Universitatea de Vest Timişoara

Facultatea de Matematică şi Informatică

Lucrare de licenţă
Clase de spaţii de şiruri şi de spaţii de funcţii şi aplicaţii

Candidat:
Andrei Ioan VANCU

Coordonator ştiinţific:
Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timişoara
2014

Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Specializarea: Matematică - Informatică

Clase de spaţii de şiruri şi de spaţii de funcţii şi aplicaţii

Candidat:
Andrei Ioan VANCU

Coordonator ştiinţific:
Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timişoara
2014

Cuprins

Abstract

Introducere

Se consideră că Analiza Funcţională s-a născut în iunie 1920, deoarece atunci St. Banach a depus la Universitatea Jan Kazimierz din Lvov (pe vremea aceea oraş în Polonia, azi în Ucraina) teza sa de doctorat "*Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégral*". În această teză, care a fost publicată în 1922, Banach a introdus, axiomatic, noţiunea de spaţiu normat complet, o noţiune generală în care, pentru prima dată, au fost înjghebate o structură algebrică (cea de spaţiu liniar) şi una topologică (cea de spaţiu metric). În 1928, Maurice Fréchet (1878 - 1973) a propus ca aceste spaţii normate complete să se numească spaţii Banach.

Astăzi, putem spune că, studiul completitudinii spaţiilor normate, utilizate sau aflate la un moment dat în studiu, constituie o etapă fundamental a fi parcursă înaintea identificării şi a altor proprietăţi particulare ale acestor spaţii. Pe de o parte acest lucru se datorează şi faptului că studiul convergenţei unui şir, în prezenţa proprietăţii de completitudine, implică numai utilizarea termenilor şirului nu şi identificarea apriorii a "posibilei" limite a acestuia. Un alt argument ar fi faptul că orice serie absolut convergentă (de vectori ai unui spaţiu normat complet) este şi convergentă, iar studiul absolut convergenţei se reduce la cazul scalar. Nu ar fi lipsit de importanţă faptul că, în prezenţa proprietăţii de completitudine, sunt posibil a fi utilizate principiile de categorie ale Analizei Funcţionale.

Lucrarea de faţă se încadrează în ideeea descrisă de paragraful anterior, ea propunându-şi a prezenta două clase speciale de spaţii normate complete şi anume spaţiile Banach de funcţii şi spaţiile Banach de şiruri. Aceste clase generalizează spaţiile de tip $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ dar nu se reduc numai la acestea. Această lucrare este structurată pe patru capitole.

Primul capitol, "*Spaţii normate. Spaţii Banach.*", are rolul de a încadra tema lucrării dar şi de introducere a noţiunilor şi rezultatelor generale de utilizate. Se bazează în principal pe cursul de Analiză Funcţională din anul III şi a fost introdus aici pentru a-i conferii lucrării un caracter auto-inclus. În acest fel, cititorul poate parcurge lucrarea fără a face apel la surse exterioare.

Cel de-al doilea capitol, "*Spaţii Banach de funcţii*" introduce, într-o manieră abordabilă, şi studiează, o clasă de spaţii Banach, cunoscute în Analiza Funcţională ca spaţii de funcţii. Este strcturată pe şapte secţiuni (paragrafe) şi are în special rolul de a prezenta spaţiile Orlicz şi proprietatea de completitudine a acestora. Aceste spaţii Banach generalizează spaţiile de tip L^p al funcţiilor absolut p-integrabile Lebesgue. Am folosit aici. în special, notiţele de la cursul susţinut de D-na Conf. Dr. Adina Luminiţa Sasu la studenţii de la Master din anul întâi.

Al treilea capitol ala lucrării, "*Spaţii Banach de şiruri*", este structurat pe două secţiuni şi prezintă clasa de spaţiilor Banach de şiruri, clasă din care fac parte şi spaţiile de tip ℓ^p (spaţiul şirurilor scalare p-absolut sumabile). Sunt prezentate aici şi spaţiile Banach de şiruri invariante la translaţii cunoscute şi sub de numirea de spaţii Schäffer.

Ultimul capitol al lucrării, "*Familii de evoluţie în timp discret. Dichotomie exponenţial uniformă*" este dedicat prezentării unei aplicaţii a spaţiilor Banach studiate în capitolele anterioare. Este astfel studiată proprietatea de dichotomie a unei familii de evoluţie discretă în ipoteze de tip "intrare-ieşire" în care atât spaţiul funcţiilor de intrare cât şi cel de ieşire sunt spaţii de tip Schäffer.

În încheiere doresc să mulţumesc d-nului Lect. Dr. Aurelian Craciunescu, coordonatorul ştiinţific al acestei lucrări de licenţă, pentru sprijinul acordat în elaborarea acesteia.

Capitolul 1

SPAŢII NORMATE. SPAŢII BANACH

1.1 Spaţii normate

Fie X un spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{K}$ ($X = SL(\mathbb{K})$).

Definiţia 1.1.1. O funcţie $N : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte normă pe X dacă:

(n_1) $N(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = \theta$ (vectorul nul al spaţiului X);

(n_2) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, pentru orice $x, y \in X$;

(n_3) $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot N(x)$, pentru orice $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple:

1. $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este o normă (modulul real)
2. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
   $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe $\mathbb{R}^n$
3. $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
   $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe $\mathbb{C}^n$
4. $\|\cdot\|_p : l^p_N(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, x = (x_n) \in l^p_N(\mathbb{K})$ (unde $p \geq 1$)
5. $\|\cdot\|_\infty : l^\infty_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+, \|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 1}|x_n|, x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty_N(\mathbb{R})$
6. $|||\cdot||| : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, |||f||| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ (norma Cebâşev)

7. $\|\cdot\|' : \mathcal{C}'_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, \|f\|' = |f(a)| + \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

8. $\|\cdot\|_1 : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt$

9. $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+, \|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (unde $1 \le p < \infty$)

10. $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+, \|f\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0} \sup\limits_{t\in \complement A} |f(t)|$ (unde $(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură completă)

Remarca 1.1.1. Dacă funcţia $N : X \to \mathbb{R}_+$ verifică doar axiomele (n_2) şi (n_3) vom spune că N este o seminormă pe X.

Remarca 1.1.2. Dacă N este o normă atunci $N(x) > 0$, pentru orice $x \in X \setminus \{\theta\}$.

Remarca 1.1.3. Dacă funcţia $N : X \to \mathbb{R}_+$ este o normă, atunci

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+, \quad d(x, y) = N(x - y)$$

are următoarele proprietăţi:

(d_1) $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

(d_2) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$, pentru orice $x, y, z \in X$;

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$.

Proprietăţile $(d_1), (d_2), (d_3)$ arată că funcţia d de mai sus este o distanţă pe X, numită *distanţa* (*metrica*) generată de norma N. Numărul real pozitiv $d(x, y)$ se va numi distanţa de la x la y şi în plus ea mai verifică şi următoarea proprietate:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \text{ pentru orice } x, y, z \in X,$$

numită proprietatea de invarianţă la translaţii a metricii d.

Din punct de vedere istoric, dar şi deoarece generalizează modulul pe $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, o normă va fi notată $\|\cdot\|$, eventual specificând spaţiile pe care este definită, $\|\cdot\|_X$.

Dacă $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ o normă pe X, $r > 0$, iar $x \in X$, notăm :

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| < r\}$$

numită *bila deschisă de centru "x" şi rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$),

$$\bar{\mathcal{B}}(x,r) = \{y \in X \ : \ \|y-x\| \leq r\}$$

numită *bila închisă de centru "x" şi rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$) şi

$$\mathcal{S}(x,r) = \{y \in X \ : \ \|y-x\| = r\}$$

numită *sfera de centru "x" şi rază "r"*.

Propoziţia 1.1.1. *Dacă $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ atunci familia*

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \{\emptyset\} \cup \{T \subset X / T \neq \emptyset \text{a.î. pentru orice } x \in T, \text{există } r_x > 0 : \mathcal{B}(x, r_x) \subset T\}$$

este o topologie pe X (numită topologia indusă de norma $\|\cdot\|$).

Remarca 1.1.4. Pe un spaţiu normat X sunt corect definite, în sens topologic, noţiunile de limită, convergenţă pentru şir, sau continuitate pentru o funcţie între două spaţii normate. Aceste noţiuni admit însă şi caracterizări speciale în cadrul spaţiilor normate. Caracterizarea convergenţei şirurilor de vectori, dintr-un spaţiu normat poate fi formulată astfel:

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat (topologizat cu topologia din Prop. 1.1.1), iar $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ un şir de vectori din X. În raport cu topologia $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ avem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă există $x \in X$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n \geq n_0$ să avem că $||x_n - x|| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Într-adevăr: *Necesitate.* Pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$ (deschisă). Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $x_n \in \mathcal{B}(x,\varepsilon)]$. Deci, pentru orice $n \geq n_0$, avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Suficienţa. Fie $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$. Există atunci $T \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ cu $x \in T \subset V$. Din caracterizarea mulţimilor deschise în topologia normică rezultă că există $r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subset T \subset V$.

Dar există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $\|x_n - x\| < r$. Deci $x_n \in \mathcal{B}(x,r) \subset V$, pentru orice $n \geq n_0$.

Notăm $\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ spaţiul liniar al tuturor şirurilor convergente de vectori din X. Deci

$$\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset X / \text{există } x \in X : \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0\}.$$

□

Remarca 1.1.5. Asemănător cazului real (sau al lui $\mathbb{R}^n$) vectorul x dat de convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este unic determinat. Altfel spus, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ atunci există unic $x \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Demonstraţie. Într-adevăr: Fie $x, x' \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x'\| = 0$. Atunci

$$0 \leq \|x - x'\| = \|(x - x_n) + (x_n - x')\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - x'\|,$$

pentru orice $n \geq 1$ şi deci $\|x - x'\| = 0 \Rightarrow x - x' = 0$ sau echivalent $x = x'$. $\square$

Unicul vector $x \in X$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, unde $\left((x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}\right)$ se numeşte *limita în X a şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează asemănător cazului scalar cu :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

sau

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x.$$

Remarca 1.1.6. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X astfel încât $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ (adică generează aceeaşi topologie) vom spune că cele două norme sunt *topologic echivalente* şi vom nota:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2.$$

Dacă $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ conform celor de mai sus, vom avea că $\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|_1)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|_2)}$.

Remarca 1.1.7. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X atunci cele doua norme sunt echivalente dacă şi numai dacă există $m, M > 0$ astfel încât

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1,$$

pentru orice $x \in X$.Vom spune despre cele două norme că sunt *complet echivalente.*

Propoziţia 1.1.2. *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, atunci, pentru orice $x \in X$ avem că $\mathcal{B}(x, r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.*

Demonstraţie. Fie $x \in X$ şi $r > 0$. Pentru orice $y \in \mathcal{B}(x,r)$ rezultă că $\|x-y\| < r$ şi deci, pentru $r^{'} = r - \|x-y\| > 0$ avem că $\mathcal{B}(y,r^{'}) \subset \mathcal{B}(x,r)$.

