Notas de Algebra Lineal

Murillo Vega, Gustavo
e-mail: g.murillo24@info.uas.edu.mx

Octubre 2024

1 Introducción

1.1 Definición de matriz

Sea F el campo de los reales o de los complejos, definimos una matriz $A \in F^{m \times n}$ por los puntos 1 a 4.

1. Denotamos sus elementos por $A_{i,j} \in A$ con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$. También, podemos denotar una matriz por sus elementos:

   $(a_{i,j})_{m \times n} \in F^{m \times n}$, donde redundantemente $((a_{i,j})_{m \times n})_{i,j} := a_{i,j}$. Cuando no haya confusión con las dimensiones de la matriz escribimos $(a_{i,j}) := (a_{i,j})_{m \times n}$.

2. Definimos la suma de matrices $A + B = C$ para $A, B \in F^{m \times n}$ como:
$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

3. Se define el producto cA de A por el escalar c como
$$(cA)_{i,j} = cA_{i,j}.$$

4. Como se verá en seguida, es útil definir el producto $AB \in F^{m \times n}$ de las matrices $A \in F^{m \times d}$ y $B \in F^{d \times n}$ de la siguiente manera:
$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k} B_{k,j}.$$

   Nota: Si las dimensiones de A y B son $m \times d$ y $d \times n$, el producto AB tiene dimensiones $m \times n$

5. Si $A \in F^{m \times n}$, definimos la transpuesta A^t de A por ${A^t}_{i,j} = A_{j,i}$. Y la adjunta de A como $A^* = \overline{A^t}$.

6. *Notación de arreglo:* Si $A \in F^{m\times n}$, escribimos

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{bmatrix}.$$

1.2 Identificación de vectores columna y escalares

Un una matriz x de dimensión $m \times 1$, en el contexto de matrices, se dice que x es un vector m-dimensional en $F^{m\times 1}$, y denotamos $x_i := x_{i,j}$ pues j siempre es 1. También identificamos $F^{m\times 1}$ con F^m. Por lo tanto, al hablar de vectores en el contexto de matrices, un vector es una matriz que consiste de una sola columna.

Sea $\alpha \in F^{1\times 1}$, identificamos $\alpha_{i,j}$ con α y F con $F^{1\times 1}$, es decir identificamos α como un escalar.

1.3 Ecuaciones lineales en forma de matriz

El sistema de ecuaciones lineales general es:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j &= b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j &= b_2 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j &= b_m. \end{aligned}$$

Ahora, veamos la forma de la multiplicación de $A = (a_{i,j}) \in F^{m\times n}$ por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in F^{n\times 1}$:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j \end{bmatrix}.$$

Si inspeccionamos esta expresión con la del sistema de ecuaciones lineales, tenemos con $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$, que el mismo sistema de ecuaciones se puede expresar como

$$Ax = b.$$

1.4 Algunos productos usados más adelante

Producto interno

Si x y y son vectores de la misma dimensión, definimos su producto interior (x, y) como

$$(x, y) = x^t \overline{y}$$

o bien

$$(x, y) = y^* x$$

Producto exterior

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$, entonces su producto exterior es

$$xy* = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \ldots & \overline{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\overline{y_1} & \ldots & x_1\overline{y_n} \\ x_2\overline{y_2} & \ldots & x_2\overline{y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n\overline{y_1} & \ldots & x_n\overline{y_n} \end{bmatrix}.$$

2 Espacios Vectoriales

(Usamos la palabra mapeo y transformación de forma intercambiable.)

Ya que vimos que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar con matrices, es de interés saber qué tipo de matrices generan sistemas de ecuaciones con soluciones, solución única o ninguna solución, para esto necesitamos la herramienta de mapeos lineales, que serán análogos a la función que corresponde a la multiplicación por la izquierda de una matriz con un vector columna. Sin embargo, estas son funciones de un espacio vectorial a otro, por lo que primero tenemos que definir qué es un espacio vectorial.

Como nota adicional, diremos que puede ser largamente innecesario para los practicantes de ciencias e ingeniería considerar mapeos sobre espacios vectoriales abstractos, en lugar de las transformaciones dadas por matrices sobre los vectores columna. Esto porque como se puede demostrar, tales ambas transformaciones son equivalentes por medio de isomorfismos.

Sin embargo para desarrollar teoría del álgebra lineal, e incluso modelos dentro de la ciencia y la ingeniería, es prolifero considerar estas transformaciones y espacios vectoriales abstractamente.

2.1 Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial $V(F)$ sobre un campo F, también denotado V cuando el campo es implicado, tiene elementos que cumplen las siguientes propiedades:

1. **Suma y multiplicación escalar**

   Si $x, y \in V(F)$ y $\alpha \in F$, existe $x + \alpha y \in V$. Donde el operador $+$ es conmutativo y asociativo.

2. **Existencia del 0**

   Existe $0 \in V$ tal que si $x \in V$, $x + 0 = x$.

3. **Identidad escalar**

   $1x = x$ para $x \in V$, por virtud de $0 + 1x$.

4. **Existencia del inverso aditivo**

   Si $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.

5. **Asociatividad de vector con escalar**

   Si $\alpha, \beta \in F$ y $x \in V$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. **Distributividad**

   Si $\alpha, \beta \in F$ y $x, y \in V$

   - $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
   - $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores.

Ejemplos

Esto implica que el conjunto de matrices $F^{m\times n}$ con sus operaciones (excluyendo la multiplicación) son un espacio vectorial $V(F)$.

En particular $F^{m\times 1}$ es un espacio vectorial, de donde en ingeniería o ciencias a estos elementos son a los que generalmente se llaman vectores. Notemos la diferencia, que aunque estos son vectores en el sentido del espacio vectorial también son matrices columna (o vectores en el sentido matricial). Pero también, las matrices son vectores en su propio espacio vectorial.

El conjunto de funciones $f : X \to F$ de un conjunto X a un campo F forman un campo vectorial. En particular, los polinomios $P^n(t)$ sobre un campo F y t en un anillo R con identidad (ejemplo, las matrices con todas sus operaciones, o algún campo) son un espacio vectorial. Para aclarar, un polinomio de tal espacio tiene la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^n$ con $\alpha_i \in F$.

