Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости»

Студентка 315 группы
А. Б. Толеутаева

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$x + \dot{x} + 2x + x\sin\left(x^2\right) - 2x^2\cos(x) = u$$

где $x, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию reachset(alpha, t), которая по заданным параметрам $\alpha > 0, t \geq t_0$ рассчитывает приближённо множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, plot). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию reachsetdyn(alpha, t1, t2, N, filename), которая, используя функцию reachset(alpha, t), строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)i}{N}$, $i = \overline{0, N}$. Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео-файла filename.avi. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Теоретические выкладки

Преобразуем исходную систему ОДУ таким образом, чтобы в левой части была производная первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_2 - 2x_1 - x_1 \sin\left(x_1^2\right) + 2x_1^2 \cos(x_1), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Запишем определения и теоремы, которыми будем пользоваться при решении задачи.

Множеством достижимости $X[T]$ в момент времени T будем называть множество всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^2$, в которые можно попасть на отрезке $[t_0, T]$ из начальной точки0 по решениями системы при всевозможных допустимых кусочно-непрерывных управлениях $u(t)$.

Допустимым управлением будем называть кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, удовлетворяющую условию $u(t) \in [-\alpha, \alpha] \forall t$.

Функция Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(t, \psi, x, u) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_2 - 2x_1 - x_1 \sin\left(x_1^2\right) + 2x_1^2 \cos(x_1)) + \psi_2 u,$$

где $\psi(t) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема (частный случай принципа максимума Понтрягина для исследования границы множества достижимости) [1].
Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана система:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $f(x, u)$ и $\frac{\delta f}{\delta x}(x, u)$ — непрерывные функции в $\mathbb{R}^{n+m}$.
Пусть некоторому допустимому управлению u^* соответствует траектория x^* с концом $x^*(T)$ на границе множества достижимости. Тогда $\exists$ ненулевая вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$:
$\psi(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Пусть $\{x^*, u^*\}$ — оптимальная пара. Тогда $\exists \tilde{\psi}^* : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ такая, что выполняются условия:

1. **для $\mathcal{H}(t, x, \psi, u) = \psi_0 f_0 + \langle \psi, f(t, x, u) \rangle = \langle \tilde{\psi}, \tilde{f}(t, x, u) \rangle$ — функция Гамильтона-Понтрягина**
$$\dot{\psi} = \left.\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta}\right|_{x = x^*(t) u = u^*(t)}$$
2. $\sup\limits_{u(.) \in \mathcal{P}} (H(t, x, \psi, u)) = (H(t, x^*(t), \psi(t), u^*(t))) = M(\psi, x)$ **почти всюду на $[t_0, T]$**
3. **Константа $M(\psi, x) \geq 0$.**

Сопряженная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_1} = 2\psi_2 + \sin\left(x_1^2\right) + 2x_1^2 \cos\left(x_1^2\right) + 2x_1^2 \sin(x_1) - 4x_1 \cos(x_1), \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_2} = \psi_2 - \psi_1. \end{cases}$$

Из условий трансверсальности $\psi(t_0)$ коллинеарна нормали множества $\mathcal{X}_0$, $-\psi(t_1)$ коллинеарна нормали множества $\mathcal{X}_1$ (или обобщенные нормали в случае излома границы). Первое условие дает класс управлений, выраженных через ψ, подозрительных н оптимальность.

Теорема о единственности оптимального управления. [2]
Пусть точка $x(t_1)$ конечного множества $\mathcal{X}_1$ достижима из точки $x(t_0)$ начального множества $\mathcal{X}_0$. Тогда линейная задача быстродействия имеет единственное решение.

Теорема о конечном числе нулей.
Пусть $u(t)$ — оптимальное управление для системы, тогда $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. От противного. Если на рассматриваемом отрезке времени $[\tau_0, \tau] \subset [t_0, t]$ сопряженная переменная $\psi_2(t) = 0$ На континуальном множестве.

$$\begin{cases} \psi_2(t) = 0 \\ \dot{\psi}_2(t) = 0 = -\psi_1(t) + \psi_2(t) \end{cases} \implies \psi_1(t) = 0 \forall t \in [\tau_0, \tau].$$

По принципу максимума Понтрягина, такая ситуация невозможна, так как вектор $\psi(t)$ нулевой. $\square$

Теорема о чередовании нулей.
Пусть $(x(.), u(.))$ — оптимальная пара для системы с временем быстродействия T, $\psi(.) = (\psi_1(.), \psi_2(.))$ — решение сопряженной системы. Тогда $\forall \tau_1, \tau_2$: $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ верны утверждения:

