# Notas de Algebra Lineal

Murillo Vega, Gustavo
e-mail: g.murillo24@info.uas.edu.mx

October 2024

# 1 Introducción

## 1.1 Definición de matriz

Sea $F$ el campo de los reales o de los complejos, definimos una matriz $A \in F^{m\times n}$ por sus propiedades de 1 a 4.

1. Denotamos sus elementos por $A_{i,j} \in A$ con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$. También, podemos denotar una matriz por sus elementos:

   $(a_{i,j})_{m\times n} \in F^{m\times n}$, donde redundantemente $((a_{i,j})_{m\times n})_{i,j} := a_{i,j}$. Cuando no haya confusión con las dimensiones de la matriz escribimos $(a_{i,j}) := (a_{i,j})_{m\times n}$.

2. Definimos la suma de matrices $A + B = C$ para $A, B \in F^{m\times n}$ como:
   $$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

3. Se define el producto $cA$ de $A$ por el escalar $c$ como
   $$(cA)_{i,j} = cA_{i,j}.$$

4. Como se verá en seguida, es útil definir el producto $AB \in F^{m\times n}$ de las matrices $A \in F^{m\times d}$ y $B \in F^{d\times n}$ de la siguiente manera:
   $$AB_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}B_{k,j}.$$

   Nota: Si las dimensiones de $A$ y $B$ son $m \times d$ y $d \times n$, el producto $AB$ tiene dimensiones $m \times n$

5. Si $A \in F^{m\times n}$, definimos $A^t \in F^{n\times m}$ como $A^t_{i,j} = A_{j,i}$. Y $A^*$ como $A^*_{i,j} = \overline{A^t}$.

6. *Notación de arreglo:* Si $A \in F^{m\times n}$, escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

si $A_{i,j} = a_{i,j}$.

## 1.2 Identificación de vectores columna y escalares

Un una matriz $x$ de dimensión $m \times 1$, en el contexto de matrices, se dice que $x$ es un vector $m$-dimensional en $F^{m\times 1}$, y denotamos $x_i := x_{i,j}$ pues $j$ siempre es 1. También identificamos $F^{m\times 1}$ con $F^m$. Por lo tanto, al hablar de vectores en el contexto de matrices, un vector es una matriz que consiste de una sola columna.

Sea $\alpha \in F^{1\times 1}$, identificamos $\alpha_{i,j}$ con $\alpha$ y $F$ con $F^{1\times 1}$, es decir identificamos $\alpha$ como un escalar.

## 1.3 Ecuaciones lineales en forma de matriz

El sistema de ecuaciones lineales general es:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j = b_m. \end{gathered}$$

Ahora, veamos la forma de la multiplicación de $A = (a_{i,j}) \in F^{m\times n}$ por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in F^{n\times 1}$:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j \end{bmatrix}.$$

Si inspeccionamos esta expresión con la del sistema de ecuaciones lineales, tenemos con $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$, que el mismo sistema de ecuaciones se puede expresar como

$$Ax = b.$$

## 1.4 Algunos productos usados más adelante

**Producto interno**

Si $x$ y $y$ son vectores de la misma dimensión, definimos su producto interior $(x, y)$ como

$$(x, y) = x^t \overline{y}$$

o bien

$$(x, y) = y^* x$$

**Producto exterior**

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$, entonces su producto exterior es

$$xy* = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \ldots & \overline{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\overline{y_1} & \ldots & x_1\overline{y_n} \\ x_2\overline{y_2} & \ldots & x_2\overline{y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n\overline{y_1} & \ldots & x_n\overline{y_n} \end{bmatrix}$$

# 2 Espacios Vectoriales

(Usamos la palabra mapeo y transformación de forma intercambiable.)

Ya que vimos que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar con matrices, es de interés saber qué tipo de matrices generan sistemas de ecuaciones con soluciones, solución única o ninguna solución, para esto necesitamos la herramienta de mapeos lineales, que serán análogos a la función que corresponde a la multiplicación por la izquierda de una matriz con un vector columna. Sin embargo, estas son funciones de un espacio vectorial a otro, por lo que primero tenemos que definir qué es un espacio vectorial.

