PERTEMUAN 1

RING DAN SIFAT-SIFATNYA

Pada bagian ini, akan dikaji suatu himpunan tak-kosong yang dilengkapi dengan

dua buah operasi biner. Sebagai contoh adalah $(2\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$, $(M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}),+,.)$, $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $(\mathbb{Z}_6,+,.)$. Jika contoh di atas dituliskan sebagai $(R,+,.)$ maka sifat yang dimiliki oleh $(R,+,.)$ adalah sebagai berikut.

I. $(R,+)$merupakan grup komutatif.

II. Perkalian pada R bersifat asosiatif.

III. Berlaku sifat distributif kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan pada R.

Definisi 1.1

Misalkan R himpunan tak-kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.). Himpunan R disebut *ring* jika memenuhi

I. $(R,+)$ merupakan grup komutatif.

II. Perkalian di R bersifat asosiatif.

III. Berlaku sifat distributif kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan.

Contoh.

1. $(2\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$, $(M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}),+,.)$, $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $(\mathbb{Z}_6,+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$ merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan
2. $(\mathbb{Z}_{10},+,.)$, $\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$ merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian modulo 10
3. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$, merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian matriks.
4. $Q(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dengan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

Penjumlahan dan perkalian di $Q(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai berikut.

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) + (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$
$$= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)i +$$

$$(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_3 b_0 + a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

Himpunan $Q(\mathbb{R})$) merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan di atas.

Macam-macam ring

1. Jika R ring mempunyai elemen identitas terhadap perkalian maka R disebut *ring dengan elemen satuan.*

   Contoh.

   a. $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{Q},+,.)$, $(M_{2x2}(\mathbb{R}),+,.)$, $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $(\mathbb{Z}_6,+,.)$ merupakan ring dengan elemen satuan.

   b. $(\mathbb{Z}_{10},+,.)$, $\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$ dengan penjumlahan dan perkalian modulo 10 merupakan ring dengan elemen satuan.

   c. $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan ring dengan elemen satuan.

2. Jika perkalian pada ring R memenuhi sifat komutatif maka R disebut *ring komutatif*.

   Contoh

   a. ($\mathbb{Z}$,+,.), ($\mathbb{Q}$,+,.), $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $((\mathbb{Z}_6,+,.)$, ($\mathbb{R}$,+,.), ($\mathbb{C}$,+,.) merupakan ring komutatif.

   b. $((\mathbb{Z}_n,+,\ .)$, $\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$ dengan penjumlahan dan perkalian modulo 10 merupakan ring komutatif.

   c. $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan ring komutatif.

3. Jika R ring dengan elemen satuan dan setiap elemen tak-nol mempunyai invers terhadap perkalian maka R disebut *division ring*.

   Contoh.

   $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$, $Q(\mathbb{R})$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan division ring.

4. Jika R division ring yang komutatif maka R disebut *field (lapangan)*.

   Contoh.

   $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{Z}_5,+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$

   merupakan field (lapangan)

5. Jika R division ring yang tidak komutatif maka R disebut *skew field*.

   Contoh.

   $Q(\mathbb{R})$ merupakan skew field.

6. Misalkan R ring. Jika a, b elemen tak-nol di R dengan $ab = 0$ maka a dan b disebut *pembagi nol*.
7. Jika R ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak mempunyai pembagi nol maka R disebut *daerah integral*.

   Contoh.

   $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{Z}_5, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan daerah integral.

Berikut ini dikemukakan sifat-sifat dasar ring.

Teorema 1.1

Misalkan R suatu ring dan $a, b \in R$.

1. $a.0 = 0.a = 0$
2. $a.(-b) = (-a).b = -(ab)$
3. $(-a)(-b) = ab$

Bukti.

1. Jelas $a.0 = a(0 + 0) = a.0 + a.0$. Karena $(R, +)$ suatu grup maka berlaku hukum kanselasi sehingga $0 = a.0$. Dengan cara serupa diperoleh $a.0 = 0$.
2. Dengan sifat distributif dan sifat 1 di atas, diperoleh

   $a.(-b) + ab = a\big((-b) + b\big) = a.0 = 0.$

   Karena $(R, +)$ suatu grup maka diperoleh $a.(-b) = -(ab)$.

   Dengan cara serupa diperoleh $(-a).b = -(ab)$.
3. Menggunakan sifat 2 di atas, diperoleh $(-a).(-b) = (-(-a)b) = ab$.

Teorema 1.2

Misalkan D suatu daerah integral dengan $a, b, c \in D$ dan $a \neq 0$.

1. Jika $ab = ac$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri).
2. Jika $ba = ca$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kanan).

Bukti.

1. Misalkan $ab = ac$.

   Jelas $ab - ac = 0$ sehingga dengan sifat distributif diperoleh $a(b - c) = 0$.

   Karena D daerah integral dan $a \neq 0$ maka $b - c = 0$, sehingga $b = c$.
2. Bukti 2 serupa dengan bukti 1.

Teorema selanjutnya dibicarakan hubungan antara daerah integral dan field.

Latihan

1. Jika R suatu ring dan untuk setiap $x \in R$ berlaku $x^2 = x$, buktikan R ring komutatif.
2. Jika R suatu ring, buktikan bahwa R ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. Buktikan elemen-elemen di daerah integral R yang bersifat $x^2 = x$ hanyalah elemen nol dan elemen satuan saja.
4. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real merupakan suatu daerah integral.
5. Misalkan F himpunan semua pemetaan dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

   Untuk setiap $f, g \in F$ didefinisikan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $(f\ g)(x) = f(x)g(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

   Tunjukkan bahwa F merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan di atas.