



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы с дискретным временем»

Студентка 315 группы
А. Б. Толеутаева

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Исследование первой системы	4
2.1	Неподвижные точки системы	4
2.2	Устойчивость неподвижных точек	5
2.3	Существование циклов длины 2, 3	8
2.4	Бифуркационная диаграмма	8
2.5	Показатель Ляпунова	11
3	Исследование второй системы	12
3.1	Неподвижные точки системы	12
3.2	Устойчивость неподвижных точек	13
3.3	Существование циклов длины 2 и 3	15
3.4	Бифуркация Неймарка-Сакера	15

1 Постановка задачи

Даны системы:

$$u_{t+1} = u_t^2 e^{r(1-u_t^2)}, r > 0, u_t \leq 0, \forall t = 0, 1, \dots,$$

$$u_{t+1} = u_t^2 e^{r(1-u_{t-1}^2)}, r > 0, u_t \leq 0, \forall t = 0, 1, \dots$$

Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования цикла длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
6. В случае системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Исследование первой системы

2.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим дискретную динамическую систему:

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

или, в других обозначениях:

$$u \mapsto f(u), u \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Множество всевозможных состояний u_t называется пространством состояний (или фазовым пространством) системы (2.1).

Множество точек $u_t, t = 0, 1, \dots$ называется траекторией (или орбитой) системы (2.1).

Неподвижными точками системы (2.1) называются такие точки пространства состояний u^* , что $f(u^*) = u^*$.

Исследуем первую систему:

$$u_{t+1} = u_t^2 e^{2(1-u_t^2)}, r > 0, u_t \leq 0, \forall t = 0, 1, \dots,$$

Рассмотрим уравнение $f(u) = u^2 e^{r(1-u^2)} = u = g(u)$. В общем случае оно имеет 3 корня, это следует из графика (Рис. 1) и математических выкладок:

$$u(1 - u e^{r(1-u^2)}) = uw(u) = 0 \iff \begin{cases} u = 0, \\ u = 1, \\ u = e^{ru^2} \frac{1}{e^r}. \end{cases}$$

Производная второй скобки

$$w(u)' = (1 - u e^{r(1-u^2)})' = -e^{r(1-u^2)} + 2ru^2 e^{r(1-u^2)} = e^{r(1-u^2)}(2ru^2 - 1) = 0,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2r}}$$

Итак, мы показали, что 3 корня системы равны $u = 0$, $u = 1$, $u = 1/\sqrt{2r}$, причем 3й зависит от r . Других решений нет. Значит, вне зависимости от r существуют только три неподвижные точки $u_1^* = 0$ и $u_2^* = 1$, $u_3^* = \frac{1}{\sqrt{2r}}$.

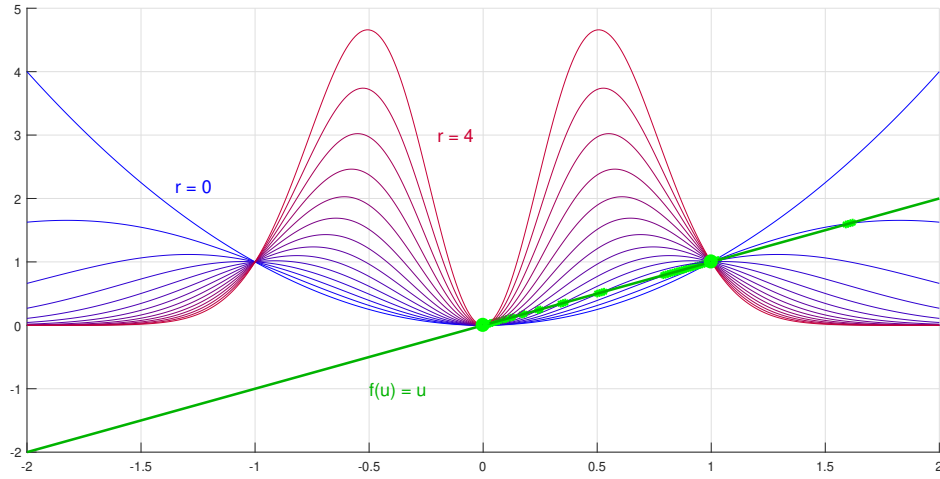


Рис. 1. График $g(u) = u^2 e^{r(1-u^2)}$ при $r \in [0, 5]$ и график $f(u) = u$. Зелёными точками отмечены точки пересечения графиков.