1. **Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = 0$, то $x_2(\tau_2) = 0$.**
2. **Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_1) = 0$, $x_2(\tau_1) \neq 0$, то $x_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$.**
3. **Если $\psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.**
4. **Если $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \tau \in (\tau_1, \tau_2)$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0$.**

Доказательство. Из принципа максимума Понтрягина:

$$\sup\left(H(t, x, \psi, u)\right) = \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_2 - 2x_1 - x_1 \sin\left(x_1^2\right) + 2x_1^2 \cos(x_1)) + \psi_2 \alpha \operatorname{sgn}(\psi_2) = M.$$

1. По условию, $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = 0$. Подставляем в выражение для M:

$$M|_{t=\tau_1} = \psi_1(\tau_1) x_2(\tau_1),$$

$$M|_{t=\tau_2} = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) = 0.$$

   Так как $M = \text{const}$, то $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0$. В силу невырожденности вектора $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, переменная $\psi_1(t) \neq 0 \implies$, то $x_2(\tau_2) = 0$.

2. При $x_2(\tau_2 \neq 0)$, по теореме Ролля функция $x_2(\tau)$ проходит через 0 на отрезке

(τ_1, τ_2).

3. По условию, $\psi_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0 \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда из п. 1 этого доказательства получаем, то $\psi_2(t) \neq 0$ на открытом интервале $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда на сегменте $[\tau_1, \tau_2]$ верно равенство для концов отрезка:

$$\frac{\delta}{\delta t} M(\psi, x) = \frac{\delta}{\delta t}(\psi_1 x_2 + \dot{x}_2 \psi_2) = \frac{\delta}{\delta t}(\psi_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \psi_2) = 0.$$

$$\dot{x}_2(t_1)\psi_2(t_1) = \dot{x}_2(t_2)\psi_2(t_2).$$

Так как левая часть обращается в нуль по предположению, а тривиальное решение для функции $x_2(t)$ мы не рассматриваем, то $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Докажем от противного. По условию, $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0$. Пусть $\psi_2(t_1) \neq 0$, тогда из предыдущего пункта получаем $\psi_2(t_2) \neq 0$. Пусть $\psi_2(t)$ не имеет нуля на интервале $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда $_1(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_2) > 0$. Значит, τ_1, τ_2 — не последовательные нули функции $_2(t)$, что противоречит условиям теоремы.

□

Следствие. Нули $x_2(t)$ и $\psi_2(t)$ либо совпадают, либо чередуются.

3 Исследование неподвижных точек

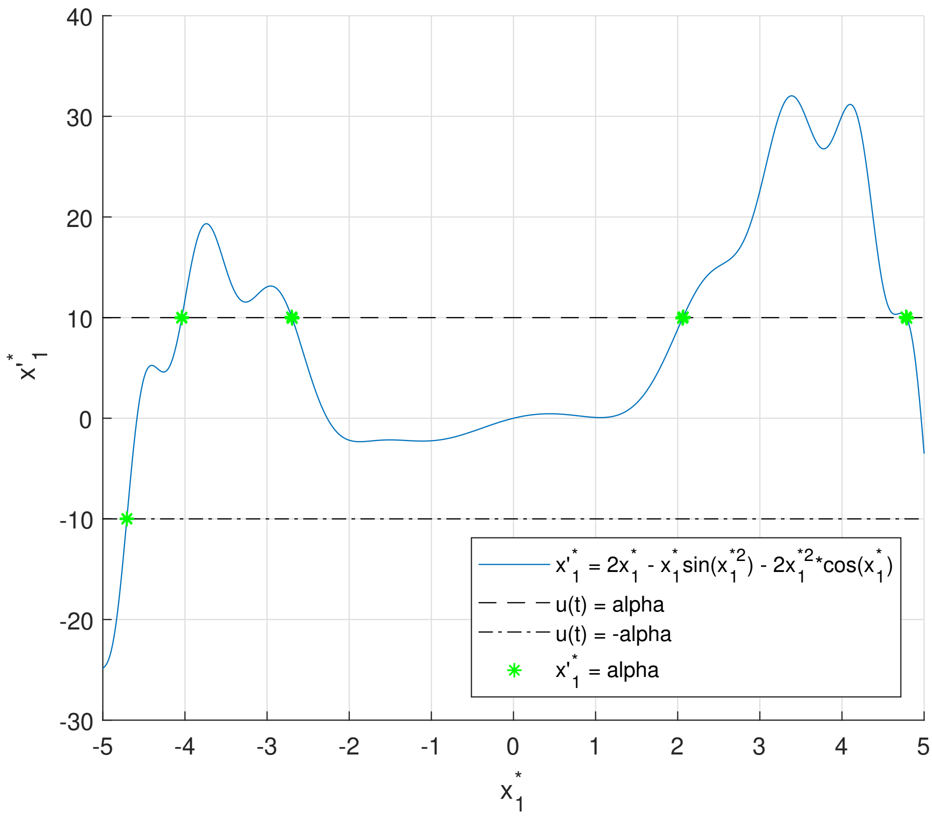
Точка $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbf{R}^2$ называется неподвижной точкой динамической системы, если $\forall t \in [t_0, T]$ верно $\begin{cases} \dot{x}_1^* = 0, \\ \dot{x}_2^* = 0. \end{cases}$

