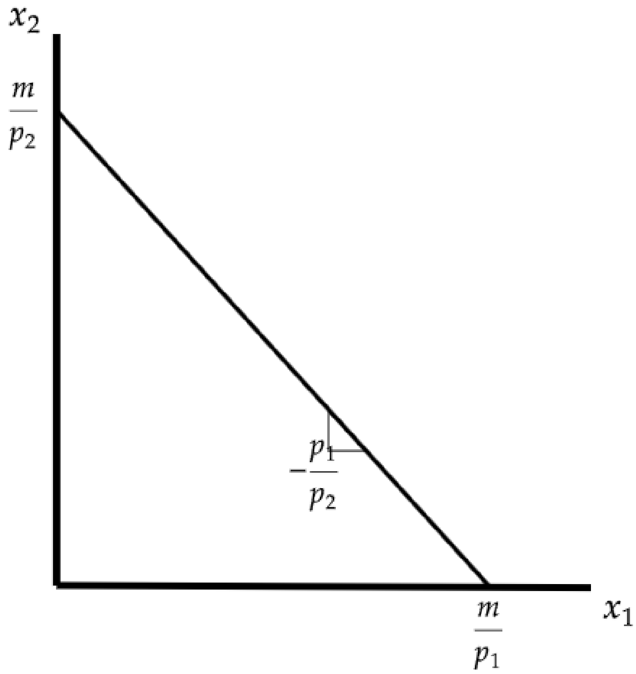


Figura 2.2: Restricción presupuestaria

Restricción Presupuestaria

Llamamos Restricción Presupuestaria a la combinación de bienes que es posible comprar. Esta descrito por un nivel de ingresos disponibles y de precios.

$$m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2,$$

y su pendiente está dada por $\frac{p_1}{p_2}$, la cual representa el costo de oportunidad.

2.1.4. Elección del consumidor en un mercado competitivo

Teniendo ya todos los elementos, podemos proceder a ver cómo elegir una canasta de manera óptima. Para esto, usaremos cálculo multivariable con restricciones, o el famoso método del Lagrangeano. Como dije en la introducción de este libro, no porque hayan pasado Cálculo con duras penas, no es posible que entiendan qué vamos a hacer.

El problema del consumidor es entonces elegir la combinación de bienes que maximiza la utilidad del agente, **sujeto a** no gastar más que nuestro dinero, y a no consumir negativo (que por ahora omitiremos en el análisis hasta ver Karush-Kuhn-Tucker, recordemos que el objetivo en este libro es dar un poco de intuición a alumnos que tengan dificultades con matemáticas pero les gusta la economía). Dado lo mencionado sobre no saciedad, esta restricción la limitaremos a gastarnos exactamente todo nuestro dinero. Es decir, la restricción se cumple con igualdad.

Gráficamente, el problema y su solución lo representamos con la figura 2.3

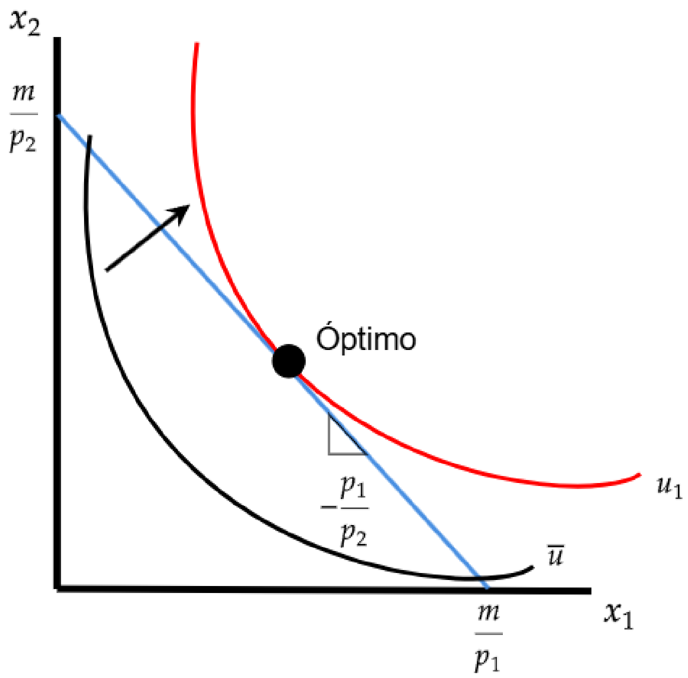


Figura 2.3: Elección óptima

- Dado una restricción presupuestaria **fija,** ¿qué combinación de ambos bienes me otorga la curva de indiferencia más alta? Es decir, de las infinitas posibles curvas de indiferencia, veremos aquella que pasa lo más lejos del origen (la utilidad resultante más alta), pero que sea posible pagar.
- Notemos que, como resultado visual inicial, tenemos que la canasta que da más utilidad es aquella donde la **pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria.** Es decir, el costo de oportunidad entre ambos bienes es el mismo que la tasa a la cual cambio un bien por otro y soy igual de feliz.

- En caso de que sean distintas, por ejemplo que el costo de oportunidad sea más bajo en términos de x_1, significa que estoy dispuesto a cambiar de x_1 por x_2, y la utilidad que recibo por el lado de más x_2 es más alta que la que pierdo por reducir mi consumo de x_1.

El problema a plantear es entonces:

Problema del Consumidor

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) \quad \text{sujeto a:} \quad m = p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot x_2; \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Y, como mencionamos anteriormente, solucionaremos este problema usando el método del lagrangeano. Iré con mucho cuidado en esta sección, porque creo que suele ser el área que más estudiantes suelen mecanizar sin ninguna comprensión de lo que estamos haciendo. Esto, ante ejercicios que pueden salir de la norma, puede provocar resultados completamente equivocados. Una alerta: el método correcto para resolver esto es el método Karush-Kuhn-Tucker, que se hace cargo de no-negatividad y la holgura de las restricciones, pero lo veré más a profundidad más adelante. Por ahora, para no asustar a los lectores, asumiremos que todo está bien y no examinaremos a profundidad esto, lo cual agrega unas restricciones extra. Pero es sumamente importante entenderlo porque otorga intuiciones claves para solucionar problemas difíciles.

Usemos una función de utilidad común, una Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ con exponentes de 0,5. Notemos que esta función cumple con todos los supuestos y axiomas que hemos mencionado, y de manera importante, también cumple con no saciedad, que dijimos que vamos a cumplirla siempre. Veamos cómo es esta función en el plano 3D.

Dado que es una función estrictamente monótona y creciente, en consecuencia, las preferencias son no saciables. Tenemos que la utilidad del individuo crece hacia el infinito y más allá. Sin embargo, no es posible elegir cualquier punto, de manera contraria, elegiríamos el infinito (si se pudiera elegir). Es aquí donde entra en juego la restricción presupuestaria. Si imaginamos que la función de utilidad es una montaña, y quiero llegar al punto más alto de la montaña posible, de no haber una restricción, seguiría siempre subiendo y nunca llegaría a nada. Pero la restricción actúa como una muralla que impide ir más allá de ella. Por lo tanto, nuestro problema se reduce solamente a elegir cuál es el punto más alto de la montaña, que esté pegado a la muralla. Así, encontraremos el punto más alto posible. Esto lo podemos apreciar en la figura 2.5.

Entonces, primero, queremos ver cuales condiciones son necesarias para encontrar un óptimo, y luego en qué punto de la restricción presupuestaria podemos encontrar una canasta que cumpla con aquello. Notar que esta

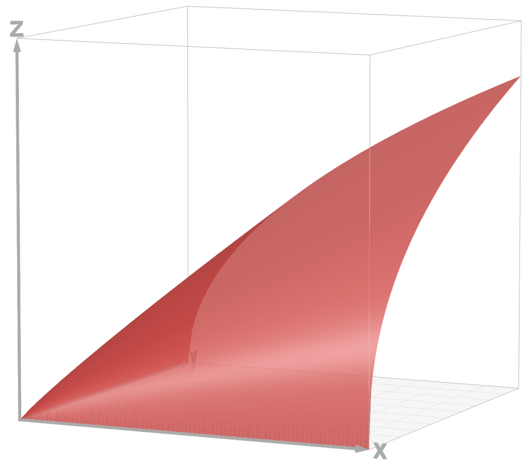


Figura 2.4: Función de utilidad en tres dimensiones. Z es el nivel de utilidad, X el consumo de x_1 e Y el consumo de x_2

figura es lo mismo que 2.3 pero tomando una dimensión extra. Ahora solucionaremos paso a paso el problema. Lo importante es encontrar el máximo, pegado en la muralla que corta la montaña.

- Paso 1: Formulación del Lagrangeano.

  Definimos la función Lagrangeano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda\Big(m - p_1x_1 - p_2x_2\Big).$$

  Siempre habrán dos términos en el caso clásico, el primero es la función de utilidad, después la restricción a hacerse cero. En caso de agregar más restricciones, sumamos más multiplicadores lagrangenanos multiplicados por la restricción. La interpretación de λ es lo que llamamos **precio sombra**, esto es cuánto aumenta la utilidad si aumentáramos el ingreso. Es el costo de nuestra restricción. En caso de ser una restricción activa, λ es positivo.

- Paso 2: Obtención de las Condiciones de Primer Orden (FOC). Se derivan parcialmente $\mathcal{L}$ respecto a x_1, x_2 y λ, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = u_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = u_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \quad (3)$$

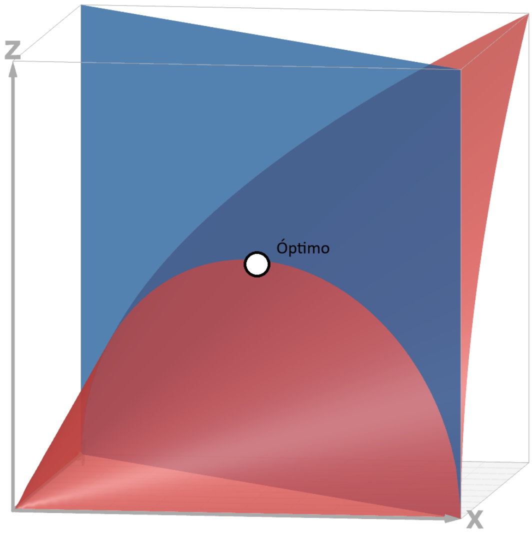


Figura 2.5: Representación del lagrangeano

Este concepto es fundamental para lo que sigue, y está presente en toda decisión económica. Fíjense que esto es lo mismo que simplemente igualar las ecuaciones (1) y (2). La derivada (1) es la utilidad marginal **menos** el precio del bien por el precio sombra. Me gusta imaginar esto como una utilidad marginal "neta", en el sentido que estamos descontando de la utilidad marginal, el coste que tiene al estar activa la restricción. Al igualarla con su homóloga (2), lo que estamos haciendo es decir que la utilidad marginal del consumo de ambos bienes tiene que ser igual. La intuición es la siguiente: si la utilidad, por ejemplo, del bien 1 fuera mayor que la del bien 2, entonces consumir más del bien 1 resulta conveniente, dado que otorga más utilidad que consumir del otro. Por lo tanto, yo debería trasladar mi consumo en esa dirección. Sin embargo, debido a que las funciones de utilidad son cuasi cóncavas, esto implica que la utilidad marginal de ese bien decrece a medida que consumimos más. Por lo tanto, la siguiente unidad que consuma de x_1 nos dará más utilidad, sí, pero menos que la anterior. Por lo tanto, habrá un punto en que la utilidad marginal de ambas serán iguales. Este punto debe ser óptimo debido a que, de otra forma, tengo incentivos a moverme hacia otro punto de consumo donde consumo más de aquella que posea la mayor utilidad marginal.

- Paso 3: Condición de Optimalidad (MRS).

  Dividiendo la ecuación (1) entre la (2) se obtiene:

$$\frac{u_{x_1}(x_1, x_2)}{u_{x_2}(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Esta relación expresa que, en el punto óptimo, la tasa marginal de sustitución (MRS) es igual a la razón de precios.

- Paso 4: Formulación del Sistema de Ecuaciones Implícitas.

  El óptimo se define implícitamente mediante el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{x_1}(x_1, x_2)}{u_{x_2}(x_1, x_2)} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

  Este sistema determina el punto de tangencia entre la curva de indiferencia (donde la utilidad es constante) y la línea de la restricción presupuestaria.

  Esto es fundamental. Estas dos ecuaciones describen las dos cosas relevantes que deben pasar en un óptimo. Primero, el costo de oportunidad tiene que ser igual al ratio de las utilidades marginales. Recordemos que, en caso contrario, conviene moverse hacia alguna dirección para ganar más utilidad consumiendo un bien de la que perdemos dejando de lado el otro bien. Pero notemos que esta condición puede cumplirse en una infinidad de puntos en el gráfico y abajo de la restricción presupuestaria. El problema ahora se convierte en elegir qué punto que cumple esa condición es el óptimo. Aquí es donde entra la restricción presupuestaria con igualdad, la cual nos asegura que **debemos** estar en el borde de la restricción presupuestaria, gastando todo el dinero. Sin esto, bastaría con ponerse en cualquier punto que cumpla la primera condición. Esto se aprecia en la Figura 2.6.

- Paso 5: Conclusión.

  Bajo las hipótesis de diferenciabilidad, crecimiento estricto y cuasiconcavidad de $u(x_1, x_2)$, el teorema del máximo garantiza la existencia y unicidad del óptimo. Así, el par (x_1M*, x_2M*) que satisface:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{u_{x_1}(x_1^M, x_2^M)}{u_{x_2}(x_1^M, x_2^M)} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1^M + p_2 x_2^M = m, \end{array}}$$

  es la solución óptima del problema del consumidor.

La demanda encontrada de cada bien es lo que llamamos una **demanda marshalliana (u ordinaria).** Tal cual como hemos hecho, esta demanda surge del proceso de maximización de utilidad. Más adelante veremos que no es la única forma de abordar la toma de decisiones.

Recuerden, para obtener una demanda marshalliana, tenemos que maximizar la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria. El resultado nos dará

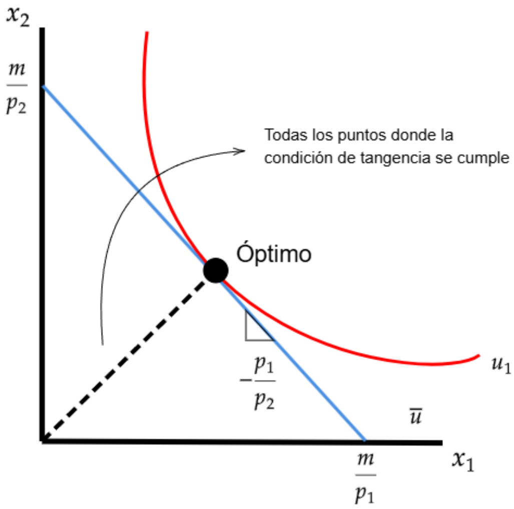


Figura 2.6: La sección punteada muestra todos los puntos donde se cumple sólo la primera restricción.

Figura 2.7: Marshall Eriksen

una función que nos dice cuánto consumir según **los precios y el nivel de ingreso.**

La demanda marshalliana debe su nombre a Marshall Eriksen, un popular abogado ambientalista de Nueva York (Figura 2.1.4).

Solución para Función Cobb-Douglas con Exponentes 0.5 y precios unitarios

Consideremos el problema del consumidor:

$$\max_{x_1,x_2} \; u(x_1,x_2) = x_1^{0{,}5}\, x_2^{0{,}5} \quad \text{sujeto a} \quad x_1 + x_2 = 10,$$

donde $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ y el ingreso es $m = 10$.

Paso 1: Formulación del Lagrangeano. Definimos:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = x_1^{0{,}5}\, x_2^{0{,}5} + \lambda\,(10 - x_1 - x_2).$$

Paso 2: Condiciones de Primer Orden. Derivamos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0{,}5\, x_1^{-0{,}5}\, x_2^{0{,}5} - \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0{,}5\, x_1^{0{,}5}\, x_2^{-0{,}5} - \lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - x_2 = 0. \quad (3)$$

Paso 3: Relación entre x_1 y x_2. Dividiendo (1) entre (2) obtenemos:

$$\frac{0{,}5\, x_1^{-0{,}5}\, x_2^{0{,}5}}{0{,}5\, x_1^{0{,}5}\, x_2^{-0{,}5}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Paso 4: Sustitución en la Restricción. Usando $x_1 = x_2$ en (3):

$$10 - 2x_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^M = 5,$$

y por lo tanto,

$$x_2^M = 5.$$

Conclusión: La solución óptima del problema es:

$$\boxed{x_1^M = 5, \quad x_2^M = 5.}$$

Este escenario es completamente simétrico, es decir, valoramos de misma manera cada bien, y también de manera cruzada entre cada bien. Finalmente, también los precios son iguales entre ellos. Dado esto, el óptimo tiene que darse en el punto donde la tasa de utilidades marginales sean 1 a 1, debido a que el ratio de los precios es 1. Por lo tanto, en la restricción, deberíamos comprar la misma cantidad de cada bien.

Finalmente, llamaremos **función de utilidad indirecta,** al nivel de utilidad resultante tras el consumo óptimo:

$$v(x_1^M, x_2^M, m),$$

y se llama de esta forma porque nos indica cuánto es el nivel de utilidad sin saber el nivel de consumo. Dado que (x_1^M, x_2^M) son ambas funciones de precios e ingreso, de saber la función de utilidad indirecta nos mapearía directo desde los precios e ingreso hasta la utilidad resultante. Veremos más rato la importancia de esto para poder recuperar nuevamente las demandas si es que sólo obtuviéramos las funciones de utilidad.

2.1.5. Cuando el lagrangeano no funciona

En mi experiencia como ayudante, el gran problema era cuando teníamos funciones menos estándar, que no son usualmente continuamente diferenciables, o doblemente diferenciables, etc. Tales son casos famosos como sustitutos perfectos o complementos perfectos. Al no comprender qué es lo que está pasando cuando hacemos un lagrangeano, los alumnos intentaban solucionar el problema de la misma forma que hicimos ahora, sólo para no encontrar nada. Es por esto que encontré buena idea dedicar una sección a mostrar cómo suelo pensar este tipo de problemas.

En general, siempre sabremos cómo abordar el problema observando la función de utilidad. Si la función de utilidad es **cuasi-cóncava** y **doblemente diferenciable**, podremos seguir el camino usual que vimos recién. En caso contrario, hay que tomar otro camino, uno más precavido que requiere entender qué esta pasando.

Caso: Sustitutos perfectos.

El caso de sustitutos perfectos sucede cuando tenemos la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

El nombre lo explica todo, dado que la utilidad se da como suma de ambos bienes, no importa cual de los dos elija, cada unidad aportará utilidad de manera unitaria. Si no puedo comprar de un bien, puedo comprar del otro y se sustituye por completo el nivel de utilidad que el otro otorgaba. El clásico ejemplo es el de bebidas. Imaginemos por un momento que preferimos de igual manera Coca-Cola que Pepsi (a pesar de que la segunda sea mejor). Para el agente, ambas dan el mismo nivel de utilidad. Las curvas de indiferencia se ven según la Figura 2.8.

Notemos que es una recta en 45 grados. Esto se debe justamente a que la tasa marginal de sustitución es 1. Estoy dispuesto a cambiar exactamente una unidad por otra, con tal de mantener el mismo nivel de utilidad.

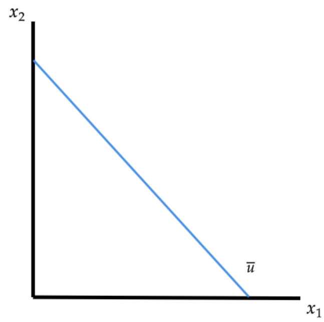


Figura 2.8: Sustitutos perfectos

Obviamente, si intentáramos derivar y solucionar el problema típico a través de derivación, no llegaríamos a nada porque x_1 y x_2 desaparecen en las derivadas del lagrangeano. Por lo tanto, tenemos que solucionarlo de una forma más manual.

Cómo pensar el problema: lo más importante siempre son los precios

Cuando enfrento un problema no diferenciable, siempre intento primero graficar la curva de indiferencia, y una restricción presupuestaria cualquiera. Luego, el paso más importante es, dejando constante la restricción presupuestaria, donde es lo más lejos que puedo llevar la curva de indiferencia. Esto **siempre** terminará dependiendo de los precios que forman la pendiente de la restricción presupuestaria.

Supongamos que los precios que enfrenta el agente es de $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$, y también posee un ingreso de $m = 10$. Por lo que la pendiente de la restricción presupuestaria es -0,5. Una manera, en la práctica, de ver hacia donde va la respuesta, es dibujar entonces la curva de indiferencia y llevarla lo más lejos posible que cumpla la restricción presupuestaria.

Observemos esto en la figura 2.9, llevamos las curvas de indiferencia lo más lejano posible, lo que nos da un resultado bastante intuitivo: si cada uno nos aporta la misma utilidad, y no hay ningún beneficio en combinar bienes (a diferencia del caso de la Cobb-Douglas), entonces es conveniente simplemente comprar el bien más barato, debido a que si comprara del otro bien, estaría perdiendo la posibilidad de comprar dos unidades del otro y obtener dos útiles extras en vez de uno.

$$x_1^M = 10; \quad x_2^M = 0.$$

Ejercicio para el estudio: imaginen qué pasa si los precios son iguales. En este caso, si hiciéramos el mismo ejercicio gráfico, veríamos que las rectas se superpondrían, dará lo mismo qué combinación de bienes comprar. Da

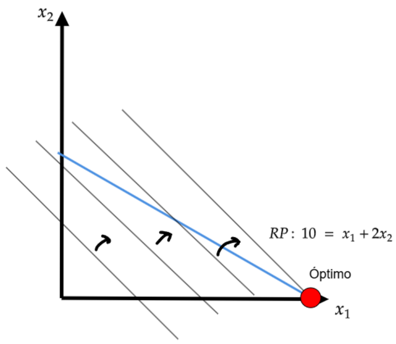


Figura 2.9: Solucionando gráficamente el problema de sustitutos perfectos

lo mismo cuál sea la combinación, siempre que me gaste todo el ingreso mi utilidad será máxima.

Caso: complementos perfectos

El segundo caso donde todos fallan es el de complementos perfectos, la famosa Leontieff:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$$

El ejemplo intuitivo de estas preferencias son los zapatos. Tener un zapato izquierdo o derecho no nos da utilidad sin el otro, solamente tendremos utilidad si es que tenemos un par de cada uno. Si tuviéramos cero de alguno de ellos,la función mínimo nos devuelve cero. Dado esto, es intuitivo pensar que no hay razón para comprar más de un bien que de otro, debido a que no dará utilidad. Sólo a medida que compremos ambos bienes tendremos utilidad.

La curva de indiferencia tiene forma de letra L. Si tenemos un zapato izquierdo, da lo mismo cuantos zapatos derechos tengamos, siempre nos dará la misma utilidad que tener un zapato (a menos que tengamos 0, en ese caso la utilidad es 0).

Dado cómo opera la función mínimo, es obvio que nunca compraremos más de un bien que de otro, por lo que $x_1^M = x_2^M$. Es decir, **siempre la solución estará en la línea de 45 grados.** ¿Dónde? Bueno, en el punto más lejano donde activemos la restricción presupuestaria, dado que este sería donde gastamos todo el dinero, y además estamos comprando la mayor cantidad de pares de bienes.

$$x_1^M = x_2^M = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Lo importante de estos últimos dos casos es entender qué está pasando. No ver la función y hacer algo mecanizado. Entender cómo funciona la función de utilidad es lo más fundamental del análisis de un consumidor.

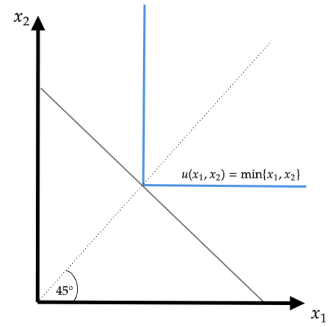


Figura 2.10: Complementos perfectos

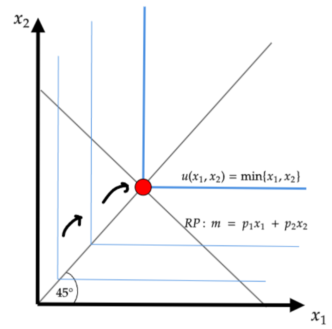


Figura 2.11: Solución del caso de complementos perfectos

Profundizaremos más de esto en la próxima sección.

Como se habrán dado cuenta, mi forma favorita de aproximarme a los problemas es siempre ver cómo se comporta la función, luego veo qué herramientas matemáticas usar, el método del lagrangeano sólo lo reservo para casos estándar donde se que la la función es cuasi cóncava, doblemente diferenciable, estrictamente monótona, etc. Más adelante veremos que el método general en profundidad, el famoso Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que es lo que usamos en el caso estándar, pero saltándonos varios pasos importantes que sirven para omitir negatividad en el consumo (no podemos consumir negativo de bienes) y checkear cada condición. De todas formas es importante entenderlo para obtener un marco matemático más riguroso.