2.2 Устойчивость неподвижных точек

Неподвижная точка u^* отображения $u_{t+1} = f(u_t)$ называется устойчивой по Ляпунову, если $\forall \epsilon > 0 \exists$ такое $\delta > 0$, что для \forall начальных данных u_0 из δ -окрестности точки u^* вся траектория системы u_t , $t = 0, 1, \dots$ содержится в ϵ -окрестности точки u^* . Если, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*$, то точка u^* называется асимптотически устойчивой.

Утв. Пусть u^* — неподвижная точка отображения $u_{t+1} = f(u_t)$ и f обратима в малой окрестности u^* . Тогда u^* асимптотически устойчива, если $|f_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f_u(u^*)| > 1$.

Рассмотрим производную $f'_u(u)$ в точках u_1^*, u_2^*

$$f'_u(u) = 2ue^{r(1-u^2)} - 2ru^3e^{r(1-u^2)} = 2ue^{r(1-u^2)}(1 - ru^2).$$

Используем утверждение и исследуем устойчивость.

$$u_1^* = 0 \implies |f_u(u_1^*)| = 0 < 1$$

Следовательно, точка $u_1^* = 0$ устойчива для $\forall r > 0$. Это отражается и на графике (Рис. 2).

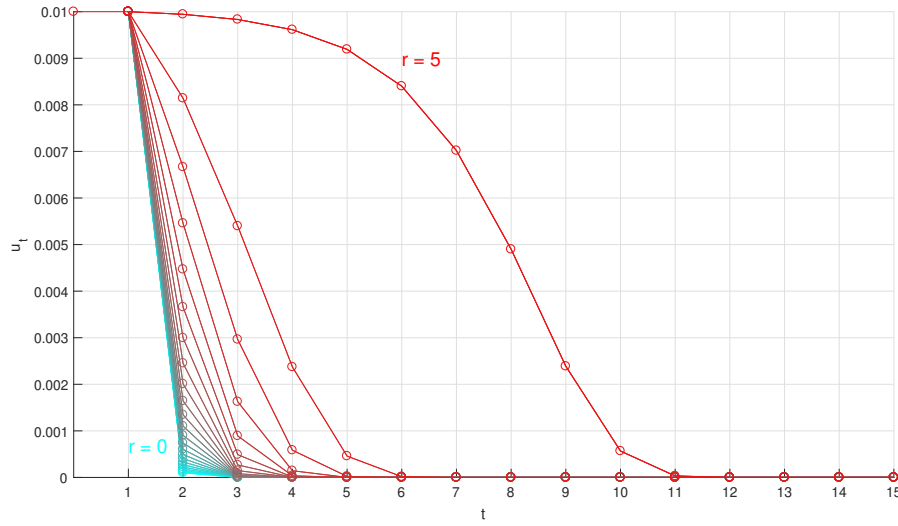


Рис. 2. График зависимости u_t от t . $u_0 = 0.01$, $r \in (0, 5)$. Траектория устремляется к $u_1^* = 0$.

$$u_2^* = 1 \implies |f_u(u_2^*)| = |2(1 - r)| < 1 \text{ при } r > 0.5, \geq 1 \text{ при } r \in [0, 0.5],$$

Вторая точка устойчива $\forall r > 0.5$, иначе неустойчива. Получаем следующие случаи:

- $|f_u(u_2^*)| < 1$, при $r > 0.5$ асимптотически устойчивая неподвижная точка (Рис. 3).
- $|f_u(u_2^*)| = 1$, при $r = 0.5$ ничего нельзя сказать об устойчивости.
- $|f_u(u_2^*)| > 1$, при $0 < r < 0.5$ неустойчивая неподвижная точка (Рис. 4).