Для нашей системы

$$\begin{cases} x_1^* = \ \text{const}, \\ x_2^* = \ \text{const} = 0, \\ u - 2x_1^* - x_1^* \sin(x_1^{*2}) + 2x_1^{*2} \cos(x_1^*) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow u = 2x_1^* + x_1^* \sin\left(x_1^{*2}\right) - 2x_1^{*2} \cos(x_1^*)$$

Для заданного $u(t) = \alpha_0 \in [-\alpha, \alpha]$ из тождества можно найти неподвижный точки $x_1^* = x_1^*(\alpha)$. Например, для $\alpha = 10$ система имеет неподвижные точки:

1. $(x_1, x_2) = (-4.7, 0)$;
2. $(x_1, x_2) = (-4.038, 0)$;
3. $(x_1, x_2) = (-2.7, 0)$;
4. $(x_1, x_2) = (2.06, 0)$;
5. $(x_1, x_2) = (4.79, 0)$;



Аналитически это сделать невозможно, поэтому будем искать численные решения.

4 Алгоритм

Итак, мы определили, что $u = \alpha \operatorname{sgn}(\psi_2) = \pm\alpha$. Тогда будем рассматривать 2 вспомогательные системы S_+ и S_-,

$$S_{+,-} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \pm\alpha - x_2 - x_1(2 - \sin(x_1^2)) + 2x_1^2\cos(x_1), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

и сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x_1} = 2\psi_2 + \sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1^2) + 2x_1^2\sin(x_1) - 4x_1\cos(x_1), \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x_2} = \psi_2 - \psi_1. \end{cases}$$

- Решить систему S_+ с нулевыми начальными условиями до времени $t^* : x_2(t^*) = 0$.
- Организовать перебор по времени переключения $t_1 \in [0, t^*]$.
- Решить систему S_- и сопряженную систему с начальными условиями:

  $$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x_1} = 2\psi_2 + \sin(x_1^2) + 2x_1^2\cos(x_1^2) + 2x_1^2\sin(x_1) - 4x_1\cos(x_1), \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x_2} = \psi_2 - \psi_1, \\ \dot{\psi}_1(t_1) = 1, \\ \psi_2(t_1) = 0. \end{cases}$$

  Найти момент времени $t_2 : \psi_2(t_2) = 0$.
- Если $t_2 < T$, то сделать переключение и решать систему S_+, а сопряженную с начальными условиями $\psi(t_2) = (-1; 0)^T$.
- Повторять До $t \geq T$.
- Проделать аналогичные действия взяв в первом пункте систему S_-
- Объединить концы всех полученных траекторий в одну кривую. Для этого переберем все отрезки, из которых состоит ломаная, проверим их на пересечение.