Într-adevăr: pentru $z \in \mathcal{B}(y,r^{'})$ rezultă că $\|y-z\| < r^{'}$. Dar

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < r^{'} + \|x-y\| = r,$$

pentru orice $z \in \mathcal{B}(x,r)$. Deci $\mathcal{B}(y,r^{'}) \subset \mathcal{B}(x,r)$ ceea ce implică faptul că $\mathcal{B}(x,r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. □

Propoziţia 1.1.3. *Fie* $(X,\|\cdot\|)$ *un spaţiu normat, iar* $X_0 \subset X$ *un subspaţiu liniar închis al său.* $(\bar{X}_0 = X_0)$. *Aplicaţia :*

$$\|\cdot\|_{X/X_0} : X/X_0 \to \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{x}\|_{X/X_0} = \inf_{y\in\hat{x}} \|y\|_X$$

este o normă pe X/X_0.

Demonstraţie. Într-adevar: Dacă $\|\hat{x}\|_{X/X_0} = 0$ atunci $\inf\limits_{y\in\hat{X}} \|y\|_X = 0$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $y_n \in \hat{x}$ astfel încât $\|y_n\| < \dfrac{1}{n}$.

Dar $y_n \in \hat{x} = x + X_0$ şi deci există $x_n \in X_0$ astfel încât $y_n = x + x_n$. Atunci

$$\|x_n - (-x)\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

şi deci $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_X}{\longrightarrow}} -x$. Deoarece X_0 este închis rezultă că $-x \in \bar{X}_0 = X_0$, sau echivalent $x \in \bar{X}_0 = X_0$ ceea ce arată că $\hat{x} = \hat{\theta}$, ceea ce arată că este satisfăcută axioma (n_1).

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in X/X_0$. Dacă $x^{'} \in \hat{x}, y^{'} \in \hat{y}$ atunci $x^{'} + y^{'} \in \hat{x} + \hat{y} = x \hat{+} y$ şi deci

$$\|x \hat{+} y\|_{X/X_0} \leq \|x^{'} + y^{'}\|_X \leq \|x^{'}\|_X + \|y^{'}\|_X.$$

Pentru $y^{'}$ fixat, prin trecere la inf pentru $x^{'}$ din $\hat{x}$ rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|y^{'}\|_X,$$

pentru orice $y^{'} \in \hat{y}$. Prin trecere la inf după $y^{'}$ din $\hat{y}$ rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|\hat{y}\|_{X/X_0}$$

şi deci este satisfăcută şi axioma (n_2)

Fie $\hat{x} \in X/X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$. Deoarece $\lambda\cdot\hat{x} = \lambda \hat{\cdot} x$ rezultă că $\lambda\cdot\hat{x} = \{\lambda\cdot x^{'}/x^{'} \in \hat{X}\}$. Atunci

$$\begin{aligned}\|\lambda\cdot\hat{x}\|_{X/X_0} &= \inf_{x^{'}\in\hat{x}} \|\lambda\cdot x^{'}\|_X = \inf_{x^{'}\in\hat{x}} |\lambda|\cdot\|x^{'}\|_X = |\lambda|\cdot \inf_{x^{'}\in\hat{X}} \|x^{'}\|_X = \\ &= |\lambda|\cdot\|\hat{x}\|_{X/X_0}\end{aligned}$$

ceea ce arată că este verificată şi axioma (n_3). □

Observaţia 1.1.1. Spaţiul normat $\left(X/X_0, \|\cdot\|_{X/X_0}\right)$ se numeşte *spaţiu normat cât*, indus de subspaţiul închis X_0.

Observaţia 1.1.2. Dacă X_0 nu este subspaţiu închis, atunci aplicaţia $\|\cdot\|_{X/X_0}$ definită mai sus este doar o seminormă pe X/X_0.

Remarca 1.1.8. În orice spaţiu normat, orice şir convergent este mărginit. Mai precis, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci există $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$.

Demonstraţie. Într-adevăr: Cum $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ rezultă că există $x \in X$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - x\| < 1$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|,$$

pentru orice $n \geq n_0$.

Notând $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \|x_3\| \cdots \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\} > 0$ avem că

$$\|x_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \geq 1$. □

1.2 Spaţii Banach. Caracterizare.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ spaţiu liniar normat şi $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$.

Definiţia 1.2.1. Şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ este convergent în spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ şi vom nota $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, dacă există $x \in X$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, rezultă că $\|x_n - x\| < \varepsilon$ sau dacă există $x \in X$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarca 1.2.1. Înainte de a studia convergenţa unui şir, cu ajutorul definiţiei anterioare, identificăm a priori limita sa x.
Acest lucru poate genera unele dificultăţi practice. Există însă spaţii normate, pentru care studiul convergenţei unui şir ia în calcul numai termenii acestuia. Aceste spaţii se numesc, *spaţii normate complete* sau *spaţii Banach* şi le vom introduce în continuare.

Observaţia 1.2.1. Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (adică distanţa dintre oricare 2 termeni este oricât de mică, începând de la un rang suficient de mare).

Demonstraţie. Într-adevăr: Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varepsilon > 0$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$.
Atunci, pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_0 + x_0 - x_n\| \\ &\leq \|x_m - x_0\| + \|x_n - x_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\square$

Definiţia 1.2.2. Şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ este fundamental în spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ şi vom nota $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n, m \geq n_0$ rezultă $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Notând cu $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ spaţiul tuturor şirurilor fundamentale din spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$, conform remarcii anterioare, rezultă

$$\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$$

(adică orice şir convergent este si fundamental). În general, incluziunea reciprocă nu are loc.

Definiţia 1.2.3. Un spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$ pentru care $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, se numeşte *spaţiu normat complet* sau *spaţiu Banach*.

Remarca 1.2.2. $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach, dacă şi numai dacă $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$.

Remarca 1.2.3. Pentru un spaţiu normat, stabilirea proprietaţii de completitudine, se face de obicei individual sau pe clase, însă odată stabilită această proprietate, studiul convergenţei unui şir devine mult mai facil de efectuat.

Enumerăm mai jos o listă de spaţii a căror proprietate de completitudine ne va fi utilă în continuare.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$;
2. $(\mathbb{K}^n, N)$ -N o normă arbitrară ;
3. $\left(\mathcal{C}_{\mathbb{K}}, |||\cdot|||\right)$ - unde $\mathbb{K}$ este spaţiu topologic compact;
4. $\left(\mathcal{C}^1_{[a,b]}, \|\cdot\|'\right), \|f\|' = |f(a)| + \left|\left|\left|f'\right|\right|\right|, f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$;
5. $\left(l^p_N(\mathbb{K}), \|p\|\right)$;

6. $\left(L^p(X,\mathcal{A},\mu),\|\cdot\|_p\right), \|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, unde $1 \leq p < \infty$;

7. $\left(L^\infty(X,\mathcal{A},\mu),\|\cdot\|_\infty\right)$, $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0} \sup\limits_{x\in \complement A} |f(x)|$

Ca şi exemple de spaţii normate care nu sunt complete putem reamintii aici $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ sau $\left(\mathcal{C}_{[a,b]},\|\cdot\|_1\right), \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Propoziţia 1.2.1. *Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spaţiu normat, iar $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$.*

(a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci există $M > 0$ astfel încât $\|x\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$ (i.e. şirul este mărginit).

(b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ şi există $(x_{k_n})_{n\geq 1} \subset (x_n)_n$, $(x_{k_n})_{n\geq 1} \in \mathcal{C}(X,\|\cdot\|)$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}(X,\|\cdot\|)$ (un şir fundamental ce conţine un subşir convergent este el însuşi convergent).

Observaţia 1.2.2. $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că pentru orice $n \geq n_0$ şi $p \in \mathbb{N}$ rezultă că $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ (i.e. $(\|x_{n+p} - x_n\|)_{n\geq 1}$ converge la 0 uniform în raport cu p).

Următorul rezultat este foarte util în caracterizarea completitudinii unui spaţiu normat.

Propoziţia 1.2.2. *Spaţiul normat $(X,\|\cdot\|)$ este complet dacă şi numai dacă orice serie absolut convergentă este şi convergentă.*

Demonstraţie. "$\supset$" Avem că $(X,\|\cdot\|)$ - spaţiu Banach. Fie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n \in \mathcal{A}$ adică, pentru care $\sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\| \in \mathcal{C}_{(\mathbb{R},|\cdot|)}$.

Dacă notăm $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, n \geq 1$ avem că:

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k\geq n+1} \|x_k\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

uniformă în raport cu p, ceea ce arată $(s_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$.

"$\subset$" Avem că $(X,\|\cdot\|)$ este un spaţiu normat cu proprietatea că orice serie absolut convergentă este şi convergentă.

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$. Vom arăta că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, arătând că el conţine un subşir convergent.

- Pentru $\varepsilon = 1$, rezultă că există $n_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < 1$, pentru orice $m, n \geq n_1$. Deci $\|x_m - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^0}$, pentru orice $m \geq n_1$.
- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, rezultă că există $n_2 > n_1$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}$, pentru orice $m, n \geq n_2$. Rezultă că $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^1}$.
- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, rezultă că există $n_3 > n_2$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}$, pentru orice $m, n \geq n_3$. Atunci $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{2^2}$.

Construim inductiv subşirul $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ cu proprietatea că

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

pentru orice $k \geq 2$. Atunci

$$\sum_{k \geq 2} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 < \infty,$$

ceea ce arată că seria $\sum\limits_{k \geq 2} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Dar

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{k=2}^{m} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + \cdots + x_{n_m} - x_{n_{m-1}} = \\ &= x_{n_m} - x_{n_1} \end{aligned}$$

şi deci şirul $(s_m + x_{n_1})_{m \geq 2} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$ sau echivalent $(x_{n_m})_{m \geq 2} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$. Conform Propoziţiei 1.2.1 rezultă că şi şirul $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$. $\square$

1.3 Operatori liniari şi continui pe spaţii Banach

Vom trece în continuare în revistă câteva proprietaăţi ale operatorilor mărginiţi pe spaţii Banach.

Definiţia 1.3.1. Fie $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, două $\mathbb{K}$ spaţii normate. O funcţie

$$T : X \to Y$$

se numeşte *aplicaţie liniară* de la X în Y (*morfism de spaţii liniare* sau *operator liniar*), dacă:

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, pentru orice $x, y \in X$ (proprietatea de aditivitate)

(ii) $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$, pentru orice $x \in X$, şi $\alpha \in \mathbb{K}$ (proprietatea de omogenitate)

ceea ce este echivalent cu faptul că

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),$$

pentru orice $x, y \in X$, şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Vom nota în continuare cu

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \ : \ T\text{- liniară}\}.$$

Remarca 1.3.1. În raport cu operaţiile

1. $(T + S)_{(x)} = T(x) + S(x)$
2. $(\alpha T)_{(x)} = \alpha \cdot T(x)$

avem că $\Big(\mathcal{L}(X, Y), +, \cdot\Big)$ este un $\mathbb{K}$ spaţiu liniar.

