Clase de spaţii de şiruri şi de spaţii de funcţii şi aplicaţii

Coordonator științific
Lect. Dr. Crăciunescu Aurelian
Candidat
Vancu Andrei Ioan

Iulie 2014

Introducere

- Lucrarea de față iși propune să prezinte două clase speciale de spații normate complete și anume spațiile Banach de funcții și spațiile Banach de șiruri. Aceste clase generalizează spațiile de tip $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Introducere

- Lucrarea de față iși propune să prezinte două clase speciale de spații normate complete și anume spațiile Banach de funcții și spațiile Banach de șiruri. Aceste clase generalizează spațiile de tip $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.
- Lucrarea este structurată pe patru capitole după cum urmează:

Cap 1. *Spații normate. Spații Banach*
Cap.2. *Spații Banach de funcții*
Cap.3. *Spații Banach de șiruri*
Cap.4. *Aplicații*

Cap.1. Spații normate. Spații Banach

- Scopul acestui capitol este de a încadra tema lucrării dar și de introducere a noțiunilor și rezultatelor generale des utilizate. Se bazează în principal pe cursul de Analiză Funcțională din anul III și a fost introdus aici pentru a-i conferii lucrării un caracter auto-inclus.
- Este structurat în trei secțiuni:
  - 1.1 Spații normate.
  - 1.2 Spații Banach. Caracterizare.
  - 1.3 Operatori liniari și continui pe spații Banach.

Cap.2. Spații Banach de funcții

- Scopul acestui capitol este de a introduce și de a studia, într-o manieră abordabilă, o clasă de spații Banach, cunoscute în Analiza Funcțională ca spații de funcții.

Cap.2. Spații Banach de funcții

- Scopul acestui capitol este de a introduce și de a studia, într-o manieră abordabilă, o clasă de spații Banach, cunoscute în Analiza Funcțională ca spații de funcții.
- Este structurat în șapte secțiuni:
  - 2.1 Normă generalizată de funcții.
  - 2.2 Clase de spații de funcții.
  - 2.3 Funcții Young.
  - 2.4 Spații Orlicz.
  - 2.5 Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții.
  - 2.6 Completitudinea spațiilor Orlicz.
  - 2.7 Câteva proprietăți ale spațiilor Orlicz.

2.1. Normă generalizată de funcții

Definiție

O aplicație $N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *se numește normă generalizată de funcții dacă:*

1. $N(f) = 0$ *dacă și numai dacă* $f = 0$ *a.p.t;*
2. *dacă* $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ *a.p.t,* $t \in \mathbb{R}_+$ *atunci* $N(f) \leqslant N(g)$*;*
3. $N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f)$*, pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $f \in \mathcal{M}$ *cu* $N(f) < \infty$*;*
4. $N(f + g) \leqslant N(f) + N(g)$*, pentru orice* $f, g \in \mathcal{M}$*;*

2.1. Normă generalizată de funcții

Notăm

$$B_N = \{f \in \mathcal{M} \ : \ N(f) < \infty\}$$

2.1. Normă generalizată de funcții

Notăm

$$B_N = \{f \in \mathcal{M} \ : \ N(f) < \infty\}$$

Definiție

Vom numi spațiu Banach de funcții orice spațiu Banach de forma $(B, \|\cdot\|_B)$ unde $B = B_N$, iar N este o normă generalizată.

2.1. Normă generalizată de funcții

Notăm $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spațiilor Banach de funcții B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$, unde pentru $A \subset \mathbb{R}_+$, λ_A notează funcția caracteristică a mulțimii A.

2.1. Normă generalizată de funcții

Notăm $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spațiilor Banach de funcții B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$, unde pentru $A \subset \mathbb{R}_+$, λ_A notează funcția caracteristică a mulțimii A.

Definiție

Dacă $B \in Q(\mathbb{R}_+)$, atunci funcția $F_B : (0, \infty) \to (0, \infty), F_B(t) = \|\lambda_{[0,\,t)}\|_B$, se numește funcția fundamentală a spațiului B.

2.1. Normă generalizată de funcții

Notăm $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spațiilor Banach de funcții B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$, unde pentru $A \subset \mathbb{R}_+$, λ_A notează funcția caracteristică a mulțimii A.

Definiție

Dacă $B \in Q(\mathbb{R}_+)$, atunci funcția $F_B : (0,\infty) \to (0,\infty), F_B(t) = \|\lambda_{[0,\, t)}\|_B$, se numește funcția fundamentală a spațiului B.

Propoziție

Pentru orice spațiu Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ avem că funcția sa fundamentală F_B este o funcție monotonă.

2.2. Clase de spații de funcții

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\lim_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_{[n,n+1)}\|_B > 0$.