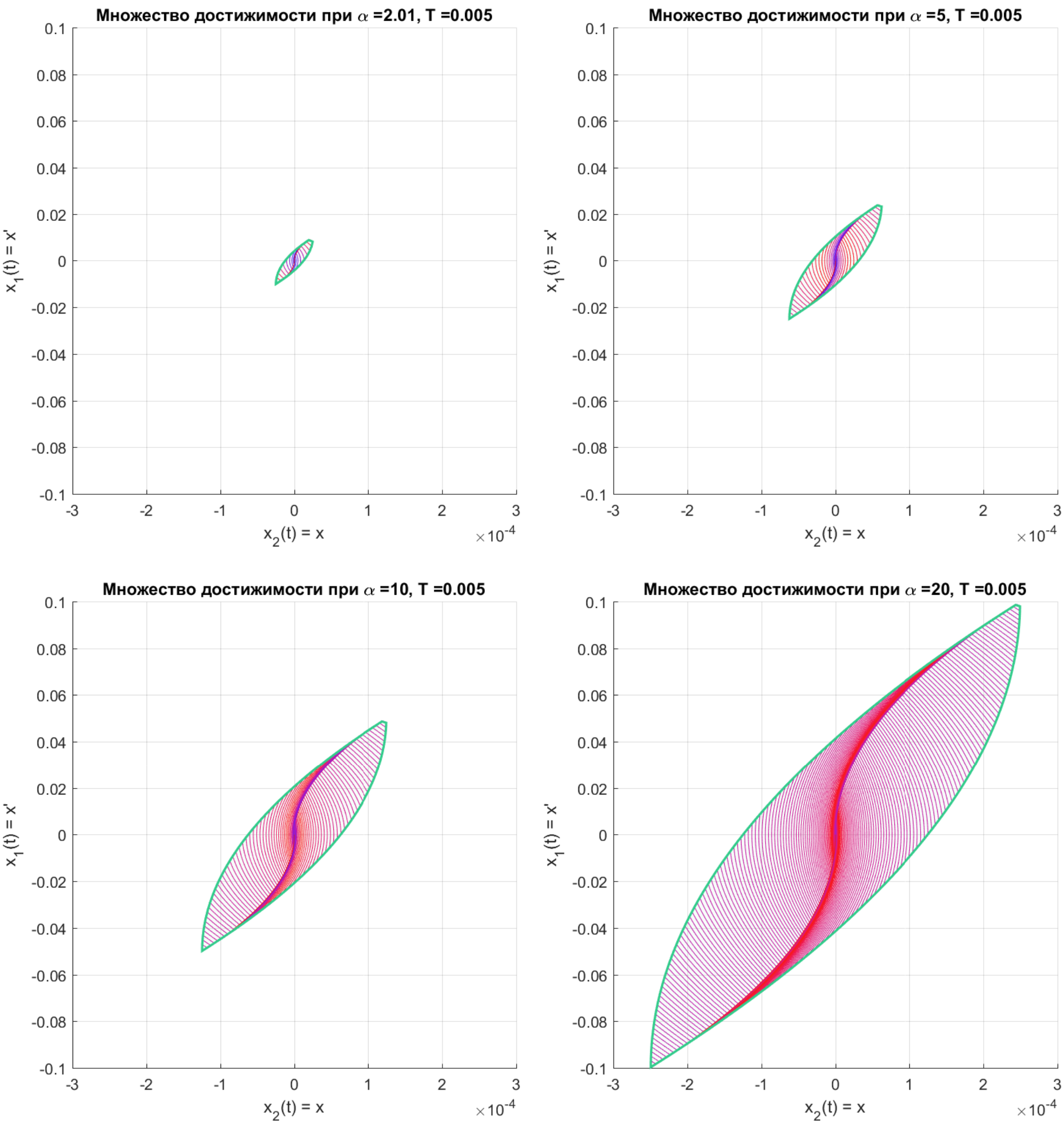
  Построим объединение, последовательно двигаясь по точкам кривой, переключаясь на другую кривую, если имело место переключение.
- Удалить возможные самопересечения по следующему алгоритму:
  1. Найти точку, которая заведомо лежит на границе области достижимости (например, точка с наименьшим значением x_1).
  2. Начать с неё обход ломаной. Для каждого звена необходимо проверить его на пересечение с уже рассмотренными звеньями и в случае наличия пересечения удалить участок ломаной, находящийся между пересекающимися звеньями в порядке обхода.
  3. Добавить новый узел ломаной в точке пересечения отрезков, а также укороченные звенья, являющиеся частями пересекавщихся отрезков.

5 Примеры

По условию алгоритма, нужно делать перебор по времени переключения $t_1 \in [0, t^*]$, где $t^* = \min t : x_2(t^*) = 0$ — время, когда компонента системы x_2 достигла нуля. На графике это показано следующим образом: чем краснее линия, тем больше t_1. Таким образом можно отследить влияние перебора на итоговое множество.

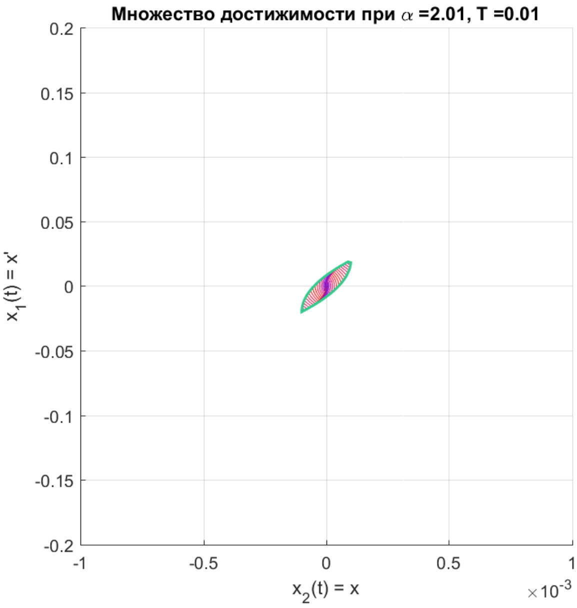
Множество достижимости на графике — зеленая область.