Mi caso favorito: un mínimo raro...
Mi caso favorito es el siguiente:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1\}$$

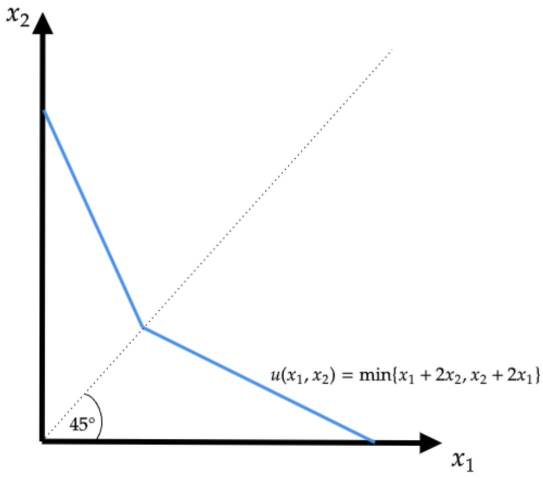


Figura 2.12: Una función muy interesante

Es una mezcla entre los casos de complementos y sustitutos. Y me gusta mucho porque resalta cómo entender la función de utilidad, antes de cualquier otra cosa, nos otorga rápidamente la respuesta que queremos encontrar. Ilustremos esta curva de indiferencia en la figura 2.12.

Notemos que esta preferencia implica intuitivamente lo siguiente: si consumo más de x_2 que de x_1 (estar a la izquierda de la diagonal), entonces la TMS es de 2, lo que implica que estoy dispuesto a cambiar dos unidades de x_2 por una de x_1, por lo que x_1 me da más utilidad marginal que x_2. En el lado derecho de la diagonal, el análisis es al revés. Si estamos consumiendo a la par, estoy igual de feliz que dos unidades de un bien y una del otro.

Si hacemos el mismo método gráfico de dibujar la curva de indiferencia y llevarla lo más lejos posible, nos daremos cuenta que depende **crucialmente** de cómo son los precios para saber dónde debería consumir el agente. De la misma forma que mencioné anteriormente en el caso de Sustitutos que el precio era lo más importante, acá sigue siendo cierto (en todos los casos es cierto, sólo que en complementos perfectos estás obligado a pagar lo que sea para tener uno de cada bien).

Si el precio p_2 es muy bajo, entonces será mejor tomar una canasta del lado izquierdo, porque prefiero ganar la mayor cantidad de mi utilidad a través de consumir x_2. De hecho, para cualquier ratio $\frac{p_1}{p_2} > 2$, tomaremos este camino. Al revés, si el precio p_1 es muy bajo, prefiero ganar toda mi utilidad por el lado derecho de la curva de indiferencia y consumir sólo x_2. Por lo tanto, si $\frac{p_1}{p_2} < 1/2$, nuestro consumo será todo x_1. ¿Qué pasa en otros casos? Bueno, notemos que si $\frac{p_1}{p_2} = 2$, entonces el lado izquierdo de la curva de indiferencia se superpone con la restricción presupuestaria. Lo mismo pasa con el lado izquierdo si $\frac{p_1}{p_2} = 1/2$. Por lo tanto, si el ratio de

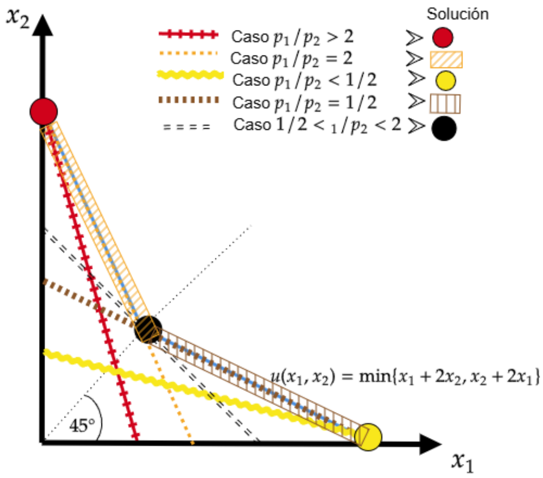


Figura 2.13: Posibles óptimos de una función muy interesante. Cada recta de color representa un caso de precios, mientras que los círculos y rectángulos muestran la solución al color correspondiente.

precios es 2, entonces consume cualquier canasta que esté en la superposición correspondiente la izquierda. Si el ratio de precios es 1/2, consumirá cualquier canasta que esté en la superposición correspondiente la derecha. Finalmente, si el ratio de precios está entre 1/2 y 2, notemos que la solución será la de consumir ambos bienes por igual.

Así, ¿cuántas posibles soluciones tenemos? ¡Pues infinitas! Dependerá de los precios. Hay cinco casos, uno para cada escenario, entres de ellos la solución es única, pero en dos casos las soluciones son infinitas (posicionarse en cualquier parte de ese segmento de la recta superpuesta con la curva de indiferencia).

$$(x_1^M, x_2^M) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2}, \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) & \text{si } \frac{p_1}{p_2} > 2, \\ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ p_1x_1 + p_2x_2 = m, \ x_2 > x_1\} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = 2, \\ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ p_1x_1 + p_2x_2 = m, \ x_1 > x_2\} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{m}{p_1+p_2}, \frac{m}{p_1+p_2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \frac{p_1}{p_2} < 2. \end{cases}$$

Este ejercicio es mi favorito porque resalta la importancia de (i) los precios, y (ii) entender cómo funciona la función de utilidad. Recomiendo fielmente estudiarlo y entenderlo, ayuda mucho a abrir los ojos.

2.1.6. El método de Karush-Kuhn-Tucker

Como dije anteriormente, cometí un gran pecado para todo profesor de microeconomia (so what!), que es solucionar el problema omitiendo elementos relevantes, como las condiciones de holgura complementaria. Cuando solucioné los problemas anteriores, omití casi por completo la condición de no-negatividad y de holgura complementaria. A menos que tengas un profesor que quiera hacer una pregunta muy difícil, mantenerse con los métodos de arriba funciona bien para llegar al grano. De todas formas, alguna vez necesitaremos saber cómo se soluciona esto de manera más formal a través del método KKT.

Este método lo usaremos para lidiar con no-negatividad y holgura de la restricción presupuestaria. Lo primero lo omití, sí, lo acepto. Lo segundo nos lo sacamos de encima rápidamente porque mencioné que sólo nos íbamos a centrar en casos donde los agentes eran no saciables, y siempre que podían consumirían más.

Así, el problema es el mismo, pero con la restricción que antes omitimos en cierta manera.

Considera el problema del consumidor:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \leq m, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sea la función Lagrangiana

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = u(x_1, x_2) + \lambda\big(m - p_1x_1 - p_2x_2\big) + \mu_1x_1 + \mu_2x_2,$$

donde los multiplicadores de Lagrange cumplen:

$$\lambda \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.$$

Las condiciones de primer orden y de holgura complementaria (KKT) son:

1. Estacionariedad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= u_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda\, p_1 + \mu_1 \leq 0, \qquad \mu_1x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= u_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda\, p_2 + \mu_2 \leq 0, \qquad \mu_2x_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Factibilidad primal:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3. Factibilidad dual:

$$\lambda \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.$$

4. Holgura complementaria para la restricción presupuestaria:

$$\lambda\Big(m - p_1x_1 - p_2x_2\Big) = 0.$$

Dada una función cualquiera, tendremos que navegar entre los múltiples escenarios para encontrar el máximo global y así solucionar el problema. De hecho, hay ocho casos:

- $x_1, x_2 > 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$. Este es el caso más común, y el que hicimos primero. Dado no saciedad, y complementariedad de las preferencias, consumimos positivo de cada bien. Esta será la solución común cuando, por ejemplo, hay una interacción entre los bienes en nuestra función de utilidad. Por ejemplo, se multiplican. Si se multiplican, entonces tiene que ser consumo positivo para ambos, de manera contraria tendríamos utilidad cero. Casos como el de una función tipo $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ también resulta en este tipo de soluciones a pesar de que no se multipliquen. Esto es porque la utilidad marginal de cada bien decrece, por ende existe un tradeoff entre cada unidad y cuánto aporta la unidad extra. Dado esto, no tiene sentido consumir todo de un bien, porque consumiendo una unidad más obtendría una utilidad marginal mayor que la última que tome del primer bien. Por otro lado, si el agente es no saciable (función siempre creciente), entonces también se cumplirá la restricción presupuestaria de manera activa. Un *tip* popular que hago para verificar que esta sea la solución, es evaluar si se cumple el siguiente límite

  $$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty.$$

  De ser así, entonces tenemos que consumir de ambos bienes, de otra forma convendría tomar una sola unidad del otro bien y obtenemos utilidad marginal infinita.

- $x_1 = 0, x_2 > 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 = 0$. En este caso, se consume sólo un bien. Este caso suele aparecer en sustitutos perfectos o similares, donde no hay interacción entre las variables. A veces surge cuando la restricción presupuestaria es muy acotada y los retornos decrecientes de un bien no alcanzan a agotarse lo suficiente. Si la función de utilidad no tiene una interacción entre las variables, vale la pena ver este caso.

- $x_1 > 0, x_2 = 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 = 0, \mu_2 > 0$. Lo mismo que la anterior pero al revés.

- $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $\lambda > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. En este caso, todos los bienes son males, es decir, consumir causa desutilidad.

Los siguientes casos sólo si dan si las funciones de utilidad no son no-saciables, es decir, si el consumidor puede decidir no querer más de ningún bien. Para estos casos, vale la pena revisar si la función se comporta de forma parabólica.

- $x_1, x_2 > 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$.
- $x_1 = 0, x_2 > 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 > 0, \mu_2 = 0$. E
- $x_1 > 0, x_2 = 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 > 0$.
- $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $\lambda = 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

Revisando los tips de arriba, debería ser fácil identificar cual caso es el indicado. Mi regla es que si la función de utilidad es cuasi cóncava, monótona y continuamente diferenciable, tomaremos el primer enfoque de inmediato y lo más probable es que estaremos en lo cierto. En caso de que las funciones no tengan interacciones (por ejemplo, que tenga sumas), entonces vale la pena revisar los demás casos.

Notemos que a la derecha de las ecuaciones de Estacionariedad tenemos lo siguiente:

$$\mu_1 x_1 = 0,$$
$$\mu_2 x_2 = 0.$$

Por mucho tiempo omití entender esta restricción, pero con el tiempo me dí cuenta que resumen todos los casos posibles y son bien intuitivas una vez que les das vueltas. Notemos que estas restricciones son con **igualdad**, da lo mismo lo que pase. Esto nos ayuda a evaluar todos los casos. Tomemos como ejemplo la primera.

Tiene que ser **sí o sí** que, o $\mu_1 = 0$, o que $x_1 = 0$, porque la multiplicación siempre tiene que terminar en 0. Esto es porque, en caso de haber consumo positivo del bien 1, entonces la restricción de no-negatividad no está activa, por lo tanto el multiplicador lagrangeano debe ser cero para que se cumpla la ecuación. De caso contrario, si x_1 es cero, entonces la igualdad se cumplirá de todas formas y $\mu_1 > 0$ por definición de la restricción. Esto resume todos los escenarios posibles una vez que vemos el sistema de ecuaciones completo. Por esto, si uno quiere hacerlo cien por ciento correcto (aburrido), entonces vale la pena pasearse por todos los casos. Sin embargo, en una mayoría de los casos esto no es necesario. Basta con guiarse con los tips de arriba.

2.2. El Problema Dual

En la sección pasada vimos el problema de un consumidor intentando maximizar su utilidad, sujeto a gastar dentro de su restricción presupuestaria. Sin embargo, uno podría pensar el problema de forma reversa: "si necesito obtener un nivel de utilidad determinado, cuánto es lo mínimo que necesitaría de ingreso para lograrlo". Todos nos hemos enfrentado a ambos problemas. En el primer ejemplo, imaginemos que nuestra mamá nos da 10.000 pesos para comprar pan en el supermercado para un asado. La decisión que haremos con esos 10.000 óptimas nos dará una utilidad, digamos, de 10 (quizás, significando que logramos alimentar a las diez personas del asado). El problema al revés sería: "necesito alimentar a diez personas en el asado, ¿cuánto es lo mínimo que necesitaría para lograrlo?". La respuesta a esta sería exactamente los 10.000 que nos dio nuestra madre en la pregunta anterior, porque ambas son básicamente dos caras de una misma moneda, implicando un consumo eficiente. Si la respuesta no fuera la misma y, en cambio, sería un ingreso mayor, esto no tendría sentido, porque significa que de alguna forma hicimos trampa en el primer problema porque no hubiéramos podido pagarlo. Esta sección se dedica a entender esta segunda cara de la moneda: **el problema dual**. Veremos que, si bien podemos sacar conclusiones similares en algunos aspectos, también nos permite abordar otras problemáticas y entender otros elementos detrás del razonamiento del humano en sus decisiones de consumo.

Recordemos: demanda marshalliana

Llamamos demanda marshalliana a las funciones (o correspondencias)

$$x_i^M(p_1, p_2, m),$$

que nos dicen cuánto consumir según precios e ingreso. Estas se obtienen solucionando el problema

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2),$$

sujeto a $m \geq p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Problema dual

Llamamos demanda **hicksiana** (o compensada) a las funciones (o correspondencias)

$$x_i^H(p_1, p_2, \bar{u}),$$

que nos dicen cuánto consumir según precios y un nivel de utilidad deseado. Estas se obtienen solucionando el problema

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \text{ sujeto a: } \bar{u} = u(x_1, x_2).$$

Gráficamente el problema se ve, valga la redundancia, igual pero al revés. Es preguntarse qué nivel de restricción presupuestaria -dados unos precios- yo necesitaría para llegar de la forma más barata a una curva de indiferencia

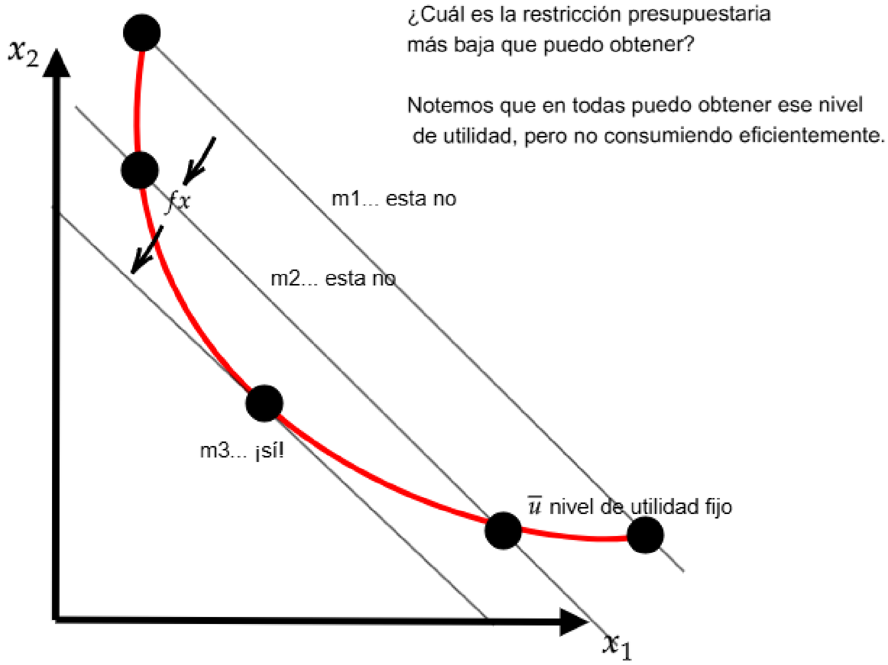


Figura 2.14: Demanda hicksiana

describiendo $\bar{u}$. Veamos esto en la Figura 2.14.

Solucionemos el problema, paso por paso. Primero planteamos el lagrangeano (asumiré problemas típicos, continuamente diferenciables, cuasi cóncavas, etcétera):

$$\min_{x_1,x_2} p_1x_1 + p_2x_2 \text{ sujeto a: } \bar{u} = u(x_1, x_2).$$

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\big(u - u(x_1, x_2)\big),$$

donde procedemos a derivar e igualar a cero (*as we usually do...*)

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{u} - u(x_1, x_2) = 0.$$

Notemos que, juntando las primeras dos ecuaciones (movamos hacia un lado y dividimos entre ellas), ¡tenemos el mismo resultado de tangencia que el problema de maximización!

$$p_1 - \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} = p_2 - \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \implies \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = TMS = \frac{p_1}{p_2}.$$

Esto tiene mucho sentido, porque si quiero conseguir algo de la forma más barata posible, debe ser que mi uso de ambos bienes, en utilidades marginales versus sus costos, deben ser eficientes. Si no fuera de esa forma, y el ratio de utilidades marginales fuera mayor que el de precios, entonces podría cambiar consumo de un bien por otro y ganar más utilidad de lo que pago. ¡Esta es exactamente la misma intuición fundamental que derivamos anteriormente! Pero de la misma forma, esta condición de mismas derivadas se puede dar en infinitos puntos, por lo que tenemos que usar la restricción para encontrar el punto correspondiente en el nivel de utilidad que deseamos.

Reemplazando en la restricción de utilidad

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{u} - u(x_1, x_2) = 0,$$

y despejando, obtendremos las demandas hicksianas

$$(x_1^H(\bar{u}, p_1, p_2); x_2^H(\bar{m}, p_1, p_2)).$$

Usando las demandas hicksianas en la función de minimización $p_1 x_i^H + p_2 x_2^H$, obtenemos la famosa **función de gasto mínimo,** que nos dice el gasto mínimo que deberíamos hacer para obtener un nivel de utilidad deseado, dado ciertos precios:

$$G^*(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 x_i^H(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2 x_2^H(p_1, p_2, \bar{u}).$$

Notemos que lo que estamos minimizando es el nivel de la restriccion presupuestaria, dado que los precios están dados y no podemos cambiar los precios. Es por esta simetría exacta de resultados que llamamos a este problema "dual". De hecho, a continuación veremos que podemos obtener demandas hicksianas a través de saber demandas marshallianas, y funciones de gasto mínimo sabiendo también función de utilidad indirecta, y viceversa, y sus combinaciones. **Jamás no se cumplirá dualidad.**

Solución para el problema dual de minimización con función Cobb-Douglas

Consideremos el problema dual del consumidor:

$$\min_{x_1,x_2} \; x_1 + x_2 \quad \text{sujeto a} \quad x_1^{0,5}\, x_2^{0,5} = 5,$$

donde se busca alcanzar un nivel de utilidad $u_0 = 5$ con precios unitarios $p_1 = p_2 = 1$.

Paso 1: Formulación del Lagrangeano. Definimos:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda\Big(5 - x_1^{0,5}\, x_2^{0,5}\Big).$$

Paso 2: Condiciones de Primer Orden. Derivamos la función Lagrangeana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - \lambda\, \frac{1}{2} x_1^{-0,5}\, x_2^{0,5} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda\, \frac{1}{2} x_1^{0,5}\, x_2^{-0,5} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 5 - x_1^{0,5}\, x_2^{0,5} = 0. \quad (3)$$

Paso 3: Relación entre x_1 y x_2. Dividiendo la ecuación (1) entre la (2) obtenemos:

$$\frac{1 - \lambda\, \frac{1}{2} x_1^{-0,5}\, x_2^{0,5}}{1 - \lambda\, \frac{1}{2} x_1^{0,5}\, x_2^{-0,5}} = \frac{1}{1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Paso 4: Sustitución en la Restricción. Sustituyendo $x_1 = x_2$ en la ecuación (3):

$$5 - x_1^{0,5}\, x_1^{0,5} = 5 - x_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i^H = 5,$$

por lo que:

$$x_2^M = 5.$$

Conclusión: La solución óptima del problema dual es:

$$\boxed{x_i^H = 5, \quad x_2^H = 5, \quad \text{con un gasto mínimo de } 10.}$$

2.3. Una variable para gobernarlos a todos.

Entonces, como hablábamos, ¿es posible entonces encontrar cada elemento, sólo teniendo uno? Pues sí. Debido a la relación homóloga entre el problema de maximización y minimización, podemos hacer cambios de variables que permiten inferir otras variables de interés. Al igual que Sauron en El Señor de los Anillos, necesitaremos sólo un anillo (o una variable de interés) para encontrarlos a todos.

Figura 2.15: Sauron

Por ejemplo, supongamos que estamos en el caso de la función de utilidad Cobb Douglas $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, por lo que la función de utilidad indirecta es (pueden ver cómo obtener esto más arriba):

$$v^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}.$$

m es el ingreso que necesitamos para obtener el nivel de utilidad v^*, por lo que podemos reordenar la ecuación para obtener:

$$v^*(p_1 + p_2) = m.$$

Dado que, por dualidad, ambos problemas de maximización y minimización deben dar los mismos resultados, entonces si nos preguntamos cuánto es el gasto necesario para obtener el nivel de utilidadu^*, basta con reemplazar m por G^* y estamos listos.

$$u^*(p_1 + p_2) = G^*.$$

Por ende, reordenando la función de utilidad indirecta podemos obtener el gasto mínimo. De manera viceversa, si tengo el gasto mínimo, puedo obtener la función de utilidad indirecta. Obviamente, si tenemos las demandas, podemos obtener todo. ¿Pero, podemos hacerlo al revés, saber las demandas sólo sabiendo la utilidad indirecta o el gasto mínimo? La respuesta es que sí, y viene de la mano la Identidad de Roy y el Lema de Shepard.

La Identidad de Roy

Esta identidad nos permite encontrar la demanda marshalliana $x_i^M(p_1, p_2, m)$ de un bien i sabiendo la función de utilidad indirecta.

$$x_i^M(p_1, p_2, x) = \frac{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial m}}$$

El origen de esta identidad no fácil de observar a simple vista, pero con un poco de esfuerzo es posible entenderla. Recordemos que llamamos a λ precio sombra, es decir, en cuánto aumenta la función de utilidad ante un aumento del ingreso.

El truco está en saber lo siguiente:

- Por teorema de la envolvente, es cierto que

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_1} = -\lambda x_1.$$

  La intuición es que, debido a que la función de utilidad indirecta nos mapea la utilidad directamente con precios e ingreso, entonces la derivada respecto a p_1 debe ser igual a λx_1 porque sería el precio sombra multiplicado por cuántas unidades tengo, hay un efecto multiplicativo.

- Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{\partial L}{\partial m} = \lambda.$$

  Siguiendo la misma intuición, si aumenta mi ingreso, por definición mi precio sombra me da la utilidad que aumentaría.

- Sabemos entonces que

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} / \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\lambda x_i}{\lambda} = x_i.$$

  Por lo que, usando en vez las derivadas de las funciones de utilidad indirecta:

$$x_i^M(p_1, p_2, x) = \frac{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p_1,p_2,m)}{\partial m}}$$

En resumen, esta identidad es posible porque las derivadas de la función de utilidad indirecta respecto al precio y el ingreso se relacionan a través del precio sombra. Respecto al precio, la derivada es el precio sombra por la cantidad de bienes que tengo, mientras que respecto al ingreso es el precio sombra mismo, por definición del precio sombra. Dividiendo una con la otra nos da la identidad.

Dato curioso: esta identidad tiene su nombre en honor al personaje de la saga Fire Emblem y Super Smash Brothers: Roy.

Figura 2.16: Roy

Por otro lado, podemos obtener las demandas hicksianas a partir de la función de gasto mínimo usando el famoso Lema de Shepard. En mi opinión, la explicación es más intuitiva.

El Lema de Shepard

El Lema de Shepard nos permite obtener las demandas hicksianas (o compensadas) a partir de la función de gasto mínimo.

$$\frac{\partial G^*(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_i} = x_i^H(p_1, p_2, \bar{u})$$

Esto es posible por una razón mucho más simple. ¿En cuánto aumenta la función de gasto mínimo, en caso de aumentar el precio de un bien? Por ejemplo, si aumenta el precio del bien 1, entonces el aumento será de x_1 porque estoy llevando la misma cantidad de bienes, y el precio unitario de ella cambia. Por ende, la derivada del gasto mínimo respecto al precio debe darnos la demanda hicksiana.

Al igual que Roy, el Lema de Shepard es llamado así en honor al Comandante Shepard de la saga Mass Effect.

2.3.1. Elasticidades

Muchas veces, lo que en verdad nos interesa es saber qué pasa cuando algún *shock* sacude la economía y qué podemos hacer para remediarlo. Estos es lo que solemos llamar como Estática Comparativa. De hecho, gran parte de la evidencia empírica en economía hace justamente esto. Por ejemplo, cuando hacemos una regresión y vemos cómo el precio de algo afecta a su consumo, lo que hacemos es ver qué pasaría con el consumo en un caso hipotético,

Figura 2.17: I'm Commander Shepard, and this is my favourite Economics book in the Citadel!

dada la experiencia pasada que tenemos. Cuando creamos un modelo para entender algo económico, nuestro propósito debiera ser usar este enfoque para ver posibles escenarios futuros (esta parte práctica no es el enfoque del libro, pero si intentaré hacer una sección pequeña al final).