Remarca 1.3.2. Dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ rezultă că $T(\theta_X) = \theta_Y$.

Remarca 1.3.3. Dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, atunci

$$T\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot T(x_k).$$

Remarca 1.3.4. Dacă $X = \mathbb{K}^m, Y = \mathbb{K}^n$ (unde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau $\mathbb{R}$), atunci $T \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n\Big)$ dacă şi numai dacă există o matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$T(x)^t = A \cdot x^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Remarca de mai sus este motivul pentru care, pentru $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, convenim să notăm Tx în loc de $T(x)$.

Remarca 1.3.5. Dacă $Y = \mathbb{K}$, se notează $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^{\#}$(sau X^a) spaţiu ce se numeşte *dualul algebric* al lui X, iar elementele sale, $f \in X^{\#}$, se numesc *funcţionale liniare.*

Următoarea propoziţie caracterizează continuitatea operatorilor liniari între spaţii normate.

Propoziţia 1.3.1. *Fie X, Y două spaţii normate, iar $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) T este continuă în $x_0 = \theta_X$;

(b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < \varepsilon$, pentru orice $\|x\| < \delta$;

(c) Există $M > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y \leq M\|x\|_X$, pentru orice $x \in X$;

(d) T este continuă pe X

Demonstraţie. "$(a) \Rightarrow (b)$" Cum $T \in \mathcal{C}_{\theta_X}$ rezultă că pentru orice vecinătate V a lui $T\theta_X = \theta_Y$, există U o vecinătate a lui θ_X astfel ca $T \cdot U \subset V$.

Alegând $V = \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$, rezultă că există $U \in \mathcal{V}_{\theta_X}$ cu proprietatea că $TU \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$. Cum $U \in \mathcal{V}_{\theta_X}$, rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât $\mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset U$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există deci $\delta > 0$ astfel ca

$$T\mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon),$$

sau echivalent, pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| < \delta$ avem că $\|Tx\|_Y < \varepsilon$.

"$(b) \Rightarrow (c)$" Pentru $\varepsilon = 1$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < 1$, pentru orice $\|x\|_X < \delta$.

Dacă $x \in X$ atunci $\left\| \dfrac{\delta}{\|x\|_X + \dfrac{1}{n}} \cdot x \right\|_X < \delta$ şi deci

$$\left\| T\Big(\frac{\delta}{\|x\|_X + \dfrac{1}{n}} \Big) \right\|_Y < 1,$$

pentru orice $n \geq 1$. Atunci

$$\frac{\delta}{\|x\|_X + \dfrac{1}{n}} \cdot \|T_x\|_Y < 1,$$

pentru orice $n \geq 1$ sau echivalent

$$\|T_x\|_Y < \frac{1}{\delta}\left(\|x\|_X + \frac{1}{n} \right),$$

pentru orice $n \geq 1$. Făcând n să tindă către $+\infty$ rezultă că

$$\|T_x\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X,$$

pentru orice $x \in X$, ceea ce demonstrază (c) cu $M = \dfrac{1}{\delta}$.

"$(c) \Rightarrow (d)$" Din liniaritate operatorului T obţinem că

$$||Tx - Tx_0|| \leq M||x - x_0||,$$

pentru orice $x, x_0 \in X$. Fixând $x_0 \in X$, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem că:

$$TB_X\big(x_0, \frac{\varepsilon}{M}\big) \subset B_Y\big(Tx_0, \varepsilon\big),$$

ceea ce demonstrază continuitatea operatorului T în orice $x_0 \in X$.

"$(d) \Rightarrow (a)$" Evident. $\square$

Notăm prin $\mathcal{B}(X, Y)$ mulţimea acelor operatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ cu proprietatea că există un $M > 0$ astfel încât $\|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X$ (numită *spaţiul operatorilor liniari şi mărginiţi de la X în Y*).

Remarca 1.3.6. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ dacă şi numai dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi continuu pe X.

Propoziţia 1.3.2. *Fie X, Y două spaţii normate peste acelaşi corp $\mathbb{K}$.*

(a) $\Big(\mathcal{B}(X,Y),+,\cdot\Big)$ *este un subspaţiu liniar în* $\mathcal{L}(X,Y)$.

(b) *Dacă pentru* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *notăm*

$$\|T\|_{op} = \inf\{M \geq 0 \ \ \textit{cu proprietatea că } \|T_x\| \leq M \cdot \|x\|_X, x \in X\},$$

atunci aplicaţia

$$\mathcal{B}(X,Y) \ni T \longrightarrow \|T\|_{op} \in \mathbb{R}_+$$

este o normă pe $\mathcal{B}(X,Y)$ *având proprietatea* $\|T_x\|_Y \leq \|T\|_{op} \cdot \|x\|_X$, *pentru orice* $x \in X$.

În plus, dacă $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *şi* $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, *atunci* $S \circ T \in \mathcal{B}(X,Z)$ *şi* $\|S \circ T\|_{op} \leq \|S\|_{op} \cdot \|T\|_{op}$.

Demonstraţie. Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ vom nota în continuare

$$\mathcal{A}_T = \{M \geq 0 \ : \ \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, x \in X\}.$$

(a) Este imediat ţinând cont de faptul că suma a două funcţii continue şi produsul cu un scalar al unei funcţii continue sunt funcţii continue.

(b) Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ avem că $\mathcal{A}_T$ este nevidă şi inclusă în $\mathbb{R}_+$, de unde rezultă că există $\|T\|_{\text{op}} = \inf \mathcal{A}_T \in \mathbb{R}_+$. Fie $x \in X$ fixat. Deoarece $\|T\|_{\text{op}} = \inf \mathcal{A}_T$ rezultă că există $(M_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}_T$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \|T\|_{\text{op}}$. Cum $\|Tx\| \leq M_n \cdot \|x\|_X$, pentru $n \longrightarrow \infty$ rezultă că

$$\|T_x\|_Y \leq \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X,$$

pentru orice $x \in X$

Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ astfel încât $\|T\|_{\text{op}} = 0$ rezultă că $\|Tx\|_Y = 0$, pentru orice $x \in X$. Deci $Tx = \theta$, pentru orice $x \in X$, sau echivalent $T = 0$.

Pentru $S, T \in \mathcal{B}(X,Y)$, avem că:

$$\begin{aligned}\|(S+T)x\|_Y &= \|Sx+Tx\|_Y \leq \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \\ &\leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X + \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X = \\ &= (\|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}})||x||_X,\end{aligned}$$

pentru orice $x \in X$, ceea ce arată că $\|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}} \in \mathcal{A}_{S+T}$ şi deci

$$\|S+T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}.$$

Fixăm $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$. Avem

$$\|(\alpha \cdot T)_x\|_Y = \|\alpha \cdot T_x\|_Y = |\alpha| \cdot \|T_x\|_Y \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X,$$

pentru orice $x \in X$. Deci $|\alpha| ||T||_{op} \in \mathcal{A}_{\alpha T}$ şi atunci

$$\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}},$$

pentru orice $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dacă $\alpha = 0$ rezultă că$\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}$ ($\|0\|_{\text{op}} = 0$).

Dacă $\alpha \neq 0$, punând în inegalitatea de mai sus $\dfrac{1}{\alpha}$ în loc de scalarul α şi operatorul αT în loc de T, obţinem

$$\left\| \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot T) \right\|_{\text{op}} \leq \left| \frac{1}{\alpha} \right| \cdot \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}}$$

sau echivalent

$$\|T\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}}.$$

Rezultă deci şi că $\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \geq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}$ şi atunci se obţine că

$$\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}},$$

pentru orice $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.

Am obţinut astfel că $\|\cdot\|_{\text{op}}$ este o normă pe $\mathcal{B}(X, Y)$.

Datorită faptului că, compusa a două funcţii continue este întotdeauna continuă rezultă că $S \circ T \in \mathcal{B}(X, Z)$, pentru orice $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ şi $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Mai mult,

$$\|(S \circ T)(x)\|_Z = \|S(Tx)\|_Z \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X,$$

pentru orice $x \in X$, rezultă că $\|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \in \mathcal{A}_{S \circ T}$ şi atunci $\|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}}$.

□

Observaţia 1.3.1. Pentru $Y = X$ notăm $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$, iar pentru $Y = \mathbb{K}$, atunci notăm $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, numit *dualul topologic* al spaţiului normat X. Elementele sale poartă numele de funcţionale liniare şi continue, iar pentru $f \in X'$ avem deci că

$$\|f\|_{\text{op}} = \inf\{M > 0 \ : \ |f(x)| \leq M \cdot \|x\|_X, x \in X\}.$$

Observaţia 1.3.2. Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ avem că

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_x\|_Y = \sup_{\|x\|=1} \|T_x\|_Y = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|T_x\|_Y}{\|x\|_X}$$

Observaţia 1.3.3. Convenim în continuare să notăm fiecare din normele ce apar fară indicele aferent (deoarece nu există pericol de confuzie).

$$\begin{aligned} x \in X \quad &, \quad ||x|| = \|x\|_X \\ y \in Y \quad &, \quad ||y|| = \|y\|_Y \\ T \in \mathcal{B}(X,Y) \quad &, \quad ||T|| = \|T\|_{\text{op}} \end{aligned}$$

Propoziţia 1.3.3. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat,* $X \neq (0)$*, iar* $x_0 \in X\backslash\{0\}$. *Atunci există* $f \in X^{'}$, $\|f\| = 1$ *(deci nenulă), astfel încât* $f(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstraţie. Fixăm $x_0 \in X$ cu $x_0 \neq \theta$ şi definim aplicaţia

$$f_0 : Sp\{x_0\} = \{\lambda x \ : \ \lambda \in \mathbb{K}\} \to \mathbb{K}, \quad f_0(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|.$$

Este imediat că f_0 este o aplicaţie liniară pe $Sp\{x_0\}$. Mai mult,

$$|f_0(\lambda \cdot x_0)| = |\lambda \cdot \|x_0\|| = |\lambda| \cdot \|x_0\| = \|\lambda \cdot x_0\|,$$

de unde rezultă că

$$|f_0(x)| \leq \|x\|,$$

pentru orice $x \in Sp\{x_0\}$. Din Teorema de prelungire a lui Hahn Banach, rezultă că există $f : X \to \mathbb{R}$ o aplicatie liniară astfel încât $f_{|_{Sp\{x_0\}}} = f_0$ şi $|f(x)| \leq \|x\|$, pentru orice $x \in X$. Deci $f \in X^{'}$, iar

$$f(x_0) = f_0(x_0) = f_0(1 \cdot x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|.$$

Pentru orice $x \in X$ avem că $|f(x)| < \|x\|$ ceea ce arată că $1 \in \mathcal{A}_f$ şi deci $\|f\| \leq 1$. Dar

$$\|x_0\| = |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|$$

ceea ce arată că $1 \leq \|f\|$ şi deci $\|f\| = 1$.