3 Bases y dimensiones

3.1 Combinación lineal

Una combinación lineal de vectores $x_i \in V$ es el vector $\sum_i \alpha_i x_i$ con $\alpha_i \in F$.

3.2 Conjunto generador y espacio generado

Sea $U \subset V$, se dice que U es el conjunto generador de W, o equivalentemente que W es generado por U, si W es el conjunto de todas las combinaciones lineales de U. Denotamos tal W por span U.

Nótese que span $U \subset V$ y es un espacio vectorial.

3.3 Subespacio vectorial

Un subespacio vectorial U de V es un espacio vectorial con el mismo campo y operaciones que V, tal que $U \subset V$.

Ejemplo

span U donde $U \subset V$ es subespacio de V. Y V es subespacio de V.

3.4 Independencia lineal

Un conjunto de vectores x_i es independiente linealmente si cuando una combinación lineal de ellos es 0, todos los coeficientes correspondientes α_i son igual a 0. Es decir

$$\sum_i \alpha_i x_i \implies \alpha_i = 0.$$

Ejemplo

El conjunto que consiste de 0 no es linealmente independiente, pues $\alpha 0 = 0$ no implica que $\alpha = 0$.

El conjunto de un elemento distinto de 0, v, es linealmente independiente.

3.4.1 Equivalencia de independencia lineal

Un vector $x \in V$ es combinación lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_n$, si y sólo si $x_1, \ldots, x_n, x$ no son linealmente independientes.

Prueba

Si $x = \sum_i \alpha_i x_i$ (es combinación lineal de los x_i), tenemos

$$\sum_i \alpha_i x_i + (-1)x = 0$$

pero esta combinación lineal igual a 0 tiene un coeficiente que nunca es 0 (i.e -1), luego, $x_1, \ldots, x_n, x$ no son linealmente independientes.

Ahora supongamos que $x_1, \ldots, x_n, x$ son linealmente independientes.

$$\sum_i \alpha_i x_i + \alpha x = 0$$

implica que α_i y α son 0. De manera que

$$\sum_i \alpha_i x_i = x$$

o

$$\sum_i \alpha_i x_i + (-1)x$$

implicaría que $-1 = 0$. Por lo tanto x no es combinación lineal de los x_i. ////

3.4.2 Eliminar un vector de una lista linealmente dependiente

Si $x_1, \ldots, x_n$ es una lista de vectores linealmente dependientes que genera a V, eliminar uno de ellos sigue generando V

Prueba

Por hipótesis todo $x \in V$ puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Por el teorema anterior, x_n puede escribirse como combinación lineal de los $x_1, \ldots, x_{n-1}$ restantes, sea

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j x_j$$

luego

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \alpha_n \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i + \alpha_n \beta_i) x_i. \end{aligned}$$

De manera que $x_1, \ldots, x_{n-1}$ siguen generando V. ////

3.5 Base

Se dice que $B \subset V$ es una base para V, si span $B = V$ y los vectores en B son linealmente independientes.

Ejemplo

El conjunto $O = \{0\}$ genera al espacio vectorial $O(F)$ que consiste de 0. Sin embargo O, como ya vimos, no es linealmente independiente, por lo tanto no es base para $O(F)$. Excluimos el caso en que F consiste de 0, pues entonces $O(F)$ sí es linealmente independiente. Por supuesto, tal campo no lo tenemos en consideración. Comúnmente por F nos referimos a los complejos o los reales, y en raras ocasiones (no en estas notas) a campos finitos o contables.

3.6 Dimensión

La dimensión de V es la cardinalidad de una base de V. Esto está bien definido pues se puede probar que todas las bases de V tienen la misma cardinalidad.

En el caso de que la base sea finita, la dimensión es el número de vectores en la base. Pero también hay espacios vectoriales con bases numerables, donde las combinaciones lineales en general son una serie.

Como ya hemos dicho antes, el conjunto que O consiste de 0 no es base, sin embargo O se genera a sí mismo. Por convención decimos que O tiene dimensión 0, ya que no tiene una base.

3.7 Propiedades importantes de bases y dimensiones

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita distinto de O.

1. Una lista de vectores v_j que genera a V puede reducirse a una base para V.

2. Una lista de vectores v_j linealmente independientes puede extenderse a una base de V.

3. Una lista de $\dim V$ vectores linealmente independientes es una base para V.

Prueba

1. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una lista que genere a V. Supongamos que primero, reducimos la lista de v_i a $m \leq n$ vectores eliminando los ceros. Esta lista sigue generando a V.

Luego, repetimos el siguiente procedimiento n veces: Si v_k es el último vector de la lista reducida, y es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{k-1}$, lo eliminamos y repetimos el proceso con $k \leftarrow k - 1$. De lo contrario, dejamos la lista sin modificar. En el primer caso, la lista sigue generando V por 3.4.2, y obviamente, también en el segundo caso.

Ya que así recorremos toda la lista, ningún vector es combinación lineal del resto, y por 3.4.1 la lista final es linealmente independiente, y sigue generando V por el diseño del procedimiento.

Por lo tanto la lista resultante es una base para V.

2. Sean $v_1, \ldots, v_n$ linealmente independientes, y $w_1, \ldots, w_m$ generadores de V. Luego $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, v_m$ genera a V, y por el punto 1 se puede reducir a una base. En el procedimiento de la prueba de 1, no se eliminan vectores que no sean combinación lineal del resto, por lo tanto ningún v_j se elimina. Sigue que la base tiene todos los v_j.

3. Sean $x_1, \ldots, x_{\dim V}$ vectores linealmente independientes. Por el punto 2, estos se pueden extender a una base de V, $x_1, \ldots, x_m$ con $m \geq \dim V$. Sin embargo una base de V tiene $\dim V$ vectores, por lo tanto $m = \dim V$. Esto quiere decir que la lista de vectores original es una base para V. ////

4 Mapeos lineales

4.1 Motivación

Nótese que la función $f : F^n \to F^m$ dada por $f(x) = Ax$ donde $A \in F^{m\times n}$, tiene las propiedades

1. **Aditividad**

   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in F^n$.

2. **Homogenidad**

   $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para $\alpha \in F$.

Generalizamos estas funciones de la siguiente manera.

4.2 Mapeo lineal

Una función $T : V \to W$ con V, W de espacios vectoriales es un mapeo lineal si cumple con las dos condiciones anteriores, reemplazando V por F^n y W por F^m. Usualmente, denotamos $T(x)$ por Tx para $x \in V$.