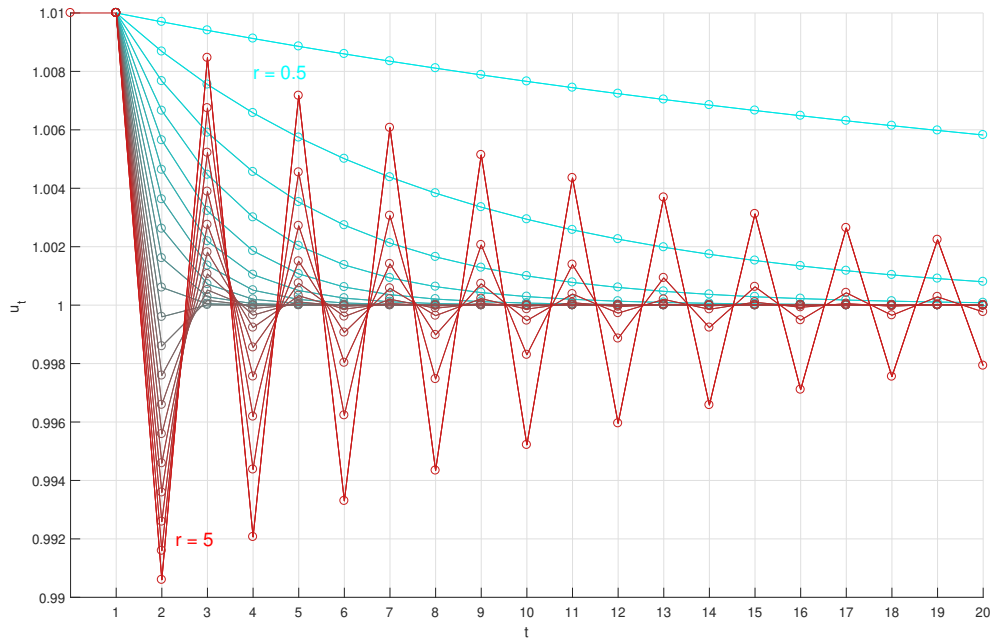


Рис. 3. График зависимости u_t от t . $u_0 = 1.01$, $r \in (0.5, 5)$. Точка является асимптотически устойчивой.

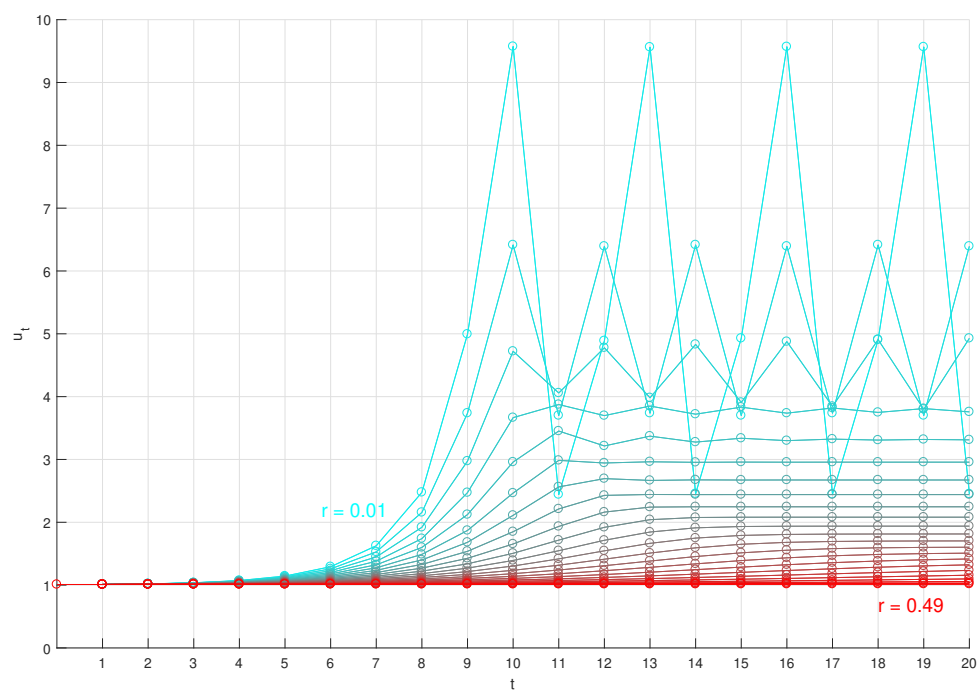


Рис. 4. График зависимости u_t от t . $u_0 = 1.01$, $r \in (0, 0.5)$, $u^* = 1/\sqrt{2r}$. Точка не является асимптотически устойчивой.

2.3 Существование циклов длины 2, 3

Циклом длины k системы (2.1) называется множество различных точек u_1, u_2, \dots, u_k таких, что

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Определения 1. (Шарковский). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k . Тогда f имеет цикл длины m для всех таких m , что $k \succ m$ в указанном выше порядке.