Orice funcţională f construită ca mai sus pentru un vector nenul, verifică pentru un $x_0 = 0$ condiţiile cerute. □

Consecinţa 1.3.1. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $X \neq (0)$. Atunci:

(a) $X^{'} \neq (0)$

(b) Pentru orice $x \in X$, rezultă că $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$.

Demonstraţie. (a) Este o consecinţă directă a propoziţiei anterioare.

(b) Pentru $x \in X$ cu $x \neq \theta$ fixat (dacă $x = \theta$ egalitatea este evidentă), avem că

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|,$$

pentru orice $f \in X'$, cu $\|f\| = 1$. Rezultă că

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Din Propoziţia 1.3.3, rezultă că există $f_x \in X'$ cu $\|f_x\| = 1$ astfel încât $f_x(x) = \|x\|$. Atunci

$$\|x\| = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Rezultă că $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. □

Consecinţa 1.3.2. Fie $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ două spaţii normate nenule. Atunci $\mathcal{B}(X, Y) \neq (0)$, adică există operatori liniari şi continui, nenuli, de la X la Y.

Demonstraţie. Fixăm $x_0 \in X \setminus \{0\}$ şi $y_0 \in Y \setminus \{0\}$. Din Propoziţia. 1.3.3, rezultă că există $f \in X'$ cu $f \neq 0$. Aplicaţia

$$T : X \to Y, \quad Tx = f(x)y_0,$$

este liniară şi nenulă ($y_0 \neq 0$) şi

$$\|T_x\| = \|f(x) \cdot y_0\| = |f(x)| \cdot \|y_0\| \leq \|f\| \cdot \|y_0\| \cdot \|x\|,$$

pentru orice $x \in X$. Rezultă că $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ cu $T \neq 0$. □

Propoziţia 1.3.4. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar închis şi $x_0 \in X \setminus X_0$. Atunci există $f \in X'$ cu $f(x_0) = 1$ şi $f_{|X_0} = 0$. În plus, $\|f\| = \dfrac{1}{d(x_0, X_0)}$.*

Demonstraţie. Notăm $r = d(x_0, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|x_0 - y\|$. Cum $\bar{X}_0 = X_0$ şi $x_0 \notin X_0$ rezultă că există $r > 0$ cu proprietatea că

$$\mathcal{B}(x_0, r) \cap X_0 = \emptyset.$$

Definim

$$f_0 : X_0 \oplus Sp\{x_0\} \to \mathbb{K}, \quad f_0(y + \lambda \cdot x_0) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Avem că f_0 este liniară, iar pentru $y \in X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}^*$ avem:

$$\|y + \lambda \cdot x_0\| = |\lambda| \cdot \underbrace{\|x_0 - \Big(\underbrace{-\frac{y}{\lambda}}_{\in X_0}\Big)\|}_{\geq r} \geq |\lambda| \cdot r.$$

Rezultă că $|\lambda| \leq \frac{1}{r} \cdot \|y + \lambda \cdot x_0\|$ şi deci

$$|f_0(y + \lambda \cdot x_0)| = |\lambda| \leq \frac{1}{r}\|y + \lambda \cdot x_0\|,$$

pentru orice $y \in X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$, sau echivalent

$$|f_0(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|z\|,$$

pentru orice $z \in X_0 \oplus Sp\{x_0\}$. Conform Teoremei de prelungire Hahn-Banach, rezultă că există $f : X \to \mathbb{K}$, liniară astfel încât

$$f_{|X_0 \oplus Sp\{x_0\}} = f_0$$

şi

$$|f(x)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|x\|,$$

pentru orice $x \in X$. Deci $f \in X'$ şi $\|f\| \leq \frac{1}{r}$.

Dacă $y \in X_0$ rezultă că $f(y) = f_0(y) = f_0(y + 0 \cdot x_0) = 0$. Deci $f_{|X_0} = 0$.

Cum $f(x_0) = f_0(x_0) = f_0(0 + 1 \cdot x_0) = 1$, rezultă că $f(x_0) = 1$.

Deoarece $r = \inf\limits_{y \in X_0} \|x_0 - y\|$, rezultă că există $(y_n)_{n \geq 1} \subset X_0$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\| = r$. Cum $|f(x_0 - y_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\|$, rezultă că

$$1 \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\| \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \|f\| \cdot r,$$

iar din $\|f\| \cdot r \geq 1$, rezultă că $\|f\| \geq \frac{1}{r}$ şi deci $\|f\| = \frac{1}{r}$. $\square$

Observaţia 1.3.4. Propoziţia 1.3.3, Consecinţa 1.3.1, Consecinţa 1.3.2 şi Propoziţia 1.3.4, se numesc consecinţe ale Teoremei lui Hahn-Banach, în cazul spaţiilor normate.

Următorul rezultat caracterizează completitudinea spaţiului normat $(\mathcal{B}(X, Y)$.

Propoziţia 1.3.5. *Date X,Y două spaţii normate nenule, avem că $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op})$ este spaţiu Banach dacă şi numai dacă $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. "$\supset$": Avem că $\mathcal{B}(X,Y)$ este complet. Fie $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)}$. Fixăm $f \in X'$, cu $\|f\| = 1$ şi definim

$$T_n : X \to Y,\ T_n(x) = f(x) \cdot y_n,\ n \geq 1.$$

Este imediat că $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. În plus,

$$\|T_n x\| = \|f(x) \cdot y_n\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| \leq \|y_n\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = \|y_n\| \cdot \|x\|,$$

pentru orice $x \in X$, ceea ce arată că $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\|T_n\|_{\text{op}} \leq \|y_n\|$. Alegând un $x \in X \setminus \{0\}$ astfel încât $f(x) = \|x\|$, obţinem că:

$$\|T_n x\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| = \|x\| \cdot \|y_n\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

de unde rezultă că $\|y_n\| \leq \|T_n\|$ şi deci $\|T_n\| = \|y_n\|$. Dar

$$\|T_n - T_m\|_{\text{op}} = \|y_n - y_m\|,$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{\text{op}}\right)}$. Deci $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{\text{op}}\right)}$, adică există $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ astfel încât

$$\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cum $\|T_n x - T_x\| \leq \|T_n - T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = T_x$, pentru orice $x \in X$.

Alegând $x \in X$ astfel încât $f(x) = 1$, rezultă că $y_n = T_n x \longrightarrow Tx$ şi deci $(y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$. Deci $\mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$ ceea ce arată că $(Y, \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach.

"$\subset$": Avem că $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach ($\mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$). Fie $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{\text{op}}\right)}$. Pentru $x \in X$ avem că

$$0 \leq \|T_m x - T_n x\|_Y = \|(T_m - T_n)x\|_Y \leq \|T_m - T_n\|_{\text{op}} \cdot \|x\| \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de unde rezultă că $(T_n x)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$, pentru orice $x \in X$. Definim

$$T : X \to Y,\ T_x = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Datorită proprietăţilor de liniaritate ale operatorului "lim", rezultă că T este un operator liniar. Într-adevăr

$$\begin{aligned} T(\alpha x+\beta y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to\infty}(\alpha T_n x+\beta T_n y) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n x + \lim_{n\to\infty} \beta T_n y = \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n y = \alpha T x + \beta T y. \end{aligned}$$

Pentru $\varepsilon = 1$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|T_m - T_n\| \leq 1$, pentru orice $m, n \geq n_0$. Deci $\|T_m x - T_n x\| \leq \|x\|$, pentru orice $m, n \geq n_0$, iar când $m \longrightarrow \infty$, avem că $\|T_x - T_n x\| \leq \|x\|$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $x \in X$. Rezultă că $T - T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y)$ şi cum $T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y)$ obţinem că $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Pentru $\varepsilon > 0$, avem că există $n_0 \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_0$, sau echivalent, $\|T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$, pentru orice $m, n \geq 0$ şi $x \in X$.

Pentru $x \in X$ fixat, atunci când $m \longrightarrow \infty$ avem că $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $x \in X$. Rezultă că $\|T_n - T\|_{\text{op}} \leq \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$ ceea ce arată că $T_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{B}(X,Y)}{\longrightarrow}} T$. Deci $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{\left(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\text{op}}\right)}$ obţinându-se astfel că

$\square$

Consecinţa 1.3.3. Dacă X este un spaţiu normat, atunci $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ este un spaţiu Banach.

Capitolul 2

SPAŢII BANACH DE FUNCŢII

2.1 Normă generalizată de funcţii

În continuarea vom nota prin ”m” măsură Lebesque de pe axa reală, iar prin $\mathcal{M}$, spaţiu liniar al funcţiilor $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ măsurabile Lebesque în care identificăm funcţiile egale a.p.t.

Definiţia 2.1.1. O aplicaţie $N : \mathcal{M} \to [0,\ \infty]$ se numeşte *normă generalizată de funcţii* dacă:

1. $N(f) = 0$ dacă şi numai dacă $f = 0$ a.p.t;
2. dacă $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$ atunci $N(f) \leqslant N(g)$;
3. $N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$;
4. $N(f + g) \leqslant N(f) + N(g)$, pentru orice $f, g \in \mathcal{M}$;

Definiţia 2.1.2. Dacă N este o normă generalizată atunci

$$B_N = \{f \in \mathcal{M}\ :\ N(f) < \infty\}$$

se numeşte *spaţiu de funcţii asociat normei N*.

Remarca 2.1.1. Pentru orice normă generalizată N avem că B este un spaţiu liniar.

Demonstraţie. Dacă $f, g \in B_N$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci $N(\alpha f + \beta g) \leqslant N(\alpha f) + N(\beta g) = |\alpha| \cdot N(f) + |\beta| \cdot N(g) < \infty$ ceea ce arată că $\alpha f + \beta g \in B_N$ $\square$

Remarca 2.1.2. Dacă N este o normă generalizată atunci B_N este un ideal în $\mathcal{M}$ în sensul că dacă $f \in \mathcal{M}$, $g \in B_N$ şi $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$, atunci $f \in B$.

Propoziţia 2.1.1. *Dacă N este o normă generalizată şi $B = B_N$, aplicaţia*

$$|| \cdot ||_B : B \to \mathbb{R}_+, \ \|f\|_B := N(f),$$

este o normă pe B numită normă de funcţie.

Demonstraţie. Axiomele normei rezultă imediat din propietaţiile $(1), (3)$ şi (4) din Definiţia 2.1.1 $\square$

Remarca 2.1.3. Dacă N este o normă generalizată şi $B = B_N$, atunci $(B, \|\cdot\|_B)$ este spaţiu vectorial normat.

Definiţia 2.1.3. Vom numi *spaţiu Banach de funcţii* orice spaţiu Banach de forma $(B, \|\cdot\|_B)$ unde $B = B_N$, iar N este o normă generalizată.

Remarca 2.1.4. Fie B un spaţiu Banach de funcţii şi $f \in \mathcal{M}$, $g \in B$, iar $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t $t \in \mathbb{R}_+$ atunci $f \in B$ şi $\|f\|_B \leqslant \|g\|_B$.