4.3 Espacio de mapeos lineales

Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V a W. Y denotamos $\mathcal{L}(V)$ a $\mathcal{L}(V, V)$. A estos últimos les llamamos *operadores lineales*. En particular el operador $I \in \mathcal{L}(V)$ definido por $Ix = x$ se llama la identidad en V.

Se puede demostrar fácilmente que $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

4.4 Kernel

Decimos que el espacio nulo, o kernel, de $T : V \to W$, es el conjunto de $x \in V$ tales que $Tx = 0$. Y lo denotamos por $\ker T$.

Podemos probar que $\ker T$ es un subespacio de V: Sea $x \in \operatorname{span} \ker T$, es decir $x = \sum_i \alpha_i x_i$ donde $x_i \in \ker T$, entonces $Tx = \sum_i \alpha_i Tx_i = 0$ pues cada $Tx_i = 0$, sigue que $x \in \ker T$.

Inyectividad

En general, una función f es inyectiva si $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$.

En particular, podemos probar que un mapeo lineal $T : V \to W$ es inyectivo si $\ker T = \{0\}$: Sean $x \neq y$ vectores de V, de manera que $x - y \neq 0$, y supóngase que $\ker T$ consiste de 0. Luego $T(x - y) \neq 0$, pues de lo contrario implicaría $x - y = 0$, de manera que $T(x - y) = Tx - Ty \neq 0$ o $Tx \neq Ty$, y T es inyectiva.

El regreso también es verdadero: Sea $T : V \to W$ inyectiva, la contrapuesta de la definición de inyectividad nos dice que dados $x, y \in V$ $Tx = Ty$ implica $x = y$, esto es $T(x - y) = 0$ implica $x - y = 0$. Luego $\ker T$ consiste de 0.

Resultado importante: El mapeo lineal T es inyectivo ssi $\dim \ker T = 0$.

4.5 Imagen

Dado $T : V \to W$, la imagen de T es $T(V) = \{Tx : x \in V\}$. Y la denotamos por $\mathrm{im}\, T$.

Se puede demostrar, que análogo a $\ker T$, $\mathrm{im}\, T$ forma un subespacio de W: Sea $y \in \mathrm{span\ im}\, T$, entonces $y = \sum_i \beta_i y_i$ donde $y_i = Tx_i$ para algún $x_i \in V$. Luego $y = T(\sum_i \beta_i x_i) = Tx$ para $x = \sum_i \beta_i x_i \in V$; $y \in \mathrm{im}\, T$.

Sobreyectividad

Trivialmente, $T : V \to W$ es sobreyectiva si $\mathrm{im}\, T = W$.

4.6 Importancia del kernel y la imagen

Si tenemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, $Ax = 0$, es de interés saber si hay otras soluciones además de $x = 0$. Esto se puede responder si encontramos que el mapeo $T_A : F^n \to F^m$ dada por $T_A(x) = Ax$, tiene kernel distinto de $\{0\}$.

Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, es de interés si existen soluciones para x, y si existe alguna, si es única. Esto se podrá responder con teoremas a partir de propiedades tanto la imagen como del kernel de la transformación T_A.

4.7 Teorema fundamental de los mapeos lineales

Sea $T : V \to W$ un mapeo lineal con V de dimensión finita, entonces

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \mathrm{im}\, T.$$

Prueba

Formen u_i con i de 1 hasta n una base para $\ker T$, al ser subespacio de V, esta base se puede extender a una base B de V. Donde B consiste de los n u_i, y v_j con j de 1 hasta m. De manera que la dimensión de V es $\dim \ker T + m$.

Ahora consideremos $x \in V$, expandido de la base B, es decir $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$. Luego $Tx = \sum_{j=1}^m \beta_j T v_j$. Queremos mostrar que Tv_j de 1 hasta m forma una base para $\mathrm{im}\, T$. Primero, como x era arbitrario, $\mathrm{span}\ \{Tv_j\}_j = \mathrm{im}\, T$.

Sea $\sum_{j=1}^m \beta_j T v_j = T(\sum_j \beta_j v_j) = 0$. Entonces $\sum_j \beta_j v_j \in \ker T$, y escrito respecto de la base de los u_i,

$$\sum_j \beta_j v_j = \sum_i \alpha_i u_i$$

luego

$$\sum_j \beta_j v_j + \sum_i (-\alpha_i) u_i = 0$$

pero como los v_j con los u_i forman una base para V, son linealmente independientes y $\beta_j = \alpha_i = 0$.

Hemos probado que $\sum_{j=1}^{m} \beta_j T v_j = 0$ implica $\beta_j = 0$, es decir, la independencia lineal de los Tv_j. ////

4.7.1 Corolario

Un mapeo lineal $T : V \to W$ a un espacio de menor dimensión no es inyectivo.

Prueba

$$\begin{aligned} \dim \ker T &= \dim V - \dim \mathrm{im}\ T \\ &\geq \dim V - \dim W \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como probamos antes, T es inyectiva solo si $\dim \ker T = 0$, por lo tanto no es inyectivo. ////

4.7.2 Corolario

Un mapeo lineal $T : V \to W$ a un espacio de dimensión mayor no es sobreyectivo.

Prueba

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{im}\ T &= \dim V - \dim \ker T \\ &< \dim W - \dim \ker T \\ &\leq \dim W. \end{aligned}$$

Entonces $\mathrm{im}\ T \neq W$, es decir, T no es sobreyectivo. ////

4.8 Invertibilidad

Una función invertible es una función inyectiva y sobreyectiva. Se demuestra en cursos de álgebra superior que esta definición es equivalente a que para $f : A \to B$ exista una función $g : B \to A$ tal que $(f \circ g)(y) = y$ para $y \in B$, y $(g \circ f)(x) = x$ para $x \in A$.

4.8.1 Invertibilidad en espacios de la misma dimensión

Sean $\dim V = \dim W < \infty$.

1. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces inyectividad, invertibilidad y sobreyectividad son equivalentes.

2. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, V)$, $ST = I$ o $TS = I$, implica la invertibilidad de ambos mapeos.

Prueba

1. Si T es inyectiva, $\ker T$ tiene dimensión 0, de manera que $\dim V = \dim \operatorname{im} T$, por hipótesis $\dim V = \dim W$ y $\dim \operatorname{im} T = \dim W$, es decir, T es sobreyectiva, y por lo tanto invertible.