Покажем, что существует цикл длины 3. Для этого найдём решение системы:

$$\begin{cases} f^3(u, r) = u, \\ \frac{df^3(u, r)}{du} = 1, \end{cases} \quad \text{где } f^3 = f \circ f \circ f. \quad (2.3)$$

Решим систему численно с помощью Matlab. Получаем решение вида:

$$r = 0.942170, \begin{cases} u = 1.657764 = u_1, \\ u = 0.620441 = u_2, \\ u = 0.016812 = u_3, . \end{cases}$$

Заметим, что результаты согласуются с бифуркационной диаграммой. Из существования цикла длины 3 следует существование циклов любой длины (по теореме (3.2)). Аналогично найдём цикл длины 2 из системы:

$$\begin{cases} f^2(u, r) = u, \\ \frac{df^2(u, r)}{du} = 1, \end{cases} \quad \text{где } f^2 = f \circ f. \quad (2.4)$$

Получим значения: $r = 0.695, u_1 = 0.499085, u_2 = 1.29817$

2.4 Бифуркационная диаграмма

Две дискретные динамические системы топологически эквивалентны, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой. При этом фазовые портреты топологически эквивалентных систем также называются топологически эквивалентными.

Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется бифуркацией.

Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Построим бифуркационную диаграмму. Будем рассматривать все значения $r \in (0, 3)$ с шагом $\delta = 0.01$. Для каждого r выберем начальное значение u_0 , выберем достаточно большое $n = 100$, на котором система стабилизируется, отметим k точек на графике. На оси абсцисс отмечаются значения r , ординат — полученные значения u . К примеру, можно использовать следующие параметры: $u_0 = 0.5$, $u_0 = 1.1$, $n = 100$, $k = 100$ (Рис. 5, 6).

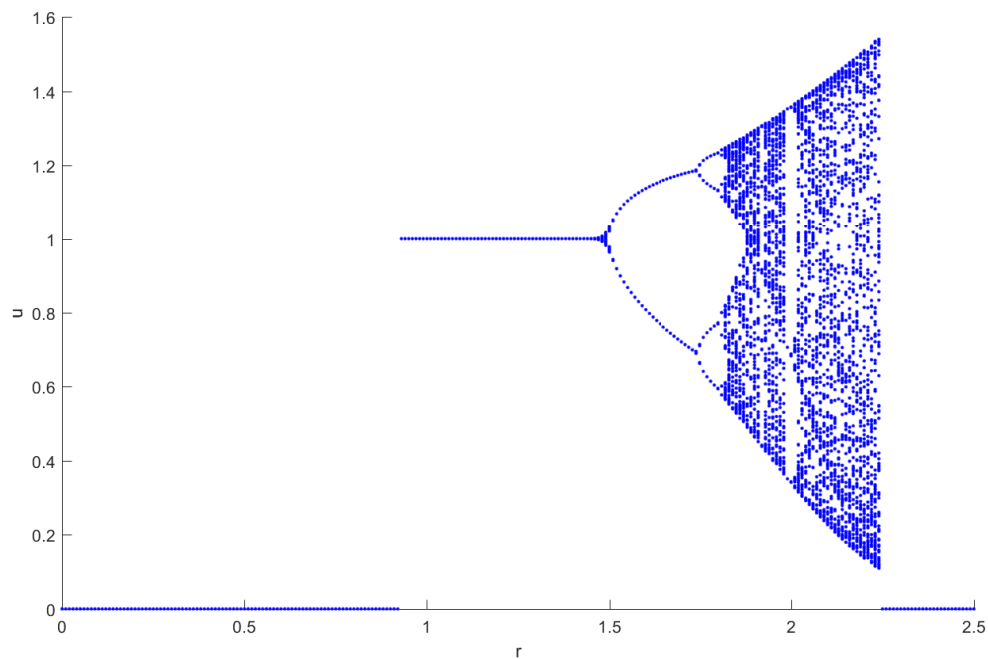


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма при $u_0 = 0.5$.