Como nota adicional, diremos que puede ser largamente innecesario para los practicantes de ciencias e ingeniería considerar mapeos sobre espacios vectoriales abstractos, en lugar de las transformaciones dadas por matrices sobre los vectores columna. Esto porque como se puede demostrar, tales ambas transformaciones son equivalentes por medio de isomorfismos.

Sin embargo para desarrollar teoría del álgebra lineal, e incluso modelos dentro de la ciencia y la ingeniería, es prolifero considerar estas transformaciones y espacios vectoriales abstractamente.

## 2.1 Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial $V(F)$ sobre un campo $F$, también denotado $V$ cuando el campo es implicado, tiene elementos que cumplen las siguientes propiedades:

1. **Suma y multiplicación escalar**

   Si $x, y \in V(F)$ y $\alpha \in F$, existe $x + \alpha y \in V$. Donde el operador $+$ es conmutativo y asociativo.

2. **Existencia del 0**

   Existe $0 \in V$ tal que si $x \in V$, $x + 0 = x$.

3. **Identidad escalar**

   $1x = x$ para $x \in V$, por virtud de $0 + 1x$.

4. **Existencia del inverso aditivo**

   Si $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. **Asociatividad de vector con escalar**

   Si $\alpha, \beta \in F$ y $x \in V$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. **Distributividad**

   Si $\alpha, \beta \in F$ y $x, y \in V$

   - $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
   - $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores.

**Ejemplos**

Esto implica que el conjunto de matrices $F^{m\times n}$ con sus operaciones (excluyendo la multiplicación) son un espacio vectorial $V(F)$.

En particular $F^{m\times 1}$ es un espacio vectorial, de donde en ingeniería o ciencias a estos elementos son a los que generalmente se llaman vectores. Notemos la diferencia, que aunque estos son vectores en el sentido del espacio vectorial también son matrices columna (o vectores en el sentido matricial). Pero también, las matrices son vectores en su propio espacio vectorial.

El conjunto de funciones $f : X \to F$ de un conjunto $X$ a un campo $F$ forman un campo vectorial. En particular, los polinomios $P^n(t)$ sobre un campo $F$ y $t$ en un anillo $R$ con identidad (ejemplo, las matrices con todas sus operaciones, o algún campo) son un espacio vectorial. Para aclarar, un polinomio de tal espacio tiene la forma $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^n$ con $\alpha_i \in F$.

# 3 Bases y dimensiones

## 3.1 Combinación lineal

Una combinación lineal de vectores $x_i \in V$ es el vector $\sum_i \alpha_i x_i$ con $\alpha_i \in F$.

## 3.2 Conjunto generador y espacio generado

Sea $U \subset V$, se dice que $U$ es el conjunto generador de $W$, o equivalentemente que $W$ es generado por $U$, si $W$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $U$. Denotamos tal $W$ por span $U$.

Nótese que span $U \subset V$ y es un espacio vectorial.

## 3.3 Subespacio vectorial

Un subespacio vectorial $U$ de $V$ es un espacio vectorial con el mismo campo y operaciones que $V$, tal que $U \subset V$.

#### Ejemplo

span $U$ donde $U \subset V$ es subespacio de $V$. Y $V$ es subespacio de $V$.

## 3.4 Independencia lineal

Un conjunto de vectores $x_i$ es independiente linealmente si cuando una combinación lineal de ellos es 0, todos los coeficientes correspondientes $\alpha_i$ son igual a 0. Es decir

$$\sum_i \alpha_i x_i \implies \alpha_i = 0.$$

#### Ejemplo

El conjunto que consiste de 0 no es linealmente independiente, pues $\alpha 0 = 0$ no implica que $\alpha = 0$.

El conjunto de un elemento distinto de 0, $v$, es linealmente independiente.

## 3.5 Base

Se dice que $B \subset V$ es una base para $V$, si span $B = V$ y los vectores en $B$ son linealmente independientes.