   Si T es sobreyectiva, $\operatorname{im} T = W$, de manera que

   $$\dim V = \dim \ker T + \dim W \implies \dim \ker T = 0.$$

   Es decir, T es inyectiva y por lo tanto invertible.

2. Sea $ST = I$, y $v \in \ker T$, entonces

   $$v = (ST)v = S(Tv) = S0 = 0$$

   por lo que T es inyectiva al ser $\ker T$ de dimensión 0, y por lo tanto invertible.

   Multiplicando ST por T^{-1} por la derecha llegamos a que, $S = T^{-1}$, y por ser la inversa de otra función, es invertible.

   Análogamente si $TS = I$ se sigue el mismo procedimiento con $w \in \ker S$, y se llega a que S es invertible. Luego a que T es invertible. ////

4.8.2 La inversa de la multiplicación

Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, V)$ invertibles, entonces ST es invertible y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Prueba

Existen S^{-1} y T^{-1}, entonces

$$\begin{aligned} ST(T^{-1}S^{-1}) &= S(TT^{-1})S^{-1} \\ &= SIS^{-1} \\ &= SS^{-1} = I. \end{aligned}$$

////

4.8.3 Espacios vectoriales isomorfos

Se dice que un espacio vectorial V es isomorfo a otro W, si existe un mapeo lineal invertible T de V a W. Usualmente en este contexto, a T se le llama isomorfismo de V a W.

4.8.4 La dimensión indica isomorfidad

Dos espacios de dimensión finita son isomorfos si y sólo si son de la misma dimensión.

Prueba

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ un isomorfismo, porque es invertible es inyectivo y sobreyectivo, es decir $\dim \ker T = 0$ y $\dim \mathrm{im}\, T = \dim W$, por el teorema fundamental de mapeos lineales sigue

$$\dim V = \dim W.$$

Ahora si $\dim V = \dim W$, al ser de la misma dimensión, sea n, las bases de V y W se pueden escribir como v_i y w_i respectivamente con i de 1 a n. Entonces existe un $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definido por

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$$

con $c_i \in F$. Este T es claramente sobreyectivo pues Tx es una expansión de la base del contradominio. Entonces es invertible, y V isomorfo a W. ////

5 Matrices

En la introducción mostramos algunas propiedades básicas de las matrices, y su capacidad de expresar sistemas de ecuaciones lineales. A continuación mostraremos más propiedades importantes de matrices.

5.1 Renglones y columnas

La matriz renglón i de la matriz A la denotamos $A_{i,\cdot}$, y la columna j por $A_{\cdot,j}$.

5.2 Teoremas de multiplicación de matrices

Nota

Con la notación anterior de renglones y columnas, podemos escribir el elemento (i, j) de AB como

$$A_{i,\cdot}B_{\cdot,j}.$$

5.2.1 Columna o renglón de una multiplicación

La columna j de la multiplicación de AB es igual a la multiplicación de A por la columna j de B. Es decir $(AB)_{\cdot,j} = AB_{\cdot,j}$. Análogamente se tiene lo mismo para renglones, $(AB)_{i,\cdot} = A_{i,\cdot}B$.

Prueba

El elemento i de $(AB)_{\cdot,j}$ es $A_{i,\cdot}B_{\cdot,j}$. El elemento i de $AB_{\cdot,j}$ es igualmente, $A_{i,\cdot}B_{\cdot,j}$. Análogamente para renglones. ////

5.2.2 La multiplicación de una matriz por un vector (columna)

Sea $A \in F^{m\times n}$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in F^{n\times 1}$, entonces

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} A_{\cdot,j}x_j.$$

Es decir, Ax es la combinación lineal de las columnas de A con los elementos de x como coeficientes.

Prueba

El elemento i de Ax es

$$A_{i,\cdot}x = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j$$

mientras que el elemento i de $\sum_{j=1}^{n} A_{\cdot,j}x_j$ es claramente también

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j.$$

////

5.2.3 Multiplicación de matrices como combinación lineal de columnas o renglones

1. La columna j de AB es la combinación lineal de columnas de A con los elementos de la columna j de B como coeficientes.

2. El renglón i de AB es la combinación lineal de renglones de B con los elementos del renglón i de A como coeficientes.

Prueba

1. $(AB)_{\cdot,j}$ es $AB_{\cdot,j}$ como ya probamos, a su vez esto es un producto de matriz por columna, entonces es la combinación lineal de columnas de A con los elementos de la columna $B_{\cdot,j}$ como coeficientes.

2. $(AB)_{i,\cdot}$ es $A_{i,\cdot}B$. Su transpuesta es $B^t {A_{i,\cdot}}^t$, donde ${A_{i,\cdot}}^t$ es una columna, por lo tanto $B^t {A_{i,\cdot}}^t$ es la combinación lineal de columnas de B^t con elementos de ${A_{i,\cdot}}^t$ como coeficientes. La transpuesta de la transpuesta, es el renglón original $(AB)_{i,\cdot}$. Entonces $(AB)_{i,\cdot}$ es la combinación lineal de renglones de B (cuyas transpuestas eran las columnas en B^t) con coeficientes del renglón $A_{i,\cdot}$. ////

5.3 Factorización columna-renglón y rango de una matriz

5.3.1 Rango de columnas y renglones

El rango de las columnas de una matriz $A \in F^{m\times n}$ es la dimensión de span $\{A_{\cdot,j}\}_{j=1}^{n}$ es decir, del espacio generado por las columnas de A.

Análogamente se define el rango de renglones de A como la dimensión del espacio generado por los renglones de A.

5.3.2 Factorización columna-renglón

Sea $A \in F^{m\times n}$ con rango de columnas $p \geq 1$, entonces existen $C \in F^{m\times p}$ y $R \in F^{p\times n}$ tal que $A = CR$.

Prueba

Sea C la matriz cuyas columnas corresponden a una base del espacio de columnas de A, como el rango de columnas de A es p, C es $m \times p$.

Cada columna j de A es una combinación lineal de columnas de C pues estas son básicas para el espacio de columnas de A. Sean los coeficientes de tal combinación lineal, los elementos de las columna j de la matriz R, entonces R es $p \times n$.