Así, tenemos todo tipo de herramientas que nos permitirá resolver estas preguntas en el marco del consumo del agente. Algunas más conocidas que otras, seguramente. Comenzamos con las famosas **elasticidades**. Usualmente tendremos tres tipos de elasticidades:

- **Elasticidad propia:** corresponde al cambio porcentual en la cantidad demandada de un bien, ante un cambio porcentual en su mismo precio. La definimos como
$$\eta_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}.$$

  La intuición de estos términos es más clara cuando reordenamos la ecuación:
$$\eta_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i}/\frac{\partial p_i}{p_i},$$

  donde el primer término es el cambio porcentual del bien i, y el segundo es el cambio porcentual del precio para ese bien. Al dividir uno con el otro, obtenemos cuánto aumenta x_i en porcentaje, ante un cambio porcentual en el precio. Si el valor es menor a 1, entonces cambia en menor medida que el precio, por ende el bien es más **inelástico** al precio. Mientras que si es mayor a 1, es más **elástico**, dado que el precio afecta en mayor proporción al consumo. Les llamamos de esta forma porque uno puede imaginarse cuánto se deben estirar para acomodar la demanda. Por ejemplo, si tuviéramos diez bebidas cola idénticas, deberían ser elásticas sus demandas. Pero si, por ejemplo, hubiera sólo una y **necesitamos** esa bebida para vivir, entonces sería una demanda inelástica porque no importa cuánto suba el precio, seguiré consumiendo.

- **Elasticidad cruzada:** corresponde al cambio porcentual en la cantidad demandada de un bien, ante un cambio porcentual en el precio de otro bien. La definimos como

$$\eta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}.$$

En caso de moverse juntos (mayor a 0), es decir, si cae el precio del otro, la demanda de este también cae, entonces hablamos de **complementos** porque su consumo es complementario. En caso de ser negativa, es decir, si aumentar porcentualmente el precio de j aumenta porcentualmente el consumo de i, entonces hablamos de **sustitutos** porque cambiamos el consumo de bien entre ellos al ser más caro el que cambió su precio. Por ejemplo, la Coca-Cola y la Pepsi son sustitutas, mientras que la Coca-Cola con las papas fritas Lays son complementos.

- **Elasticidad ingreso:** corresponde al cambio porcentual en demanda de x_i al cambiar porcentualmente el ingreso.

$$\eta_{im} = \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}.$$

En caso de ser positiva y menor a 1 la llamamos un bien **normal**, pues consumo un poco más si aumenta mi ingreso. En caso de ser mayor a 1, lo llamamos un bien **de lujo**, pues consumo en mayor proporción que lo que me entra de consumo. Finalmente, en caso de ser dejar de consumir si sube mi ingreso (menor a 0), entonces lo llamamos un bien **inferior**. En caso de ser 0, entonces es **nula.** Por ejemplo, las joyas son bienes de lujo porque las compro en mayor cantidad cuando tengo harto dinero. El transporte público en una ciudad hecha para autos es inferior, porque dejo usarlo una vez que puedo usar auto. Finalmente, sólo uso una pasta de dientes, por lo que podría ser un bien neutro.

Ecuación de Slutsky
Por la dualidad vista anteriormente, sabemos que

$$x_i^H(p_1, p_2, \bar{u}) = x_i^M(p_1, p_2, G^*(p_1, p_2, \bar{u})).$$

Si derivamos respecto al precio cualquier bien j (no necesariamente uno distinto), tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial x_i^H(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, m)}{\partial m}\frac{\partial G^*(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j},$$

$$\frac{\partial x_i^H(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, m)}{\partial m}x^H(p_1, p_2, \bar{u}),$$

Pero, personalmente, me gusta verla como

$$\frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^M(p_1,p_2,m)}{\partial m} x_i^H(p_1,p_2,\bar{u}) - \frac{\partial x_i^H(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_j},$$

A esta ecuación la llamamos **Ecuación de Slutsky,** y nos describe cuánto del cambio en el consumo de un bien se da por los efectos **ingreso y sustitución.** La ecuación nos dice que el cambio de consumo de un bien, al cambiar el precio i, se da por dos efectos. El primer efecto es el llamado ingreso, y notemos que se debe a que el cambio en precio equivale a un cambio en riqueza (o poder adquisitivo), multiplicado por la cantidad del bien. Entonces, este cambio en poder adquisitivo dado por un cambio en precios cambia nuestras locación de consumo. Por otro lado, el segundo término es el efecto **sustitución**, y se llama así porque explica un efecto puro de cuánto debiera cambiar su consumo de un bien por otro, con tal de mantener su utilidad constante (por eso la demanda hicksiana). Mi forma de interpretarlo es que el agente primero intenta mantener su utilidad constante con pura sustitución de un bien por otro (ES), debido a que el ratio de precios ha cambiado y la condición de tangencia no es la misma. En caso de ser imposible mantener su utilidad, esto implica que su poder adquisitivo ha cambiado, y por lo tanto, debe modificar su consumo más aún (EI). Dado que la condición de tangencia es distinta porque cambiaron los precios, el efecto sustitución es el ajuste por consumir de nuevo de forma óptima, acorde a los precios nuevos.

El gráfico típico es la Figura 2.18. Supongamos que hubo un aumento del precio del bien 1, y tenemos demandas normales. Eso modifica la pendiente de la RP_0 y nos deja con una restricción presupuestaria RP_1 con una pendiente mayor. Originalmente consumía x_0^* y tras el cambio x_1^*. Hago un paso relevante para ver los dos efectos claramente: usando la restricción presupuestaria con precios **nuevos**, desplazamos esa curva hasta topar con la curva de indiferencia original. Esto sería un nivel de riqueza equivalente al original pero con precios nuevos, debido a que nos permite el mismo nivel de utilidad, pero consumiendo una canasta distinta que la original a precios nuevos.

Por lo tanto, el efecto sustitución será todo entre x_0^* y $x_1^{*'}$, simbolizando este ajuste en razón de consumo puramente a través de sustitución para acomodarse a los nuevos precios en su condición de tangencia. Luego, el espacio entre el consumo final y el consumo que hiciera con más ingreso pero precios nuevos sería el efecto sustitución, ya que sería el ajuste en consumo debido a que no posee la misma riqueza que antes.

2.4. Bienestar del Consumidor

En muchos casos de interés, lo que queremos es saber qué hacer para solucionar un problema que afecta a la población. Por ejemplo, alguna emergencia mundial sucedió y los precios aumentaron, lo que provocó que personas

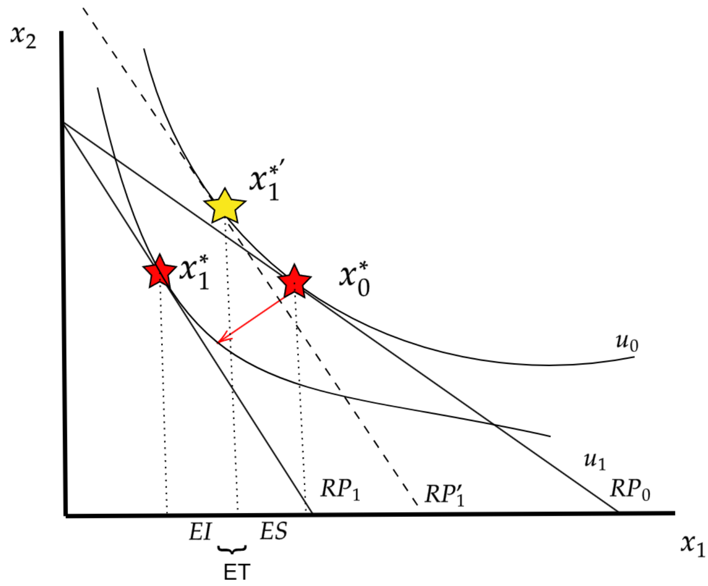


Figura 2.18: Efectos Ingreso y Sustitución

estén en peligro de no consumir suficiente comida. El Estado podría estar pensando en intentar dotar a estas personas de ingresos, de manera que puedan recuperar su utilidad anterior. Este tipo de análisis es nuestro enfoque en esta sección. Veremos principalmente dos medidas de bienestar, las cuales nos permitirán preguntarnos decisiones de política pública (bastante simples) para distintos escenarios. Estos son dos: **la variación compensatoria y la variación equivalente.**

2.4.1. Variación compensatoria

Siempre recomiendo pensar en preguntas. El correspondiente a la variación compensatoria es:

- Supongamos que el precio de un bien aumenta, **¿cuánto ingreso debería darle, con estos precios nuevos, para volver a su utilidad anterior?**

Como explicamos antes, esto es una pregunta de política pública bien común, por lo que es de interés para nosotros. Como hablamos de otorgar ingreso para llegar a un nivel de utilidad, vamos a necesitar hacer un cálculo de funciones de costo mínimo. De hecho, podemos definir la variación compensatoria como:

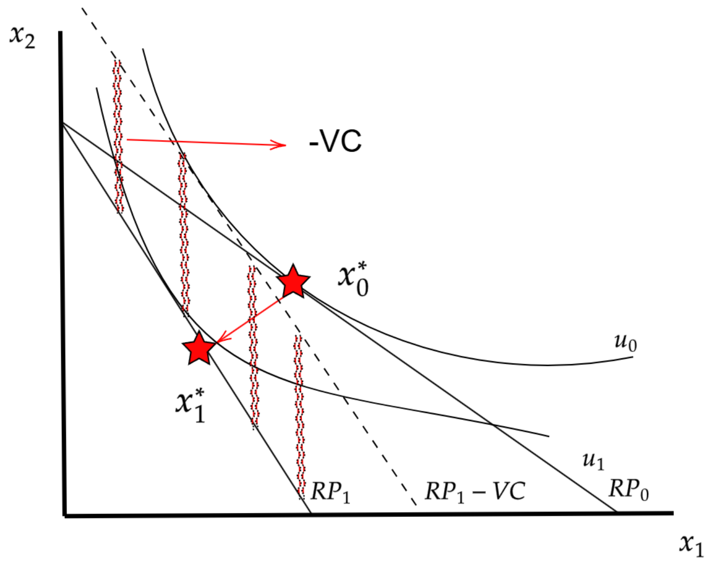


Figura 2.19: Variación Compensatoria

Variación Compensatoria

¿Cuánto ingreso debería darle, con estos precios nuevos, para volver a su utilidad anterior? Hay dos formas de definir:

$$VC = G^*(p_1', p_2, u) - G^*(p_1', p_2, u')$$

o, en su forma de demanda hicksiana

$$VC = \int_{p_1'}^{p_1} x_1^H(p_1, p_2, u)dp_1$$

Por lo general me gusta tratar con la primera definición, cuya interpretación es directa de la pregunta. Estamos viendo cuánto entregar de ingreso, a través de la función de gasto mínimo, para llegar de un nivel de utilidad al anterior, según los precios. Notar que se define en negativo, por lo que un número negativo implica otorgar dinero, y para quitar dinero debiera ser positivo. La segunda definición es el área de la curva de demanda hicksiana para un nivel de utilidad constante.

En la Figura 2.19 ilustramos esto. Al aumentar el precio, la restricción presupuestaria toma mayor pendiente y cae la utilidad. La VC será entonces la distancia entre la nueva restricción presupuestaria (función de gasto mínimo), hasta aquella que sería necesaria, bajo los nuevos precios (la nueva pendiente), para obtener el mismo nivel de utilidad anterior.

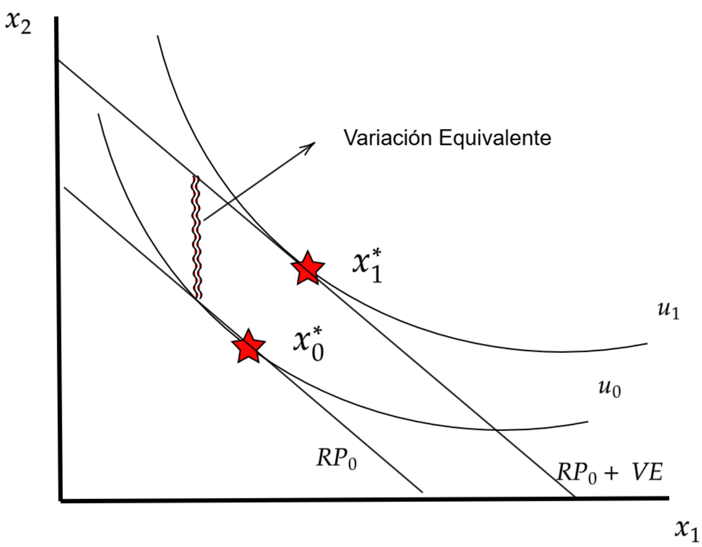


Figura 2.20: Variación Equivalente

2.4.2. Variación equivalente

La variación equivalente no se pregunta un cambio en precio, sino cuánto dinero otorgar para moverme de una utilidad a otra. A diferencia de VC, acá no hay cambios en precios.

- **¿Cuánto necesito dar/quitar, en dinero, para llegar a un nivel de utilidad deseado?**

Variación Equivalente

¿Cuánto necesito dar/quitar, en dinero, para llegar a un nivel de utilidad deseado?

$$VC = G^*(p_1, p_2, u') - G^*(p_1, p_2, u)$$

o, en su forma hicksiana,

$$VC = \int_{p_1'}^{p_1} x_1^H(p_1, p_2, u')dp_1$$

La lógica es la misma que antes. Gráficamente, nos preguntamos en la distancia en términos de función de gasto mínimo, entre una curva de indiferencia y otra. Esto lo podemos apreciar en la Figura 2.20.

Capítulo 3

Intercambio (sin producción)

El hecho que esta sección esté acá, y no sigamos por Teoría de la Firma, es para nada común en los libros. Sin embargo, siempre he sentido que tiene más cohesión en el relato terminar de entender a los consumidores, y después dedicarnos de lleno a entender a las empresas. Creo que a veces se pierde un poco el hilo tomando ese espacio para volver al intercambio entre consumidores.

Intercambio sin producción es, a mi parecer, un momento clave en la vida de todo economista. Es donde la magia toma lugar y uno se enamora. Escribo esto mientras me caen lágrimas de la emoción y mi teclado se prende en fuego. En fin, esto no será visto en este orden en sus libros de estudio oficiales, sin embargo, creo que es conveniente abordarlo para seguir entendiendo a los consumidores y cómo ahora interactúan entre ellos. También torga una primera noción sobre cómo se determinan los precios de manera endógena (es decir, en equilibrio, a diferencia de la sección anterior donde estaban dados). Terminaremos con el momento más bello de la vida: ver y entender, por primera vez, el primer teorema del bienestar.

3.1. Dos agentes y una nueva restricción presupuestaria

Intercambio aborda una nueva parte de nuestra natural interacción humana: el intercambio, y explicará varios fenómenos que antes dábamos por dados. Cuando nosotros compramos algo, usualmente lo que estamos haciendo es intercambiar dinero o bienes, por otros bienes. Acá vamos a modelar justamente eso. Todavía no vamos a asumir la existencia de empresas que producen bienes, sino que vamos a asumir que somos dos personas en una isla, y que cada uno llegó a este mundo con una dotación de bienes predeterminada. Al encontrarse uno con esta otra persona, nos daremos cuenta que podemos potencialmente intercambiar para mejorar nuestra utilidad, en caso de que encontremos posibilidades de que cada uno se lleve más bienes que necesita.

Así, hay tres elementos nuevos en este modelo:

1. Dos agentes: en esta economía, tendremos a dos personas: A y B. Cada una con su propia función de utilidad y con una dotación potencialmente distinta, o no.

2. Precios: antes dábamos los precios como dados (lo que llamamos exógenos), sin embargo, acá no será el caso. El precio se dará en equilibrio, y dependerá fundamentalmente de las preferencias de cada uno y de sus dotaciones. Por ejemplo, un precio será obviamente muy caro si es deseado y escaso.

3. Ingreso: el ingreso de cada persona ya **no** es m. Sino que también será dado de manera endógena por las preferencias, los precios y la dotación de las personas de la economía. Por ejemplo, si llegué con uno de cada bien, y en equilibrio vemos que el precio de cada bien es de 10, entonces nuestro ingreso sería $m(p_1, p_2, \bar{x}_1^A, \bar{x}_1^B) = p_1\bar{x}_1^A + p_2\bar{x}_2^A$. Que sería el equivalente a vender todos sus bienes al precio de mercado, y luego usar ese ingreso para comprar los bienes que desee.

3.1.1. El problema de cada agente

Cada agente estará, por ahora, interesado en su propio bienestar. Tiene su función de utilidad, su dotación, y usará eso para comprar bienes. El problema es el mismo que el capítulo anterior. Cada agente estará interesado en maximizar su propia utilidad sujeto a la restricción presupuestaria (que, por ahora, no sabemos que tan restrictiva es).

El agente A solucionará el problema:

$$\max_{x_1^A, x_2^A} u(x_1^A, x_2^A) \quad \text{sujeto a: } p_1\bar{x}_1^A + p_2\bar{x}_2^A \geq p_1x_1^A + p_2x_2^A,$$

mientras que el agente B solucionará

$$\max_{x_1^B, x_2^B} u(x_1^B x_2^B) \quad \text{sujeto a: } p_1\bar{x}_1^B + p_2\bar{x}_2^B \geq p_1x_1^B + p_2x_2^B,$$

Como he mencionado recién, notemos que la restricción presupuestaria es distinta, y no está definida *ex-ante.* Tomemos como ejemplo la restricción del primer agente:

- $p_1\bar{x}_1^A + p_2\bar{x}_2^A$ indica el ingreso que tendríamos tras vender los bienes que fuimos dotados a un precio determinado, el cual se determinará en equilibrio.

- $p_1x_1^A + p_2x_2^A$ es la cantidad de bienes que decido comprar.

Solucionando el problema de cada agente llegaremos a las mismas demandas que vimos en el capítulo 1, pero la diferencia recae ahora en que no depende de sólo precios e ingreso, sino que dependerá de las dotaciones.

Notemos que la primera parte es igual, pero con el nuevo ingreso:

- Paso 1: Formulación del Lagrangeano.

  Definimos la función Lagrangeano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda\Big(p_1\bar{x}_1^A + p_2\bar{x}_2^A - p_1x_1 - p_2x_2\Big).$$

- Paso 2: Obtención de las Condiciones de Primer Orden (FOC). Se derivan parcialmente $\mathcal{L}$ respecto a x_1, x_2 y λ, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = u_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = u_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1\bar{x}_1^A + p_2\bar{x}_2^A - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \quad (3)$$

  Juntando las ecuaciones (1) y (2) recuperamos la misma condición de tangencia:

$$TMS_A = \frac{p_1}{p_2},$$

  Y cuando reemplazamos en la restricción presupuestaria, vamos a tener que las demandas toman la misma forma de siempre, solo que dependiendo -por ahora- de sus propias dotaciones:

$$(x_1^{A*}(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2^A); \quad x_2^{A*}(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2^A)).$$

  Sin embargo, esto no es del todo correcto, veremos que **los precios dependen de la dotación de todos los consumidores ($\bar{x}$).** Veremos en un rato cómo se logra esto.

$$(x_1^{A*}(p_1(\bar{x}), p_2(\bar{x}), \bar{x}_1, \bar{x}_2^A); \quad x_2^{A*}(p_1(\bar{x}), p_2(\bar{x}), \bar{x}_1^A, \bar{x}_2^A)).$$

  El agente B hará lo mismo, obviamente, y tendremos que sus demandas son:

$$(x_1^{B*}(p_1(\bar{x}), p_2(\bar{x}), \bar{x}_1^B, \bar{x}_2^B); \quad x_2^{B*}(p_1(\bar{x}), p_2(\bar{x}), \bar{x}_1, \bar{x}_2^B)).$$

  Concluyendo, por ahora, las demanda serán las mismas, sólo que ahora el ingreso se compone de precios y dotación. Los precios no están dados, por lo que dependerán también de la dotación. El proceso de derivación de esta parte es la misma pero haciendo estos ajustes. Ahora veremos cómo se determinan los precios.

3.1.2. Condición de equilibrio: vaciado de mercado

Tenemos las demandas, ahora, dadas estas, tenemos que confirmar que efectivamente las demandas de cada bien sean plausibles dada la disponibilidad de cada bien en la economía. Esto es la **condición de vaciado de mercado.**

Para cada mercado, la demanda de ambos agentes tiene que ser igual a la dotación, de otra forma, sobrarían bienes en la mesa para que alguien consuma, o se consumirían más bienes de los que es posible.

$$\bar{x}_1^A + \bar{x}_1^B = x_1^{A*} + x_1^{B*}$$

$$\bar{x}_2^A + \bar{x}_2^B = x_2^{A*} + x_2^{B*}$$

Sin embargo, dado algo que llamamos **Ley de Walras,** si $n-1$ mercados están en equilibrio, en n-ésimo también lo estará. Esto debido a una explicación matemática más larga, pero que esencialmente argumenta que la demanda de cada bien está dada por la frontera de posibilidades, por lo que sumando la oferta con la demanda, esta será igual a cero. En corto, esto permite sólo tener que resolver la primera ecuación.

Finalmente, dado que tanto el ingreso como los precios están completamente determinados por los precios, usar ambos precios p_1 y p_2 es redundante, pues lo que importa es la razón de los precios, no el nivel de los precios. Dado que los individuos venden sus dotaciones, la restricción presupuestaria es la misma si movemos los niveles pero no la razón de los precios. Es por esto que **SIEMPRE, SIEMPRE, SIEMPRE, SÓLO NOS IMPORTA LA RAZÓN DE LOS PRECIOS, POR LO QUE ESTANDARIZAMOS EL PRECIO p_2 A 1.** Esto es equivalente a dividir la restricción presupuestaria por p_2.

Entonces, si por ejemplo solucionamos la primera ecuación,

$$\bar{x}_1^A + \bar{x}_1^B = x_1^{A*}(p, \bar{x}_1^A, \bar{x}_2^A) + x_1^{B*}(p, \bar{x}_1^B, \bar{x}_2^B)$$

tenemos que podemos encontrar el precio p como función de **sólo las dotaciones de cada agente.**

$$p^*(\bar{x}).$$

Y ya tenemos todo listo para encontrar el equilibrio.

3.2. El equilibrio walrasiano

Ahora podemos proceder a definir el equilibrio en una economía de intercambio. **El equilibrio walrasiano** será un precio tal que las demandas vacían el mercado y los agentes maximizan sus utilidades. Formalmente:

Equilibrio walrasiano

Llamamos Equilibrio walrasiano a la razón de precios p^* tal que las demandas de cada agente i vacían el mercado de cada bien l.

$$\sum_i x_l^{i*}(p^*, \bar{x}) = \sum_i \bar{x}_l \quad \forall \quad l \in L.$$

Entonces, encontrar el equilibrio es fácil:

1. Calculamos las demandas de cada agente;
2. Sumamos las demandas de un bien a la suma de las dotaciones de ese mismo bien;
3. Despejamos el precio necesario para que se cumpla el punto anterior.
4. Por Ley de Walras, el resto del mercado también estará en equilibrio (en el caso de dos bienes).

El equilibrio se determinará por la dotación de los agentes y sus preferencias. Mientras más preferido sea un bien, mayor será el precio por ese bien. Por otro lado, mientras más escazo sea, también será más caro.

Ejemplo:
Supongamos que tenemos dos consumidores A y B, con las siguientes preferencias:

$$u_A(x_1^A, x_2^A) = 2\log x_1^A + \log x_2^A;$$
$$u_B(x_1^B, x_2^B) = \log x_1^B + 2\log x_2^B,$$

y las dotaciones del agente A es $(\bar{x}_1^A, \bar{x}_2^A) = (1, 2)$, y del agente B $(\bar{x}_1^B, \bar{x}_2^B) = (2, 1)$. Notemos que, en este escenario, cada uno tiene más del bien que el otro consumidor valora. Por ejemplo, A tiene más del bien 2, que es más preferido por el consumidor B.

Solucionemos primero el consumo de A:
$\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = \frac{2}{x_1^A} - \lambda p = 0$ $\frac{\partial L}{\partial x_2^A} = \frac{1}{x_2^A} - \lambda = 0$

$$TMS_A = \frac{2x_2^A}{x_1^A} = p$$

Insertando en la restricción del agente A y despejando:

$$p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A = px_1^A + x_2^A$$
$$p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A = px_1^A + x_2^A$$
$$p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A = 2x_2^A + x_2^A$$

$$p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A = 3x_2^A$$

$$p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A = 3x_2^A$$

$$x_2^{A*} = \frac{p\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A}{3}$$

$$x_1^{A*} = 2\frac{\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A}{3p}$$

Notemos que podemos ver que es correcto dado que $px_1^{A*}+x_2^{A*} = \bar{x}_1^A+\bar{x}_2^A$, por lo que estamos gastando todo el ingreso.