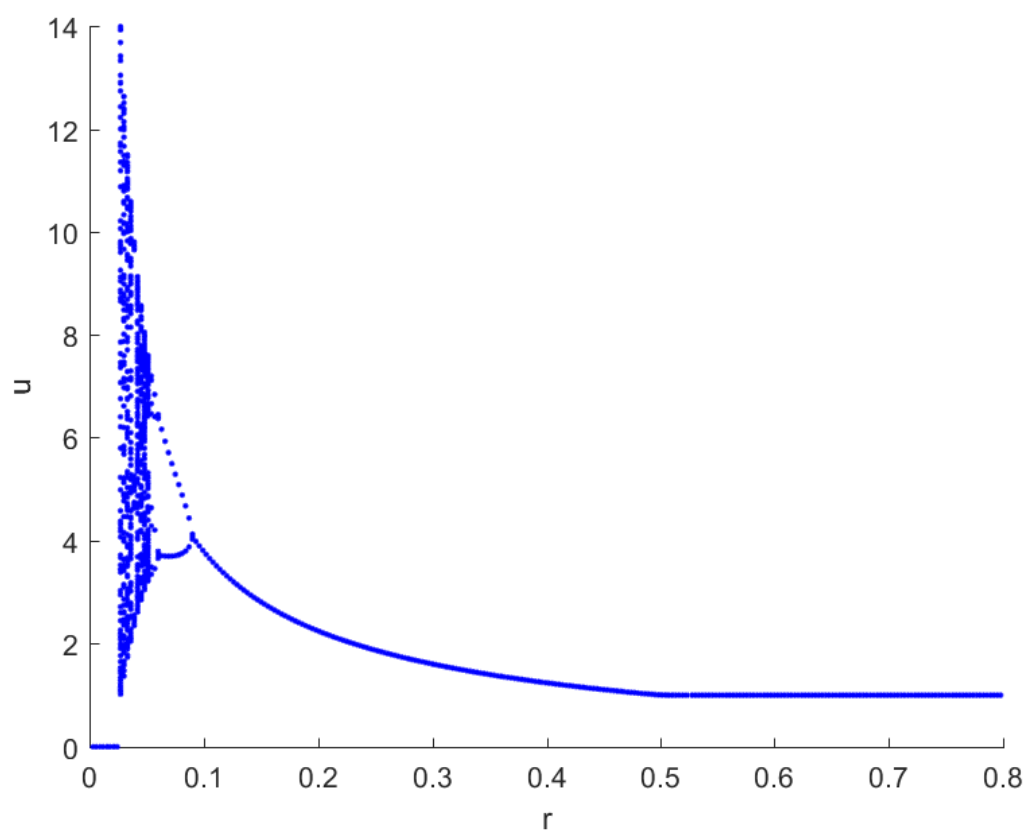


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма при $u_0 = 1.1$.

2.5 Показатель Ляпунова

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории u_1, u_2, \dots называется величина:

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_1)| + \ln |f'(u_2)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Орбиту $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ назовём хаотической, если эта орбита ограничена, не стремится к периодической траектории и её показатель Ляпунова $h(u_1)$ больше нуля.

Построим график зависимости показателя Ляпунова от параметра r . Возьмём параметры $u_0 = 2$ (Рис. 8), $u_0 = 0.4$ (Рис. 7), r изменяется от значения 0.005 до 2 с шагом $\Delta = 0.005$, $n = 1000$.

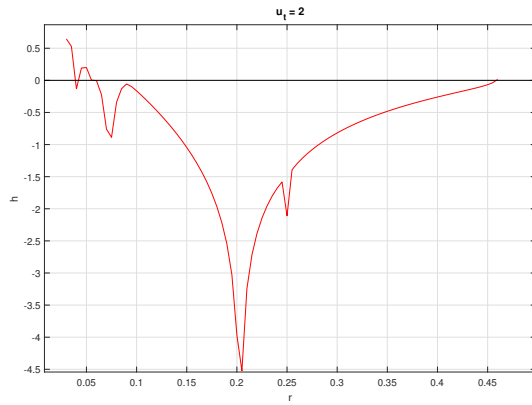


Рис. 7. $u_0 = 0.4$, $r \in [0, 0.5]$.

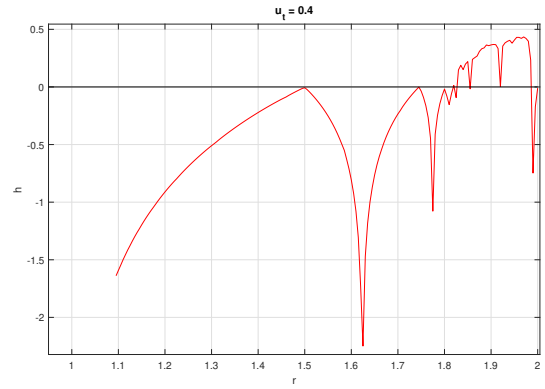


Рис. 8. $u_0 = 2$, $r \in [0.5, 2]$.

Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического поведения. Если $h(u) > 0$, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. Интервалы с $h(u) < 0$ соответствуют циклам с небольшим периодом.