Por sus dimensiones existe CR de dimensión $m\times n$, cuya columna j es $CR_{\cdot,j}$, luego esta columna es combinación lineal de columnas de C con coeficientes de la columna j de R, que como dijimos, son exactamente los coeficientes para que tal combinación lineal sea la columna j de A. ////

5.3.3 Rango de columnas es el rango de renglones

Si $A \in F^{m \times n}$, su rango de columnas es igual a su rango de renglones.

Prueba

Sea $p \geq 1$ el rango de columnas de A, y factorizamos A por columna-renglón CR. Como cada renglón de A es combinación lineal de los renglones de R, y R tiene p renglones, el rango de renglones de A es a lo más p. Es decir, el rango de renglones es menor o igual que el rango de columnas.

De la misma manera si $q \geq 1$ es el rango de renglones, en A^t este es su rango de columnas. Y por el argumento anterior, su rango de renglones es menor o igual que su rango de columnas.

En la matriz original, esto es que el rango de columnas es menor o igual que el rango de renglones. Probando para el caso que el rango de columnas y el rango de renglones es al menos 1, estos son iguales.

Si el rango de columnas es 0, este es el caso en que el espacio de columnas no tiene base, pero es generado por $\{0\}$, de manera que todas las columnas son 0, y el rango de renglones también es 0. Análogamente cuando el rango de renglones es 0. ////

5.3.4 Rango

Finalmente, podemos definir el rango de una matriz como el rango de columnas, pues este es igual al rango de renglones.

6 Relación de matrices y mapeos lineales

6.1 Matriz de un mapeo lineal

Dado un mapeo lineal $T : V \to W$ y bases $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ $C = \{c_j\}_{j=1}^m$, definimos la matriz $A \in F^{m \times n}$ tal que

$$Tb_j = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j} c_i$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Dicho de otra forma, los elementos de $A_{\cdot,j}$ son los coeficientes de Tb_j expandido en la base C de W. Y denotamos a A, por $\mathcal{M}(T, B, C)$, o cuando no haya confusión con las bases, $\mathcal{M}(T)$.

6.1.1 Ejemplo

Haremos notar, que encontrar la matriz correspondiente a un mapeo lineal es un cuanto confuso, pues al expandir un vector del contradominio, tenemos una suma donde los coeficientes de la columna se encuentran en forma horizontal, sugiriendo erróneamente que corresponden a un renglón.

Sea $T : F^3 \to F^2$ dada con las bases estándar para el dominio y contradominio por $T(x, y, z)^t = (x, y + z)^t$, tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera que

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.2 Matriz de la multiplicación de mapeos lineales

Sean B, D, y C bases para V, U, y W, $T \in \mathcal{L}(V, U)$, $S \in \mathcal{L}(U, W)$, entonces

$$\mathcal{M}(ST, B, C) = \mathcal{M}(S, D, C)\mathcal{M}(T, B, D).$$

Prueba

Sean v_i, u_k y w_j elementos de las bases B, D, y C respectivamente, $X = \mathcal{M}(S, D, C)$, y $Y = \mathcal{M}(T, B, D)$.

$\mathcal{M}(ST, B, C)$ está dada por:

$$\begin{aligned} STv_i &= S\left(\sum_k X_{i,k}u_k\right) \\ &= \sum_k X_{i,k}Su_k \\ &= \sum_k X_{i,k}\sum_j Y_{k,j}w_j \\ &= \sum_j \left(\sum_k X_{i,k}Y_{k,j}\right) w_j. \end{aligned}$$

Donde $\sum_k X_{i,k}Y_{k,j} = (\mathcal{M}(S, D, C)\mathcal{M}(T, B, D))_{i,j}$. De aquí que la matriz de ST es la matriz de S por la matriz de T de acuerdo a sus respectivas bases.

////

6.3 El espacio de mapeos lineales y de matrices son isomorfos

Sea $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ una base para V y $C = \{w_j\}_{j=1}^m$ una base para W. Entonces $\mathcal{M}(\cdot, B, C)$ (que denotaremos por $\mathcal{M}$) es un isomorfismo entre $\mathcal{L}(V, W)$, y $F^{m\times n}$.

Prueba

Es trivial que $\mathcal{M}$ es lineal, solo falta probar que es inyectivo y sobreyectivo.

Sea $T \in \ker \mathcal{M}$, es decir $\mathcal{M}T$ es la matriz 0. Luego por la definición de $\mathcal{M}T$, $Tv_i = 0$. Por lo que en general $Tx = 0$, y $T = 0$. Entonces $\dim \ker \mathcal{M} = 0$, y $\mathcal{M}$ es inyectivo.

Sea $A \in F^{m\times n}$, existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definido por

$$Tv_j = \sum_{i=1}^m A_{i,j}w_j.$$

De manera que $A = \mathcal{M}T$ y por lo tanto $\mathcal{M}$ es sobreyectivo. ////

6.3.1 Corolario: Dimensión del espacio de mapeos lineales

$\mathcal{L}(V, W)$ con V de dimensión n y W de dimensión m ambas finitas, tiene dimensión nm por virtud de que es isomorfo a $F^{n\times m}$. Dicho independientemente de las bases

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \times \dim W.$$

6.4 La matriz de un vector

Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ base de V y $x = \sum_i \alpha_i v_i$, entonces se define la matriz de x con esta base por la matriz $n \times 1$ por

$$\mathcal{M}x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

6.5 La columna de la matriz de una transformación

Sea $\mathcal{L}(V, W)$ donde v_1 hasta v_n son una base para V y w_1 a w_m una base para W, entonces

$$\mathcal{M}(T)_{\cdot,j} = \mathcal{M}(Tv_j).$$

Prueba

Sea $A = \mathcal{M}T$, tenemos

$$Tv_j = \sum_{i=1}^m A_{i,j} w_i$$

$$\mathcal{M}(Tv_j) = \begin{bmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{m,j} \end{bmatrix} = A_{\cdot,j}.$$

////

6.6 Mapeos lineales actúan como matrices

Sea T un mapeo lineal con dominio de base v_j y dimensión n, contradominio de base w_i y dimensión m, entonces

$$\mathcal{M}(Tx) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(x).$$

Prueba

Primero, sea x expresado en la base v_j con coeficientes α_j, entonces

$$Tx = \sum_j \alpha_j T v_j$$

luego

$$\mathcal{M}(Tx) = \sum_j \alpha_j \mathcal{M}(Tv_j)$$

porque $\mathcal{M}$ es lineal. Como probamos antes $M(Tv_i) = M(T)_{.,i}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(Tx) &= \sum_j \alpha_j \mathcal{M}(T)_{.,j} \\ &= \mathcal{M}(T)\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} \\ &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(x).\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad está dada porque la combinación lineal de columnas de una matriz es la multiplicación de una matriz por la columna con los coeficientes de la combinación lineal por elementos. ////

6.6.1 Nota

Recordemos que $\mathcal{M}(T)$ depende de las bases del dominio y contradominio de T. Mientras que $M(x)$ depende de la base de V donde está x.