Para el agente B, las demandas serán:

$$x_2^{B*} = 2\frac{p\bar{x}_1^B + \bar{x}_2^B}{3}$$

$$x_1^{B*} = \frac{\bar{x}_1^B + \bar{x}_2^B}{3p}$$

Dado que sabemos las cuatro demandas, podemos usar la suma de las demandas de cualquier bien, digamos 1, y despejar el precio igualando con las dotaciones:

$$2\frac{\bar{x}_1^A + \bar{x}_2^A}{3p} + \frac{\bar{x}_1^B + \bar{x}_2^B}{3p} = \bar{x}_1^A + \bar{x}_1^B$$

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{p} = 3$$

$$p = 1.$$

Por lo que los precios para cada bien son 1. En consecuencia, reemplazando los precios y las dotaciones en las demandas, tenemos que el consumo de cada agente es

$$x_1^{A*} = 2$$

$$x_2^{A*} = 1$$

$$x_1^{B*} = 1$$

$$x_2^{B*} = 2$$

En este caso, dado que cada uno prefiere un uno más el bien que el otro tiene, entonces están dispuestos a intercambiar su unidad extra por la extra del otro. Dado que cambian uno por uno, el precio es solo de uno para cada bien.

3.2.1. Graficando el intercambio: la caja de Edgeworth

Uno desafío que encuentro común dentro de los estudiantes es entender a profundidad la caja de Edgeworth. Esta es una figura que ilustra las preferencias, dotaciones y asignaciones óptimas, entre otras cosas, en el intercambio entre consumidores. Antes de mostrar cómo es la caja, voy a explicar como la podemos armar desde cero. Primero, recordemos cómo veíamos el problema del consumidor de un agente. Como vemos en la figura 3.1, cada agente quiere, por separado, maximizar su utilidad.

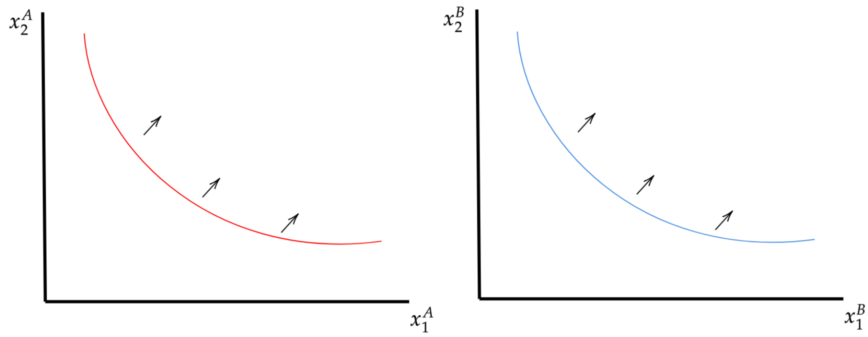


Figura 3.1: Cada agente quiere maximizar su utilidad

Sin embargo, la restricción se define en equilibrio. Y lo máximo que podría potencialmente consumir una persona está dado por la suma de las dotaciones para cada bien. Esto da múltiples desafíos en el gráfico convencional:

1. Tenemos que graficar cuánto es lo que puede consumir máximo cada uno, y esto esta también definido por el otro consumidor.

2. Queremos graficar una forma de ver a ambos consumidores, y su interacción, en un mismo gráfico.

Entonces, lo razonable sería limitar el espacio del gráfico a la suma de las dotaciones, y verlos a ambos en su proceso de maximización. Invirtiendo uno de los gráficos de la figura 3.1 y generando un rectángulo, tenemos la caja de Edgeworth en la derecha de la Figura 3.2.

El ancho de la caja se dará por la cantidad de dotación total del bien x_1, y el alto de la caja se dará por la suma de las dotaciones de x_2. El consumo se dará en un punto de la caja. En qué punto del lado horizontal de la caja me dirá cuánto consume del bien 1. En la base cuánto consume la persona A del bien 1, y la distancia en el techo entre el punto y la esquina superior

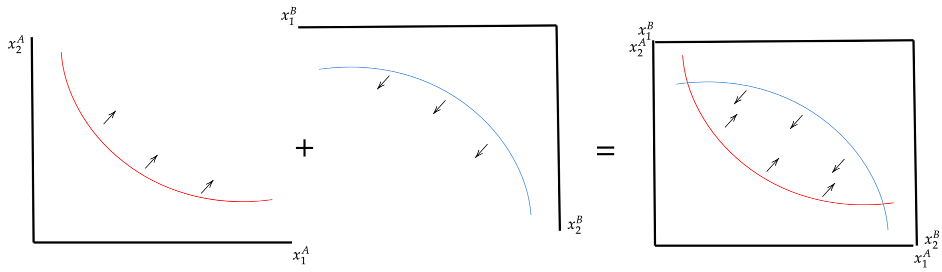


Figura 3.2: Caja de Edgeworth

derecha me dirá cuánto consume del bien 1 la persona B. Como es un punto, la suma de ambos consumos tiene que ser la dotación del bien 1. El análisis es el mismo para el consumo del bien 2, pero en los lados de la caja. La altura del punto por el lado izquierdo de la caja dirá el consumo del bien 2 de la persona A. y la distancia entre el punto superior derecho y la altura del punto será el consumo de la persona B del bien 2. La recta que juste entre ambas restricciones presupuestarias, con la misma pendiente que ellas, será la restricción presupuestaria. Esto debido a que ambos ambos agentes consumen hasta que su curva de indiferencia sea tangente con el precio p.

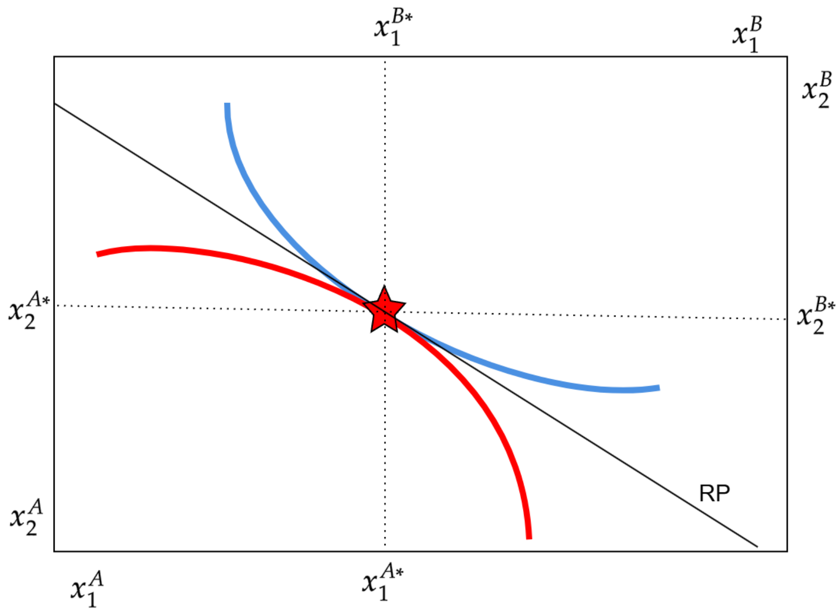


Figura 3.3: Equilibrio walrasiano en la caja de Edgeworth

Finalmente, notemos que el equilibrio se da en un punto muy particular: dado que ambos están maximizando, hay una tangencia entre ambos consumidores.

$$TMS_A = TMS_B = p.$$

Esto, veremos ahora, ¡¡¡¡¡será parte de un resultado espectacular!!!!!

3.3. Eficiencia de Pareto

Hasta ahora hemos visto el problema desde el problema del consumidor en primera persona. Ahora nos haremos una pregunta crucial, pero desde otro punto de vista. Llamémosle un ente superior que vela por el bienestar de los agentes, pero que sólo le importa que no se pierda utilidad. Sin embargo, no se puede pronunciar sobre **cuánta** utilidad se lleva cada consumidor. Este es el problema de Eficiencia de Pareto.

Este problema es tan importante, y tan crucial para el resto de Economía, que llamé a mi hurón de mascota: Pareto.

Figura 3.4: Pareto

El problema formal es el siguiente: maximizar la utilidad de un consumidor, dejando la utilidad del otro agente al máximo o constante, y obviamente, usando las dotaciones totales de la economía. Es decir, **nos importa sólo encontrar los puntos tales que la utilidad de un agente no puede aumentar más, sin afectar negativamente la del otro.** Esto es fundamental, Eficiencia sólo se pregunta por los puntos donde la forma de aumentar la utilidad de un agente viene con el coste de reducir la utilidad del otro.

Quiero recalcar nuevamente que el tomador de decisiones en este caso no son los agentes, es un ente superior que tiene control total sobre los recursos de la economía. Él ve las dotaciones totales de la economía, las preferencias de cada uno, y él decide cómo repartir los bienes. Los asigna, no da un precio.

Problema de Eficiencia de Pareto en Intercambio

Definimos el problema de Eficiencia como:

$$(x_1^{A*}, x_2^{A*}, x_1^{B*}, x_2^{B*}) \in \arg\max_x u_i(x_1^i, x_2^i)$$

sujeto a la disponibilidad de bienes: $\bar{x}_1 = x_1^A + x_1^B; \quad \bar{x}_2 = x_2^A + x_2^B,$

y a dejar, por lo menos, constante la utilidad del otro agente:

$$u_j(x_1^j, x_2^j) \geq \bar{u}_j,$$

Para cualquier agente $i, j \in \{A, B\}$

Por ahora, vamos a ignorar esta aproximación para ilustrar en mayor profundidad la intuición de nuestra pregunta.

3.3.1. El problema de Eficiencia pensando en sólo utilidad

Otra forma de ver el problema es asignar utilidad directamente a cada agente, de esta forma, los puntos eficientes serán todos los que describan la frontera de posibilidades de utilidad, siempre y cuando, esta frontera tenga una pendiente **negativa.** Podemos verlo en la figura 3.5. Todos los puntos en la frontera son eficientes porque, para darle más utilidad a un agente, debemos quitarle a otro. Si estamos en la zona amarilla, el agente puede aumentar la utilidad de ambos agentes, sin afectar negativamente la del otro.

Mejora Paretiana y Eficiencia

Llamaremos Mejora Paretiana a cualquier asignación x' tal que $u_i(x') > u_i(x)$ y $u_j(x') \geq u_j(x)$. Las asignaciones donde **no** hayan mejoras paretianas, serán asignaciones eficientes.

Usualmente estudiantes suelen equivocarse en que la frontera de toda posibilidad de utilidad es eficiente, sin embargo, esto no es cierto. Sólo será en puntos donde, usualmente, la curva tenga pendiente negativa (ilustrando el trade-off de utilidad). Para ilustrar esto: si la frontera de posibilidades no tuviera pendiente negativa y fuera, por ejemplo, un cuadrado. Entonces Toda la frontera del cuadrado no será eficiente, a excepción de la esquina, debido a que en cualquier lado del cuadrado puede subir la utilidad de un agente sin afectar negativamente la del otro. **Warning:** si la frontera es muy rara, puede que esto no se cumpla. Pero creo que no vale la pena ponerse en

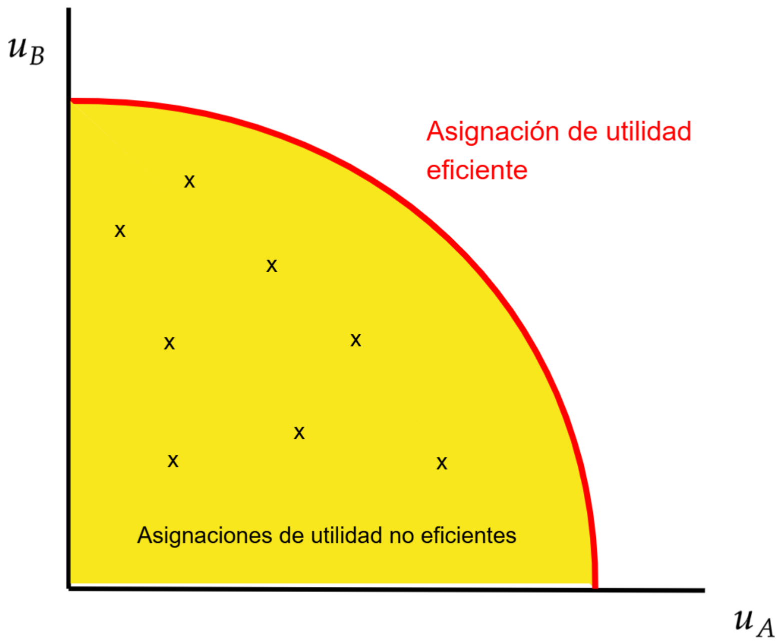


Figura 3.5: Asignaciones de utilidad eficientes

esos casos por ahora.

3.3.2. Solucionando Eficiencia en Intercambio

Dado que entendemos lo que queremos conseguir, ahora vamos a volver al problema de Eficiencia asignando los bienes a consumir. Asumiremos, por ahora, funciones de utilidad cuasi cóncavas y doblemente diferenciable. Después mostraré otros casos interesantes. De esta forma, podemos solucionar el problema a través del uso del siguiente lagrangeano.

Consideremos el problema planteado anteriormente para la economía con dos agentes $i, j \in A, B$ y dos bienes $k \in 1, 2$:

$$\max_{x_1^i, x_2^i, x_1^j, x_2^j} \quad u_i(x_1^i, x_2^i) \text{ sujeto a: } \quad u_j(x_1^j, x_2^j) \geq \bar{u}_j,\ x_1^A + x_1^B \leq \bar{x}_1, \quad x_2^A + x_2^B \leq \bar{x}_2.$$

Para resolver este problema, formamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = u_i(x_1^i, x_2^i) + \lambda \left(u_j(x_1^j, x_2^j) - \bar{u}_j \right) + \mu_1 \left(\bar{x}_1 - x_1^A - x_1^B \right) + \mu_2 \left(\bar{x}_2 - x_2^A - x_2^B \right)$$

donde λ, μ_1, μ_2 son multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones del problema.

Las condiciones de primer orden necesarias son:

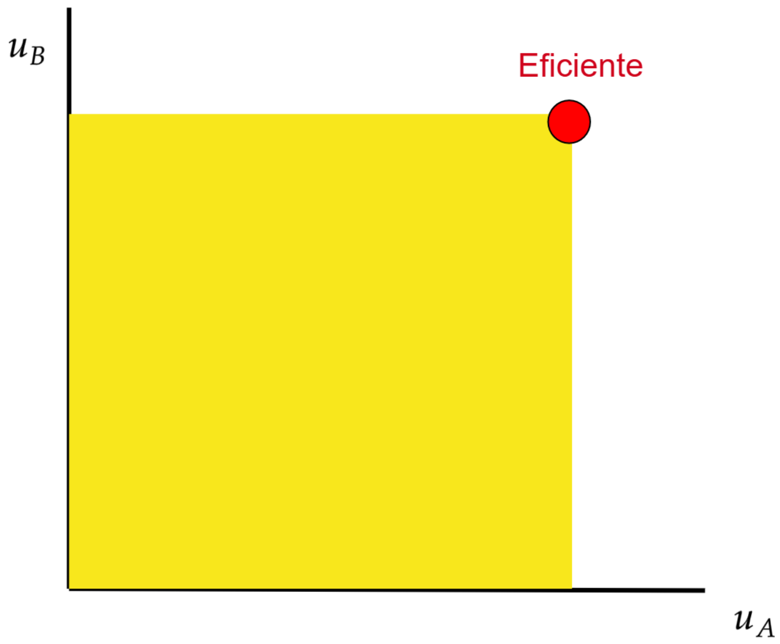


Figura 3.6: Eficiencia en un caso particular

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k^i} - \mu_k = 0, \quad k \in 1,2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^j} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_k^j} - \mu_k = 0, \quad k \in 1,2, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u_j(x_1^j, x_2^j) - \bar{u}_j = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k} = \bar{x}_k - x_k^A - x_k^B = 0, \quad k \in 1,2. \tag{3.4}$$

De las condiciones anteriores obtenemos las siguientes igualdades que caracterizan la eficiencia en el sentido de Pareto:

$$\frac{\frac{\partial u_i/\partial x_1^i}{\partial u_i/\partial x_2^i}}{\frac{\partial u_j/\partial x_1^j}{\partial u_j/\partial x_2^j}} = 1. \tag{3.5}$$

$$TMS_A = TMS_B \tag{3.6}$$

Esta última condición establece que, en el óptimo de Pareto, las tasas marginales de sustitución entre ambos bienes deben igualarse entre los dos agentes, reflejando que no es posible reasignar bienes para mejorar la utilidad de un agente sin perjudicar la del otro.

Tenemos nuestra solución, notemos que se parece a la condición de primer orden de un problema de intercambio clásico. Más de esto en un rato. Por ahora, sólo observemos que estaremos en un punto eficiente siempre y cuando las pendientes de cada curva de indiferencia estén igualadas. Si fueran distintas, significa que un agente podría recibir más utilidad de un bien 1 que lo que recibe por el bien 2. El otro agente enfrenta lo mismo pero queriendo una unidad del bien 2. Dado esto, ellos están dispuestos a intercambiar estos bienes y ambos quedar más felices. Llamaremos **curva de contrato**, a todos los puntos eficientes.

Curva de Contrato

Definimos como curva de contrato a todos los puntos de la Caja de Edgeworth donde se soluciona el problema de eficiencia paretiana.

Gráficamente, esto se verá como todos las asignaciones de bienes posibles donde una curva de indiferencia topa con la otra en un punto donde ambas tienen la misma pendiente. Esto se puede apreciar en la Figura 3.7.

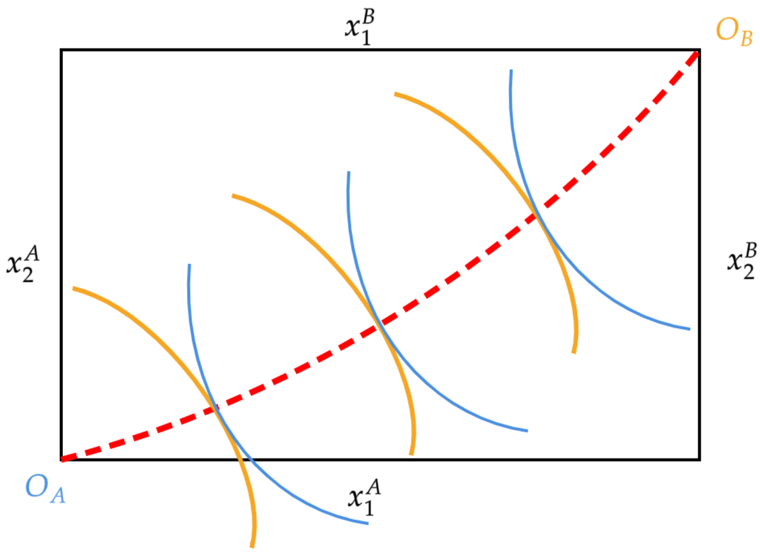


Figura 3.7: Curva de Contrato

Notemos porqué una asignación fuera de la curva de contrato permitirá que uno, o ambos, de los consumidores pueda mejorar su utilidad sin afectar negativamente la del otro. Ubiquémonos en cualquier punto fuera de la curva de contrato y veamos que hay un espacio formado entre ambas curvas de indiferencia donde, si nos movemos a cualquier punto dentro de ese espacio, uno o ambos agentes están estrictamente mejor. Por lo tanto, si estamos fuera de la curva de contrato, toda el área entre ambas curvas de indiferencia que pasan por ese punto son **mejoras paretianas.** Justamente en la curva de contrato **no** se generará esta área, por lo que no habrán mejoras paretianas. Este proceso lo pueden ver en la Figura 3.8:

- En la primera parte, el punto x representa una asignación no eficiente porque está fuera de la curva de contrato. Cualquier punto dentro de el espacio generado entre ambas curvas de indiferencia son mejoras paretianas.
- Al moverse de x a un punto eficiente x', notemos que la utilidad de ambos agentes aumenta.
- Si nos hubiéramos movido a otro punto dentro del área pero no de la curva de contrato, fuimos a una mejora paretiana que sigue teniendo mejoras paretianas, por lo que tendríamos que iterar hasta la asignación eficiente,

3.4. El momento más hermoso de sus vidas: primer teorema del bienestar

Este resultado es lo mejor del universo. Notemos que la solución, en el caso anterior, se vio dada entonces por $TMS_A = TMS_B$. Y en intercambio, vimos que pasaba lo mismo, dado que ambos agentes compraban hasta $TMS_A = p$ y $TMS_B = p$, entonces $TMS_A = TMS_B$. ¡¡¡Y también encontramos esto en eficiencia!!! Así, llegamos a lo que llamamos el **Primer Teorema del Bienestar**, que nos indica que en un mundo **sin externalidades**, todo equilibrio walrasiano es además eficiente. Esto es, todo p^* que forme un equilibrio walrasiano mapeará a una asignación de consumo eficiente, donde un agente no puede mejorar sin empeorar al otro.

Primer Teorema del Bienestar

Bajo preferencias no saciables, y sin externalidades, cualquier equilibrio competitivo se ubica en la curva de contrato. Es decir, cualquier equilibrio competitivo es eficiente.

La intuición es obvia pero no tan obvia. Volvamos a la Figura 3.8. Imaginemos que, dado una asignación inicial, podemos potencialmente lograr cualquier acuerdo. Si estamos en un punto fuera de la curva de contrato, por ejemplo en el punto x del primer panel de la figura, entonces no hay razón para que no podamos hacer un contrato y llegar a cualquier punto dentro del área de mejoras paretianas. Lo mismo iteramos hasta llegar al **núcleo**, que es la curva dentro del área de mejoras paretianas. Por lo tanto, si los agentes son racionales, y tenemos información perfecta, tiene sentido de que intercambiemos hasta llegar a un punto eficiente. De otra forma, alguien estaría dejando utilidad encima de la mesa y, por ende, podría ofrecer algo a la otra persona y llegaría a un punto mejor.

Esto también es resultado directo de lo que vimos en las condiciones de óptimo en intercambio. Como vimos, tanto la curva de contrato descrita por la solución de eficiencia como la condición de primer orden en el problema de intercambio son las mismas.

Este resultado es uno de los pilares de la importancia de intercambio. Si dos países con dotaciones nacen fuera de una curva de contrato, es fundamental que intercambien porque lograrán una mejora paretiana al hacerlo.

3.4.1. ¿Qué pasa si hay externalidades?

Hagamos un breve ejemplo de una economía con externalidades, y veamos cómo se rompe la eficiencia con un ejercicio.Considere una economía de intercambio puro con dos bienes, x_1 y x_2, y dos agentes, A y B. Las dotaciones iniciales son

$$(\omega_{1A}, \omega_{2A}) = (1, 0), \quad (\omega_{1B}, \omega_{2B}) = (0, 1).$$

Las funciones de utilidad son

$$u_A(x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}) = x_{1A}^{\frac{1}{2}} x_{2A}^{\frac{1}{2}} - x_{1B}, \qquad u_B(x_{1B}, x_{2B}) = x_{1B}^{\frac{1}{2}} x_{2B}^{\frac{1}{2}}.$$

1. Calcule el equilibrio competitivo: precios y asignaciones.
2. Derive la curva de contrato (condición de óptimo paretiano interior).
3. Verifique que la asignación competitiva no es eficiente.