3 Исследование второй системы

3.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим систему с запаздыванием:

$$u_{t+1} = u_t^2 e^{r(1-u_{t-1}^2)}, r > 0, u_t \leq 0, \forall t = 0, 1, \dots$$

Перепишем её в другом виде, чтобы избавиться от запаздывания:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = u_t^2 e^{r(1-v_t^2)}, \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases},$$

Точка $u^* \in \mathbb{R}$ является неподвижной точкой системы

$$u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1}), u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

если $f(u^*, u^*) = u^*$.

Задача сводится нахождению решений следующей системы:

$$\begin{cases} u^* = u^{*2} e^{r(1-v^{*2})}, \\ v^* = u^*. \end{cases} \equiv \begin{cases} u^* = u^{*2} e^{r(1-u^{*2})}, \\ v^* = u^*. \end{cases}$$

Таким образом, видно, что у данной системы с запаздыванием будут такие же неподвижные точки, как у первой системы с точностью до добавления второй координаты. Итак, в изучаемой системе будут две неподвижные точки $\forall r > 0$: $u_1 = (0, 0), u_2 = (1, 1)$.

3.2 Устойчивость неподвижных точек

Пусть f — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Дана динамическая система с дискретным временем:

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}^n,$$

Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$, вычисленные в точке u^* , таковы, что $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n$. Если $\exists \lambda_i$ такое, что $|\lambda_i| > 1$, то неподвижная точка u^* неустойчива.

Рассмотрим матрицу Якоби для системы (3.1):

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f(u, v)}{\delta u} & \frac{\delta f(u, v)}{\delta v} \\ \frac{\delta g(u, v)}{\delta u} & \frac{\delta g(u, v)}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ue^{r(1-v^2)} & -2rvu^2e^{r(1-v^2)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $u_1 = (0, 0)$. Значение определителя матрицы Якоби в этой точке равно 0.

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J(0, 0) - \lambda I) = \lambda^2.$$

Корень $\lambda = 0$ кратности 2, точка $u_1 = (0, 0)$ асимптотически устойчива (Рис. 9).

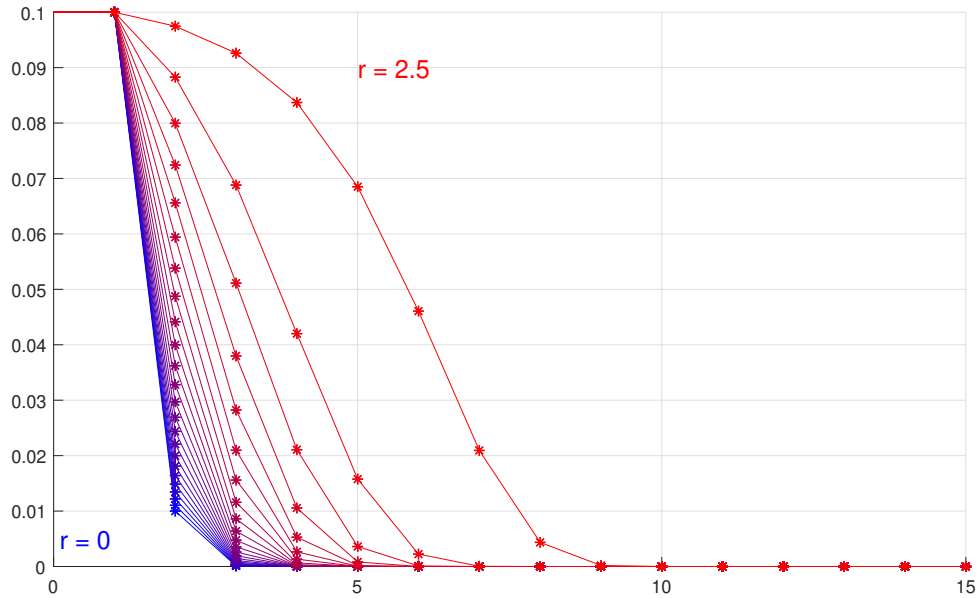


Рис. 9. График зависимости u_t от $r \in (0, 2.5)$. $u_0 = u_1 = 0.01$.

2. $u_2 = (1, 1)$. Найдём матрицу Якоби и её собственные значения:

$$J(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(J(1, 1) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -2r \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2r.$$

Дискриминант $D = 1 - 2r \geq 0 \iff r \leq 0.5$. Получим корни: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2r}$.

- При $r \in [0, 0.5]$ имеем два вещественных корня, и $|\lambda_1| = |1 - \sqrt{1 - 2r}| \leq 1$. Из теоремы (3.2) следует, что точка u_2 является асимптотически устойчивой (Рис. 10).
- При $r > 0.5$ имеем два комплексных корня, и $|\lambda_i| = \sqrt{1 - (1 - 2r)} \sqrt{2r} = 1 \iff$. Значит, пр точка u_2 является неустойчивой (Рис. 11).