6.7 El rango de una matriz de un mapeo lineal

Sea T un mapeo lineal con dominio y contradominio finito, entonces para cualquier selección de bases $\mathcal{M}(T)$ tiene rango igual a $\dim \operatorname{im} T$.

Prueba

El mapeo lineal $y \mapsto \mathcal{M}y$ con $y \in \operatorname{im} T$ es un isomorfismo entre $\operatorname{im} T$ y el espacio de columnas de $\mathcal{M}(T)$, pues $\mathcal{M}y = \mathcal{M}(Tx) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(x)$ para algún $x \in V$. Y como ya mostramos, tenemos que $\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(x)$ está en el espacio de columnas de $\mathcal{M}(T)$. Sigue que $\dim \operatorname{im} T$ es el rango de columnas de $\mathcal{M}(T)$. ////

6.8 La matriz identidad

I_n (o simplemente I si no hay confusión) es la matriz identidad de dimensiones $n \times n$ definida por $I_{i,j} = \delta_{i,j}$ donde $\delta_{i,j}$ es 0 si $i \neq j$ y 1 de otra manera.

6.9 Inversa de una matriz

Se dice que una matriz A $m \times n$ es invertible si existe una matriz B $n \times m$ tal que $AB = I_m$ y $BA = I_n$.

6.9.1 Propiedades de una matriz invertible

Análogamente a las transformaciones invertibles:

1. Una matriz invertible es cuadrada.
2. Su inversa es única y denotada por A^{-1}.
3. Si A y B son invertibles de la misma dimensión, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Prueba

1. Sea A $m \times n$ invertible con B como en la definición, y sean $T = x \mapsto Ax$ y $S = y \mapsto By$ con $x \in F^n$ y $y \in F^m$. Tenemos

$$(TS)y = ABy = y$$
$$(ST)x = BAx = x.$$

Entonces $S = T^{-1}$, de manera que T es un isomorfismo entre F^n y F^m, por lo tanto $n = m$.

2. Como se tiene que $S = T^{-1}$ es único para T, $B = \mathcal{M}(S)$ también es único para A.

3. Sean S y T como en 1, por la proposición de la inversa de la multiplicación de mapeos lineales, sigue que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ////

6.10 Matriz de la identidad en distintas bases

Sean B y C distintas bases de V, entonces $\mathcal{M}(I, B, C)$ es la inversa de $\mathcal{M}(I, C, B)$.

Prueba

Por como es la matriz de una multiplicación de transformaciones, tomando en cuenta sus bases, tenemos

$$\mathcal{M}(I) = \mathcal{M}(II, C, C) = \mathcal{M}(I, B, C)\mathcal{M}(I, C, B)$$

y

$$\mathcal{M}(I) = \mathcal{M}(II, B, B) = \mathcal{M}(I, C, B)\mathcal{M}(I, B, C).$$

Donde la primer igualdad en cada ecuación viene de que la matriz de la identidad de una base a la misma base es meramente la matriz identidad. ////

6.11 Matriz de cambio de bases

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, y v_i, u_i bases de V. Entonces si $A = \mathcal{M}(T, v_i)$, $B = \mathcal{M}(T, u_i)$ entonces

$$A = \mathcal{M}(I, u_i, v_i) B \mathcal{M}(I, v_i, u_i).$$

Prueba

Simplemente se factoriza A usando que $T = TI$, luego se factoriza el primer factor resultante $\mathcal{M}(T, u_i, v_i)$ usando que $T = IT$.

$$\begin{aligned}
A &= \mathcal{M}(TI, v_i) \\
&= \mathcal{M}(T, u_i, v_i)\mathcal{M}(I, v_i, u_i) \\
&= \mathcal{M}(IT, u_i, v_i)\mathcal{M}(I, v_i, u_i) \\
&= \left(\mathcal{M}(I, u_i, v_i)\mathcal{M}(T, u_i)\right)\mathcal{M}(I, v_i, u_i) \\
&= \mathcal{M}(I, u_i, v_i) B \mathcal{M}(I, v_i, u_i).
\end{aligned}$$

////

6.12 La matriz de la inversa de un operador lineal

Sea T un operador lineal invertible en V, con base v_i y dimensión n. Entonces $\mathcal{M}(T^{-1}) = M(T)^{-1}$.

Prueba

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(I) &= \mathcal{M}(TT^{-1}) \\
&= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(T^{-1}).
\end{aligned}$$

De donde multiplicando por $M(T)^{-1}$ por la izquierda, directamente sigue el resultado. ////

6.13 Invertibilidad de los factores de un operador lineal

Sean S y T operadores lineales sobre V de dimensión finita, entonces ST es invertible ssi S y T son invertible.

Prueba

Ya probamos ST invertible $\Longleftarrow$ S y T invertibles.

Ahora supongamos que ST es invertible.

S **es sobreyectiva:** Si S no fuese sobreyectiva, ST tampoco lo sería y tampoco sería invertible. Por lo tanto S es sobreyectiva.

T **es inyectiva:** Si T no fuese inyectiva, existen $x \neq y$ tal que $Tx = Ty$, luego $STx = STy$, y ST no sería inyectiva ni invertible. Por lo tanto T es inyectiva.

Como el espacio V es de dimensión finita y los mapeos lineales son operadores, sobreyectividad o inyectividad implican invertibilidad, así S y T son invertibles. ////

7 Espacios cocientes

7.1 Traslación de un subconjunto

Definimos la traslación de un conjunto $U \subset V$ por $x \in V$ como el conjunto $x + U := \{x + u : u \in U\}$.

Llamamos a x en $x + U$ el representante de la traslación. Puede haber distintos representantes que generen la misma traslación.