#### Ejemplo

El conjunto $O$ que consiste de 0 genera al espacio vectorial $V$ que consiste de 0. Sin embargo $O$, como ya vimos, no es linealmente independiente, por lo tanto no es base para $V$. (Excluimos casos triviales donde el campo permite que $\{0\}$ sea base. Si es que estos casos existen.)

## 3.6 Dimensión

La dimensión de $V$ es la cardinalidad de una base de $V$. Esto está bien definido pues se puede probar que todas las bases de $V$ tienen la misma cardinalidad.

En el caso de que la base sea finita, la dimensión es el número de vectores en la base. Pero también hay espacios vectoriales con bases numerables, donde las combinaciones lineales en general son una serie.

Como ya hemos dicho antes, el conjunto que consiste de 0 no es base, sin embargo es el único conjunto que genera a $V$ que consiste de 0. Así que por convención decimos que $V$ tiene dimensión 0.

# 4 Mapeos lineales

## 4.1 Motivación

Nótese que la función $f : F^n \to F^m$ dada por $f(x) = Ax$ donde $A \in F^{m\times n}$, tiene las propiedades

1. **Aditividad**

   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in F^n$.

2. **Homogenidad**

   $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para $\alpha \in F$.

Generalizamos estas funciones de la siguiente manera.

## 4.2 Mapeo lineal

Una función $T : V \to W$ con $V, W$ de espacios vectoriales es un mapeo lineal si cumple con las dos condiciones anteriores, reemplazando $V$ por $F^n$ y $W$ por $F^m$. Usualmente, denotamos $T(x)$ por $Tx$ para $x \in V$.

## 4.3 Espacio de mapeos lineales

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de $V$ a $W$. Y denotamos $\mathcal{L}(V)$ a $\mathcal{L}(V, V)$. A estos últimos les llamamos *operadores lineales*.

Se puede demostrar que $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

## 4.4 Kernel

Decimos que el espacio nulo, o kernel, de $T : V \to W$, es el conjunto de $x \in V$ tales que $Tx = 0$. Y lo denotamos por $\ker T$.

Podemos probar que $\ker T$ es un subespacio de $V$: Sea $x \in \text{span } \ker T$, es decir $x = \sum_i \alpha_i x_i$ donde $x_i \in \ker T$, entonces $Tx = \sum_i \alpha_i T x_i = 0$ pues cada $Tx_i = 0$, sigue que $x \in \ker T$.

#### Inyectividad

En general, una función $f$ es inyectiva si $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$.

En particular, podemos probar que un mapeo lineal $T : V \to W$ es inyectivo si $\ker T = \{0\}$: Sean $x \neq y$ vectores de $V$, de manera que $x - y \neq 0$, y supóngase que $\ker T$ consiste de 0. Luego $T(x - y) \neq 0$, pues de lo contrario implicaría $x - y = 0$, de manera que $T(x - y) = Tx - Ty \neq 0$ o $Tx \neq Ty$, y $T$ es inyectiva.

El regreso también es verdadero: Sea $T : V \to W$ inyectiva, la contrapuesta de la definición de inyectividad nos dice que dados $x, y \in V$ $Tx = Ty$ implica $x = y$, esto es $T(x - y) = 0$ implica $x - y = 0$. Luego $\ker T$ consiste de 0.

**Resultado importante:** El mapeo lineal $T$ es inyectivo ssi $\dim \ker T = 0$.

## 4.5 Rango

Dado $T : V \to W$, el rango de $T$ es $T(V) = \{Tx : x \in V\}$. Y lo denotamos por ran $T$.

Se puede demostrar, que análogo a $\ker T$, ran $T$ forma un subespacio de $W$: Sea $y \in$ span ran $T$, entonces $y = \sum_i \beta_i y_i$ donde $y_i = Tx_i$ para algún $x_i \in V$. Luego $y = T(\sum_i \beta_i x_i) = Tx$ para $x = \sum_i \beta_i x_i \in V$; $y \in$ ran $T$.

#### Sobreyectividad

Trivialmente, $T : V \to W$ es sobreyectiva si ran $T = W$.