Solución

1. Equilibrio competitivo

(i) Precios e ingresos. Normalizamos $p_1 = 1$, $p_2 = p > 0$. Ingresos:

$$I_A = 1 \cdot 1 + p \cdot 0 = 1, \qquad I_B = 1 \cdot 0 + p \cdot 1 = p.$$

(ii) Demandas individuales. Agente A. Maximiza

$$\max_{x_{1A}, x_{2A} \geq 0} x_{1A}^{\frac{1}{2}} x_{2A}^{\frac{1}{2}} - x_{1B} \quad \text{sujeto a} \quad x_{1A} + p\, x_{2A} = 1.$$

Observe que x_{1B} es exógeno para A: no afecta las FOC, queda como término constante. Las FOC llevan a la demanda Cobb–Douglas usual:

$$x_{1A} = \frac{1}{2}, \qquad x_{2A} = \frac{1}{2p}.$$

Agente B. Maximiza

$$\max_{x_{1B},x_{2B}\geq 0} x_{1B}^{\frac{1}{2}} x_{2B}^{\frac{1}{2}} \quad \text{sujeto a} \quad x_{1B} + p\,x_{2B} = p.$$

Con exponentes iguales:

$$x_{1B} = \frac{p}{2}, \qquad x_{2B} = \frac{1}{2}.$$

(iii) Precio de equilibrio. Mercado de bien 1:

$$x_{1A} + x_{1B} = \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = 1.$$

Entonces la asignación competitiva es

$$(x_{1A}^*, x_{2A}^*) = (0{,}5,\ 0{,}5), \qquad (x_{1B}^*, x_{2B}^*) = (0{,}5,\ 0{,}5).$$

2. Curva de contrato (óptimo de Pareto)

Para hallar la *curva de contrato* maximizamos la utilidad de A sujetando el nivel de utilidad de B y las restricciones de recurso:

$$\max_{x_{1A},x_{2A},x_{1B},x_{2B}\geq 0} u_A \quad \text{s.a.} \quad u_B(x_{1B}, x_{2B}) = \bar{u}_B,\ x_{1A}+x_{1B} = 1,\ x_{2A}+x_{2B} = 1.$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} \ = \ x_{1A}^{\frac{1}{2}} x_{2A}^{\frac{1}{2}} - x_{1B} - \lambda\big(x_{1B}^{\frac{1}{2}} x_{2B}^{\frac{1}{2}} - \bar{u}_B\big) + \mu_1(1-x_{1A}-x_{1B}) + \mu_2(1-x_{2A}-x_{2B}).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{1A}} &: \ \tfrac{1}{2}\, x_{1A}^{-\frac{1}{2}} x_{2A}^{\frac{1}{2}} - \mu_1 = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{2A}} &: \ \tfrac{1}{2}\, x_{1A}^{\frac{1}{2}} x_{2A}^{-\frac{1}{2}} - \mu_2 = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{1B}} &: \ -1 \ - \ \tfrac{\lambda}{2}\, x_{1B}^{-\frac{1}{2}} x_{2B}^{\frac{1}{2}} \ - \ \mu_1 = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{2B}} &: \ -\tfrac{\lambda}{2}\, x_{1B}^{\frac{1}{2}} x_{2B}^{-\frac{1}{2}} \ - \ \mu_2 = 0.
\end{aligned}$$

De las dos primeras

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{x_{2A}}{x_{1A}}}, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{x_{1A}}{x_{2A}}},$$

luego

$$\frac{\partial\mathcal{L}/\partial x_{1A}}{\partial\mathcal{L}/\partial x_{2A}} \implies \frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

De las dos últimas

$$\mu_1 = -1 - \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{x_{2B}}{x_{1B}}}, \quad \mu_2 = -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{x_{1B}}{x_{2B}}},$$

luego

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{2+\lambda\sqrt{\frac{x_{2B}}{x_{1B}}}}{\lambda\sqrt{\frac{x_{1B}}{x_{2B}}}} = \frac{x_{2A}}{x_{1A}}.$$

En consecuencia la condición de óptimo es

$$\frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{2+\lambda\sqrt{\frac{x_{2B}}{x_{1B}}}}{\lambda\sqrt{\frac{x_{1B}}{x_{2B}}}} \quad \text{con} \quad x_{1A}+x_{1B}=1,\ x_{2A}+x_{2B}=1.$$

Notar que aquí no se igualan directamente las tasas marginales de sustitución ($\mathrm{MRS}_A \neq \mathrm{MRS}_B$), sino que aparece el multiplicador λ (depende del nivel $\bar{u}_B$), lo cual es distinto de la condición usual en ausencia de externalidad.

3. Ineficiencia del equilibrio competitivo

En el equilibrio competitivo $(0{,}5, 0{,}5)$ para ambos, se tendría

$$\mathrm{MRS}_A = \frac{x_{2A}}{x_{1A}} = 1, \quad \mathrm{MRS}_B = \frac{x_{2B}}{x_{1B}} = 1,$$

pero la solución de la curva de contrato satisface

$$\mathrm{MRS}_A = \frac{2+\lambda\,\mathrm{MRS}_B}{\lambda} \neq \mathrm{MRS}_B \quad (\text{en general } \lambda \neq 1).$$

Por tanto el equilibrio competitivo no coincide con ningún punto de la curva de contrato y es ineficiente.

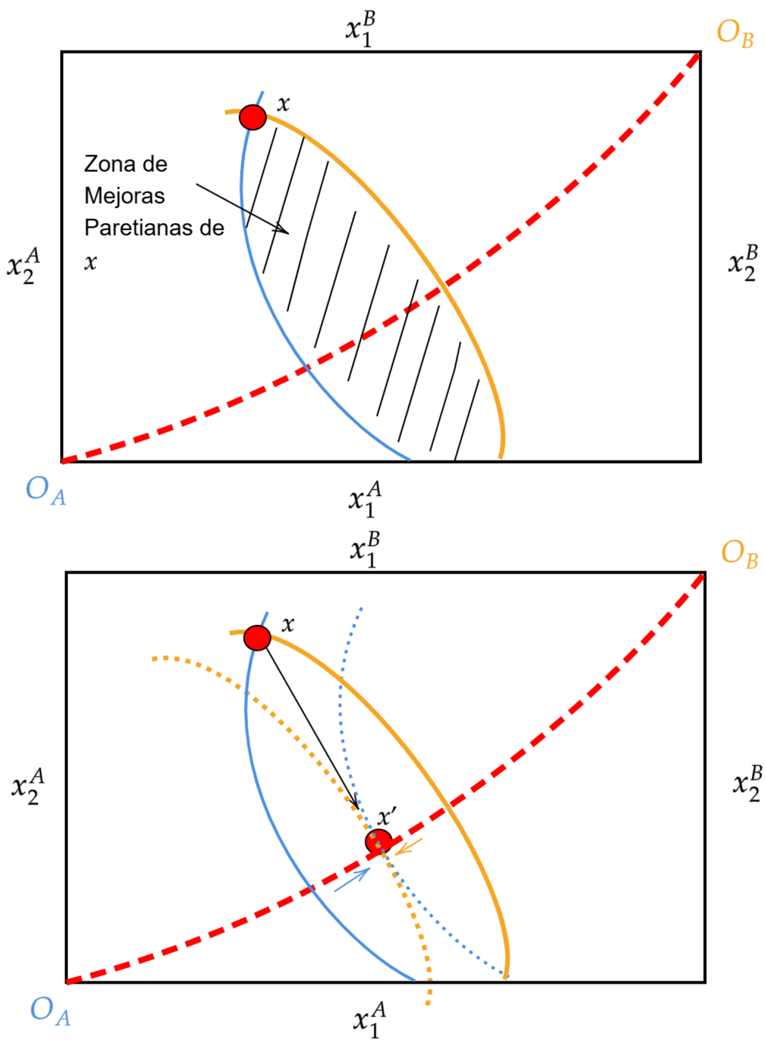


Figura 3.8: Eficiencia y Mejoras Paretianas

Figura 3.9: Pareto y Violeta < 3

Capítulo 4

Teoría de la Firma

Siempre explico a mis alumnos que un curso de Microeconomía I debería intentar, al final de todo, poder simular una economía que se componga de consumidores y firmas. Para esto, en el capítulo de consumidores exploramos cómo toman decisiones, dada una oferta y precios fijos. Pero ahora es momento de entender el segundo lado de esta simulación, que son las empresas, o firmas. Formalmente, alguna vez me explicaron que es incorrecto que usemos la palabra *firma* para señalar empresas, dado que *firm* es la traducción en inglés de empresa, pero firma en español no es sinónimo de empresa. La verdad es que sigo usando la palabra firma porque estoy acostumbrado, y en general todo el mundo lo hace también, por lo que me da un poco lo mismo. Perfeccionistas del español, alerta.

Para entender cómo una firma toma decisiones, las herramientas que usaremos van a ser súper similares, pero pondremos énfasis de manera distinta debido a algunos análisis que podemos hacer después. Siempre digo que nos vamos a tomar más en serio el problema de minimización que el de maximización, en este caso, a diferencia que en Teoría del Consumidor. Esto porque vamos a poder obtener funciones de costos que dependen de la cantidad, lo que hace mucho más simple e intuitivo el análisis cuando queremos preguntarnos cómo cambian las decisiones cuando, por ejemplo, pasamos de un mundo con competencia perfecta a un monopolio o un mercado oligopólico. Por esto, vamos a partir este capítulo con el problema de minimización y sus demandas **condicionadas.**

4.1. El problema de minimización de costos y las demandas condicionadas

Tal cual como uno habrá visto en otros cursos preliminares, uno suele modelar el problema de una empresas como

$$\max_{P,Q} \pi(P,Q) = P(Q) * Q - C(Q),$$

donde potencialmente el precio depende de la cantidad producida (en caso de haber poder de mercado), o no. Sin embargo, esta es la forma 'simplificada' de plantearlo, ya que antes de esto existe un problema mucho más fundamental de la empresa, que es cómo usar sus recursos. De hecho, el problema en verdad es:

$$\max_{K,L} \pi(P,K,L) = P \times F(K,L) - wL - rK,$$

sin embargo, al momento de de introducir otros elementos, como demandas distintas a solo la producción, entonces este enfoque ses vuelve super poco práctico. Tomemos el caso donde la demanda de la firma tiene una forma $P = A - Q$ (monopolio), entonces bajo este enfoque el problema seria:

$$\max_{K,L} \pi(P,K,L) = (A - F(K,L)) \times F(K,L) - wL - rK,$$

y tendríamos muchas reglas de la cadena y complicaciones de todo tipo. ¡Muy poco práctico! Por esto, primero vamos a solucionar el problema de minimización, de manera de encontrar una función de costo mínimo que sólo dependa de los precios de insumos y de la cantidad que queremos producir, y entonces podremos analizar el comportamiento de la empresa cuando intente tomar decisiones de producción para maximizar su utilidad. Es decir, solucionaremos

$$\min_{K,L} C(K,L) = wL + rK, \quad \text{sujeto a:} \quad (K,L) = Q,$$

para encontrar una función de costos $C(Q,w,r)$. Después veremos la decisión para maximizar utilidad, teniendo en cuenta la eficiencia en uso de insumos que implica tener la función de costo mínimo.

Demandas Condicionadas

Llamamos **demandas condicionadas** a la elección de insumos que resuelve el problema:

$$\min_{K,L} C(K,L) = wL + rK, \quad \text{sujeto a:} \quad (K,L) = Q,$$

Siempre me dicen que se marean entre estas demandas y las no-condicionadas que veremos más adelante. Simplemente recuerden, las condicionadas están **condicionadas en Q.** Tan simple como eso. Dime cuánto quieres producir y cuales son los precios, y te diré cuánto usar de cada insumo, de manera de hacerlo lo más barato posible.

Consideremos el problema de minimización:

$$\min_{K,L} \; wL + rK, \quad \text{tal que} \quad F(K,L) = Q.$$

Para incorporar la restricción, definimos el lagrangeano:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = wL + rK + \lambda\big[Q - F(K, L)\big],$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange, que se interpretará como el costo marginal de producir una unidad adicional de output. El término $\lambda\big[Q - F(K, L)\big]$ penaliza cualquier desviación de la restricción $F(K, L) = Q$.

Para optimizar el problema, derivamos el lagrangeano respecto a K, L y λ:

1. Derivada con respecto a K

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda\, F_K(K, L) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \lambda\, F_K(K, L),$$

donde $F_K(K, L)$ representa la derivada parcial de F con respecto a K.

2. Derivada con respecto a L

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda\, F_L(K, L) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \lambda\, F_L(K, L),$$

donde $F_L(K, L)$ es la derivada parcial de F con respecto a L.

3. Derivada con respecto a λ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q - F(K, L) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(K, L) = Q.$$

Las dos primeras condiciones permiten identificar la relación entre los precios de los insumos y sus productos marginales. De cada una se puede despejar λ:

$$\lambda = \frac{r}{F_K(K, L)} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{w}{F_L(K, L)}.$$

Igualando ambas expresiones se deduce:

$$\frac{r}{F_K(K, L)} = \frac{w}{F_L(K, L)} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_L(K, L)}{F_K(K, L)} = \frac{w}{r}.$$

Esta relación fundamental indica que, para minimizar los costos manteniendo Q fijo, la tasa marginal de sustitución técnica (la relación entre el producto marginal del trabajo y del capital) debe igualar la razón de los precios de los insumos, w/r.

La tercera condición $F(K, L) = Q$ asegura que la combinación óptima de insumos produce la cantidad deseada Q.

De esta forma, podemos obtener una función de costo mínimo $C^*(K, L)$.

4.1.1. Volviendo a maximizar pero con una función de costos mínimos

Ahora que tenemos la función $C^*((K, L)$, podemos replantear el problema de manera mucho más fácil. Asumamos, por ahora, que estamos en un mundo con **competencia perfecta**. Esto, para ahorrar varias intuiciones y cálculos que están fuera del énfasis de este capítulo. En este mundo, las firmas no pueden cambiar el precio al que venden su bien, por lo que el precio está fijado en P. Podemos plantear el problema, ahora sí, debidamente, cómo:

$$\max_Q .\pi(Q) = P \times Q - C^*(Q). \tag{4.1}$$

Derivando e igualando a cero, llegamos a la clásica ecuación:

$$P = C'(Q) = CMg \tag{4.2}$$

Esto implica que una firma debe producir, exactamente, hasta que el precio sea igual al costo marginal. Esto es porque, en competencia perfecta, el ingreso marginal (la derivada del lado del ingreso en la ecuación de utilidad de la firma) es exactamente el precio, dado que no puede cambiarlo. Si despejamos, vamos a poder obtener la famosa **función de oferta:**

$$Q^S = C'^{-1}(P). \tag{4.3}$$

La que nos dice cuánto producir según el precio. La intuición de esto es que cada unidad extra cuesta más para producir. Si el precio es fijo, entonces la diferencia entre la utilidad marginal (constante, en este caso) y el costo marginal va decreciendo a medida que más aumenta la producción. Cada unidad vendida genera ganancia **hasta** que el costo marginal es exactamente igual al precio marginal. Lo importante es que siempre la empresa, por lo menos en el corto plazo, siempre produzca a precio igual a costo marginal. Si el precio fuera mayor, entonces puede aumentar la producción un poco más y tener un extra de ganancia; si es bajo, entonces tiene que reducir la cantidad porque esta recibiendo menos de lo que cuesta. En el largo plazo se exigirá que el precio sea igual al costo marginal, y que el costo marginal a la vez sea igual al costo medio, ya que incorpora los costos fijos. Dado que la empresa debe tener ganancias mayores o iguales a cero, esto sólo se dará si el precio por unidad está sobre o igual al costo medio.

4.1.2. Ejemplo 1: costo marginal constante

Supongamos que la función de producción es

$$F(K, L) = \min\{K, L\},$$

donde, si bien el problema no es diferenciable, sabemos que la solución **se debe dar** cuando

$$K = L$$

, dado que no tiene sentido alguno comprar más de un bien que de otro, ya que estaríamos pagando de más. Dado eso, reemplazando en la función de producción tenemos que $K = L = Q$, por lo que la función de costo mínimo será

$$C^*(K, L) = Q(w + r).$$

Reemplazando en el problema de la firma, tenemos que podemos solucionar el problema acorde a:

$$\max_Q \pi(Q) = P \times Q - Q(w + r),$$

diferenciando parcialmente, tenemos:

$$P = (w + r),$$

Por ende, la oferta será constante para todo nivel de precios. Esta será determinada completamente por la demanda. Si la demanda es $P = A - Q$, entonces tendremos que

$$Q = A - w - r.$$

4.1.3. Ejemplo 2: costo marginal variable

Supongamos que la función de producción es

$$F(K, L) = Q^{1/3}L^{1/3},$$

La condición de primer orden tras minimizar el costo nos dará

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}.$$

Si reemplazamos en la restricción de la producción y despejamos K, tenemos que la demanda condicionada de K es:

$$K^C = Q^{3/2}\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2},$$

por lo que la demanda condicionada de L es:

$$L^C = Q^{3/2}\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}.$$

Dadas estas demandas condicionadas, la función de costo mínimo es:

$$C^*(Q) = 2Q^{3/2}(wr)^{1/2}.$$

Asumamos que $w = r = 1$. Si ahora vemos la decisión de la firma cuando enfrenta un precio P, entonces el problema de maximización

$$\max_Q \pi = P \times Q - 2Q^{3/2}(wr)^{1/2}$$

dará como resultado que la oferta se dará cuando

$$P = 3Q^{1/2}.$$

La oferta, despejando Q, entonces es

$$Q^s = \left(\frac{P}{3}\right)^2.$$

Si la demanda de los consumidores la representáramos por $P = 10 - Q$, entonces la solución de equilibrio se dará en cuando los precios y, en consecuencia la cantidad, se igualen.

A futuro veremos más aplicaciones de esto, pero lo importante es que este enfoque en el problema *hicksiano* da resultados muchos más intuitivos y relevantes cuando hablamos de producción, porque no nos importa taaaanto la asignación de recursos, pero sí nos importa el debate sobre la cantidad de un bien a producir, porque finalmente éste será lo que consuman los consumidores. Piénsenlo, los consumidores no les importa la suela o el cuero, les importa todo armado en el zapato que va a comprar.

4.2. El problema de maximización y las demandas no condicionadas.

Cuando analizamos el problema de maximización, habrán ciertos elementos fundamentales que distinguen este del problema del consumidor. Primero, no vamos a asumir una restricción presupuestaria, sino que los costos son restados directamente de la función de la utilidad de la empresa. Esto tiene sentido porque usualmente las empresas se financian de una forma distinta a las personas. Una persona recibe un salario, mientras que las empresas se financian con herramientas financieras, inversión, deuda, etc.

Ejemplo: Producción Cobb–Douglas y demandas no condicionadas

Supongamos que la empresa produce con una función Cobb–Douglas

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad 0 < \alpha, \beta < 1, \;\; \alpha + \beta < 1,$$

y enfrenta un precio exógeno de salida P, un salario w y un costo de arrendamiento del capital r. El problema de maximización es

$$\max_{K,L} \;\; \pi(K,L) = P\,AK^{\alpha}L^{\beta} - rK - wL.$$

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = PA\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} - r = 0, \tag{4.4}$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = PA\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} - w = 0. \tag{4.5}$$

Relación capital–trabajo Dividiendo la primera condición por la segunda obtenemos

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K} = \frac{r}{w} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{\alpha w}{\beta r}.$$

Producción óptima Sea $Q^* \equiv AK^{\alpha}L^{\beta}$. Multiplicando cada FOC por su insumo y sumando:

$$\alpha PQ^* = rK, \qquad \beta PQ^* = wL.$$

Reescribiendo $K = \frac{\alpha P}{r}Q^*$ y $L = \frac{\beta P}{w}Q^*$ y sustituyendo en la tecnología,

$$Q^* = A\Big(\tfrac{\alpha P}{r}Q^*\Big)^{\alpha}\Big(\tfrac{\beta P}{w}Q^*\Big)^{\beta},$$

de donde

$$Q^* = \left[A\left(\tfrac{\alpha P}{r}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{\beta P}{w}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Demandas no condicionadas Finalmente, sustituyendo Q^* en las expresiones para K y L,

$$K^* = \frac{\alpha P}{r}Q^* = \frac{\alpha P}{r}\left[A\left(\tfrac{\alpha P}{r}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{\beta P}{w}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{4.6}$$

$$L^* = \frac{\beta P}{w}Q^* = \frac{\beta P}{w}\left[A\left(\tfrac{\alpha P}{r}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{\beta P}{w}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \tag{4.7}$$

Estas expresiones muestran que:

- K^* y L^* aumentan con la productividad A y con el precio de salida P.
- Cada demanda es decreciente en su propio precio (capital con r, trabajo con w).
- El cociente óptimo $K^*/L^* = \frac{\alpha w}{\beta r}$ depende sólo de los precios relativos y de los parámetros α, β.

Un punto sumamente relevante, es que las demandas no condicionadas existirán siempre que la empresa tenga **retornos decrecientes a escala**. Es decir, si multiplicamos todos los insumos por λ, el producto que salga de esa multiplicación aumente en una proporción menos que λ. Matemáticamente:

Retornos decrecientes a escala

Sea $F(\cdot)$ homogénea de grado ρ, es decir

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\rho F(K, L), \qquad \lambda > 0.$$

- **Retornos decrecientes a escala** $(\rho < 1\})$:

$$\lambda^\rho < \lambda \quad \Longrightarrow \quad F(\lambda K, \lambda L) < \lambda F(K, L).$$

- **Retornos constantes a escala** $(\rho = 1\})$:

$$\lambda^\rho = \lambda \quad \Longrightarrow \quad F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L).$$

- **Retornos crecientes a escala** $(\rho > 1\})$:

$$\lambda^\rho > \lambda \quad \Longrightarrow \quad F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F(K, L).$$

La intuición detrás es que, si tuviéramos retornos crecientes a escala, bastaría con multiplicar los insumos por un monto grande, y si el retorno es muchísimo mayor, entonces convendría vender infinito. Lo mismo sucede con los retornos constantes a escala. Solamente en un mundo con rendimientos decrecientes a escala, la solución de producción sería interior.

4.2.1. Q-Complementariedad

Un elemento importante que determina cómo se comporta la asignación de insumos en una firma es la $q - complementariedad$ entre los insumos. Esto es cómo se beneficia la productividad marginal de un insumo, a medida que aumento el uso del otro bien,

En caso que la productividad marginal se beneficie, entonces los llamamos q-complementarios, y en caso contrario, son q-anticomplementarios.

Q-complementaridad

En una función de producción $F(K,L)$, la productividad marginal de cada insumo está dado por sus derivadas parciales:

- **PmgK**: $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K}$;
- **PmgL**: $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L}$.

Los insumos serán Q-complementarios si las derivadas cruzadas de las productividades marginales son positivas:

$$\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial K \partial L} > 0.$$

En caso contrario, serán anticomplementarios o neutros (en caso de igualdad a cero).

Esto ayudará a la determinación de la función de costos mínimos porque permite abaratar costos mediante un uso mejor de la combinación de insumos.

4.2.2. Economías de Escala

Un elemento importante que suele escuchar en las noticias son las famosas 'Economías de Escala', esto es cuánto aumenta el costo medio a medida que aumentamos la producción, En general, esto es importante para analizar cómo el costo marginal y el costo fijo permiten escalar una producción y hacer la operación rentable, o no. Tomemos por ejemplo a los monopolios naturales. Estos se caracterizan fundamentalmente por ser firmas en mercados donde el costo marginal es muy bajo, mientras que el costo fijo es muy alto.

Por ejemplo, imaginemos una empresa de energía. La unidad de electricidad cuesta muy poco producir, sin embargo, lo más costoso es todo el proceso de instalar cableado, torres de electricidad, la tecnología para producir energía desde cero. En caso de haber competencia, esto puede hacer que entrar al rubro no sea rentable, porque justamente quedamos con tan pocas ganancias, o incluso pérdidas, que jamás podremos pagar el costo fijo y sacar rentabilidad. Por esto deben mantenerse como monopolios o ser subsidiados, porque de otra forma, los incentivos serían rápidamente a no entrar.

En este caso, lo fundamental son las economías a escala, porque es necesario que produzcamos una gran cantidad de unidades de electricidad para que sea conveniente. Si abastecemos sólo un hogar, el costo medio de ese hogar es el costo fijo entero, pero a medida que aumentamos la producción, el bajo costo marginal implica poco en el costo medio, pero el costo fijo se diluye cada vez más rápido porque se divide entre más personas. Por ende, para que la operación sea, nuevamente, rentable, tenemos que atender una gran cantidad del mercado para que el costo medio sea lo más bajo posible.

Economías de Escala

Dada una función de costos mínimos $C(Q)$, tendremos:

- Economías de escala si $\frac{\partial CMe}{\partial Q} < 0$,

  implicando que el costo medio cae a medida que aumentamos la producción. Por otro lado, tendremos:

- Des-economías de escala si $\frac{\partial CMe}{\partial Q} > 0$.

  En caso de igualdad a cero, tenemos economías constantes a escala.

Capítulo 5

Monopolio

Una aplicación recurrente de la teoría de la firma es el análisis de mercados donde las empresas tienen poder. El más popular, y punto inicial obvio, es el monopolio: una sola empresa. En el capítulo anterior, considerábamos que el precio estaba dado, o que se iba a determinar en equilibrio según la demanda. Sin embargo, en la mayoría de los mercados donde interactuamos día a día, esto no es así. Por ejemplo, si Apple decidiera cambiar su producción de iPhones, sería claro que el precio estaría siendo afectado, dado que hay menos en circulación y muchos queremos estos celulares. Si quien produce el petróleo, por ejemplo, también es un monopolio (u oligopolio en la práctica, pero ya veremos eso), entonces cualquier decisión afectará la disponibilidad del producto, ¡y el precio cambiará!

Es aquí entonces donde nos dedicamos a entender cómo la existencia de una empresa que domina el mercado, otorga la capacidad de manipular los precios, y según cómo sea la demanda del mercado, extraer más utilidad de los consumidores.

Un comentario final. Cuando inicié la carrera, recuerdo que muchos conocidos que eran de otras carreras nos criticaban por estudiar monopolio, argumentando que supuestamente... ¿nos incentivaba a hacerlo? Lo mismo sucede con estudiar colusión (muy relacionado a monopolio, que también veremos después), argumentaban que nos incentivaba a hacer colusión. Esto no tiene sentido alguno. Primero que nada, los resultados de este tipo de organizaciones son conocidos incluso sin saber teoría, surgen por mera intuición. Lo importante acá es entender cómo los componentes de un mercado determinan la magnitud de estos problemas. Si uno quiere aprender a hacer esto, no tiene mucho que aprender acá. Logrando entender el problema, ayuda a que podamos crear políticas que logren solucionar este tipo de problemas, o a identificar cuándo estas cosas estén ocurriendo. También otorga herramientas para crear medidas de compensación para los consumidores, etcétera. Creer que aprender esto es enseñar a cómo hacer estos comportamientos es absurdo, en mi opinión. Sí ayudará, por lo menos a nivel marginal, a poder

Figura 5.1: El señor Monopoly, primer hombre encarcelado por prácticas anticonsumidor

luchar **contra** estos problemas.