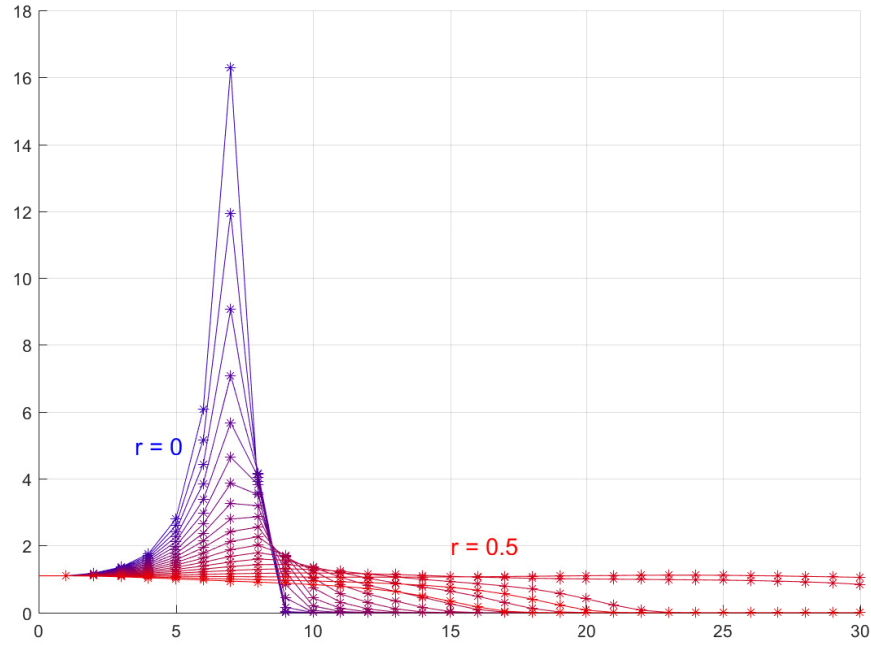


Рис. 10. График зависимости u_t от $r \in (0, 0.5)$. $u_0 = u_1 = 1.01$.

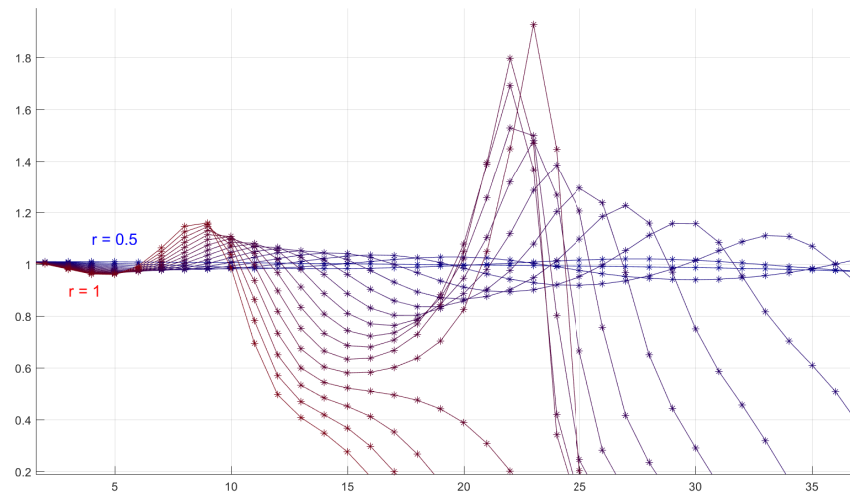


Рис. 11. График зависимости u_t от $r \in (0.5, 1)$. $u_0 = u_1 = 1.01$.

3.3 Существование циклов длины 2 и 3

Проверим существование цикла длины 2. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} f(u, v) = u^2 e^{r(1-v^2)}, \\ g(u, v) = u, \\ f(f(u, v), g(u, v)) = u, \\ g(f(u, v), g(u, v)) = v. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 e^{2r(1-v^2)} e^{r(1-u^2)} = u, \\ u^2 e^{r(1-v^2)} = v. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(u^3 e^{2r(1-v^2)} e^{r(1-u^2)} - 1) = 0, \\ u = \pm \sqrt{v} e^{-r(1-v^2)}. \end{cases}$$

Заметим, что $f_1(u, v) = u^3 e^{2r(1-v^2)} e^{r(1-u^2)}$ — монотонно убывающая функция, которая пересекает константу 1 не более чем в одной точке. Значит, уравнение имеет корни $u^* = 0, 1$. Но пары $(u, v) = (1, 1)$ и $(0, 0)$ являются неподвижными точками. Следовательно, цикл длины 2 не может быть образован. Но тогда из теоремы (3.2) следует, что цикла длины 3 (и всех промежуточных) не существует.