Notăm $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spaţiilor Banach de funcţii B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$, unde pentru $A \subset \mathbb{R}_+$, λ_A notează funcţia caracteristică a mulţimii A, adică

$$\lambda_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \lambda_A(t) = \begin{cases} 1 & ,t \in A \\ 0 & ,t \notin A \end{cases}$$

(deci acele spaţii Banach de funcţii ce conţin funcţia caracteristică a oricărui interval de forma $[0, t)$)

Exemplul 2.1.1. Dacă $N(f) = \|f\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$ atunci: Dacă $p \in [1, \infty)$ atunci:

$$N(\lambda_{[0,t)}) = \left(\int_0^\infty \lambda^p_{[0,t)}(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ceea ce arată că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$ şi deci $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+)$. Dacă $p = \infty$ atunci $N(f) = \|f\|_\infty$ deci

$$N(\lambda_{[0,t)}) = 1,$$

pentru orice $t > 0$ şi deci $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$ ceea ce arată că $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R})$.

Definiţia 2.1.4. Dacă $B \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}_+)$, atunci funcţia

$$F_B : (0,\ \infty) \to (0,\ \infty), \quad F_B(t) = \|\lambda_{[0,\,t)}\|_B,$$

se numeşte *funcţia fundamentală* a spaţiului B.

Propoziţia 2.1.2. *Pentru orice spaţiu Banach de funcţii $B \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}_+)$ avem că funcţia sa fundamentală F_B este o funcţie monotonă.*

Demonstraţie. Dacă $0 < t_1 < t_2$ atunci $\lambda_{[0,\,t_1]} \leqslant \lambda_{[0,\,t_2]}$ şi deci $F_B(t_1) \leqslant F_B(t_2)$. □

Exemplul 2.1.2. Pentru $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$ cu $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avem

$$F_B(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{p}}, \text{dacă } p \in [1, \infty) \\ 1, \text{dacă } p = \infty \end{cases},$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2 Clase de spaţii de funcţii

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spaţiilor Banach de funcţii $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că
$$\lim_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$$
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spaţiilor Banach de funcţii $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_{[n,n+1)}\|_B > 0$$

Exemplul 2.2.1. Pentru $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, din Exemplul 2.1.1., rezultă că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dacă şi numai dacă $p \in [1, \infty)$.

Remarca 2.2.1. Evident $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Exemplul 2.2.2. Exemplul următor va arăta că inlcuziunea reciprocă de mai sus nu este adevărată. Aplicaţia

$$N : \mathcal{M} \to [0,\ \infty], \quad N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt$$

este o normă generalizată, iar spaţiul $B = B_N$ este din $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

Într-adevăr: Pentru a arăta că N este o normă generalizată vom verifica fiecare din axiomele din Definiţia 2.1.1.

Fie $f \in \mathcal{M}$ astfel ca $N(f) = 0$. Atunci

$$\int_n^{n+1} |f(t)|dt = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi deci $f = 0$ a.p.t. pe $[n,\, n+1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $f = 0$ a.p.t.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$. Avem:

$$\begin{aligned} N(\alpha f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |\alpha \cdot f(t)|dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot |\alpha| \int_n^{n+1} |\cdot f(t)|dt = |\alpha| N(f) \end{aligned}$$

Fie $f, g \in \mathcal{M}$, cu $|f(t)| \le |g(t)|$ a.p.t , $t \in \mathbb{R}_+$. Cum

$$\frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt \le \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)|dt,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin însumare rezultă că $N(f) \le N(g)$.

Fie $f, g \in \mathcal{M}$. Cum $|f(t) + g(t)| \le |f(t)| + |g(t)|$, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ rezultă că:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t) + g(t)|dt \le \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt + \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)|dt,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Însumând, rezultă că $N(f + g) \le N(f) + N(g)$.

Am obţinut astfel că N este o normă generalizată. Să remarcăm faptul că $L(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \subset B_N$ dar incluziunea este strictă căci funcţia

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \lambda_{[n,,n+1)}(t),$$

este din B_N dar nu şi din $L(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

În continuare vom arăta că spaţiul liniar $B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) \leq \infty\}$, normat de $\|f\|_B = N(f)$, este complet.

Fie $(f_n)_n \in \mathcal{F}_{(B,\|\cdot\|_B)}$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f_n - f_p\|_B < \varepsilon,$$

pentru orice $n, p \geq m_o$, sau echivalent

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_{n}^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \varepsilon,$$

pentru orice$n, p \geq m_0$. Dacă $k \in \mathbb{N}$ fixat şi $\delta > 0$ rezultă că există $m_\delta \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{1}{k+1} \cdot \int_{k}^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_{n}^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \frac{\delta}{k+1},$$

pentru orice $n, p \geq m_0$ şi deci

$$\int_{k}^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \delta,$$

pentru orice $n, p \geq m_\delta$. Atunci $(f_n)_n \in \mathcal{F}_{(L^1_{[k,\, k+1]}, \|\cdot\|_1)}$ deci şi convergent în acest spaţiu, Există atunci $\varphi^k \in L^1_{[k,\, k+1]}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{L^1_{[k,k+1]}} \varphi^k$ de unde obţinem că există $(f_{n_j})_j \subset (f_n)_n$ cu $f_{n_j} \to \varphi^k$ a.p.t. pe $[k,\, k+1]$.

Definim aplicaţia

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(t) = \varphi^k(t), t \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}.$$

Rezultă că există $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_n$ cu $f_{n_i} \to f$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$.

Atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_{n}^{n+1} |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon,$$

pentru orice $n, i \geq m_0$. Pentru $m_i \to \infty$ rezultă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_{n}^{n+1} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m_0$. De aici deducem că $f_n - f \in B$, pentru orice $n \geq m_0$ şi cum $f_n \in B$ rezultă că $f = -(f_n - f) + f_n \in B$. De asemenea avem că

$$|f_n - f|_B < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m_0$ de unde rezultă că $f_n \xrightarrow{B} f$ ceea ce arată că spaţiul normat B este complet. Deci $(B, \|\cdot\|_B)$ este un spaţiu Banach de funcţii.

În plus

$$N(\lambda_{[0,t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} \lambda_{[0,t)}(s)ds \leq \sum_{n=0}^{[t]+1} \frac{1}{n+1} < \infty,$$

pentru orice $t > 0$ ceea ce arată că $\lambda_{[0,t)} \in B$, pentru orice $t > 0$, sau echivalent $B \in Q(\mathbb{R}_+)$.

Mai mult,

$$F_B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \int\limits_{k}^{k+1} \lambda_{[0,n+1)}(s)ds = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h+1},$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{t\to\infty} F_B(t) = \infty$ şi deci $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

De asemenea,

$$\|\lambda_{[n,n+1)}\|_B = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h+1} \cdot \int\limits_{h}^{h+1} \lambda_{[n,n+1)}(s)ds = \frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_{[n,n+1)}\| = 0$, ceea ce arată faptul că $B \notin \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

2.3 Funcţii Young

O clasă specială de spaţii Banach de funcţii (spaţiile Orlicz) poate fi introdusă cu ajutorul funcţiilor Young. Prezentarea acestor funcţii constituie obiectul acestei secţiuni.

Să presupunem că am fixat o funcţie

$$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty],$$

monoton crescătoare pe $(0,\, \infty)$, continuă la stânga pe $(0,\, \infty)$ şi neidentic nulă sau $+\infty$ pe intervalul $(0,\, \infty)$ (i.e. $\varphi_{|(0,\,\infty)} \neq 0$ şi $\varphi_{|(0,\,\infty)} \neq \infty$).

Definiţia 2.3.1. Funcţia

$$Y_\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty], \quad Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

se numeşte *funcţia Young* asociată lui φ.

Remarca 2.3.1. Este imediat (din proprietăţiile integralei Riemann) că $Y_\varphi(0) = 0$ şi Y_φ este o funcţie monoton crescătoare pe intervalul $[0,\, \infty)$.

Teorema 2.3.1. *Funcţia Y_φ este o funcţie convexă pe $[0,\, \infty)$.*

Demonstraţie. Deoarece Y_φ este o funcţie continuă pe $[0,\, \infty)$ este suficient să arătăm că aceasta este convexă în sens Jensen, adică

$$Y_\varphi\Big(\frac{t+s}{2}\Big) \leq \frac{Y_\varphi(t) + Y_\varphi(s)}{2},$$

poentru orice $t, s \geq 0$.

Fie deci $t, s \in [0,\, \infty)$ şi, pentru a fixa ideile, să convenim că $s < t$.

Dacă $Y_\varphi(t) = \infty$ sau $Y_\varphi(s) = \infty$ atunci inegalitatea anterioară este evidentă.

Presupunem în continuare că $Y_\varphi(t), Y_\varphi(s) < \infty$. Cum $s \leq \dfrac{s+t}{2} \leq t$ rezultă că

$$Y_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq Y_\varphi(t) < \infty.$$

Deoarece funcţia φ este pozitivă şi crescătoare, vom avea:

$$
\begin{aligned}
Y_\varphi(t) &+ Y_\varphi(s) - 2\cdot Y_\varphi\left(\frac{t+s}{2}\right) = \\
&= \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau - \\
&- 2\cdot\left(\int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau\right) = \\
&= \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau - \int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau - 2\cdot\int\limits_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau)d\tau = \\
&= \int\limits_s^t \varphi(\tau)d\tau - 2\cdot\int\limits_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau)d\tau = \\
&= \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - 2\cdot\int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau = \\
&= \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau \geq 0
\end{aligned}
$$

$\square$

2.4 Spaţii Orlicz

Să fixăm o funcţie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, ca în paragraful anterior şi fie

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau,\ t \geq 0,$$

funcţia Young asociată acesteia.

Dacă $f \in \mathcal{M}$, definim:

$$M_\varphi(f) = \int_0^\infty Y_\varphi(|f(t)|)dt$$

şi

$$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} :\ \text{există } c > 0 \text{ astfel încât } M_\varphi(c \cdot f) < \infty\}.$$

Teorema 2.4.1. *O_φ este un subspaţiu liniar în $\mathcal{M}$.*

Demonstraţie. Fie $f, g \in O_\varphi$. Atunci există $c_1, c_2 > 0$ cu proprietatea că $M_\varphi(c_1 \cdot f) < \infty, M_\varphi(c_2 \cdot f) < \infty$. Vom nota: $c = \dfrac{1}{2}\min\{c_1, c_2\}$. Atunci

$$c \cdot |f(t) + g(t)| \leq c|f(t)| + c|g(t)| \leq \begin{cases} c_1|f(t)|, \text{ dacă } |f(t)| \geq |g(t)| \\ c_2|g(t)|, \text{ dacă } |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

ceea ce implică

$$Y_\varphi(c|f(t) + g(t)|) \leq \begin{cases} Y_\varphi(c_1|f(t)|), \text{ dacă } |f(t)| \geq |g(t)| \\ Y_\varphi(c_2|g(t)|), \text{ dacă } |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

şi deci

$$Y_\varphi(c|f(t) + g(t)|) \leq Y_\varphi(c_1|f(t)|) + Y_\varphi(c_2|g(t)|),$$

pentru orice $t \geq 0$. Rezultă că

$$M_\varphi\Big(c(f+g)\Big) \leq M_\varphi(c_1 f) + M_\varphi(c_2 g) < \infty$$

ceea ce arată că $f + g \in O_\varphi$.