5.1. El modelo básico de monopolio

A partir de ahora, siempre seguiremos con el problema de minimización de costos ya resuelto, es decir tendremos una función de costos C que sólo dependa de q. Si planteáramos el problema de maximización usando factores, terminaríamos con un análisis muy poco intuitivo sobre la cantidad del producto, además de ser un dolor de cabeza lidiar con las reglas de la cadena que se generen. Entonces, antes asumíamos que el problema de maximización respecto a q era:

$$\max_q \pi(q) = P * q - C(q).$$

Donde P estaba dado de manera exógena, y q no tenía ningún impacto en ella. Recordemos que el resultado era que la oferta se dará cuando $P = CMg(q)$ y la oferta de la empresa será $q = CMg^{-1}(P)$. Intuitivamente, podríamos llamar el lado izquierdo de la solución de $P = CMg$ como el ingreso marginal, sin embargo mucha gente lo pasa en alto porque sale el precio. Sin embargo, ¡acá el ingreso marginal es el precio porque está constante! Por lo tanto, si el precio es constante, y aumento mi producción en una unidad, ¿cuánto extra me llevo de ingreso? ¡El precio! Sin embargo, veremos que cuando el precio depende de cuánto se produce, esto será distinto, y habrá un efecto adicional: el **efecto inframarginal**.

Ahora, el problema estará dado por la sutil diferencia que el precio depende de la cantidad, a través de la demanda de los consumidores:

$$\max_q \ \pi(q) \ = \ \underbrace{P(q)}_{\substack{\text{demanda del mercado}\\ \text{por parte de los consumidores}}} \ q \ - \ C(q).$$

Y lo que buscamos es encontrar el nivel de producción óptimo que maximiza el excedente del productor. Notemos que, derivando, la expresión es distinta. Derivando respecto a q:

$$\frac{d\pi}{dq} \ = \ \underbrace{P'(q)\,q + P(q)}_{\text{ingreso marginal (IMg)}} \ - CMg(q) \ = \ 0,$$

y reordenando:

$$\underbrace{P'(q)\,q + P(q)}_{\text{IMg}} \ = \ CMg(q).$$

La condición es similar al caso de competencia perfecta, pero genera diferencias importantes. El segundo término de la izquierda y el costo marginal los conocemos de antes, pero ahora hay una fuerza que en competencia perfecta no estaba presente, que era el efecto inframarginal en el cambio del precio: $P'(q)q$. El lado izquierdo llamamos ingreso marginal, ¿cierto? Bueno, el ingreso marginal se dará, por un lado, por el precio que recibo al vender una unidad extra, el segundo término. Pero como el precio cambia según la producción, el primer término corresponde a la caída en precio por producir más, multiplicado por la cantidad que estoy vendiendo, porque estoy vendiendo todas las unidades que estaba vendiendo a un precio menor dado la mayor oferta. Mientras menos produzca, el precio es más alto, y vendo menos por más, pero a medida que aumente la producción, si bien vendo más, vendo a un precio menor. Por lo tanto, la decisión óptima de un monopolista se da cuando el ingreso marginal se iguale al costo marginal, ahora incorporando que manipulo el precio. De esta forma, manipularé el precio hasta el punto en que el ingreso marginal sea igual al costo marginal. Esto llevará a que produzca, según el mercado, producción más baja, pero con precios más altos.

5.1.1. Ejemplo general

Consideremos un escenario donde la demanda está dada por $P = A - \beta Q$, donde $A, \beta > 0$. El monopolio tiene una tecnología para producir que involucra un costo de producción de $CT(Q) = Q^2/2$. El problema del monopolista se convierte en

$$\max_Q \pi(Q) = (A - \beta Q)Q - Q^2/2.$$

El máximo se dará cuando se cumpla la siguiente condición de primer orden:

$$A - 2\beta Q = Q \implies Q^M = \frac{A}{1 + 2\beta}.$$

El precio, entonces, se dará insertando esta cantidad en la demanda inversa del consumidor:

$$Q^M = \frac{A}{1+2\beta} \implies P^M = (A - \frac{\beta A}{1+2\beta}) = \frac{A(1+\beta)}{1+2\beta}.$$

Notemos lo siguiente, A, el cuál es una medida de qué tan alta es la valoración por el bien, afecta positivamente en el precio. Esto es intuitivo, si alguien valora más un bien, entonces pagará más con él. Por otro lado, β, que indica cuánto cambia el precio dispuesto por los consumidores según la cantidad, afecta de manera negativa (la derivada de esta expresión respecto a β es $-A/(2\beta+1)^2$, siempre negativo). Por ende, mientras más insensible sean al precio, menos vamos a producir. Aquí entran en juego ambos efectos. Por un lado, si a la gente le gusta más el bien, vamos a vender una cantidad más alta. Pero si la gente tiene una demanda elástica, los incentivos para el monopolista están hechos para producir una cantidad menor, lo que eleva el ingreso marginal porque la gente paga sustancialmente más.

¿Cómo se compara esto versus cuando hay competencia perfecta? En ese caso, recordemos que la oferta también está en $IMg = CMg$, pero ahora el ingreso marginal es constante en P, por lo que $P = CMg$. Por lo tanto, el equilibrio se dará cuando $Q = A - \beta Q$, lo que nos lleva a que la cantidad óptima sea $Q^{CP} = A/(1+\beta)$, y el precio es también $P^{CP} = Q^{CP} = A/(1+\beta)$. Noten que la cantidad de equilibrio en competencia perfecta será siempre mayor, porque requiere que $\beta > 0$. Esto lo pueden notar viendo la desigualdad entre las cantidades. El precio, en consecuencia, será mayor.

Veamos esto en la Figura 5.2. En competencia perfecta, la producción es más alta y el precio más bajo, señalado por los puntos Q^{CP} y P^{CP}. El excedente de la firma es el triángulo con lineas horizontales. Imaginemos que cae un meteorito y se destruyen todas las empresas menos una, la del señor Monopoly. Dado que ahora es uno, puede determinar el precio según la demanda de las personas. Dado que ahora la curva de ingreso marginal no está dada por la demanda, sino por la de ingreso marginal monopolista (más abajo), decide la cantidad óptima más baja Q^M, lo que lleva a que el precio sea más alto por escasez P^M. Al hacer esto, perdió el triángulo gris, que son las unidades extra que vendía en competencia perfecta, pero multiplicadas por el precio menos el costo marginal (de ahí que es un triángulo), Sin embargo, Al vender las cantidades que sigue vendiendo a un precio mayor, se lleva el cuadrado rojo, que en área es mayor que el gris. Dado esto, llega a una utilidad que es mayor al caso de competencia perfecta. No en el gráfico, también se ve cómo el bienestar de los consumidores cae. Antes, su bienestar era el triángulo opuesto al excedente del productor en oferta (arriba del triángulo con lineas horizontales), sin embargo, en monopolio se reduce al triángulo arriba del cuadrado rojo.

Un supuesto fundamental detrás de este modelo monopólico, es que hay potencial arbitraje entre los consumidores. En el sentido que si el monopolis-

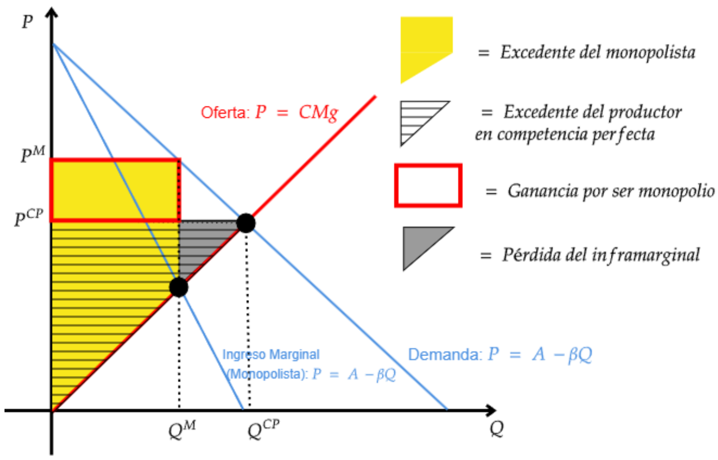


Figura 5.2: Análisis del bienestar de la firma

ta cobrara un precio distinto entre personas, ellas podrían hacerse pasar por la otra y pasarse las cosas. Por lo tanto, no hay posibilidad de cobrar precios diferenciados. En el caso que sí se pudiera hacer, cómo en el caso de hoy en día con aerolíneas, o todo tipo de compras online, etcétera, el resultado será aún más brutal en desmedro de los consumidores. Ahora veremos brevemente estos otros tipos de prácticas de un monopolista: discriminaciones de X grado.

5.2. Discriminación de primer grado

Consideremos el **PEOR** de los escenarios que un monopolista podría tener el lujo de tener. Sería un escenario donde es capaz de venderle a cada persona individual a un precio que él convenga. Si el consumidor no le gusta el precio, simplemente le puede no comprar. No hay posibilidad de que se pase por otra persona intentando comprar por un precio más bajo.

Siempre ilustro que una curva de demanda la veamos como que en cada punto hay una persona con una determinada valoración. Por ejemplo, en el punto más arriba, donde topa con P, entonces esa persona tiene la valoración más alta. Después hay una persona que la valora levemente menos, y así hasta cero. En este escenario, si el monopolista le quisiera vender a cada persona, entonces simplemente le cobraría su máxima disposición a pagar, es decir, dónde está ubicada. Si el monopolista habla con la persona que lo valora lo más alto, digamos 10, entonces le cobra 10. Después pasa a la siguiente persona, que la valora en 9, y le cobra 9, y así hasta que le venda a todos, o hasta que lo valoren menos que el costo marginal. En ese último caso, claramente no vende porque le pagan menos de lo que le cuesta.

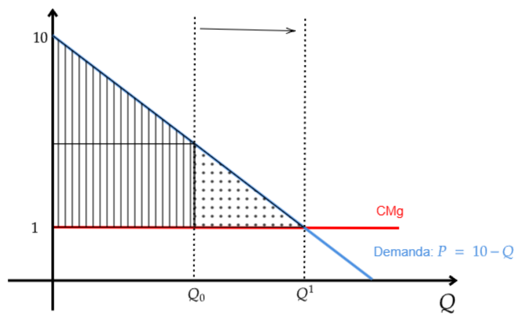


Figura 5.3: Discriminación de primer grado

Esta es la discriminación de primer grado, donde entonces cobra un precio personalizado para cada persona, y estas no pueden optar por otro precio manipulando sus características. En este escenario, entonces se lleva TODO el excedente del consumidor, es decir, el área bajo la curva de demanda.

El objetivo, matemático digamos, es entonces elegir cuál es la última persona a la que le vende el monopolista. Pero a todos les cobra un precio distinto. Imaginemos esto con un escenario donde el monopolista tiene un costo marginal constante de $CMg = 1$, un costo total $C(Q) = Q$, y la demanda inversa está dada por $P = 10 - Q$. Esto se ve en la figura 5.3. Al elegir una cantidad arbitraria Q_0, está vendiendo a todas las personas entre 0 y Q_0 en el eje horizontal, pero a un precio que está determinado por la altura de la demanda para cada persona. Por ende, lo que se lleva como beneficio al final del día la empresa, es el triángulo con lineas verticales (recordemos que paga el costo marginal, por eso no incluye el cuadrado). Sin embargo, bajo esta lógica, queda todo el espacio punteado a la derecha, por lo que podríamos aumentar esta cantidad y seguir ganando dinero.

Así, el problema está dado entonces por encontrar la cantidad a producir, tal que dejo de ganar dinero cobrándole a cada uno su disposición a pagar.

Discriminación de primer grado

Matemáticamente, el problema del discriminador de primer grado corresponde a encontrar:

$$Q^{FG} = \arg\max_{Q} \int_0^Q P^D(x)dx - C(q).$$

Donde la P^D es la demanda inversa de los consumidores.

Recordemos que la cantidad encontrada nos servirá para encontrar la última persona vendida, es decir, hasta donde termina el área que nos queremos llevar.

Volviendo a nuestro ejemplo, el problema para este monopolista sería

$$\max_Q \int_0^Q (10 - x)dx - C(q) = 10Q - Q^2/2 - Q.$$

La solución está dada cuando

$$10 - Q - 1 = 0 \implies Q^{FG} = 9.$$

Si les suena conocida esta condición, ¡vendiendo la misma cantidad óptima que en competencia perfecta! ¡¡¡Donde oferta (costo marginal) es igual a demanda!!!

Sin embargo, acá no lo hacemos por simpáticos y aumentar el bienestar de los consumidores, sino porque podemos venderles a todos a un precio diferente, y podemos extraer cada gota que queramos. Por ende, le vendemos a casi todos, pero extraigo todo lo que pueden pagar, hasta dejarlos indiferentes entre comprar o no. No venderá a quienes lo valoran menos del costo marginal, porque involucraría venderles más barato y perder dinero.

La utilidad del productor en este caso será $\pi^{FG} = 40{,}5$. En caso de competencia perfecta, sería de $\pi^{CP} = 0$, mientras que el monopolio sería de la mitad que en primer grado, $\pi^M = 20{,}25$.

Ojo, el precio no será uno determinado por la función de demanda, sino que estará dado por el punto donde tope la enésima persona.

5.3. Discriminación de segundo grado

POR HACER

Capítulo 6

Incertidumbre

Figura 6.1: Incertidumbre

Hasta ahora hemos visto decisiones de distintos agentes exclusivamente enfrentando escenarios donde los resultados son ciertos. Es decir, si un consumidor compra o intercambia una manzana, la calidad de ella será conocida y estándar. O, por ejemplo, si compramos un activo, sabemos cuál será el retorno de manera segura. Claramente, ¡esto no es así en la vida real! Más aún, hay escenarios donde lo que nos importa es exclusivamente el riesgo, como en el manejo de activos financieros.

¿Cambia el análisis del comportamiento económico cuando los pagos son inciertos? ¡La respuesta es que sí, nos abre todo un mundo nuevo por explorar! Ahora nos vamos a dedicar a entender inicialmente las consecuencias de enfrentar incertidumbre.

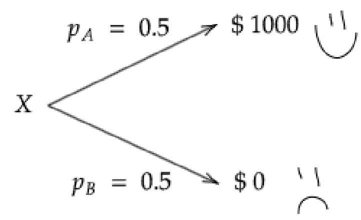


Figura 6.2: Lotería

6.1. ¿Qué es la incertidumbre?

Vamos a definir la incertidumbre, o riesgo, como la variación aleatoria de los pagos que *algo* le da al agente. Por ejemplo:

- Si compro una manzana, con cierta probabilidad está buena y con otra probabilidad puede estar mala por dentro.
- Comprando una acción, el retorno que esta tendrá en T periodos adelante se dará por una variable aleatoria que tiene el retorno promedio como media, y la varianza... como varianza (valga la redundancia).
- Si soy un trabajador independiente, mi salario no es siempre constante, dependerá de cuantas personas demanden mi servicio, lo que puede ser aleatorio con una cierta distribución.

Así, podemos darnos cuenta que la gran mayoría de nuestras decisiones en la vida involucran incertidumbre, y por ende, resulta fundamental entenderlo. Más formalmente, un escenario con incertidumbre se definirá según:

Incertidumbre

Los pagos de un bien/servicio/lo-que-quieran X involucran incertidumbre si estos se comportan según una variable aleatoria F con media μ y varianza Σ

$$X \sim F(\mu, \Sigma).$$

Usualmente nos referiremos a estos como **loterías.**

Imaginemos la siguiente lotería donde compramos un boleto X, y tras comprarlo lanzamos una moneda. Si sale cara, nos llevamos $1000, y si sale sello, nos llevamos nada. Veamos esto en la Figura 6.2.

Recordemos que la esperanza de algo, en este caso también llamado pago esperado, se define como:

$$E[X] = \sum_{s}^{S} p_s x_s, \text{ en el caso de una variable aleatoria discreta;}$$

y

$$E[X] = \int x f(x) dx = \int x dF(x), \text{ en el caso de una variable aleatoria continua.}$$

Notemos que nos referimos a s a cada estado que puede tomar. Para nuestra simple lotería, el pago esperado entonces es $E[X] = 0{,}5 * 0 + 0{,}5 * 1000 = 0$.

Podemos pensar en una lotería un poco más compleja de carácter continuo. Por ejemplo, que el retorno sigue una distribución de Pareto univariable con función densidad $f(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$. Integrando sobre ella, obtenemos la acumulada $F(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha$. Podemos verla gráficamente en la Figura 6.3.

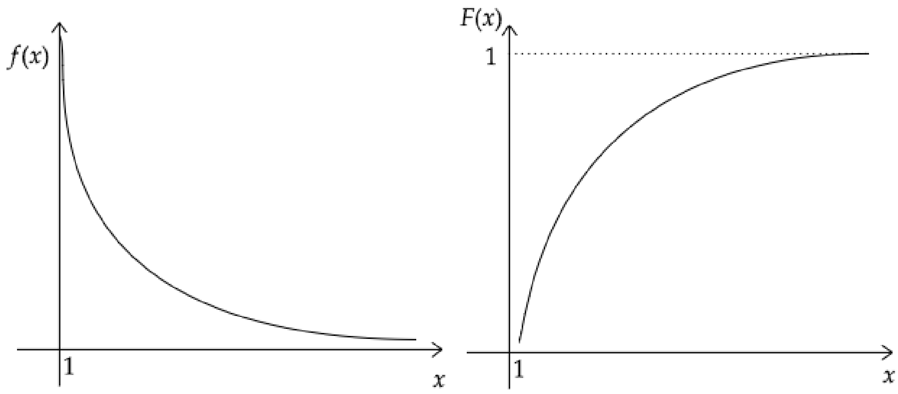


Figura 6.3: Distribución de Pareto

La media en este caso sería la integral de la densidad multiplicada por x, lo que nos da $E[X] = \frac{\alpha x_m}{\alpha-1}$. La intuición de una distribución así sería que con alta probabilidad tenemos bajos retornos (en este caso es 1 el retorno mínimo), mientras que la probabilidad va cayendo a medida que aumenta el retorno.

Con esto ya entendemos un punto inicial, que viene siendo que los retornos de hacer ciertas acciones van a depender de un componente aleatorio. Por supuesto, acá vimos casos relativamente fáciles, donde los activos son unidimensionales, por ejemplo, podemos expandir esto más a futuro. Por ahora, no quiero que quedemos con muchos dolores de cabeza.

6.2. Incorporando nuestras funciones de utilidad

Hasta ahora no hemos visto nada de cómo las personas toman este nuevo escenario. Para esto, usaremos las famosas funciones de utilidad esperada, también llamadas Von Neumann-Morgenstern.

Paréntesis. John Von Neumann fue, probablemente, el hombre más inteligente de la historia reciente, o por lo menos está en el top 3. Realizó aportes a la física cuántica, teoría de juegos, en el desarrollo de los computadores, economía, estadística, cibernética, y lo que sea que pensemos. También aportó en la bomba atómica y en la ideología militar usada en la guerra fría. Era realmente un crack, aunque un tipo complicado. Un libro MUY entretenido que pueden leer, pero no tan certero con la historia real, es MANIAC del escritor chileno Benjamin Labatut. Por otro lado, Oskar Morgenstern fue un economista aleman de Princeton y NYU. Fue el fundador de teoría de juegos y su aplicación en ciencias sociales, al igual que Von Neumann. Continuemos.

Función de utilidad esperada

Denotemos la probabilidad de un evento s como π_s (cambio de notación, ojo). Definimos la función de utilidad esperada en un caso de pagos discretos como:

$$U(x) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u(c_s^x).$$

Mientras que en el caso de pagos continuos como:

$$U(c_s) = \int u(c_s) dF(c_s).$$

La función $u(c_s)$ tiene un nombre que vamos a ver una y otra vez, que es una función **Bernoulli.** ¡Ojo! La Bernoulli es la función *pér se,* la Von Neumann-Morgenstern es la suma ponderada por la probabilidad. No se mareen tanto con esto.

Un punto MUY importante, que es parte de la raíz de porqué el análisis será tan distinto en casos con incertidumbre, es que **el valor esperado de la utilidad será distinto que el valor esperado del pago de la lotería.** Más aún, consumir el valor esperado de la lotería será potencialmente muy distinto a consumir la lotería *per se.* A veces será mayor, a veces igual, a veces menor. **Esto será fundamental para entender la toma de decisiones.**

6.2.1. Aversión, Neutralidad y Amor al riesgo

Consideremos dos escenarios, una función Bernoulli cóncava, y otra convexa, y veamos cómo la utilidad esperada cambia según decidimos consumir la utilidad esperada de la lotería, versus jugar a la lotería. Imaginemos la misma lotería original, con mil dólares con probabilidad 0,5, y 0 con probabilidad 0,5 también.

Veamos el caso cóncavo, con una función de utilidad $u(c_s) = \sqrt{c_s}$:

Si jugamos a la lotería, con probabilidad 0,5 tengo una utilidad de $\sqrt{1000}$, y con la misma probabilidad tengo cero. Por lo tanto, la utilidad esperada es:

$$E[u(c_s)] = 0{,}5\sqrt{1000} \approx 15{,}81,$$

mientras que si decidiera, en cambio, pedir el pago esperado de la lotería, 500, de manera segura, mi utilidad sería

$$U(E[x]) = \sqrt{500} = \approx 22{,}36.$$

¡Notemos de manera importante que!:

$$E[u(x)] = 15{,}81 < 22{,}26 = U(E[X]).$$

Esto es el núcleo de incertidumbre. Si los agentes tienen funciones de utilidad cóncavas, la utilidad esperada, que involucra jugar de manera aleatoria, otorga menos utilidad que obtener un pago cierto equivalente al pago esperado de la lotería. Esto es lo que llamamos **Desigualdad de Jensen.** La veremos un poco más a profundad en un rato. Mientras, veamos un caso de contraste.

Imaginemos ahora que no es cóncava, sino que convexa, con $u(x) = x^2$. Fíjense lo que pasa:

$$E[u(x)] = 500{,}000 > 250{,}000 = u(E[x])!!!$$

Es decir, la desigualdad se dio vuelta por ser convexa. Esto implica que:

- Si la función de utilidad era cóncava, el agente prefiere recibir un pago seguro del pago promedio de la lotería a jugar la lotería.
- Si la función es convexa, el agente prefiere jugar a la lotería a recibir un pago fijo.
- Pueden verificar que, si es lineal, le da lo mismo.

Así, podemos definir entonces la actitud de la persona al riesgo, según su función de utilidad:

Preferencia sobre el riesgo

- Si tiene función cóncava, es **averso al riesgo.** donde prefiere pagos seguros a jugar loterías;
- Si tiene función convexa, es **amante al riesgo,** donde prefiere jugar loterías a recibir pagos seguros; y
- Si tiene función lineal, es **neutral al riesgo,** donde le da lo mismo entre jugar o recibir un pago seguro.

Un error común que siento al enseñar, es la falta de entender porqué cada una de estos tipos de funciones caracteriza estas conductas. Para esto, quiero hacer un paso a paso para dar intuición.

¿Porqué una función cóncava implica aversión?

1. Recordemos que para las funciones cóncavas, las primeras unidades dan MUCHA utilidad marginal. Piensen en la forma tipo 'ola de mar' de una función cóncava. Primero, ante un aumento en x, la utilidad aporta mucho, pero la siguiente un poco menos, y así hasta que la milésima aporta poco o nada.
2. Dado que las primeras unidades aportan mucho, y las de después poco, prefiero asegurarme esas primeras 500 unidades para tener un nivel de utilidad suficientemente alto.
3. No me gusta el riesgo, porque la utilidad que me aportarían esas 500 unidades extra para completar los 1000 me otorgaría muy poca utilidad en comparación con las previas unidades.
4. Por lo tanto, es mejor pedir las 500 del pago esperado, a jugar con riesgo y terminar potencialmente ganando 1000, pero que las últimas 500 unidades me aportaron substancialmente menos utilidad marginal.

Pensemos ahora al revés, **¿porqué una función convexa implica amar el riesgo?**

1. En funciones convexas, las primeras unidades dan POCA utilidad marginal. Piensen en la forma tipo 'exponencial' de una función convexa. Primero, ante un aumento en x, la utilidad aporta poco, pero la siguiente un más, y así hasta que la milésima aporta infinito.
2. Dado que las primeras unidades aportan poco, y las de después mucho, prefiero jugar de manera riesgosa, porque pasar de 500 a 1000 sería muchísimo más beneficioso para mí. Dado que las últimas 500 aportan muchísisisima utilidad.

3. Me gusta el riesgo, porque la utilidad que me aportarían esas 500 unidades extra para completar los 1000 me otorgaría mucha utilidad en comparación con las previas unidades.