2.2. Clase de spații de funcții

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\lim_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_{[n,n+1)}\|_B > 0$.

Exemplu

Pentru $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, rezultă că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dacă și numai dacă $p \in [1, \infty)$.

2.2. Clase de spații de funcții

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) =$ clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\lim_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) =$ clasa spațiilor Banach de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_{[n,n+1)}\|_B > 0$.

Exemplu

Pentru $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, rezultă că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dacă și numai dacă $p \in [1, \infty)$.

Remarcă

Evident $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

2.3. Funcții Young

Să presupunem că am fixat o funcție $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, monoton crescătoare pe $(0, \infty)$, continuă la stânga pe $(0, \infty)$ și neidentic nulă sau $+\infty$ pe intervalul $(0, \infty)$.

Definiție

Funcția $Y_\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, $Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$, *se numește funcția Young asociată lui* φ.

Teoremă

Funcția Y_φ *este o funcție convexă pe* $[0, \infty)$.

2.4. Spaţii Orlicz

Să fixăm o funcţie $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, ca în paragraful anterior şi fie $Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,\ t \geq 0$, funcţia Young asociată acesteia.

Dacă $f \in \mathcal{M}$, definim $M_\varphi(f) = \int_0^\infty Y_\varphi(|f(t)|) dt$ şi

$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} :$ există $c > 0$ astfel încât $M_\varphi(c \cdot f) < \infty\}$.

2.4. Spații Orlicz

Să fixăm o funcție $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty]$, ca în paragraful anterior și fie $Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau$, $t \geq 0$, funcția Young asociată acesteia.

Dacă $f \in \mathcal{M}$, definim $M_\varphi(f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(|f(t)|) dt$ și

$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} :$ există $c > 0$ astfel încât $M_\varphi(c \cdot f) < \infty\}$.

Teoremă

O_φ este un subspațiu liniar în $\mathcal{M}$.

2.4. Spații Orlicz

$$N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

$$N(f) = \begin{cases} \inf\left\{c > 0 \ : \ M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot f\right) \leq 1\right\}, \text{ dacă } \ A_f \neq \varnothing \\ +\infty, \text{ dacă } \ A_f = \varnothing \end{cases}$$

Teoremă

N este o normă generalizată de funcții.

Teoremă

În notațiile de mai sus avem că:

$$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = B_N.$$

2.5. Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Definiție

Spunem că N satisface:
1 - proprietatea (P_1), sau proprietatea Beppo-Levi dacă pentru orice șir crescător de funcții pozitive $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, cu $f_n \nearrow f$ a.p.t., rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

2.5. Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Definiție

Spunem că N satisface:
1 - proprietatea (P_1), sau proprietatea Beppo-Levi dacă pentru orice șir crescător de funcții pozitive $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, cu $f_n \nearrow f$ a.p.t., rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.
2 - proprietatea (P_2), dacă pentru orice mulțime măsurabilă Lebesque, $A \subset [0, \infty)$, cu $m(A) < \infty$ rezultă că $N(\lambda_A) < \infty$ (sau echivalent $\lambda_A \in B$).

2.5. Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Definiție

Spunem că N satisface:

1 - proprietatea (P_1), sau proprietatea Beppo-Levi dacă pentru orice șir crescător de funcții pozitive $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, cu $f_n \nearrow f$ a.p.t., rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

2 - proprietatea (P_2), dacă pentru orice mulțime măsurabilă Lebesque, $A \subset [0, \infty)$, cu $m(A) < \infty$ rezultă că $N(\lambda_A) < \infty$ (sau echivalent $\lambda_A \in B$).

3 - proprietatea (P_3), dacă pentru orice mulțime măsurabilă Lebesque $A \subset [0, \infty)$, cu $m(A) < \infty$ există o constantă $K_A \in (0, \infty)$ astfel încât: $\int\limits_A |f| dm \leq K_A \cdot N(f), \forall f \in \mathcal{M}$.

2.5. Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Teoremă (Fatou)

Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_1), $(f_n)_n \subset B$, $f_n \to f$ a.p.t. și $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B < \infty$, atunci $f \in B$ și avem că $\|f\|_B \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B$.

2.5. Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Teoremă (Fatou)

Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_1), $(f_n)_n \subset B$, $f_n \to f$ a.p.t. și $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B < \infty$, atunci $f \in B$ și avem că $\|f\|_B \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B$.

Teoremă (Teorema Riesz-Fischer)

Fie N o normă generalizată cu proprietățile (P_1) și (P_3). Dacă $(f_n)_n \subset B$ astfel încât $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B < \infty$ atunci șirul $(F_n)_n$, unde $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, $n \geq 0$, este convergent în B.