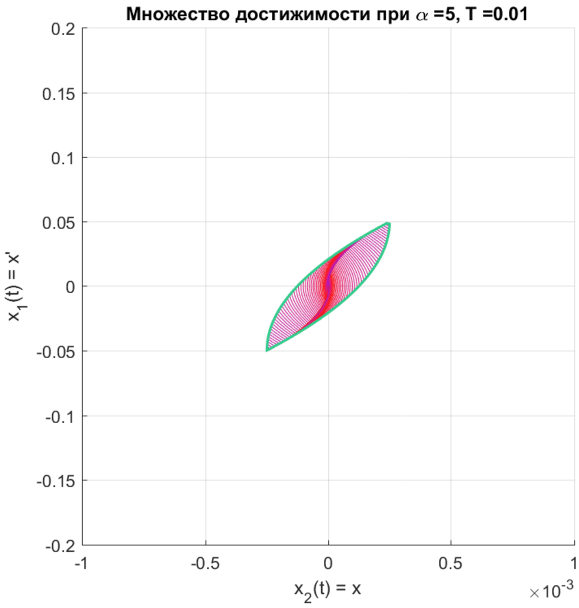
5.1 T = 0.005

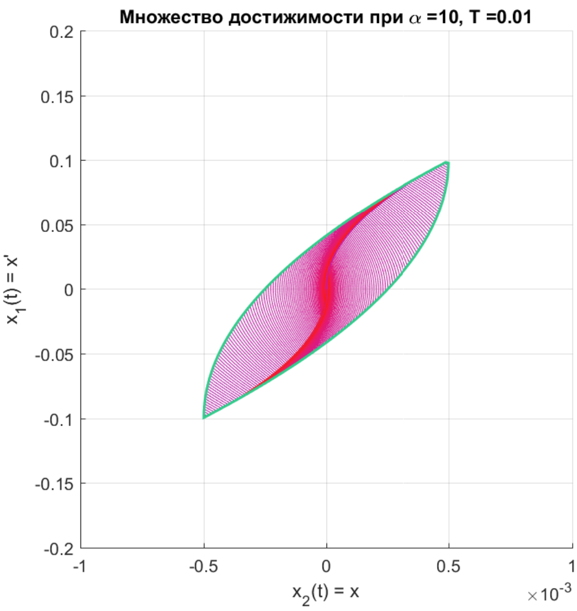


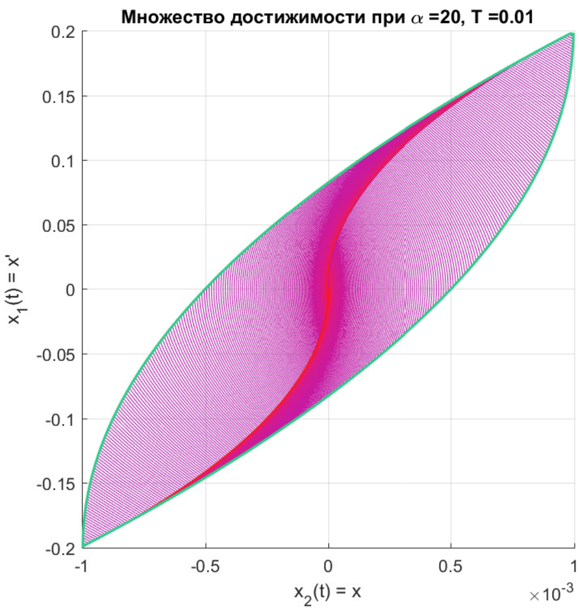
5.2 T = 0.01

Увеличим T в 2 раза, чтобы исследовать зависимость формы множества достижимости от входных параметров задачи.