Fie $f \in O_\varphi$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă $\lambda = 0$ atunci $\lambda f = 0$, deci $Y_\varphi(\lambda f) = 0$ ceea ce arată că $M_\varphi(\lambda f) = 0$.

Dacă $\lambda \neq 0$, cum $f \in O_\varphi$ rezultă că există $c > 0$ astfel încât $M_\varphi(cf) < \infty$. Atunci $\lambda f \in O_\varphi$. $\square$

Pentru $f \in \mathcal{M}$ definim

$$A_f = \left\{ c > 0 \ : \ M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot f\right) \le 1 \right\}.$$

Remarca 2.4.1. Dacă $c \in A_f$ atunci $[c, \infty) \subset A_f$.

Demonstraţie. Pentru $\tilde{c} > c$ rezultă că

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\tilde{c}} f\right) = \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\tilde{c}} |f(t)|\right) dt \le M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) \le 1.$$

□

În notaţiile de mai sus definim aplicaţia

$$N : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad N(f) = \begin{cases} \inf A_f, \text{ dacă } A_f \neq \varnothing \\ +\infty, \text{ dacă } A_f = \varnothing \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. *N este o normă generalizată de funcţii.*

Demonstraţie. Vom verifica pe rând fiecare din cele 4 axiome ce definesc norma generalizată (Definiţia 2.1.1).

(1) $N(f) = 0$ *dacă şi numai dacă* $f = 0$ *a.p.t.*

Dacă $f \in \mathcal{M}$ astfel ca $N(f) = 0$, atunci $A_f \neq \varnothing$ şi $\inf A_f = 0$. Există deci un şir $(c_n) \subset A_f$ cu

$$N(f) < c_n < N(f) + \frac{1}{n}$$

şi

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c_n} f\right) \le 1.$$

"$\subset$": Dacă $f = 0$ a.p.t. $Y_\varphi\left(\frac{1}{c}|f(t)|\right) = 0$ a.p.t. pentru orice $c > 0$ şi deci rezultă că $M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) = 0 \le 1$ pentru orice $c > 0$ ceea ce arată că $A_f = (0, \infty)$ şi deci $N(f) = 0$.

"$\supset$": Fie $f \in \mathcal{M}$ astfel ca $N(f) = 0$. Vom presupune prin reducere la absurd că $f \neq 0$ a.p.t. Rezultă că există o mulţime măsurabilă $A \subset (0, \infty)$ cu $m(A) > 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $|f(t)| \ge \delta$ pentru orice $t \in A$. Conform remarcii anterioare avem că $A_f = (0, \infty)$ şi deci, pentru orice $c > 0$ avem că $M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) \le 1$. Atunci

$$1 \geq M_\varphi\Big(\frac{1}{c}f\Big) = \int_0^\infty Y_\varphi\Big(\frac{1}{c}|f(t)|\Big)dt \geq \int_A Y_\varphi\Big(\frac{\delta}{c}\Big)dt = Y_\varphi\Big(\frac{\delta}{c}\Big) \cdot m(A),$$

ceea ce arată că $Y_\varphi\Big(\frac{\delta}{c}\Big) \leq \frac{1}{m(A)}$. Însă

$$Y_\varphi = \int_0^{\frac{\delta}{c}} \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)},$$

pentru orice $c > 0$, de unde rezultă (făcând $c \searrow 0$) că

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)}.$$

Cum însă φ este pozitivă şi monoton crescătoare pe $[0, \infty)$ rezultă că $\varphi_{|_{(0,\infty)}} = 0$ a.p.t. Contradicţie.

Presupunerea fiind falsă rezultă că $f = 0$ a.p.t.

(2) *Pentru* $|f(t)| \leq |g(t)|$ *a.p.t.* $t \geq 0$ *rezultă că* $N(f) \leq N(g)$.

Fie deci $f, g \in \mathcal{M}$ astfel ca $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \geq 0$.

Dacă $N(g) = \infty$ atunci afirmaţia este evidentă.

Dacă $N(g) < \infty$ rezultă că există $c > 0$ astfel încât

$$M_\varphi\Big(\frac{1}{c}g\Big) \leq 1.$$

Este suficient să arătăm că $A_g \subset A_f$.
Într-adevăr: dacă $c_1 \in A_g$, atunci

$$M_\varphi\Big(\frac{1}{c_1}f\Big) \leq M_\varphi\Big(\frac{1}{c_1}g\Big) \leq 1,$$

ceea ce arată că $A_f \neq \varnothing$ şi $A_g \subset A_f$.

(3) *Pentru* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi* $f \in \mathcal{M}$ *cu* $N(f) < \infty$, *rezultă că* $N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.

Pentru $\lambda = 0$ afirmaţia este adevărată conform primei axiome mai sus verificată.

Fie acum $\lambda \neq 0$. Arătăm că $A_{\lambda f} = |\lambda| A_f$.

"$\supset$": Dacă $c \in A_{\lambda_f}$ rezultă că $M_\varphi\Big(\frac{\lambda}{c}f\Big) \leq 1$. Fie $c_1 = \frac{c}{|\lambda|}$. Atunci

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) = M_\varphi\left(\frac{|\lambda|}{c}\right) = M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c}f\right) \le 1,$$

ceea ce arată că $c_1 \in A_f$ şi deci $c = c_1|\lambda| \in |\lambda|A_f$ sau, echivalent, $A_{\lambda f} \subset |\lambda|A_f$.

"$\subset$": Fie $c \in A_f$. Avem că $|\lambda| \cdot c \in A_{\lambda_f}$. Într-adevăr:

$$M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda|c}\lambda f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda|c}|\lambda| f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \le 1$$

de unde rezultă că $|\lambda|c \in A_{\lambda_f}$. Atunci $|\lambda|A_f \subset A_{\lambda_f}$ şi deci $A_{\lambda_f} \neq \varnothing$ şi $\inf A_{\lambda_f} = |\lambda| \inf A_f$ sau echivalent $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.

(4) *Dacă* $f, g \in \mathcal{M}$ *atunci* $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

Fie $f, g \in \mathcal{M}$.

Dacă $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty$ atunci proprietatea este evident satisfăcută.

Dacă $N(f), N(g) < \infty$ atunci $A_f, A_g \neq \varnothing$. Arătăm că $A_f + A_g \subset A_{f+g}$.

Fie $c_1 \in A_f$ şi $c_2 \in A_g$. Atunci $M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right)$, $M_\varphi\left(\frac{1}{c_2}g\right) \le 1$. Pentru orice $t \ge 0$ vom avea:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)| &\le \frac{1}{c_1+c_2}|f(t)| + \frac{1}{c_1+c_2}|g(t)| = \\ &= \frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|g(t)|}{c_2}\end{aligned}$$

şi cum Y_φ este o funcţie monoton crescătoare, rezultă că

$$\begin{aligned}Y_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)|\right) &\le Y_\varphi\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2}\frac{|g(t)|}{c_2}\right) \le \\ &\le \frac{c_1}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|f(t)|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|g(t)|}{c_2}\right)\end{aligned}$$

ceea ce implică

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}(f+g)\right) \le \frac{c_1}{c_1+c_2}M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2}M_\varphi\left(\frac{1}{c_2}g\right) \le \frac{c_1+c_2}{c_1+c_2} = 1.$$

Deci $c_1 + c_2 \in A_{f+g}$ şi astfel implicaţia de mai sus este verificată. Dar atunci vom avea $A_{f+g} \neq \varnothing$ şi $\inf A_{f+g} \le \inf A_f + \inf A_g$ ceea ce arată că are loc (4).

Din (1)-(4) rezultă că N este normă generalizată. $\square$

Deoarece N este o normă generalizată, putem considera spaţiul de funcţii asociat acesteia:

$$B_N = \{f \in \mathcal{M} \ : \ N(f) < \infty\} = \{f \in \mathcal{M} : A_f \neq \varnothing\}.$$

Teorema 2.4.3. *În notaţiile de mai sus avem că:*

$$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = B_N.$$

Demonstraţie. "$\supset$": Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$ rezultă că $A_f \neq \varnothing$ şi există $c > 0$ astfel încât $M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 < \infty$ sau, echivalent $f \in O_\varphi$.

"$\subset$": Pentru $f \in O_\varphi$ rezultă că exsită $c > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty$. Deosebim două cazuri:

Dacă $M_\varphi(cf) = 0 \leq 1$ atunci $\frac{1}{c} \in A_f$ şi deci $A_f \neq \varnothing$ ceea ce arată că $N(f) < \infty$

Dacă $M_\varphi(cf) > 0$ atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu

$$n_0 \geq M_\varphi(cf) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(c|f(t)|)dt.$$

Dar

$$\begin{aligned}
Y_\varphi(c|f(t)|) &= \int\limits_0^{c|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau = \\
&= \sum_{j=1}^{n_0} \int\limits_{\frac{(j-1)c}{n_0}|f(t)|}^{\frac{jc}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau \geq n_0 \int\limits_0^{\frac{c}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau = \\
&= n_0 Y_\varphi\left(\frac{c}{n_0}|f(t)|\right) \Rightarrow n_0 M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq M_\varphi(cf) \leq n_0,
\end{aligned}$$

ceea ce arată că $M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq 1$ şi deci $\left(\frac{c}{n_0}\right)^{-1} \in A_f$ adică $A_f \neq \varnothing$ sau echivalent, $N(f) < \infty$. $\square$

Din Teorema 2.4.2 rezultă că aplicaţia

$$\|\cdot\|_\varphi : O_\varphi \to \mathbb{R}_+, \quad \|f\|_\varphi = \inf\left\{c > 0 \ : \ M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1\right\},$$

este o normă pe spaţiul liniar (real) O_φ. Această normă poartă numele de *norma Orlicz asociată funcţiei* φ, iar spaţiul normat $(O_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ se numeşte *spaţiul Orlicz asociat funcţiei* φ. Cele de mai sus arată că spaţiul normat $(O_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ este un spaţiu de funcţii.

Remarca 2.4.2. Mai sus avem că

$$O_\varphi = \left\{ f \in \mathcal{M} : \text{ există } c > 0 \text{ cu } M_\varphi\Big(\frac{1}{c} f\Big) < \infty \right\}.$$

Definind şi

$$Q_\varphi = \{ f \in \mathcal{M} \ : \ M_\varphi(f) < \infty \}$$

în general avem că $Q_\varphi \subsetneqq O_\varphi$.

Într-adevăr: considerând funcţia

$$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t \in [0,1] \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

rezultă că

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t \in [0,1] \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

Dar pentru funcţia

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(t) = 2$$

avem că $M_\varphi(f) = \infty$, dar $M_\varphi\left(\frac{1}{2} f\right) = 0 < \infty$.