2.6. Completitudinea spațiilor Orlicz

Teoremă

Norma $N = \|\cdot\|_\varphi$ *verifică proprietățile* (P_1)*,* (P_2) *și* (P_3)*.*

2.6. Completitudinea spațiilor Orlicz

Teoremă

Norma $N = \|\cdot\|_\varphi$ *verifică proprietățile* (P_1), (P_2) *și* (P_3).

Corolar

Spațiul Orlicz $(O_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ *este complet.*

2.6. Completitudinea spațiilor Orlicz

Teoremă

Norma $N = \|\cdot\|_\varphi$ *verifică proprietățile* (P_1), (P_2) *și* (P_3).

Corolar

Spațiul Orlicz $(O_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ *este complet.*

Propoziție

$O_\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

Cap.3. Spații Banach de șiruri

- Scopul acestui capitol este de a prezinta clasa spațiilor Banach de șiruri, clasă din care fac parte și spațiile de tip ℓ^p (spațiul șirurilor scalare p-absolut sumabile). Sunt prezentate aici și spațiile Banach de șiruri invariante la translații cunoscute și sub denumirea de spații Schäffer.

Cap.3. Spații Banach de șiruri

- Scopul acestui capitol este de a prezinta clasa spațiilor Banach de șiruri, clasă din care fac parte și spațiile de tip ℓ^p (spațiul șirurilor scalare p-absolut sumabile). Sunt prezentate aici și spațiile Banach de șiruri invariante la translații cunoscute și sub denumirea de spații Schäffer.
- Este structurat în două secțiuni:
  - 3.1 Spații Banach de șiruri
  - 3.2 Spații Schäffer de șiruri

3.1. Spații Banach de șiruri

Definiție

Numim normă generalizată de șiruri o funcție

$$N : S \to [0, \infty]$$

cu următoarele proprietăți:

(i) $N(s) = 0$ *dacă și numai dacă* $s = 0$;

(ii) *dacă* $|s| \leq |u|$ *atunci* $N(s) \leq N(u)$;

(iii) $N(\alpha \cdot s) = |\alpha| \cdot N(s)$, *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{C}$ *și* $s \in S$ *cu* $N(s) < \infty$;

(iv) $N(s + u) \leq N(s) + N(u)$, *pentru orice* $s, u \in S$.

3.1. Spații Banach de șiruri

Considerăm următoarele clase de spații Banach de șiruri:

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri B cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} F_B(n) = \infty$;

(ii) $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri B cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ și $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{n\}}|_N > 0$;

(iii) $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|\lambda_{\{j-n_0,\ldots,j\}}|_N \geq \varepsilon$, pentru orice $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$.

Remarcă

Este ușor de observat că $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

3.1. Spații Banach de șiruri

Propoziție

Fie $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ o funcție continuă la stânga. Dacă $\varphi\in\mathcal{F}$, atunci:

(i) *Funcția Young Y_φ asociată lui φ este bijectivă;*

(ii) *Funcția fundamentală F_{O_φ} poate fi exprimată în funcție de Y_φ^{-1} prin : $F_{O_\varphi}(n) = \dfrac{1}{Y_\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;*

(iii) $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{N})$;

3.2. Spații Shäffer de șiruri

Definiție

Un spațiu Banach de șiruri $(E, \|\cdot\|_E)$ *se numește spațiu Schäffer de șiruri dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:*

(s_1) $\delta_0 \in E$,

(s_2) *dacă* $f \in E$ *atunci* $Lf, Rf \in E$ *și* $\|Rf\|_E = \|f\|_E$.

3.2. Spații Shäffer de șiruri

Definiție

Un spațiu Banach de șiruri $(E, \|\cdot\|_E)$ se numește spațiu Schäffer de șiruri dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

(s_1) $\delta_0 \in E$,

(s_2) *dacă* $f \in E$ *atunci* $Lf, Rf \in E$ *și* $\|Rf\|_E = \|f\|_E$.

Pentru E un spațiu Schäffer de șiruri, se definesc șirurile $\alpha_E, \beta_E \in \mathcal{S}$ prin

$$\alpha_E(n) = \inf\left\{ c > 0 \, : \, \sum_{k=0}^{n} |f(k)| \leq c\|f\|_E \, , \text{ pentru orice } f \in E \right\} ,$$

$$\beta_E(n) = \|\chi_{\{0,1,\ldots,n\}}\|_E \; ,$$

3.2. Spații Shäffer de șiruri

Propoziție

Dacă $(E, \|\cdot\|_E)$ *este un spațiu Schäffer de șiruri, atunci* $\ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ *cu:*

(i) $\|f\|_E \leq \beta_E(0)\|f\|_1$, *pentru orice* $f \in \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$;

(ii) $\beta_E(0)\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$, *pentru orice* $f \in E$.