7.2 Definición de espacio cociente

Si U es un subespacio de V, definimos el espacio cociente V/U como el conjunto de todas las traslaciones de U:

$$V/U = \{x + U : x \in V\}.$$

7.3 Una traslación es igual a otra o ajenos

Sean v y w en V, y U un subespacio de V. Entonces

$$v - w \in U \iff v + U = w + V \iff (v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset.$$

Prueba

La demostración es un ejercicio elemental de álgebra y conjuntos.

De aquí en adelante U es un subespacio de V, y los elementos en minúsculas son elementos cualesquiera de V

7.4 Equivalencia

Como acabamos de demostrar $v - w \in U \iff v + U = w + U$, así que definimos la relación de equivalencia $\equiv$ por $v \equiv w \iff v - w \in U$.

Queremos formar un espacio vectorial sobre el espacio cociente. Para esto tenemos que definir correctamente la suma y multiplicación por escalar.

7.5 Suma

Sean $v \equiv x$ y $w \equiv y$, entonces $v + w \equiv x + y$.

Prueba

Por definición tenemos $v - x \in U$ y $w - y \in U$. Luego

$$(v + w) - (x + y) = (v - x) + (w - y) \in U$$

por cerradura del subespacio. ////

Esto demuestra que la suma de traslaciones no depende de su representante.

De manera que definimos $(x + U) + (y + U) := (x + y) + U$ para cualquier x, y.

7.6 Multiplicación escalar

Sea $v \equiv x$ y λ un escalar, entonces $\lambda v \equiv \lambda x$.

Prueba

$v - x \in U$ entonces

$$\lambda v - \lambda x = \lambda(v - x) \in U$$

por cerradura de U. ////

Así que definimos $\lambda(v + U) := \lambda v + U$.

Ambas operaciones hacen que V/U sea un espacio vectorial. Hacemos notar que $0 + U$ es 0 en este espacio vectorial.

7.7 Mapeo cociente

El mapeo cociente $\pi : V \to V/U$ está definido por

$$\pi(x) = x + U$$

y es lineal.

7.8 Dimensión del espacio cociente

Si V es de dimensión finita,

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Prueba

Tenemos que $x \in \ker \pi \iff x + U = 0 + U \iff x \in U$, donde la segunda equivalencia está dada por 7.3. De manera que $\ker \pi = U$. Como $\pi : V \to V/U$ y V es de dimensión finita, por el teorema fundamental de mapeos lineales

$$\dim V = \dim \ker \pi + \dim \mathrm{im}\ \pi$$

como $\mathrm{im}\ \pi = V/U$ y $\ker \pi = U$ sigue el resultado esperado

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

////

Para la siguiente definición hacemos notar que para $T \in \mathcal{L}(V, W)$ si $x + \ker T = y + \ker T$, por 7.3 tenemos $x - y \in \ker T$ y por lo tanto $Tx = Ty$.

7.9 Mapeo inducido por el kernel de un mapeo lineal

Dado T definimos $\widetilde{T} : V/\ker T \to W$ por

$$\widetilde{T}(x + \ker T) = Tx$$

y notamos que $\widetilde{T}$ es lineal.

Una propiedad se hace inmediatamente aparente.

$$x \in \ker T \iff x + \ker T \in \ker \widetilde{T}.$$

La suficiencia viene de 7.3. La necesidad, porque si $x + \ker T \in \ker \widetilde{T}$, entonces

$$\widetilde{T}(x + \ker T) = Tx = 0.$$

De la necesidad tenemos que $x + \ker T \in \ker \widetilde{T}$ implica que $x \in \ker T$, es decir $x + \ker T = 0 + \ker T$. De manera que $\ker \widetilde{T} = \{0 + \ker T\}$, y $\widetilde{T}$ es inyectiva.

7.9.1 Más propiedades de este mapeo

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ entonces

1. $\widetilde{T} \circ \pi = T$, donde $\pi : V/\ker T \to W$ es el mapeo cociente.
2. $\widetilde{T}$ es inyectiva.
3. $\operatorname{im} \widetilde{T} = \operatorname{im} T$.

Prueba

1. $(\widetilde{T} \circ \pi)x = \widetilde{T}(x + \ker T) = Tx$
2. Lo probamos anteriormente.
3. Por definición.

////

Por consecuencia de punto 2 y 3, $V/\ker T$ y $\operatorname{im} T$ son isomorfos.

8 Dualidad

8.1 Funcional

Un funcional lineal en V, o simplemente funcional por el contexto de álgebra lineal, es un mapeo lineal V a su campo. Es decir, un elemento de $\mathcal{L}(V, F)$.

8.2 Espacio dual

El espacio dual de V es definido por $\mathcal{L}(V, F)$. Es decir, es el espacio de funcionales en V.

8.3 Dimensión del espacio dual

$\dim V' = \dim V$.

Prueba

$\dim V' = \dim \mathcal{L}(V, F) = \dim V \dim F = \dim V$.

8.4 Base dual

Sea v_j una base para V de dimensión finita, la base dual de v_j son los elementos $f_j \in V'$ donde

$$f_j(v_i) = \delta_{i,j}$$

es decir, $f_j(v_i) = 1$ para $i = j$ y 0 de otra forma.

8.4.1 Ejemplo

Sea f_j el funcional en F^n que escoge la coordenada j del vector (x_i), es decir

$$f_j((x_i)) = x_j.$$

Si e_i es la base estándar de F^n

$$f_j(e_i) = \delta_{i,j}$$

por lo que f_j forma la base dual de e_i.

8.4.2 Propiedad inmediata

Como los elementos de la base dual son lineales tenemos para $x = \sum_i \alpha_i v_i$ donde v_i es una base para V,

$$f_j(x) = \sum_i \alpha_i f_j(v_i) = \alpha_j.$$

De manera que en general, los elementos f_j de la base dual seleccionan la coordenada j de x con respecto a v_i. Por lo que el ejemplo anterior no era una coincidencia.

De esto, tenemos directamente siguiente resultado.

8.5 Los funcionales de la base dual mapean a coordenadas de un vector

Sea $x \in V$ con v_i como base y f_j la base dual, entonces

$$x = \sum_i f_i(x) v_i.$$

8.6 La base dual es una base para el espacio dual

Sea V de dimensión finita. Entonces la base dual es una base para V'.