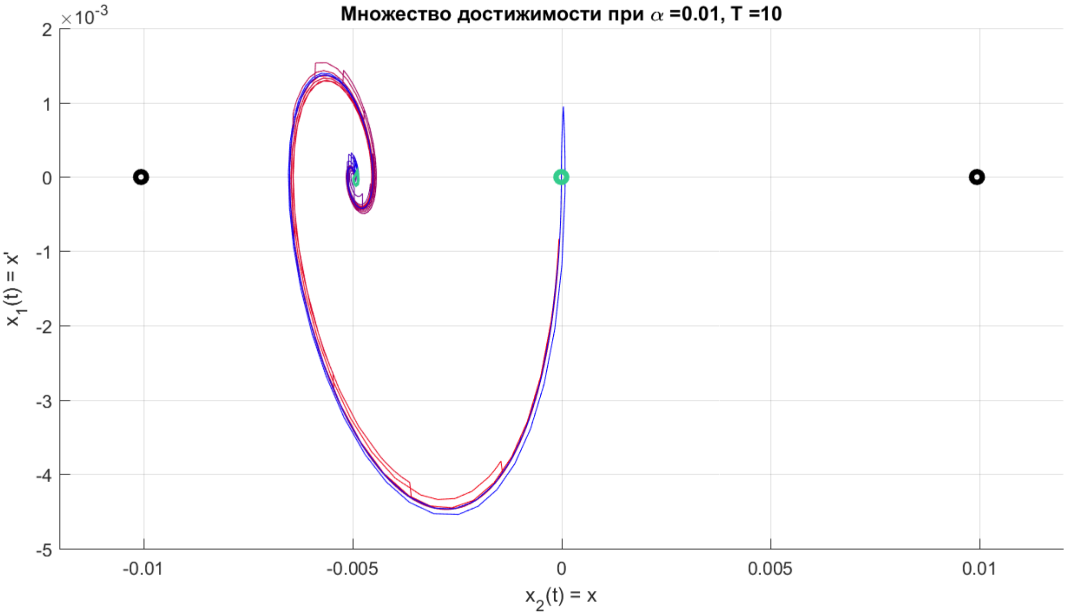


Итак, как видно из примеров, при увеличении T и α множество достижимости увеличивается.

5.3 Неподвижные точки

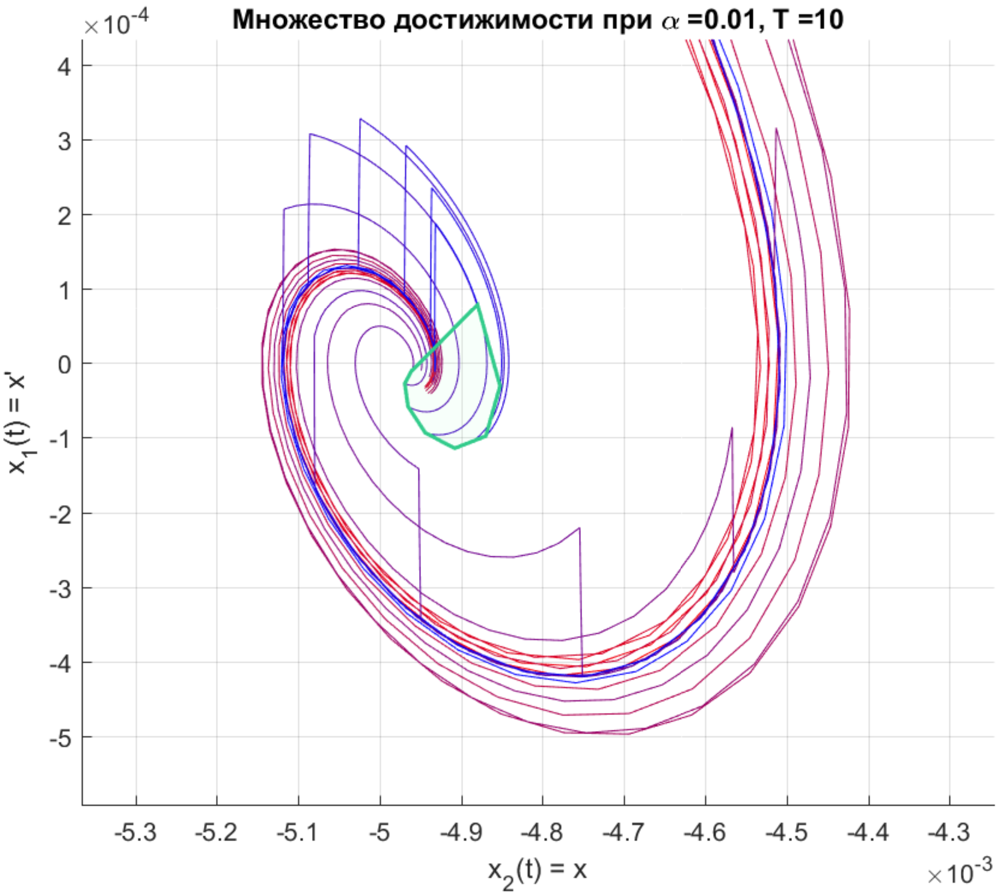
Стационарные точки нужно искать отдельно для положительного и отрицательного α. Вычисления показывают, что для положительного и отрицательного значения $\alpha = 0.01$ находится по одному решению в рассматриваемой окрестности, причём в данном случае они равноудалены от точки $(0,0)$. Обе неподвижные точки находятся вне зоне действия своих систем, траектория не проходит через них.

