Lecture 1

Приложения интеграла

Задача I(Понятие определенного интеграла)

A - величина, $[a, b]$ - связанный с ней отрезок

1. Метод интегральных сумм

Рассмотрим $[a, b], a = x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_{n-1}, x_n = b$

Рассмотрим $[x_{i-1}, x_i] \implies$ Рассмотрим $A_i = f(\psi_i) \triangle x_i, \psi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$A = \lim_{n \to \infty, \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A_i = \int_a^b f(x)dx$$

2. Метод дифференциала

Рассмотрим $A = A(x), x \in [a, b] \overset{\triangle x}{\implies} \triangle A \implies dA = f(x)dx$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Примеры

1. **Вычисление площади плоской фигуры в декартовых прямоугольных координатах**
    1. **1.1**

$$y = f(x), x > a, x < b$$

рис 1 ()

$$f(x) \geq 0, x \in [a, b]$$

$$S(a) = 0, S(b) = S$$

$$dS = f(x)dx$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$\boxed{\triangle\text{S} \approx \text{dS}, \triangle\text{x} \to 0}$$

рис 2 ()

$$S_f = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

рис 3 ()

2. **1.2 Параметрические функции**

$$\begin{cases} x = x(t), t \in [\alpha, \beta] \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) * x'(t)dt$$

3. **1.3**

рис 4 ()

$$dS = \frac{1}{2}r^2(u)du$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(u)du$$

2. **Вычисление длин дуг (кривых)**

1. **2.1**

рис 5 ()

$$a = x_0, b = x_n$$

$$\delta = max \triangle x_i \to 0$$

$$l = \lim_{n->\infty} L_n$$

$$L_i, \triangle L_i = \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} = \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_i - 1))^2} =$$

$$\sqrt{(\triangle x_i)^2 + [f'(\psi_i)]^2(\triangle x_i)^2}$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f')^2(\psi_i)} \triangle x_i$$

$$l \stackrel{def}{=} \lim_{n->\infty} L_n = \lim_{n->\infty, \delta->0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f')^2(\psi_i)} \triangle x_i$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$$

$$dl = l'(x)dx$$

$$l'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle l}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \sqrt{1 + (\frac{(\triangle y)^2}{\triangle x})} = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$dl = \sqrt{1+(y')^2} dx$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

рис 6 ()

2. **2.2** Параметрическая функция

$$\begin{cases} x = x(t), t \in [\alpha, \beta] \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}$$

3. **2.3** Функция в полярных координатах

$$]r = r(\phi), \alpha \le \phi \le \beta$$

$$\begin{cases} x = r * cos(\phi) \\ y = r * sin(\phi) \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\begin{cases} x = r(\phi) cos\phi \\ y = r(\phi) sin\phi \end{cases}$$

$$(x_\phi')^2 + (y_\phi')^2 = (r'(\phi)cos\phi - r(\phi)sin\phi)^2 + (r'(\phi)sin\phi + r(\phi)cos\phi)^2 = r'(\phi)^2 r^2(\phi)$$

$$\mathrm{l} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\phi)^2 + r^2\phi} d\phi$$

3. **Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений**
    1. **3.1**

        рис 7 ()

        Обозначим площадь сечения $S(x)$

        Заменяем на цилиндр с высотой dx

        $$dV(x) = S(x)dx$$

        $$V = \int_a^b S(x)dx$$

    2. **3.2 Вычисление объма тела вращения**

        рис 8 ()

        $$]y = f(x)$$

        $$S(x) = \pi f(x)^2$$

        $$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

        V_x - Тело вращаем относительно оси O_x

        $$V_y = \pi \int_a^b x^2(y)dy$$

4. **Площадь поверхности тел**

    рис 9 ()

    Рассмотрим $S(x), \triangle S(x)$

    $]T$ - тело вращения вокруг O_x

    $$dS = \pi(y + y + dy)dl \approx 2\pi ydl + \pi * dydl = 2\pi ydl$$

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

Пример для шара

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi(xr^2 - \frac{x^3}{3})$$