3.4 Бифуркация Неймарка-Сакера

Бифуркацией положения равновесия в системе, соответствующая появлению собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, называется бифуркацией Неймарка-Сакера.

Условия для бифуркации Неймарка-Сакера выполняются только для значения $r = \frac{1}{2}$. При этом установлено, что для $r < \frac{1}{2}$ точка $(1, 1)$ является асимптотически устойчивой, а для $r > \frac{1}{2}$ — неустойчивой. Из графика (Рис. 12) видно, что траектории из окрестности точки $(1, 1)$ медленно сходятся к этой точке.

При выборе достаточно близкого начального приближения траектории будут ограничены замкнутой инвариантной кривой и стремятся к ней при $t \rightarrow \inf$. Для начального приближения вне кривой будет происходить обратная ситуация — кривая будет ограничивать внутреннюю область. Таким образом, происходит мягкая потеря устойчивости, а бифуркация системы является суперкритической.

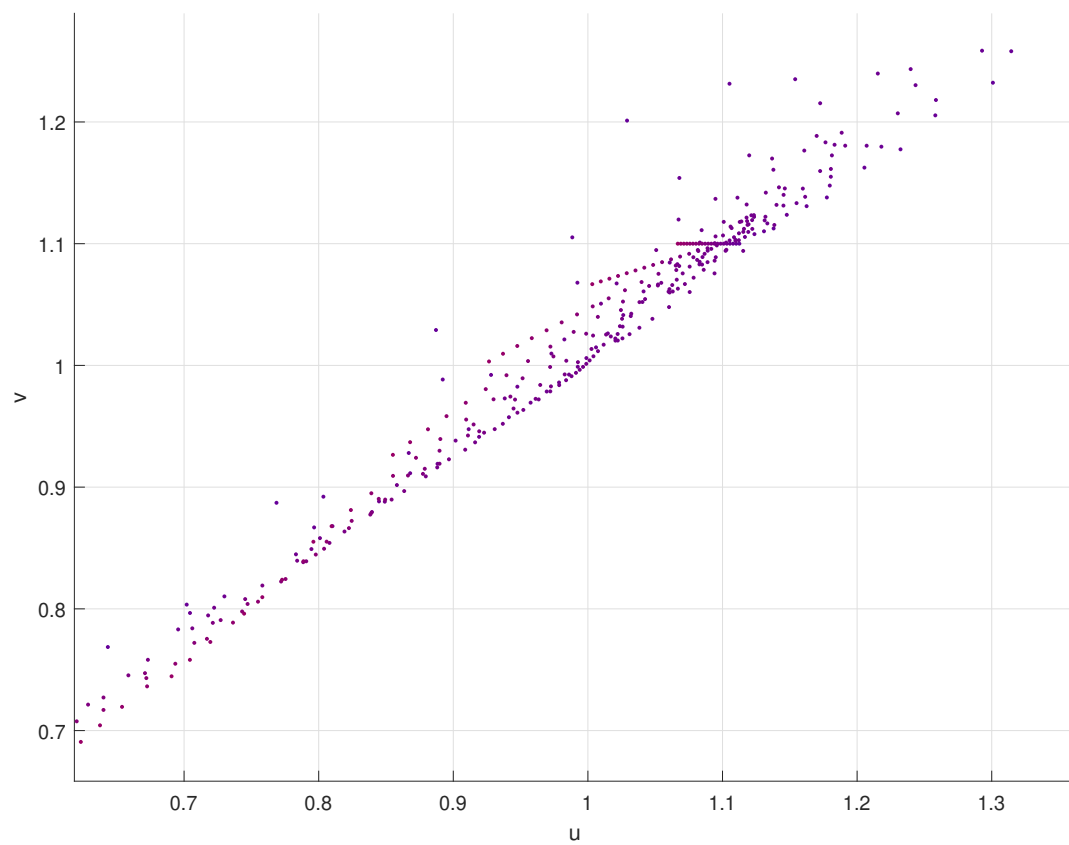


Рис. 12. Траектории в окрестности точки $(1, 1)$ при $r \in (0.4, 0.6)$.

Список литературы

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.