4. Por lo tanto, es mejor jugar con riesgo y terminar potencialmente ganando 1000, a recibir 500 pero que me aportaron poca utilidad en comparación a lo que pude recibir.

Esto se debe a la desigualdad de Jensen, que formalmente planteamos como:

Desigualdad de Jensen en probabilidades

Si ψ una función convexa:

$$\psi(E[X]) \leq E[\psi(X)].$$

Si ψ una función cóncava:

$$\psi(E[X]) \geq E[\psi(X)].$$

6.2.2. Llevando la incertidumbre a gráficos

Por ahora sólo analicé de manera numérica o analítica este fenómeno, pero claramente resulta útil graficarlo. Recordemos que tenemos, en esencia, dos funciones:

- La esperanza de la utilidad: $E[u(X)]$
- La utilidad de la esperanza de la lotería: $u(E[X])$

Dejemos la probabilidad de que ocurra cada escenario como π_x, y no la sabemos, pero sí sabemos que toma un valor entre 0 y 1. La utilidad de la esperanza de esa lotería se verá con la típica forma de una función cóncava (en caso de ser cóncava). Mientras que la utilidad esperada será una línea recta que parte en la mínima utilidad posible, hasta el máximo de utilidad posible. Veamos esto en la Figura 6.4:

- Notemos que **cual** sea el valor de $E[X]$, dependerá de cuales sean las probabilidades. Si, por ejemplo hay una probabilidad cero de que tengamos cero, y uno de tener el máximo, entonces es $\bar{X}$. Si es al revés, es cero, pero si es una probabilidad entre estas, digamos $\pi = 0{,}5$, entonces será en algún punto al medio.

- Una vez que tenemos el valor de la esperanza de la lotería, podemos obtener dos posibles datos de interés: (i) la función de utilidad si es que me dieran ese valor esperado con certeza ($u(E[X]|\pi)$), y (ii) la utilidad esperada de entrar a ese juego con riesgo $E[u(x)|\pi]$.

- Si la función es cóncava, entonces la utilidad esperada pasa por debajo de la utilidad cierta.

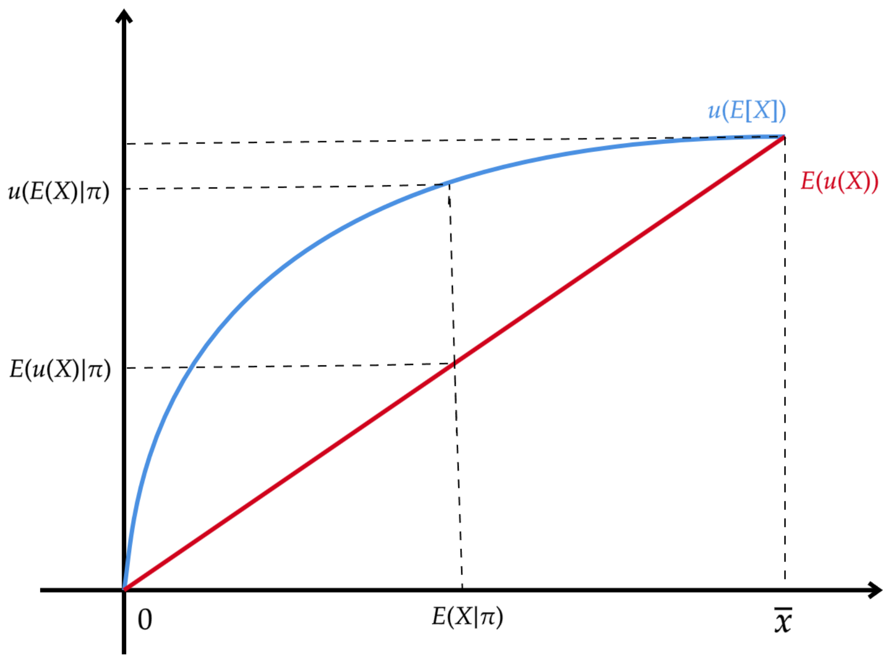


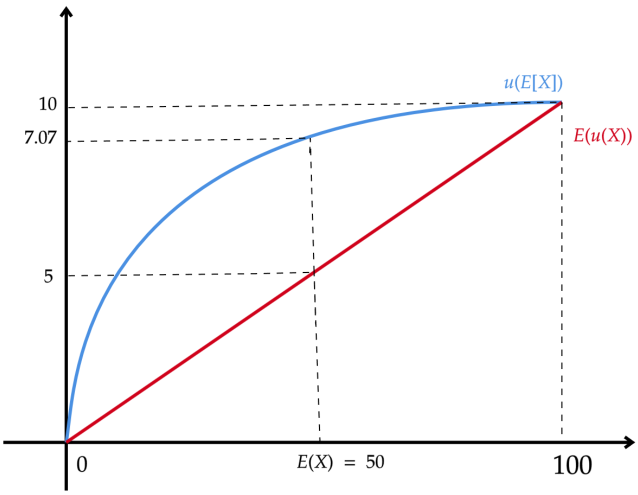
Figura 6.4: Desigualdad de Jensen en Incertidumbre

Hay harta más información relevante acá, pero creo que es mejor enseñarla con un tópico: seguros. No sólo porque otorga una intuición más basada en la vida real, también porque es un foco de análisis importante que suele usar este tipo de modelos con incertidumbre.

6.3. Incertidumbre, y cómo lidiar usando Seguros

Consideremos el siguiente escenario: tienes un auto que compraste con mucho esfuerzo. Día a día lo manejas al trabajo ida y vuelta, y quizás sales a otro lugar en las tardes y noches. Usar el auto te permite recibir utilidad, ya sea porque te gusta disfrutar del auto, o porque te permite ir a actividades que te dan utilidad. Sin embargo, con alguna probabilidad (que potencialmente depende de tu conducta, pero ya veremos eso a futuro), hay una probabilidad de que choques el auto y no puedas recibir esa utilidad.

Digamos que nuestra función de utilidad Bernoulli es la típica $u(x) = \sqrt{x}$. Valoramos el uso del auto en 100 dólares, y con una probabilidad del 50 % chocamos y el auto se pierde por completo. ¿Cuál es la utilidad esperada y el pago esperado de tener el auto?



- El pago esperado del auto es $E(x) = 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 0 = 50$
- La utilidad esperada es $E(u(x)) = 0{,}5 \times \sqrt{100} + 0{,}5 \times \sqrt{0} = 5$
- La utilidad de recibir el pago esperado de manera cierta es $u(E(X)) = \sqrt{50} \approx 7{,}07$
- ¡Fíjense que por sólo jugar la lotería estamos perdiendo más 2 de utilidad!
- Todo esto en la Figura 6.3

Ahora, la pregunta fundamental es: **¿podemos mejorar la utilidad, utilizando algún instrumento financiero que reduzca el riesgo?** ¡La respuesta es sí!

6.3.1. ¿Qué es un seguro en este mundo teórico?

En un seguro típico, en caso de que pase una catástrofe, recibes una compensación de monto K, pero debes pagar una prima de P siempre, ya sea recibas el accidente como que no. Por ende, la computación de la utilidad esperada de un individuo es levemente diferente cuando contrata un seguro:

$$E[u(x) \mid \text{seguro}] = 0{,}5 \times \underbrace{\sqrt{10 - P}}_{\text{(no hay accidente)}} + 0{,}5 \times \underbrace{\sqrt{10 - 10 + K - P}}_{\text{(hay accidente, pero me paga el seguro)}}$$

6.3.2. Eligiendo un seguro en un mundo maravilloso, por ahora

Asumamos que la aseguradora nos ofrece el siguiente trato: dado que la probabilidad de accidente es de 0.5, la prima a pagar es de $P = \frac{K}{2}$. Es decir, pagamos la mitad por cada dólar. ¿Cuánto le gustaría comprar de seguro? Obviamente, tendrá que elegir el punto donde la utilidad marginal de asegurarse sea igual al costo de contratar un dólar extra.

$$\max_{0\leq K\leq L=10} E[u(K)] = \frac{1}{2}\sqrt{10-\tfrac{K}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{K}{2}}, \qquad \text{con } P=\frac{K}{2}=pK,\ p=0{,}5.$$

Derivada de primer orden

$$\frac{dE[u]}{dK} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\sqrt{100-\frac{K}{2}}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\sqrt{\frac{K}{2}}}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{K}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{1000-\frac{K}{2}}}\right).$$

$$\frac{dE[u]}{dK}=0 \implies \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{100-\frac{K}{2}}} \implies \frac{K}{2}=100-\frac{K}{2} \implies \boxed{K^*=100.}$$

Derivada de segundo orden

$$\frac{d^2E[u]}{dK^2}=-\frac{1}{32}\left(\left(\tfrac{K}{2}\right)^{-3/2}+\left(100-\tfrac{K}{2}\right)^{-3/2}\right)<0 \quad \text{para } 0<K<100,$$

lo que confirma que el máximo es global.

Resultado óptimo

$$K^*=L=100, \qquad P^*=\frac{K^*}{2}=500.$$

¿Notan algo especial? ¡El individuo está asegurándose por completo! No sólo eso, sino que su utilidad esperada es ahora

$$E[u(x)]=0{,}5\sqrt{1000-500}+0{,}5\sqrt{100-100+100-500}=\sqrt{500}\approx 7{,}07,$$

¡por lo que hemos llegado al punto de arriba que topa con la curva azul en la Figura 6.3! Esto no es un resultado mágico, es producto que la **prima es actuarialmente justa.**

Prima Actuarialmente Justa y elección de seguro

Una prima actuarialmente justa es aquella donde

$$P = \pi_{catastro} \times perdida,$$

es decir, donde se cobra por el cada dólar proporcional a la probabilidad de catastro. Si el individuo puede elegir cuanto asegurarse con una prima actuarialmente justa, entonces elegirá cobertura completa (si es averso al riesgo, claro). En este caso, tendrá como utilidad esperada lo mismo que recibir el promedio de manera certera en su función de utilidad.

Notemos varias cosas:

- Bajo un seguro, lo máximo que puede el individuo tener de utilidad es $u(E[X])$.
- Esto asume competencia perfecta en el mercado de seguros, ¡porque la aseguradora está con utilidad cero en esperanza!
- Si no es competitivo, puede subir el precio.

¿Qué pasa si la prima no es actuarialmente justa?

Tomemos por ejemplo un caso donde le cobrará un valor arbitrario de α por dólar asegurado.

Sea

$$w = 100, \quad L = 100, \quad p = 0{,}5, \quad P = \alpha K, \qquad 0 \leq \alpha < \infty.$$

El ingreso neto en cada estado es

$$\begin{aligned} &\text{(no hay accidente)} \quad c_N = w - P = 100 - \alpha K, \\ &\text{(hay accidente)} \qquad c_A = w - L + K - P = 0 + (1-\alpha)K. \end{aligned}$$

Con utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ la utilidad esperada es

$$E[u(K)] \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{100 - \alpha K} \;+\; \frac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha)K}.$$

Derivada y condición de primer orden

$$\frac{dE[u]}{dK} = -\frac{\alpha}{4\sqrt{100 - \alpha K}} + \frac{1-\alpha}{4\sqrt{(1-\alpha)K}} \;=\; 0.$$

Multiplicando y reordenando,

$$\sqrt{1-\alpha}\,\sqrt{100 - \alpha K} = \alpha\sqrt{(1-\alpha)K}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando (para $\alpha \neq 1$):

$$(1-\alpha)\big(100-\alpha K\big) = \alpha^2 K \implies K^*(\alpha) = \frac{100(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2E[u]}{dK^2} = -\frac{\alpha^2}{8(100-\alpha K)^{3/2}} - \frac{(1-\alpha)^2}{8\big((1-\alpha)K\big)^{3/2}} < 0,$$

por lo que la solución interior es un máximo.

Regla de Demanda del Seguro

La solución interior anterior es válida solo si $0 < K^* \leq L = 100$; de lo contrario, el óptimo está en una frontera.

$$\boxed{K^*(\alpha) = \begin{cases} 100, & 0 < \alpha \leq p = 0{,}5 \\ \dfrac{100(1-\alpha)}{\alpha}, & 0{,}5 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

- **Prima actuarialmente justa** $\big(\alpha = p = 0{,}5\big)$: $K^* = 100$.
- **Prima con carga moderada** $\big(0{,}5 < \alpha < 1\big)$: cobertura cae linealmente con α.
- **Prima muy cara** $\big(\alpha \geq 1\big)$: el seguro deja de ser atractivo; $K^* = 0$.

En forma compacta,

$$K^*(\alpha) = \text{mín}\Big\{\text{máx}\Big\{0,\ 100\frac{1-\alpha}{\alpha}\Big\},\ 100\Big\}.$$

6.3.3. Disposiciones a pagar y el equivalente cierto

Ya vimos, inicialmente, que comprar un seguro puede reducir la perdida de utilidad que implica el riesgo. Esto explica porque tenemos, por ejemplo, seguros obligatorios para autos.

Sin embargo, para el desarrollo eficiente de políticas publicas, seria conveniente saber cuanto valoramos en dinero los seguros. Esto dependerá de todos los factores que hemos visto: aversión al riesgo, probabilidades de los distintos eventos, pagos, etc...

Volvamos a nuestra escenario inicial, donde con 50 % de probabilidad obteníamos 0, y con el resto de la probabilidad obteníamos 100. La utilidad esperada resultante para un individuo con una función de utilidad $u(c) = \sqrt{c}$ es $E[u(X)] = 0{,}5\sqrt{100} = 5$.

La pregunta que uno podría hacerse ahora es: **¿cuánto podría darle al individuo, tal de que esté igual de feliz que correr el riesgo?**

Esto se podría obtener dando una cantidad de dinero x tal que $\sqrt{x} = 5$. La probabilidad sería 1, porque lo damos con seguridad. Esto es lo que llamamos **Equivalente Cierto.**

Equivalente Cierto

Definimos al equivalente cierto como el valor EC tal que, bajo una lotería X, el individuo está indiferente entre recibir EC con seguridad y jugar a la lotería:

$$u(EC) = E[u(X)].$$

En la Figura 6.5 podemos ver dónde está el Equivalente Cierto. Tomamos la utilidad esperada por jugar la lotería, y encontramos cuál sería el valor tal que, evaluándolo en la función de utilidad, tenemos el mismo nivel. En este caso, sabemos que la utilidad esperada es 5, por lo que mapeamos en el eje horizontal, según el valor de 5 y la función de utilidad Bernoulli.

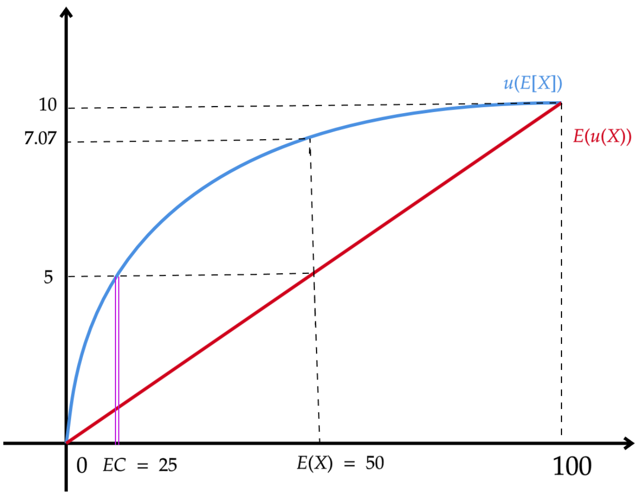


Figura 6.5: Equivalente cierto

En este caso, la disposición a pagar por librarse de la incertidumbre y recibir el equivalente cierto sería la distancia horizontal entre 50 y 25, por lo tanto, ¡la incertidumbre está (des)valorada en 25!

En el escenario sobre el seguro, la disposición a pagar por la cobertura completa sería la distancia entre el 100 y 25, porque si costara cero, tendríamos cobertura a precio cero, y si cobra 75, que sería el máximo, entonces estaría dejándonos indiferentes entre tomar el seguro completo y jugar la lotería.

Por lo tanto:

- El equivalente cierto sirve para encontrar el dinero necesario para dejar de jugar la lotería.

- Este será menor al retorno esperado si el individuo es averso al riesgo, y viceversa si es amante.
- La distancia entre el retorno promedio y el equivalente cierto es la valorización del riesgo.
- La disposición a pagar por un seguro determinado será la distancia entre el retorno esperado con el seguro y el equivalente cierto.

Capítulo 7

Teoría de Juegos: Juegos estáticos con información completa

Capítulo 8

Teoría de Juegos: Juegos dinámicos con información completa

Capítulo 9

Juegos repetidos

Este capítulo está basado en el libro 'An Introduction to Game Theory', de Martin J. Osborne, primo menor de Ozzy Osbourne.

La idea básica es que día a día interactuamos con las mismas personas, y podemos tomar provecho de ellas. Sin embargo, no lo hacemos. Por ejemplo, si nuestro vecino se va de viaje, y nos pide cuidar su jardín, podemos aprovechar de robarle todas sus cosas. Sin embargo, es claro que no lo hacemos porque involucra problemas futuros. En juegos repetidos hacemos lo mismo, todos los días interactuamos con alguien, podemos tomar provecho, pero ciertas condiciones nos van a deteriorar de hacer esto.

Consideremos el siguiente caso del Dilema del Prisionero

	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

Cuadro 9.1: Dilema del Prisionero

Es claro que tiene un único equilibrio de Nash estático, donde ambos eligen D y se delatan. Pero supongamos que pueden hacer algo distinto, al enfrentarse todos los días. Un jugador va a elegir C siempre y cuando el otro también lo haga, Si uno juega D, el otro también lo hará hacia adelante.

Si elige C, entonces en cada periodo será (C, C) el resultado y obtendrá 2 cada día. Si se cambia a D, estarán en (D, C), y ganará 3 por sólo ese período. Sin embargo, a futuro recibirá 1 por estar eternamente en (D, D).

Si ella es impaciente, puede que le convenga romper el trato de manera temprana. Pero si valora el futuro, hay incentivos a que se mantenga con el trato de cooperar. Por lo tanto, según un nivel de impaciencia, que ya veremos, el equilibrio puede ser que cooperen al infinito.

Sin embargo, este no es el único equilibrio. Otro equilibrio, por ejemplo, es un par de estrategias donde cada jugador juega D tras cada historia. Si un jugador hace esto, el otro no tiene otra opción que seguirlo. Por lo tanto, el universo de equilibrios es bastante extenso, y habrá que tomar algunos tipos de estrategias.

9.1. Preferencias

Dado que los agentes reciben utilidades cada período, hay que ir sumándolos. Pero dado que uno no valora el futuro lo mismo que el presente, hay que descontarlo. Así, El pago descontado de un agente i que toma acciones $(a_1, a_2, ..., a_t)$ en cada período se da por:

$$U_i(a_1, ..., a_t) = u_i(a_1) + \delta u_i(a_2) + ... + \delta^{T-1} u_i(a^T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(a^t).$$

δ^t es el descuento correspondiente a cada período en el que se juegue, mientras que a_t es la acción contingente a ese período. Descontamos porque los agentes son impacientes. Sin embargo, no es obvio que en la realidad las preferencias de las personas tomen esta forma.

Importante. Vamos a normalizar la utilidad descontada, multiplicándola por $(1 - \delta)$

$$U_i(a_1, ..., a_t) = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(a^t).$$

Esto lo hacemos porque, si recibiera c en cada período, la utilidad sumada total se podría representar por $c/(1 - \delta)$. Por lo que normalizando queda mejor. Además, también porque diverge si $\delta \to 1$.

Un punto relevante de este enfoque, es que las preferencias son cardinales, porque el número de la utilidad importa. No es sólo el orden.

9.1.1. Juegos repetidos infinitos

Hagamos enfoque en juegos donde el tiempo es infinito, vamos a jugar, como diría Buzz Lightyear, hasta el infinito y más allá. Un juego repetido es un juego extensivo con **información perfecta y acciones simultáneas.**

Juegos Repetidos

Sea G un juego estratégico con conjunto de jugadores N, conjunto de acciones A_i y función de pago u_i para cada jugador i. El juego infinitamente repetido de G con factor de descuento δ es el siguiente juego extensivo con información perfecta y movimientos simultáneos:

- El conjunto de jugadores es N.
- El conjunto de historias terminales es el conjunto de secuencias infinitas
$$(a^1, a^2, \dots)$$
de perfiles de acción en G.
- La función de jugadores asigna el conjunto N a cada subhistoria propia de cualquier historia terminal.
- El conjunto de acciones disponible para el jugador i tras cualquier historia es A_i.
- Cada jugador i evalúa una historia terminal $(a^1, a^2, \dots)$ según su promedio descontado
$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\,u_i\big(a^t\big).$$

9.1.2. Estrategia gatillo

Al igual que en un juego extensivo típico, la estrategia de un jugador especifica su acción para cada posible historia en la que le toque jugar. Por ejemplo, una estrategia como la que dijimos primero en este capítulo la podemos definir cómo:

$$s_i(\emptyset) = C,$$
$$s_i(a^1, \dots, a^t) = \begin{cases} C, & \text{si } a_i^\tau = C \text{ para todo } \tau = 1, \dots, t, \\ D, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lo que quiere decir que, en el primer período coopera, y después cooperará sólo si en el período anterior al que le toca jugar, el oponente también cooperó. Si la traicionó, entonces juega D hasta el final. Esta es la famosa **estrategia gatillo.** Siempre la imaginé gatillo, porque en cierto sentido, si traicionas te dispara y te castiga para siempre.

Las estrategias se pueden representar como autómatas: un aparato que cambia su comportamiento según la acción pasada. Esta primera estrategia

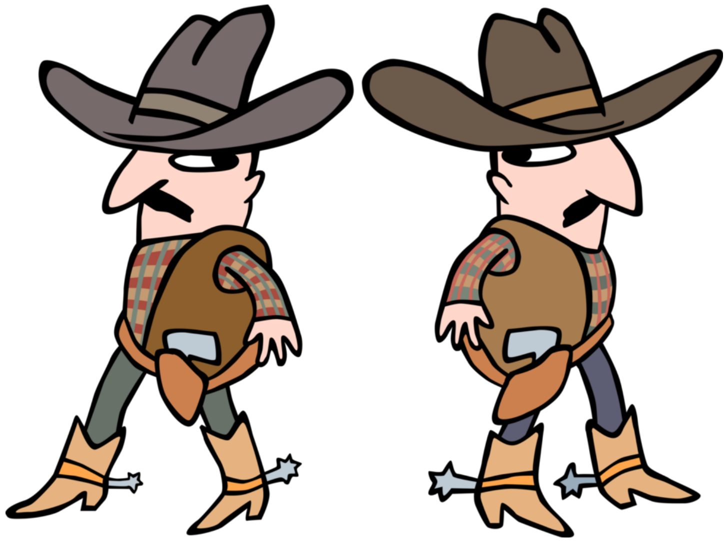


Figura 9.1: Así me imaginaba siempre las estrategias gatillo

$$\boxed{\mathcal{C}: C} \xrightarrow[(\cdot, D)]{} \boxed{\mathcal{D}: D}$$

Figura 9.2: Autómata de la estrategia gatillo

se puede ver fácilmente según la figura 9.2. Uno comienza en un estado $\mathcal{C}$, donde si observo C por parte del otro jugador, me mantengo ahí. Pero en caso de observar D por parte del otro jugador, nos cambiamos a un estado $\mathcal{D}$, donde juego D. Este mecanismo me dice qué hacer según qué veo.

Lo que nos interesará saber en estos juegos, es qué debe pasar con la impaciencia de los agentes, tal de que una estrategia se sostenga a través del tiempo.

9.1.3. Solucionando

Si yo adopto la estrategia gatillo, y el otro jugador también, entonces la utilidad para cada jugador, en cada período es $(2, 2, 2, ...)$. Si adopta una estrategia distinta, entonces en algún período jugará D y el otro jugador, siguiendo su estrategia, volverá a jugar D. Yo jugué D por estrategia distinta, mientras que el otro siguió con gatillo y jugó D porque es lo que correspondía su estrategia.

Si, por ejemplo, por ejemplo quiero llevarme un gran premio en el primer período, 3, y no descontarlo, entonces recibiría $3, 1, 1, ...$ de utilidad no descontada en cada período. En ese caso, la utilidad (no normalizada) del agente es

$$U_i = 3 + \delta + \delta^2 + ... = 3 + \frac{1}{1-\delta},$$

¡¡¡pero recuerden que vamos a normalizar!!! Por lo tanto:

$$U_i = (1-\delta)\left(3 + \delta + \delta^2 + ...\right) = 3(1-\delta) + 1 = 3 - 3\delta + \delta,$$

Por ende, el agente traicionero no podrá aumentar su utilidad si y sólo si:

$$(1-\delta)(2 + \delta 2 + ...) = 2 \geq 3 - 2\delta,$$

Por lo tanto, no querrá desviarse si $\delta \geq 1/2$.

