1、试将下列问题改写成线性规划问题的标准形式。

$$\max\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$s.t.\ \begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\ x_i\ge 0\quad i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

2、若如下线性规划问题：

$\{\max S=C_1X,AX=b,X\ge 0\}$的最优解$X^1$，

$\{\max S=C_2X,AX=b,X\ge 0\}$的最优解是$X^2$，

证明：$\left(C^2-C^1\right)\left(X^2-X^1\right)\ge 0$

3、写出下列问题的标准型形式，并求对偶问题

(1) $\min z=2x_1+2x_2+4x_3$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3\ge 2\\ 3x_1+x_2+7x_3\le 3\\ x_1+4x_2+6x_3\le 5\\ x_1、x_2、x_3\ge 0\end{cases}$$

(2) $\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3-3x_4=5\\ 6x_1+7x_2+3x_3-5x_4\ge 8\\ 12x_1-9x_2-9x_3+9x_4\le 20\\ x_1、x_2\ge 0,\ x_3\le 0\end{cases}$$

(3) $\max S=5x_1+6x_2$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=5\\ -x_1+5x_2\ge 3\\ x_2\ge 0\end{cases}$$

(4) $\max S=x_1+x_2$

$$\begin{cases}2x_1+x_2=5\\ 3x_1-x_2=6\\ x_1、x_2\quad \text{无符号限制}\end{cases}$$

4、请用单纯法求解下列 LP 问题的最优解

$$\max\quad z=6x_1+2x_2+12x_3$$

$$s.t.\begin{cases}4x_1+x_2+3x_3\le 24\\ 2x_1+6x_2+3x_3\le 30\\ x_1,\quad x_2,\quad x_3\ge 0\end{cases}$$

5、试用对偶理论证明该问题的最优值不超过 25.

$$\max w=4x_1+7x_2+2x_3$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le 10\\ 2x_1+3x_2+3x_3\le 10\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

6、试用对偶单纯形法求解下列问题的最优解

$$
\begin{aligned}
&\max w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
&s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\
&\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4 \\
&\quad x_i \ge 0, i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

7、对于下列线性规划原问题，已知其对偶问题的最优解为 y1=1.2，y2=0.2
试用对偶理论求出原问题的最优解.

$$
\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\
x_1, \cdots, x_4 \ge 0
\end{cases}
$$

8、试不用求最优解，用单纯形法的相关性质，验证 X=(0,2,0,0,2)T 是否是以下线性规划问题的最优解。

max z = x1 + 4x2 + 3x3
2x1 + 2x2 + x3 ≤ 4
x1 + 2x2 + 2x3 ≤6
x1, x2, x3 ≥ 0