Из графика в параграфе 3 видно, что чем меньше α, тем ближе неподвижные точки к окрестности $(x_1, x_2) = (0,0)$. При $\alpha = 0.01$ ближайшие к множеству достижимости неподвижные точки при $x_1 = \pm 0.01$. На рисунке они отмечены черными кружочками по бокам от множества.



5.4 Переключения управления

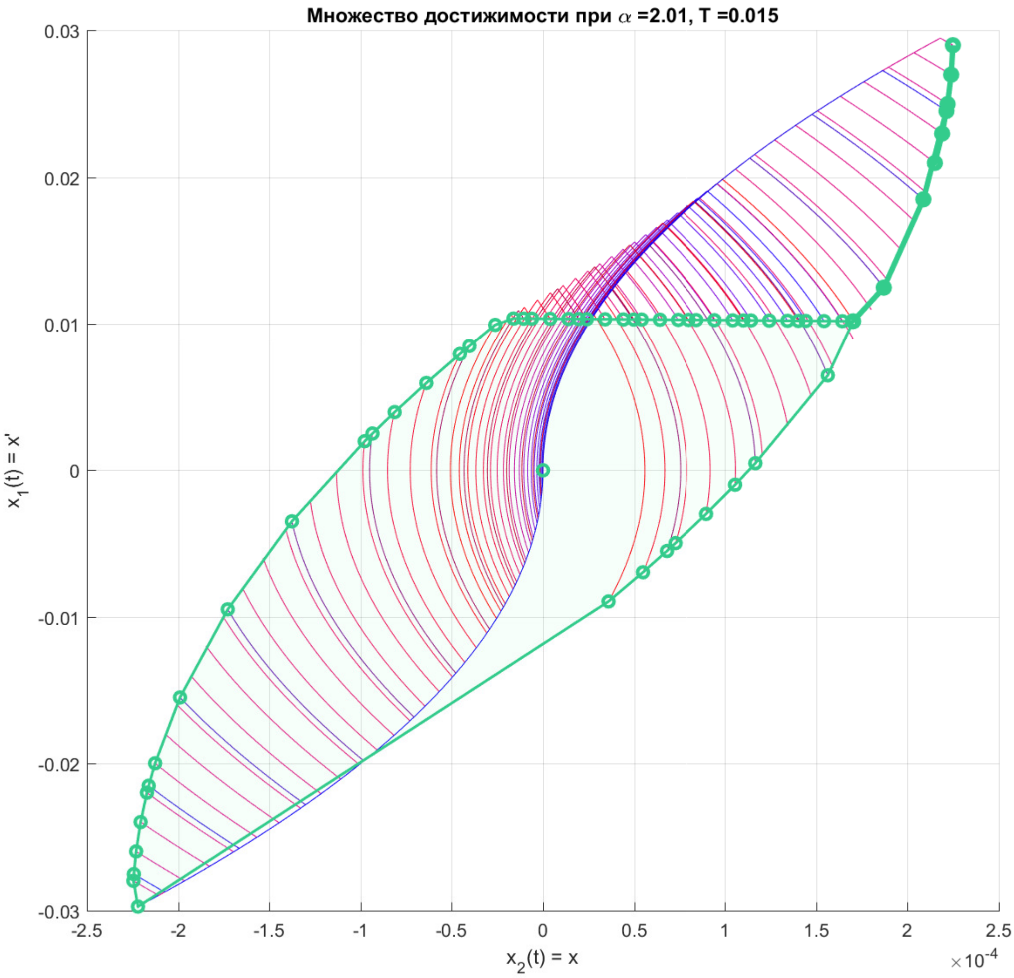
На графике из предыдущего примера можно увидеть множество переключений. При $\alpha = 0.01$ и $T = 10$ знак оптимального управления $u(t)$ часто меняется. В приближении на графике моменты переключений выглядят как "скачки"траектории.