2.5 Proprietăţi de completitudine ale spaţiilor de funcţii

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta câteva condiţii suficiente pentru completitudinea spaţiilor de funcţii.

Vom presupune în continuare fixată

$$N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

ca o normă generalizată de funcţii şi vom nota

$$B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\},$$

spaţiu de funcţii asociat, iar cu $\|f\|_B = N(f)$, $f \in B$, norma asociată.

Remarca 2.5.1. $(B, \|\cdot\|_B)$ este un spaţiu vectorial (real) normat

Remarca 2.5.2. Avem că $f \in B$ dacă şi numai dacă $|f| \in B$. În plus, $\|f\|_B = \|\,|f|\,\|_B$.

Demonstraţie. Necesitatea: Dacă $f \in B$, conform axiomei (2) din Definiţia 2.1.1 (căci $\big|\,|f|\,\big| \leq |f|$), rezultă că $|f| \in B$ şi $N(|f|) \leq N(f)$.

Suficienţa: Dacă $f \in \mathcal{M}$ cu $|f| \in B$, tot din Definiţia 2.1.1, axioma (2) (căci $|f| \leq \big|\,|f|\,\big|$) , rezultă că $f \in B$ şi $N(f) \leq N(|f|)$.

Astfel $\|f\|_B = N(f) = N(|f|) = \|\,|f|\,\|_B$. □

Definiţia 2.5.1. Spunem că N satisface:

- proprietatea (P_1), sau proprietatea Beppo-Levi dacă pentru orice şir crescător de funcţii pozitive $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, cu $f_n \nearrow f$ a.p.t., rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

- proprietatea (P_2), dacă pentru orice mulţime măsurabilă Lebesque, $A \subset [0, \infty)$, cu $m(A) < \infty$ rezultă că $N(\lambda_A) < \infty$ (sau echivalent $\lambda_A \in B$).

- proprietatea (P_3), dacă pentru orice mulţime măsurabilă Lebesque $A \subset [0, \infty)$, cu $m(A) < \infty$ există o constantă $K_A \in (0, \infty)$ astfel încât:

  $$\int_A |f| dm \leq K_A \cdot N(f),$$

  pentru orice $f \in \mathcal{M}$.

Remarca 2.5.3. Dacă N satisface (P_2), atunci pentru orice $A \subset [0, \infty)$ măsurabilă Lebesque, rezultă că $\lambda_A \in B$. Rezultă atunci că $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

Remarca 2.5.4. Inegalitatea ce defineşte proprietatea (P_3) este evidentă pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) = \infty$. De aceea sintagma "pentru orice $f \in \mathcal{M}$" poate fi înlocuită cu "pentru orice $f \in B$".

Remarca 2.5.5. Dacă N satisface proprietatea (P_3) atunci pentru orice $f \in B$ şi orice mulţime măsurabilă $A \subset [0, \infty)$, de măsură finită,rezultă că $f\lambda_A \in L(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Remarca 2.5.6. Notând cu $\mathcal{E}$ spaţiul tuturor funcţiilor măsurabile, finit etajate, $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, cu etaje de masură finită, dacă N satisface proprietatea (P_3), atunci $\mathcal{E} \subset B$.

Demonstraţie. Pentru $s \in \mathcal{E}$ avem că

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \lambda_{Ak},$$

unde $A_k \subset [0, \infty)$ sunt măsurabile Lebesque $m(A_k) < \infty$, pentru orice $k = \overline{1, n}$. Deoarece $\lambda_{A_k} \in B$ şi B este un spaţiu liniar, rezultă că $s \in B$. $\square$

Exemplul 2.5.1. Să considerăm spaţiile de funcţii $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ cu norma $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$.

Pentru $p = 1$, proprietatea (P_3) este satisfăcută cu $K_A = 1$.

Pentru $p \in (1, \infty)$ şi $A \subset [0, \infty)$ finit măsurabilă Lebesque, conform inegalităţii lui Cauchy-Buniakovsky-Schwartz, avem:

$$\int_A |f|dm = \int_{\mathbb{R}_+} |f| \cdot \lambda_A dm \leq (\int_{\mathbb{R}_+} |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_{\mathbb{R}_+} \lambda_A{}^q dm)^{\frac{1}{q}} = (m(A))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p,$$

pentru orice $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, unde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Pentru $p = \infty$, dacă $A \subset [0, \infty)$ este măsurabilă Lebesque cu $m(A) < \infty$ rezultă că

$$\int_A |f|dm \leq K_A \cdot \|f\|_\infty,$$

pentru orice $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, unde

$$K_A = \begin{cases} m(A) & , \quad m(A) > 0 \\ 1 & , \quad m(A) = 0 \end{cases}$$

În concluzie, toate spaţiile de funcţii $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ au proprietăţile (P_1), (P_2) şi (P_3).

Propoziţia 2.5.1. *Dacă norma generalizată N verifică proprietatea (P_3) şi $f_n \to f$ în B, atunci pentru orice mulţime măsurabilă Lebesque $A \subset [0, \infty)$ cu $m(A) < \infty$, există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ cu proprietatea că $f_{n_k} \to f$ a.p.t. pe A.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_n \subset B$ cu proprietatea că există $f \in B$ astfel ca $f_n \xrightarrow{B} f$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_B = 0$. Fixăm $A \subset [0, \infty)$ măsurabilă Lebesque cu $m(A) < \infty$ şi $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm mulţimile

$$A_n = \{t \in A \ : \ |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}.$$

Atunci

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_A |f_n - f| dm \geq \int\limits_{A_n} \frac{1}{\varepsilon}|f_n - f| dm \geq \int\limits_{A_n} 1 dm = m(A_n),$$

ceea ce arată că

$$m(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_A |f_n - f| dm \leq \frac{1}{\varepsilon} K_A N(f_n - f) = \frac{1}{\varepsilon} K_A \|f_n - f\|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Deci şirul $(f_n)_n$ converge în măsură la f pe mulţimea A, ceea ce arată că există un subşir $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ convergent *a.p.t.* la f pe A. □

Corolarul 2.5.2. *Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_3), atunci pentru orice $f_n \to f$ în B există $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ cu $f_{n_k} \to f$ a.p.t.*

Demonstraţie. Rezultă din Propoziţia 2.5.1, folosind descompunerea

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)$$

şi un procedeu de diagonalizare. □

Propoziţia 2.5.3. *Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_3) şi $N(f) < \infty$, atunci f este finită a.p.t. (altfel spus, orice $f \in B$ este finită a.p.t.).*

Demonstraţie. Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$, vom nota

$$\begin{aligned} A &= \{t \in \mathbb{R}_+ \ : \ |f(t)| = \infty\} \\ A_n &= \{t \in [n, n+1) \ : \ |f(t)| = \infty\}. \end{aligned}$$

Atunci $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dacă $t \in A_n$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrar atunci $|f(t)| \geq k$ şi deci

$$k \cdot m(A_n) \leq \int\limits_{A_n} |f| dm \leq \int\limits_{[n, n+1)} |f| dm \leq K_n \cdot N(f).$$

Rezultă că $k \cdot m(A_n) \leq K_n \cdot N(f)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Făcând $k \to \infty$ rezultă că $m(A_n) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $m(A) = 0$ adică f este finită a.p.t. $\square$

Propoziţia 2.5.4. *Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_1) atunci pentru orice şir crescător de funcţii pozitive $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$, cu $f_n \nearrow f$ a.p.t., una din afirmaţiile de mai jos este adevărată:*

(a) $f \notin B$ *şi* $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\|_B = \infty$

(b) $f \in B$ *şi* $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\|_B = \|f\|_B$.

Demonstraţie. Din proprietatea (P_1) rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} N(f_n) = N(f)$. Atunci $f \in B$ dacă şi numai dacă $N(f) < \infty$. $\square$

Lemă 2.5.5. *Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale pozitive, $\alpha_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k$, $\beta_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k$, $(n \in \mathbb{N})$, $l = \underline{\lim}\limits_{n \to \infty} x_n$ şi $L = \overline{\lim}\limits_{n \to \infty} x_n$. Atunci:*

(i) *există* $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = l$

(ii) *există* $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = L$.

Demonstraţie. (i) Cum $\{x_k \ : \ k \geq n+1\} \subset \{x_k \ : \ k \geq n\}$, rezultă că $\inf\limits_{k \geq n} x_k \leq \inf\limits_{k \geq n+1} x_k$ sau echivalent $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă deci că există $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n \overset{not}{=} \alpha \in [0, \infty]$.

Cum l este un punct limită al şirului $(x_n)_n$, rezultă că există un subşir $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = l$. Dar $\alpha_{k_n} \leq x_{k_n}$, pentu orice $n \in \mathbb{N}$ şi deci $\alpha \leq l$.

Vom arăta că are loc şi inegalitatea inversă.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ există $k_n \geq n$ astfel încât

$$\alpha_{k_n} \leq x_{k_n} \leq \alpha_{k_n} + \frac{1}{n}.$$

Cum $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$ rezultă că α este un punct limită al şirului $(x_n)_n$ şi deci $\alpha \geq l$ (l este cel mai mic punct limită al şirului $(x_n)_n$), ceea ce încheie demonstraţia.

(ii) Cum $\{x_k \,:\, k \geq n+1\} \subset \{x_k \,:\, k \geq n\}$, rezultă că $\inf\limits_{k\geq n+1} x_k \leq \inf\limits_{k\geq n} x_k$ sau echivalent $\beta_n \geq \beta_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că şirul $(\beta_n)_n$ este descrescător. Rezultă deci că există $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \overset{not}{=} \beta \in [0, \infty]$.

Dar L este un punct limită al şirului $(x_n)_n$ şi deci există un subşir $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = L$. Dar $\beta_{k_n} \geq x_{k_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi deci $\beta \geq L$.

Arătăm că are loc şi inegalitatea inversă.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ există $k_n \geq n$ astfel încât

$$\beta_{k_n} - \frac{1}{n} \leq x_{k_n} \leq \beta_{k_n}.$$

Cum $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$, iar, de mai sus, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \beta$, rezultă că β este un punct limită al şirului $(x_n)_n$ şi deci $\beta \leq L$ (L este cel mai mare punct limită al şirului $(x_n)_n$), ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Teorema 2.5.6 (Fatou)**.** *Dacă norma generalizată N are proprietatea (P_1), $(f_n)_n \subset B$, $f_n \to f$ a.p.t. şi $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B < \infty$, atunci $f \in B$ şi avem că $\|f\|_B \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|_B$.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_n \subset B$ ca în enunţ. Definim

$$h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad h_n(t) = \inf_{m\geq n} |f_m(t)|.$$

Atunci $0 \leq h_n \leq h_{n+1}$.

Demonstrăm în continuare că $h_n \to |f|$ a.p.t.