## 4.6 Importancia del kernel y el rango

Si tenemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, $Ax = 0$, es de interés saber si hay otras soluciones además de $x = 0$. Esto se puede responder si encontramos que la transformación $T_A$ correspondiente a $A$, tiene kernel distinto de $\{0\}$.

Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, es de interés si existen soluciones para $x$, y si existe alguna, si es única. Esto se podrá responder con teoremas a partir de propiedades tanto del rango como del kernel de la transformación $T_A$.

## 4.7 Teorema fundamental de los mapeos lineales

Sea $T : V \to W$ un mapeo lineal de dimensión finita, entonces

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{ran} T.$$

#### Prueba

Formen $u_i$ con $i$ de 1 hasta $n$ una base para $\ker T$, al ser subespacio de $V$, esta base se puede extender a una base $B$ de $V$. Donde $B$ consiste de los $n$ $u_i$, y $v_j$ con $j$ de 1 hasta $m$. De manera que la dimensión de $V$ es $\dim \ker T + m$.

Ahora consideremos $x \in V$, expandido de la base $B$, es decir $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$. Luego $Tx = \sum_{j=1}^m \beta_j T v_j$. Queremos mostrar que $Tv_j$ de 1 hasta $m$ forma una base para ran $T$. Primero, como $x$ era arbitrario, span $\{Tv_j\}_j =$ ran $T$.

Sea $\sum_{j=1}^m \beta_j T v_j = T(\sum_j \beta_j v_j) = 0$. Entonces $\sum_j \beta_j v_j \in \ker T$, y escrito respecto de la base de los $u_i$,

$$\sum_j \beta_j v_j = \sum_i \alpha_i u_i$$

luego

$$\sum_j \beta_j v_j + \sum_i (-\alpha_i) u_i = 0$$

pero como los $v_j$ con los $u_i$ forman una base para $V$, son linealmente independientes y $\beta_j = \alpha_i = 0$.

Hemos probado que $\sum_{j=1}^{m} \beta_j T v_j = 0$ implica $\beta_j = 0$, es decir, la independencia lineal de los $T v_j$. ////

### 4.7.1 Corolario

Un mapeo lineal $T : V \to W$ a un espacio de menor dimensión no es inyectivo.

**Prueba**

$$\begin{aligned} \dim \ker T &= \dim V - \dim \operatorname{ran} T \\ &\geq \dim V - \dim W \\ &> 0 \end{aligned}$$

Como probamos antes, $T$ es inyectiva solo si $\dim \ker T = 0$, por lo tanto no es inyectivo. ////

### 4.7.2 Corolario

Un mapeo lineal $T : V \to W$ a un espacio de dimensión mayor no es sobreyectivo.

**Prueba**

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{ran} T &= \dim V - \dim \ker T \\ &< \dim W - \dim \ker T \\ &\leq \dim W \end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{ran} T \neq W$, es decir, $T$ no es sobreyectivo. ////

## 4.8 Aplicaciones a sistemas de ecuaciones lineales

Supongamos que $Ax = b$ tiene una solución. Entonces podemos saber que la solución es única, si $T_A$ es invertible (inyectiva y sobre), de manera que $T_A^{-1} b = x$ es la única solución.

Se puede probar que si $T_A$ no es invertible, la solución no es única. Por lo cual, usando los dos corolarios anteriores, basta que $m \neq n$ para que la solución no sea única.

Estos dos temas se desarrollarán más adelante en invertibilidad de mapeos lineales.

### 4.8.1 Proposición

Si $Ax = b$ tiene más ecuaciones que variables, existen $b$ para los cuales el sistema no tiene solución.

Esto sigue directamente del segundo corolario al teorema fundamental de los mapeos lineales: Si $A \in F^{m \times n}$ con $m > n$, esto implica que $T_A : F^n \to F^m$ mapea hacía un espacio de mayor dimensión, por lo que no es sobreyectivo. Es decir, existen $b$ para los cuales no hay $x$ tal que $Ax = b$.

# 5 Matrices y mapeos lineales