Aplicaţii

- Scopul acestui capitol este de a prezenta o aplicaţie a spaţiilor Banach studiate în capitolele anterioare. Este astfel studiată proprietatea de dicotomie a unei familii de evoluţie discretă în ipoteze de tip "intrare-ieşire" în care atât spaţiul funcţiilor de intrare cât şi cel de ieşire sunt spaţii de tip Schäffer.
- Cuprinde o singură secţiune:
  - 3.1 Familii de evoluţie în timp discret.Dicotomii exponenţiale uniforme

4.1. Familii de evoluție în timp discret. Dicotomii exponențiale uniforme

În continuare vom nota prin Δ mulțimea perechilor $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu $m \leq n$, iar prin X vom nota un spațiu Banach fixat.

Definiție

O familie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ de operatori liniari și mărginiți pe X o numim familie de evoluție (în timp discret) dacă

(e_1) $U(n,n) = I$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$,

(e_2) $U(m,n)U(n,n_0) = U(m,n_0)$ *pentru orice* $m,n,n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$.

Dacă, în plus, există $M, \omega \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

(e_3) $\|U(m,n)\| \leq Me^{\omega(m-n)}$ *pentru orice* $(m,n) \in \Delta$,

atunci spunem că $\mathcal{U}$ are creștere exponențială uniformă.

4.1. Familii de evoluție în timp discret. Dicotomii exponențiale uniforme

Definiție

Familia de evoluție $\{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *are o dicotomie exponențială uniformă dacă există o familie de proiectori* $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *și două constante* $N, \nu > 0$ *astfel încât*

(d_1) $U(m,n)P(n) = P(m)U(m,n)$ *pentru orice* $(m,n) \in \Delta$;

(d_2) *pentru fiecare* $(m,n) \in \Delta$, *restricția lui* $U(m,n)$ *de la* $\ker P(n)$ *până în* $\ker P(m)$, *notat cu* $U(m,n)_|$, *este inversabilă;*

(d_3) *pentru orice* $(m,n) \in \Delta$ *și* $x \in X$ *avem:*
$\|U(m,n)P(n)x\| \leq Ne^{-\nu(m-n)}\|P(n)x\|$ *și*
$\|U(m,n)(I-P(n))x\| \geq \frac{1}{N}e^{\nu(m-n)}\|(I-P(n))x\|$.

4.1. Familii de evoluție în timp discret. Dicotomii exponențiale uniforme

Definiție

Fie $E, F \subset X^{\mathbb{N}}$ *două spații Banach și* $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *o familie de evoluție. Perechea* (E, F) *spunem că este admisibilă pentru* $\mathcal{U}$ *dacă pentru orice* $f \in E$*, există* $x \in X$ *astfel încât șirul* $u(\cdot, f, x)$ *definit prin*

$$u(n,f,x) = \begin{cases} x & , \ n = 0 \\ U(n,0)x + \sum_{k=1}^{n} U(n,k)f(k-1) & , \ n \geq 1 \end{cases}$$

aparține lui F.

4.1. Familii de evoluție în timp discret. Dicotomii exponențiale uniforme

Teoremă

Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ două șiruri de spații Schäffer și fie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluție. Presupunem că:

- (h_1) *subspațiul $X_{1,\mathcal{F}}(0)$ este închis și admite un completar închis,*
- (h_2) *perechea $(\mathcal{E}(X), \mathcal{F}(X))$ este admisibilă pentru familia de ev. $\mathcal{U}$*
- (h_3) $\alpha_{\mathcal{E}}(n)\beta_{\mathcal{F}}(n) \to \infty$.

Atunci, familia de evoluție $\mathcal{U}$ are o dicotomie exponențială uniformă. În plus, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$, subspațiul $X_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ coincide cu $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ și admite o completare închisă dată de $X_{2,\mathcal{F}}(n_0) := U(n_0, 0)X_{2,\mathcal{F}}(0)$.

4.1. Familii de evoluție în timp discret. Dicotomii exponențiale uniforme

Teoremă

Dacă familia de evoluție $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *are o dicotomie exponențială uniformă, atunci fiecare pereche* $(\mathcal{E}(X), \mathcal{F}(X))$ *a șirurilor de spații Schäffer cu* $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ *este admisibilă pentru* $\mathcal{U}$.

Propoziție

Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *două șiruri de spații Schäffer, fie* $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *o familie de evoluție și presupunem* (h_1) *și* (h_2) *din prima teoremă a acestei secțiuni. Apoi, pentru orice* $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ *există un unic* $y \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ *astfel încât* $u(\cdot, f, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Vă mulțumesc!