Prueba

Sea v_i una base para V, f_i la base dual.

Si $\sum_i \alpha_i f_i = 0$, es decir para cualquier $x = \sum_j \beta_j v_j \in V$ se tiene

$$\sum_i \alpha_i f_i(x) = \sum_i \alpha_i \beta_i = 0.$$

En especial si se escoge $x = v_k$,

$$\sum_i \alpha_i f_i(v_k) = \alpha_k = 0.$$

De manera que f_i son linealmente independientes.

La dimensión de V' es igual al número de vectores f_i, y por ser linealmente independientes, por 3.7, son base de V'. ////

8.7 El mapeo dual

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. El mapeo dual $T' \in \mathcal{L}(W', V')$, está definido por

$$T'(f) = f \circ T$$

para todo $f \in W'$.

Por ser composición de mapeos lineales, $T'(f)$ es lineal, y siguiendo el mapeo de espacios, $T'(f) : V \to W \to F$, se tiene que $T'(f) \in V'$.

8.7.1 Ejemplo

Sea $D \in \mathcal{L}(P(R))$ el operador de diferenciación en el espacio de polinomios. Y sea f el funcional dado por $f(p) = p(3)$.

Entonces

$$\begin{aligned} D'(f)(p) &= (f \circ D)(p) \\ &= f(Dp) \\ &= (Dp)(3). \end{aligned}$$

8.8 Propiedades algebraicas del mapeo dual

Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in F$. Entonces

1. $(S+T)' = S' + T'$ para $S \in \mathcal{L}(V, W)$.
2. $(\lambda T)' = \lambda T'$.
3. $(ST)' = T'S'$ para $S \in \mathcal{L}(W, U)$.

Proof

Punto 1 y 2 son computaciones directas.

Sea $f \in U'$ (el dominio de $(ST)'$). Entonces

$$(ST)'(f) = f \circ (ST) = (f \circ S)T.$$

Mientras que $T'S'$ también tiene dominio U', y podemos usar la misma $f \in U'$ en $T'S'$:

$$(T'S')(f) = T'(S'(f)) = T'(f \circ S) = (f \circ S) \circ T = (f \circ S)T.$$

////

8.9 Kernel e imagen del mapeo dual

8.9.1 Aniquilador de un subconjunto

Para $U \subset V$, el aniquilador $U^0 \subset V'$ de U se define por

$$U^0 = \{f \in V' : f(U) = \{0\}\}.$$

8.9.2 Ejemplo

Sea e_1, e_2 la base estándar para los pares de reales, R^2, y sea f_1, f_2 la base dual.

Sea $U = \text{span}\,\{e_1\}$, sus elementos son de la forma $(\alpha, 0)$. Un funcional $f \in (R^2)'$ está dado por

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

Entonces para $u \in U$

$$f(u) = \lambda_1 f_1(u) + \lambda_2 f_2(u) = \lambda_1 \alpha.$$

De manera que los funcionales de U que mapean a 0 tienen $\lambda_1 = 0$. Luego U^0 consiste de los $f = \lambda f_2$.

8.9.3 Los aniquiladores son subespacios del espacio dual

Sea $U \subset V$, entonces U^0 es un subespacio de V'.

Prueba

Es trivial que $0 \in V'$ está en U.

Sea $f, g \in U^0$ y $\lambda \in F$. Para $u \in U$ tenemos

$$(f + \lambda g)(u) = f(u) + \lambda g(u) = 0$$

por lo tanto $f + \lambda g \in U^0$. ////

8.9.4 Dimensión del aniquilador

Sea V de dimensión finita y U un subespacio, entonces

$$\dim V = \dim U^0 + \dim U.$$

Prueba

Sea I en $\mathcal{L}(U, V)$ definido por $I(u) = u$ para $u \in U$. Entonces $I' \in \mathcal{L}(V', U')$.

Por el teorema fundamental de mapeos lineales tenemos

$$\dim V' = \dim \ker I' + \dim \text{im } I'. \tag{1}$$

Sustituiremos términos de esta ecuación por términos equivalentes.

1. $\ker I' = U^0$:

$$\begin{aligned} \ker I' &= \{f \in V' : I'(f) = 0\} \\ &= \{f \in V' : f \circ I = 0\} \\ &= \{f \in V' : f(U) = \{0\}\} \\ &= U^0. \end{aligned}$$

2. $\text{im } I' = U'$:

$$\begin{aligned} \text{im } I' &= I'(V') \\ &= \{f \circ I : f \in V'\} \\ &= \{f : f \in U'\} \\ &= U'. \end{aligned}$$

Sustituyendo con los puntos 1 y 2 en (1), y usando que $\dim V' = \dim V$ y $\dim U' = \dim U$, tenemos

$$\dim V = \dim U^0 + \dim U.$$

////

Lo siguiente es consecuencia directa del teorema anterior.

8.9.5 Condiciones que determinan el aniquilador

Sea V de dimensión finita y U un subespacio.

1. $U^0 = \{0\} \iff U = V$
2. $U^0 = V' \iff U = \{0\}$

8.10 El kernel de la transformación dual

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

1. $\ker T' = (\text{im } T)^0$.
2. Si V y W son de dimensión finita, $\dim \ker T' = \dim \ker T + \dim W - \dim V$.

Prueba

1. Sea $f \in \ker T'$, entonces $T'(f) = f \circ T = 0$. Esto quiere decir que $f(\text{im } T) = \{0\}$, por definición $f \in (\text{im } T)^0$. De manera que $\ker T' \subset (\text{im } T)^0$.

Como T es sobreyectiva limitando W a im T, existe siempre $v \in V$ tal que $w = Tv$ para $w \in W$. Entonces $f \in (\text{im } T)^0$ es equivalente a que $f \circ T = 0$, luego $f \in \ker T'$.

2. Tenemos

$$\begin{aligned}
\dim \ker T' &= \dim(\text{im } T)^0 \\
&= \dim W - \dim \text{im } T \\
&= \dim W - (\dim V - \dim \ker T).
\end{aligned}$$

Donde la primer igualdad viene dada por el punto 1, la segunda por el teorema de dimensión del aniquilador, y la última por el teorema fundamental de mapeos lineales. ////

Referencias

1. Linear Algebra Done Right 4ta edición, por Axler, Sheldon.