Jugar estrategia gatillo será Equilibrio de Nash sí la impaciencia de los jugadores es suficientemente baja, 0.5, en este caso. Si fuera MUY impaciente, recibir el pago hoy y después ser castigado, es más valioso que recibir 2 de manera constante.

9.1.4. Tit-for-tat

Esta estrategia es bien conocida últimamente. Se habló de ella tras el conflicto entre Irán e Israel a principio de año, donde se disparaban mutuamente hasta que eventualmente cesaron. La estrategia consiste en lo siguiente.

En esta estrategia, el largo del castigo depende del comportamiento del jugador que está siendo castigado. Si sigue jugando el otro traidor D, entonces yo sigo jugando D hasta que el otro jugador decida arrepentirse y quedar en C, donde lo imitaré y quedaré en C. Si recuerdan el conflicto, pasó algo similar. Irán anuncia castigar a Israel y dispara primero, Israel dispara de vuelta, Irán dispara de nuevo, Israel dispara de nuevo, Irán se queda callado, Israel se queda callado. Y hasta el punto en el que escribo esto, no se han vuelto a disparar. Y esperemos que siga así.

Supongamos que yo adhiero a esta estrategia. En este caso, si el otro jugador juega D en el primer período, el jugador 1 (yo), también juego D en el período siguiente. Continuamos jugando D hasta que el jugador 2 decida jugar C. En ese caso, tiene dos opciones, jugar C y volver al escenario inicial, o continuar jugando D y que el jugador 1 siga jugando D también.

Entonces, si el jugador 2 se quiere desviar, hay dos opciones: juega $(D, C, D, C, ...)$ o juega siempre D. Si juega alternado, recibe $(3, 0, 3, 0, 3, ...)$. Si juega siempre D, entonces recibe $(3, 1, 1, 1, ...)$.

Ya conocemos que si juega D siempre, el pago descontado es $3 - 2\delta$. Por otro lado, si alterna, entonces su pago descontado es

$$(3 + \delta 0 + \delta^2 3 + ...) = (1-\delta) 3 \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^2)^k.$$

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty}(\delta^2)^k$ converge a $1/(1-\delta^2)$. Por lo tanto, el descuento de la utilidad es

$$(1-\delta)3 \cdot \frac{1}{1-\delta^2} = \frac{3}{1+\delta}.$$

Finalmente, si ambos jugamos la misma estrategia, nos mantenemos en C eternamente, por lo que la utilidad descontada es 2. Así, para que *tit-for-tat* sea una mejor respuesta a *tit-for-tat,* tienen que pasar dos cosas:

1. $2 \geq \frac{3}{1+\delta}$, el alternado
2. $2 \geq 3 - 2\delta$, el constante

Solucionando ambas, encontramos nuevamente que $\delta \geq 1/2$. Por lo que el par de estrategias donde cada uno hace *tit-for-tat* es un equilibrio del juego repetido propuesto, sólo si son más pacientes que $1/2$.

9.2. Equilibrio Perfecto en Subjuegos y las Ecuaciones de Bellman

Una forma alternativa para analizar estos juegos es usando ecuaciones de Bellman, programación dinámica, donde resumimos la utilidad de períodos infinitos en un problema de sólo dos períodos. Resumir problemas infinitos en dos periodos es posible, pero el porqué no es el foco de nuestro libro, por ahora.

Consideremos el siguiente dilema del prisionero:

	A	B
A	2,2	-3,4
B	4,-3	0,0

En este caso, el equilibrio de Nash estático es (B, B), donde ambos reciben una utilidad de cero. Supongamos que quieren estudiar una estrategia ojo por ojo, y ver si este es un equilibrio perfecto en subjuegos. Recordemos que la estrategia ojo por ojo es jugar lo que jugó el oponente el turno pasado.

Al evaluar la posible desviación, analizaremos la utilidad futura que recibiría al tomar una acción y pasar a un **estado** o situación. Tomaremos entonces que el valor de estar en un estado será el pago instantáneo de tomar una cierta acción que se tenga que tomar en ese momento, más el pago descontado de movernos al estado que tenga como consecuencia esa acción y seguir jugando ojo por ojo (sólo tras haber tomado la acción).

Por ejemplo, acá tenemos cuatro estados: AA, AB, BA, BB. ¿Porqué cuatro? Porque puede pasar que cada uno jugó A, o B, o combinaciones entre ambos. En este caso nos importa esta combinación porque el estado necesita saber las acciones de ambos. Imaginemos que el agente 2 está evaluando desviarse mientras juega ojo por ojo, y veamos qué debe cumplirse para que no lo quiera hacer, y así la estrategia sea de equilibrio.

La utilidad de estar en cada estado, la podemos entonces escribir de la siguiente forma. Partamos con la utilidad de estar en el estado AA:

$$v_{AA} = \text{máx}\{2(1-\delta) + \delta v_{AA}; 4(1-\delta) + \delta v_{BA}\} \tag{9.1}$$

Antes de seguir, examinemos qué quiero decir con esto, y porqué hay una función máximo. Si estamos en AA, podemos tomar dos acciones inmediatamente, o seguir A (primer componente), o jugar B (segundo componente de la función). Si juego A, está el pago instantáneo de 2, porque corresponde recibir 2; además pasamos a un estado donde ambos seguimos jugando A, por eso recibimos el valor mismo de la función (asumimos que el otro jugador sigue la estrategia). Pero si tomo B, pasan dos cosas: primero, recibo 4 porque me aprovecho del otro jugador que está jugando A; después, vuelvo a jugar ojo por ojo, pero ahora el oponente jugará B porque yo jugué B la vez pasada, y a mi me toca jugar A porque el oponente jugó A la vez pasada. Por ende, pasamos al estado v_{BA}. Llamamos a la variable que viene en el período siguiente como **valor de continuación.**

El valor de que estemos en AB es el mismo, porque al jugador 2, digamos que somos nosotros, sólo nos importa si 1 jugó A.

$$v_{AB} = \text{máx}\{2(1-\delta) + \delta v_{AA}; 4(1-\delta) + \delta v_{BA}\}. \tag{9.2}$$

Hacemos el mismo análisis pero ahora para cuando 1 jugó B anteriormente:

$$v_{BB} = \text{máx}\{-3(1-\delta) + \delta v_{AB}; 0(1-\delta) + \delta v_{BB}\}; \tag{9.3}$$

$$v_{BA} = \text{máx}\{-3(1-\delta) + \delta v_{AB}; 0(1-\delta) + \delta v_{BB}\}. \tag{9.4}$$

Tenemos entonces las cuatro ecuaciones relevantes. Para que sea equilibrio de Nash tiene que ser que:

- En la primera ecuación, el primer componente sea máximo.

Nada más, esto es lo que ya hemos hecho. Sin embargo, con este enfoque nos interesa saber si la estrategia de ojo por ojo es **equilibrio perfecto en subjuegos.** Para esto, recordemos que se tiene que jugar óptimo en cada subjuego. Acá, la acción correspondiente tendría que ser la que da más utilidad en el estado que estemos analizando.

- En la primera ecuación, el primer componente sea máximo. Es decir que jugar A sea conveniente.

- En la segunda, el segundo. Traicionar sea conveniente.

- En la tercera, el segundo. Traicionar sea conveniente.
- En la cuarta, la primera. Jugar A sea conveniente.

Es decir, en cada estado, tiene que convenir seguir jugando lo que corresponde jugar según ojo por ojo.

Despejando la primera ecuación tomando el primer componente como máximo, y despejando la tercera ecuación, obtenemos que $v_{AA} = 2$ y $v_{BB} = 0$.

Haciendo lo mismo con las otras dos ecuaciones, tendremos que resolver un sistema de dos por dos, y encontraremos que $v_{AB} = \frac{4-3\delta}{1+\delta}$ y $v_{BA} = \frac{-3+4\delta}{1+\delta}$.

Dado que tenemos las cuatro posibles funciones de valor, tenemos que comprobar cuáles son las condiciones para que jugar la estrategia que corresponda sea conveniente. Es decir, se cumplan los puntos mencionados arriba.

Desarrollamos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2(1-\delta) + \delta v_{AA} \geq 4(1-\delta) + \delta v_{BA}$$

$$2(1-\delta) + \delta v_{AA} \leq 4(1-\delta) + \delta v_{BA}$$

$$-3(1-\delta) + \delta v_{AB} \leq 0(1-\delta) + \delta v_{BB}$$

$$-3(1-\delta) + \delta v_{AB} \geq 0(1-\delta) + \delta v_{BB}$$

Vemos que esto no es posible, porque las primeras dos piden $\delta = 2/5$ y la tercera y cuarta piden $\delta = 3/4$. Debido a esto, ojo por ojo no puede ser de equilibrio, simplemente porque no existe ningún descuento capaz de lograr que esas cuatro ecuaciones se cumplan. La estrategia tiene muchos incentivos a desviarse en algunos escenarios.

9.2.1. Veamos ahora un ejemplo donde sí hay, volvamos a la estrategia gatillo

En este caso, supongamos entonces que la estrategia es jugar A si siempre ambos lo han hecho, y B en cualquier otro caso. En este caso hay sólo dos estados: en buenas o malas. No son cuatro como antes porque sólo importa si alguno de los dos ha roto el pacto. Entonces, las funciones de valor correspondientes son:

$$v_A = \text{máx}\{2(1-\delta) + \delta v_A; 4(1-\delta) + \delta_B\} \quad \text{estar en buenas, y}$$

$$v_B = \text{máx}\{-3 + \delta v_B; 0 + \delta v_B\} \quad \text{estar en malas.}$$

De nuevo, el primer componente dentro de máx$\{\cdot\}$ corresponde a la utilidad de jugar A. y la otra B. ¿Puede ser esta estrategia un ENPS? Vamos paso a paso, $v_A = 2$ y $v_B = 0$. En este caso, es ENPS si $\delta \geq 1/2$, porque la primera ecuación pide que

$$2 \geq 4(1-\delta) \implies \delta \geq 1/2,$$

mientras que la segunda pide

$$0 \geq -3,$$

lo que se cumple siempre. Por lo tanto, esta estrategia sí es un ENPS cuando $\delta \geq 1/2$,porque es conveniente jugar lo que corresponde en cada subjuego posible.

9.3. Colusión

Figura 9.3: Algunos villanos colusivos

Quiero dedicar una pequeña parte de este capítulo a entender cómo operan las colusiones en su forma más básica. Obviamente, el objetivo de esto no es enseñar a coludirse, sino a entender qué factores pueden afectar la posibilidad de colusión, y así saber algo sobre cómo impedirlos. La colusión es interesante, e importante, por varias razones (de las que se me ocurren por ahora):

1. Es algo que, cuando está presente, potencialmente nos puede afectar fuertemente
2. Es tremendamente complicado de detectar. Precios altos en un mercado, o el aumento simultáneo de precios, no necesariamente implica colusión.
    a) Puede surgir, por ejemplo, por factores geopolíticos que actúan como shock a las mismas empresas.

   b) También pueden surgir por razones meramente estratégicas, lo que no implica que sea colusión.

3. ¿Cuando **ES** colusión? Vamos a definir colusión cuando los jugadores tienen estrategias basadas en cooperación y castigo.

4. Esto es lo que hace difícil detectar colusión. Si no tienes un e-mail, o fotos de una junta de villanos a lo James Bond entre los agentes, es difícil estar seguro por mera observación del comportamiento de precios.

5. Sin embargo, podemos de todas formas encontrar patrones basados en teoría económica que ayuden en la investigación.

Consideremos un escenario simple donde hay dos empresas que compiten por un mercado a través de precios. Los costos marginales para cada una asumiremos que son cero. Recordemos que la competencia en precios implica una paradoja de Bertrand: en equilibrio de Nash los precios son cero y no hay ganancias. Recapitulemos:

9.3.1. Colusión en su forma más simple

La demanda inversa de este mercado por el bien que producen estas empresas es de $P = 10-Q$. Los costos de cada empresa son cero, $CT_i(Q) = 0$, y las firmas compiten eligiendo un precio. El mercado consumirá el bien de la empresa que lo tenga más barato. El razonamiento para el equilibrio es el siguiente:

- El precio tiene que ser mayor a cero para que la empresa participe.
- Ante cualquier precio mayor a cero que ponga la firma 1, la mejor respuesta de la firma 2 es responder $p_1 - \epsilon$.
- Ante eso, el jugador uno responde con $p_2 - \epsilon$.
- Esto lo iteramos al infinito, y encontramos que el equilibrio es que ambos, a pesar de ser dos empresas,
- Por ende $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0); \quad \pi_1 = \pi_2 = 0$.

¿Qué pasa si nos pudiésemos comunicar? Por ejemplo, podemos acordar actuar como una sola firma monopólica, y nos repartimos las ganancias por igual. En ese caso, el problema y la solución sería el siguiente:

$$\max_p p(10 - p) \quad \Longrightarrow \quad p = 5.$$

Por lo que la utilidad total de las firmas es 25, pero cada firma se lleva $25/2 = 12,5$. Si alguno se desvía, querría desviar a ϵ menos de precio, y asumiremos que se lleva 'toda la torta'.

Digamos que los CEOs de estas empresas tenemos una reunión y acordamos entonces en hacer una estrategia gatillo. Si alguno traiciona, volvemos a competir ferozmente. Tenemos entonces dos estados: Colusión y Competencia. Definamos cuales serían las funciones de valor para cada caso:

$$v_{coludir} = \max\{12{,}5(1-\delta) + \delta v_{coludir}; 25(1-\delta) + \delta v_{competencia}\}$$

$$v_{competencia} = \max\{0(1-\delta) + \delta v_{competencia}; 0(1-\delta) + \delta v_{competencia}\}$$

Notemos que lo cada ecuación aporta algo relevante:

1. Primero, seguir coludiendo aporta constantemente una utilidad intermedia de 12.5, pero si me desvío gano 25 ahora, pero a futuro nada.
2. Competir es fuertemente poco conveniente en un período, porque literalmente nos lleva a recibir una utilidad de cero bajo esta estrategia.
3. Sin embargo, si somos muy impacientes, ¡recibir el 25 de ahora puede ser mejor que cooperar!

Para que sea equilibrio coludir, tiene que ser

$$12{,}5(1-\delta) + \delta v_{coludir} \geq 25(1-\delta) + \delta v_{competencia},$$

es decir, tiene que ser lo suficientemente paciente como para que recibir 12.5 durante todo el tiempo le de más utilidad neta que desviarse y llevarse todo el primer período. Sabemos que $v_{coludir} = 12{,}5$ y $v_{competir} = 0$, por lo que

$$12{,}5 \geq 25(1-\delta),$$

lo que nos da que $\delta \geq 1/2$. Medio aburrido el resultado porque hemos usado casos simétricos, pero lo importante es la intuición. Si es más paciente que $1/2$, entonces cooperar es conveniente.

9.3.2. ¿Qué podríamos hacer para impedir la colusión?

CONTINUARÁ

Capítulo 10

Teoría de Juegos: información asimétrica

Capítulo 11

Teoría de Contratos

Capítulo 12

Selección

Capítulo 13

Ejercicios entretenidos

13.1. Teoría del Consumidor

13.1.1. Pregunta 1

Usted es el alcalde de una ciudad de hurones llamada Ciudad Pareto, y debe cuidar de un ciudadano representativo -llamémosle Pareto- que tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2},$$

y que, dada la economía de la ciudad, tiene un ingreso de m y los precios para comprar comida y agua son p_1 y p_2.

1. Plantee el problema de optimización del ciudadano representativo y encuentre la demanda marshalliana de cada bien.

2. Calcule las elasticidades precio-propia, precio-cruzada e ingreso. Discuta sobre la interpretación de cada una.

3. Encuentre la función de utilidad indirecta.

4. Encuentre las demandas hicksianas y la función de gasto mínimo

5. Considere que el ingreso de Pareto es $m = 50$, y los precios son $p_1 = 5$ y $p_2 = 1$. Encuentre las demandas marshallianas y el nivel de utilidad, utilizando lo que ya sabe.

   ¡Algo terrible ha ocurrido! La ciudad vecina, gobernados por la malévola hurona Violeta, ha decidido cortar el principal camino que servía para transportar bienes entre las ciudades. Dado esto, ¡el precio de p_1 a aumentado a $p_1' = 10$! Ante esto, los hurones de la ciudad se han empezado a revelar, exigiendo volver a su nivel de utilidad anterior. Como alcalde de la ciudad, debe tomar riendas de la situación. Para esto, sus asesores huro-económicos Rodrigo y Maykol le proponen dos planes: El **plan A** consiste en otorgar una transferencia de dinero T. de manera que puedan volver a su felicidad anterior. El **plan B** consiste en subsidiar un porcentaje Δ del precio del bien 1, que es el más afectado, hasta volver a su nivel anterior.

6. Considere el plan A. Calcule el costo para lograr este plan y las nuevas demandas.

7. Considere el plan B. Calcule el costo del plan y las nuevas demandas.

8. ¿El costo estatal es el mismo para ambos planes? Explique la intuición. ¿Qué acción debería tomar?

   Desde que solucionó la crisis causada por Ciudad Violeta, y eventualmente el precio volvió a su normalidad[1], usted como alcalde se ha relajado durante varios años, y se ha olvidado por completo cuál es el ingreso de sus ciudadanos ya que su ministro de estadística borró el Excel que contenía la información, pero sabe que el nivel de utilidad que tienen es aquel encontrado en la pregunta (3), al igual que las unidades consumidas. El problema es que los ciudadanos han exigido cada vez más que su utilidad aumente, de no aumentar la utilidad a 10, los hurones ciudadanos se revelarán. En modo de urgencia, usted está evaluando generar una transferencia para lograr este aumento de utilidad.

9. Calcule el costo del nuevo proyecto. ¿En cuánto aumentará/caerá el consumo de cada bien?

   ¡Y ciudad Pareto vivió feliz para siempre! :)

13.2. Monopolio

13.2.1. *Pay-per-Chip*: monopolio de microchips de IA

Una empresa es la única productora de un chip indispensable para entrenar redes neuronales.

$$Q(P) = A - BP, \qquad C(Q) = cQ, \quad 0 < c < \frac{A}{B}.$$

1. Calcule el precio y la cantidad que maximizan beneficios cuando la firma sólo puede fijar **un precio único**.

2. Suponga ahora que la firma puede observar la disposición a pagar de cada laboratorio y fijar un precio personalizado (discriminación de *primer grado*). Determine la cantidad producida y los pagos individuales.

[1] Dado que Violeta fue encarcelada por corrupción y tráfico de influencias.

3. Compare excedentes (*consumidor* y *productor*) y bienestar total entre los dos regímenes. Explique por qué, bajo discriminación perfecta, el resultado coincide con el óptimo competitivo.

4. Discuta brevemente las implicancias para la política antimonopolio en el sector de hardware para IA.

13.2.2. Fármacos, seguros de salud y precio único

Las farmacias convencionales venden este medicamento a precios sustancialmente más altos que el costo de producción. Se sospecha que el monopolio de patente explica esa dispersión de precios.

- El fabricante posee la *única* patente de un fármaco vital; su costo marginal es prácticamente nulo.
- Cada aseguradora observa el *valor de vida* que asignan sus pacientes al tratamiento, v_i, distribuido $v \sim U[0, \bar{v}]$.

1. Derive la curva de demanda inversa agregada $P(Q)$. Sugerencia: ordene a las aseguradoras de mayor a menor v_i.

2. (Precio único) Encuentre el precio $\hat{P}$ y la cantidad $\hat{Q}$ que maximizan beneficios si la farmacéutica *sólo* puede cobrar un precio común a todas las aseguradoras.

3. (Discriminación de 1.er grado) Determine los pagos individuales $P_i(v_i)$ si la empresa puede fijar un precio distinto a cada aseguradora, conociendo exactamente su v_i.

4. Calcule los excedentes del consumidor (aseguradoras/pacientes), del productor y la variación de bienestar total al pasar de $\hat{P}$ a la discriminación perfecta. Explique cómo esto racionaliza que las "farmacias típicas" exhiban precios más altos—con un único precio la farmacéutica *debe* subirlo para capturar parte de la alta disposición a pagar de algunos pacientes, dejando desatendidos a otros.

5. ¿Debería un regulador permitir la discriminación perfecta en este mercado tan sensible? Argumente a favor y en contra.

13.2.3. Monopolio natural de distribución eléctrica y entrada de un competidor de costo cero

Considere una empresa de distribución eléctrica con costos

$$C(Q) = F + kQ, \qquad F > 0,\ 0 < k < \frac{A}{B},$$

y demanda inversa $P(Q) = A - BQ$.

1. Muestre que la *media de costos* $AC(Q) = \frac{F}{Q} + k$ es decreciente. Explique por qué ello justifica considerar al sector un *monopolio natural.*

2. Determine el precio y la cantidad que maximizan beneficios bajo monopolio no regulado (precio único).

3. Suponga que la autoridad regula con la regla "precio $=$ costo marginal".

   a) ¿Puede la empresa cubrir F?

   b) Proponga un esquema de tarifa en dos partes que permita alcanzar eficiencia $\big(P = k\big)$ y deje a la empresa con utilidad suficiente para operar.

   c) Bajo este mismo esquema, ¿cuál es el mejor esquema en dos partes que puede ofrecer? ¿A qué se parece?

4. Ahora llega un competidor con **costo marginal cero** y sin costos fijos.

   a) Si las dos firmas compiten a la *Bertrand* (precio), caracterice el equilibrio y discuta la viabilidad de cada empresa.

   b) Comente si la presencia del competidor destruye la lógica de monopolio natural o, por el contrario, genera un dilema de supervivencia para el entrante.

5. Concluya: ¿qué lecciones aporta este ejemplo sobre el diseño de regulación y el peligro de "sobre-entrada" en industrias con altos costos fijos?

13.3. Incertidumbre

13.3.1. Calentando motores

Suponga que un individuo tiene una función de utilidad $u_i(x) = \sqrt{x}$, hay dos activos financieros que cuestan 100 dólares cada uno. El consumidor debe comprar uno de estos, no ambos. Cada activo pagará después de un período. El activo A paga 103 de manera certera, mientras que el activo B paga 110 con probabilidad 0,95, y 0 con probabilidad 0,05.

- ¿Qué activo comprará?
- Suponga que, en vez, su función de utilidad es $u(x) = x^2$. ¿Qué activo comprará?
- En cada caso, encuentro la probabilidad que hace que elija cada opción.
- Considere un escenario en que el activo B tiene una probabilidad del cincuenta por ciento, y la función de utilidad es $u(x) = x^\alpha$. ¿Para qué valor de α, prefiere ese bien?
- Suponga que hay un activo C que funciona como muchas loterías al mismo tiempo. De manera independiente, lanza 110 monedas al aire cargadas para que salga cara con una probabilidad del 95 %. Por cada cara que salga, paga 1 al comprador. Demuestre si es equivalente, o no, al original.

13.3.2. Tornado

Imagine dos pueblos A y B vecinos. Todos los años hay un huracán en uno de estos dos pueblos, pero nunca en ambos. La probabilidad de que pase en cada uno es de 0,5. Si no hay, huracán, un pueblo cosechará 40.000 unidades de trigo. Si pasa un huracán, sólo 10.000. Cada pueblo tiene la misma preferencia representada por una función de utilidad Bernoulli $u = \sqrt{c}$, donde c es el consumo del pueblo correspondiente. Ambos pueblos están desconectados.

1. Imagine que los pueblos se conocen, y proponen juntar las cosechas todos los años, y dividirla por la mitad para cada uno, independiente de quien reciba un tornado. ¿Están dispuestos a este trato? Explique.
2. En relación al punto anterior, relacione con la definición de un individuo averso al riesgo de acuerdo a si acepta, o no, un juego justo.
3. Explique en qué se parece este contrato a un seguro, defina si es cobertura completa o parcial. Indique cuál sería la pérdida, la prima por riesgo, y muestre si esta es actuarialmente justa.

13.3.3. Seguro y prima por riesgo

Un individuo posee una riqueza inicial de $w_0 = 150$ dólares y su función de utilidad es

$$u(w) = \ln w.$$

Cada período existe una probabilidad $p = 0{,}2$ de sufrir una pérdida de $L = 30$ dólares; con probabilidad $1-p$ la pérdida no ocurre. Antes de que se resuelva la incertidumbre puede comprar un seguro que cubre la pérdida por completo a cambio de pagar una prima π.

1. **Prima actuarialmente justa.** Calcule la prima π_{act} que iguala su valor esperado a la pérdida esperada.

2. **Prima de reserva ($\pi^\star$).** Determine la prima máxima que el individuo estaría dispuesto a pagar para asegurarse (es decir, aquella que lo deja indiferente entre asegurar y no asegurar).

3. **Prima de riesgo.** Calcule $\pi^\star - \pi_{\text{act}}$ y explique de qué depende esta diferencia.

4. **Aversión al riesgo relativa.** Repita los puntos 1–3 suponiendo ahora la utilidad de potencia

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1,$$

   y deduzca una expresión cerrada para $\pi^\star(\gamma)$. Analice cómo varía la prima de riesgo con el coeficiente de γ.