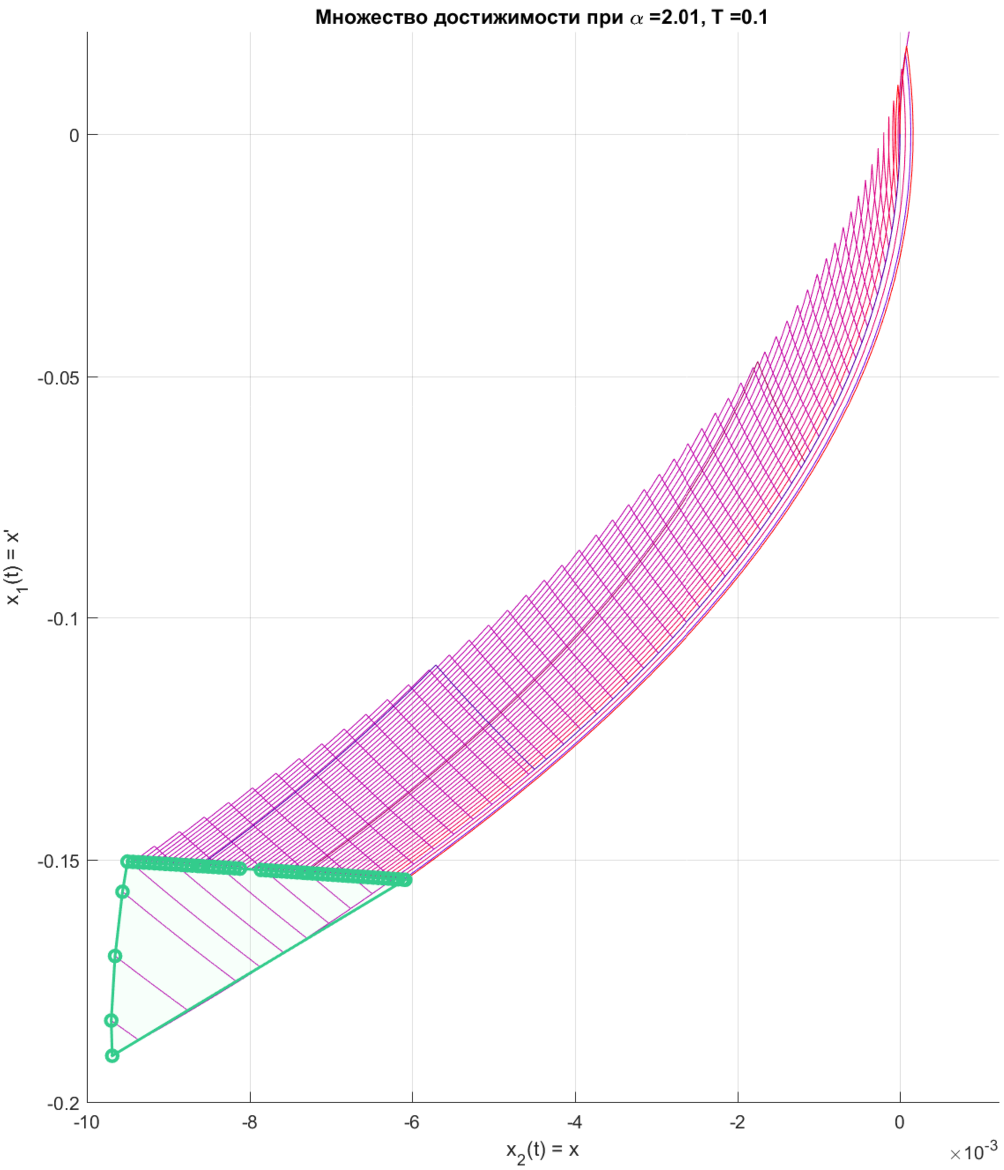


5.5 Невыпуклые множества, переключения управления

Другие примеры, которые иллюстрируют переключение управления $u(t) = \alpha \mathrm{sgn}\,(\psi)_2\,(t)$. На графике траекторий присутствуют изломы. В этот момент управление поменялось с положительного $u = \alpha$ на отрицательное $u = -\alpha$.

Точки, по которым строится множество достижимости, отмечены зелёными кружками. В первом примере множество не выпуклое, во втором имеет форму треугольника.





Множество достижимости при α =2.01, T =0.1
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
$x_1(t) = x'$
-10
-8
-6
-4
-2
0
$x_2(t) = x$
$\times 10^{-3}$

Список литературы

[1] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: «Наука», 1983.

[2] Ли Э. Б., Маркус К. Основы теории оптимального управления, М.: «Наука», 1974.

[3] Арутюнов А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. Методы современной математики. М.: «Факториал–Пресс», 2006.

[4] Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу.—М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2014.