Cum $f_n \to f$ a.p.t. rezultă că $|f_n| \to |f|$ a.p.t.. Fie

$$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : (|f_n(t)|)_n \text{ convergent }\}$$

Atunci $m(\mathbf{C}A) = 0$, iar pentru $t \in A$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, din definiţia lui $h_n(t)$, avem că există $m_n > n$ astfel încât

$$h_n(t) \leq |f_{m_n}(t)| \leq h_n(t) + \frac{1}{n}.$$

Rezultă că $h_n(t) \to |f(t)|$ şi deci $h_n \to |f|$ pe A (deci a.p.t.).

Dar $0 \leq h_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $h_n \nearrow |f|$. Conform proprietăţii (P_1) rezultă că $N(h_n) \nearrow N(|f|)$.

Cum $h_n \leq |f_m|$, pentru orice $n \leq m$, rezultă că $N(h_n) \leq N(|f_m|)$, pentru orice $m \geq n$. Atunci $N(h_n) \leq \inf\limits_{m \geq n} N(|f_m|)$ şi deci, conform lemei anterioare

$$\lim_{n\to\infty} N(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geq n} N(|f_n|)\Big) = \varliminf_{n\to\infty} N(|f_n|).$$

Însă $f_n \in B$ şi atunci

$$N(|f_n|) = N(f_n) = \|f_n\|_B \to \|f\|_B \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_B < \infty,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Teorema 2.5.7. (Teorema Riesz-Fischer) *Fie N o normă generalizată cu proprietăţile (P_1) şi (P_3). Dacă $(f_n)_n \subset B$ astfel încât $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B < \infty$ atunci şirul $(F_n)_n$, unde $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, $n \geq 0$, este convergent în B.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_n \subset B$ ca în enunţ, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \|f_k\|$, $(n \geq 0)$, şi $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$. Deoarece $f_n \in B$ rezultă că $|f_n| \in B$, pentru orice $n \geq 0$ şi deci $S_n \in B$, pentru orice $n \geq 0$. Atunci $(S_n)_n$ este un şir crescător de funcţii pozitive din B, convergent (în B) la S. Conform proprietăţii (P_1), rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n\|_B = \|S\|_B.$$

Dar

$$\|S_n\|_B = \left\| \sum_{k=0}^{n} \|f_n\| \right\|_B \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_B.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n\|_B \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B < \infty.$$

Conform teoremei anterioare, rezultă că $S \in B$ şi

$$\|S\|_B \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B.$$

Conform prorietăţii (P_3) şi Propoziţiei 2.5.3, rezultă că S este finită a.p.t.. Este corect definită (ca element din $\mathcal{M}$) funcţia

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Cum $|F_n| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |f_k|$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că

$$|F(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| = S(t), \;\text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+.$$

Dar $S \in B$ şi deci $F \in B$ cu $\|F\|_B \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B$. □

Corolarul 2.5.8. *Fie N o normă generalizată cu proprietăţile (P_1) şi (P_3). Atunci spaţiul normat $(B, \|\cdot\|_B)$ este complet.*

Demonstraţie. Conform teoremei anterioare, în spaţiul normat $(B, \|\cdot\|_B)$ avem că orice serie absolult convergentă este şi convergentă. Conform Propoziţiei 1.2.2, rezultă completitudinea acestui spaţiu □

2.6 Completitudinea spaţiilor Orlicz

Vom arăta în această secţiune că orice spaţiu Orlicz este complet. Mai întâi să specificăm notaţiile utilizate (de fapt aceleaşi ca în secţiunea 2.4.

Fie aplicaţia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ monoton crescătoare şi continuă la stânga pe $[0, \infty)$, neidentic nulă sau infinit pe $(0, \infty)$. Reamintim că funcţia Young asociată funcţie φ este

$$Y_\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty], Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Pentru orice $f \in \mathcal{M}$ am notat

$$M_\varphi(f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(|f|)dm,$$

şi s-a definit spaţiul Orlicz

$$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} \ : \ \text{există } c > 0 \text{ cu } \mathcal{M}_\varphi(cf) < \infty\}$$

înzestrat cu norma

$$\|f\|_\varphi = \inf\left\{c > 0 \ : \ \mathcal{M}_\varphi\Big(\frac{1}{c}f\Big) \leq 1\right\}.$$

Remarca 2.6.1. După cum am văzut în Secţiunea 2.5, dacă pentru $f \in \mathcal{M}$ considerăm mulţimea

$$A_f = \left\{c > 0 \ : \ \mathcal{M}_\varphi\Big(\frac{1}{c}f\Big) \leq 1\right\},$$

atunci

$$N : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad N_f = \begin{cases} \inf A_f & , \quad \text{dacă } A_f \neq \varnothing \\ \infty & , \quad \text{dacă } A_f = \varnothing \end{cases},$$

este o normă generalizată, iar

$$O_\varphi = B_N = \{f \in \mathcal{M} \ : \ N(f) < \infty\}$$

şi $\|f\|_\varphi = N(f)$, pentru orice $f \in O_\varphi$.

Începem studiul completitudinii spaţiilor Orlicz prin:

Propoziţia 2.6.1. *Dacă $f \in O_\varphi$ şi $\|f\|_\varphi > 0$ atunci* $M_\varphi\left(\frac{1}{\|f\|_\varphi} f\right) \leq 1.$

Demonstraţie. Pentru $f \in O_\varphi$ ca în enunţ, rezultă că $\|f\|_\varphi = N(f) \in (0, \infty)$. Dar $N(f) = \inf A_f$ şi deci există $c_n \in (0, \infty)$ cu $c_n \searrow N(f)$. Atunci

$$\frac{1}{c_n}|f(t)| \nearrow \frac{1}{N(f)}|f(t)|$$

şi cum funcţia Young Y_φ este crescătoare, rezultă că

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{c_n}|f(t)|\right) \nearrow Y_\varphi\left(\frac{1}{N(f)}|f(t)|\right).$$

Conform Teoremei convergenţei monotone, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} M_\varphi\left(\frac{1}{c_n} f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)} f\right).$$

Dar $c_n \in A_f$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi deci $M_\varphi\left(\frac{1}{c_n} f\right) \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Făcând $n \to \infty$, rezultă că

$$M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)} f\right) \leq 1,$$

sau echivalent

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\|f\|_\varphi} f\right) \leq 1.$$

□

Remarca 2.6.2. Fie $f \in O_\varphi$ cu $\|f\|_\varphi > 0$. Atunci $\|f\|_\varphi \in A_f$.

Teorema 2.6.2. *Norma $N = \|\cdot\|_\varphi$ verifică proprietăţile (P_1), (P_1) şi (P_3).*

Demonstraţie. Verificăm proprietatea (P_1). Fie $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$ cu proprietăţile

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1},\ f_n \nearrow f \text{ a.p.t.}$$

Conform celei de-a doua axiomă a normei generalizate rezultă că

$$N(f_n) \leq N(f_{n+1}),$$

şi

$$N(f_n) \leq N(f),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} N(f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} N(f_n)$. Atunci $\alpha \leq N(f)$

Dacă $\alpha = \infty$ rezultă că $N(f) = \infty$ şi deci $N(f) = \lim\limits_{n\to\infty} N(f_n)$.

Dacă $\alpha = 0$ atunci $N(f_n) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $f_n = 0$ a.p.t, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ceea ce arată că $f = 0$ a.p.t. şi deci $N(f) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} N(f_n)$.

Dacă $\alpha \in (0, \infty)$, eliminând eventual un număr finit din termenii şirului $(f_n)_n$ vom putea presupune că $0 < N(f_n) \leq \alpha < \infty$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned} M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) &= \int\limits_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right)dt \leq \int\limits_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n(t)\right)dt = \\ &= M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right). \end{aligned}$$

Dar $N(f_n) < \infty$, sau echivalent $f_n \in O_\varphi$ şi, conform propoziţiei anterioare, rezultă că

$$M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right) \leq 1$$

şi deci

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \leq 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dar $f_n \nearrow f$ a.p.t. şi deci

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \nearrow Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \text{ a.p.t.}$$

Din teorema convergenţei monotone rezultă că:

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi\Big(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\Big)dt \to \int\limits_0^\infty Y_\varphi\Big(\frac{1}{\alpha}f(t)\Big)dt = M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right).$$

ceea ce arată că $M_\varphi\Big(\dfrac{1}{\alpha}f\Big) \leq 1$, deci $\dfrac{1}{\alpha} \in A_f$ de unde rezultă că $N(f) \leq \alpha$ şi deci $N(f) = \alpha$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} N(f_n) = N(f)$.

Verificăm proprietatea (P_2). Pentru $A \subset [0, \infty)$ măsurabilă Lebesque, cu $m(A) < \infty$, arătăm că $\lambda_A \in O_\varphi$ (sau echivalent, $\mathcal{A}_{\lambda_A} \neq \varnothing$).

Deoarece $Y_\varphi(0) = 0$ şi Y_φ este continuă pe $[0, \infty)$, rezultă că există $c > 0$ astfel încât

$$Y_\varphi(c) \leq \frac{1}{m(A)}.$$

Atunci

$$M_\varphi(c\cdot\lambda_A)=\int\limits_0^\infty Y_\varphi\left(c\cdot\lambda_A(t)\right)dt=\int\limits_A Y_\varphi(c)\cdot m(A)\le 1<\infty$$

şi deci $\lambda_A\in O_\varphi$.

Verificăm proprietatea (P_3). Trebuie să arătăm că pentru $A\subset[0,\,\infty)$ măsurabilă Lebesque, cu $m(A)<\infty$, există $K_A>0$, cu proprietatea că

$$\int_A |f|dm\le K_A\cdot N(f), \tag{1}$$

pentru orice $f\in\mathcal{M}$.

Fie atunci $A\subset[0,\,\infty)$ ca mai sus.

Dacă $N(f)=\infty$ atunci (1) este adevărată pentru orice $K_A>0$.

Dacă $N(f)=0$ atunci $f=0$ a.p.t, sau echivalent, $\int\limits_A|f|dm=0$ şi deci inegalitatea (1) este adevărată pentru orice $K_A>0$.

Dacă $0<N(f)<\infty$, notăm $c=\dfrac{1}{N(f)}>0$. Deoarece funcţia Young Y_φ este convexă, avem:

$$\begin{aligned}Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)}\int\limits_A c|f|dm\right)&\le\frac{1}{m(A)}\cdot\int\limits_A Y_\varphi(c|f|)dm\le\frac{1}{m(A)}\cdot\int\limits_0^\infty Y_\varphi(c|f|)dm=\\&=\frac{M_\varphi(c|f|)}{m(A)}=\frac{1}{m(A)}\cdot M_\varphi\Big(\frac{1}{N(f)}f\Big)\le\frac{1}{m(A)}<\infty.\end{aligned}$$

Aşadar

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)}\cdot\int\limits_A c|f|dm\right)\le\frac{1}{m(A)}. \tag{2}$$

Cum însă $\varphi_{|_{(0,\,\infty)}}\ne 0$ şi $\varphi_{|_{(0,\,\infty)}}\ne\infty$ rezultă că există $t_0\in(0,\,\infty)$ cu $\varphi(t_0)\in(0,\,\infty)$. Atunci, pentru $t>t_0$ avem:

$$Y_\varphi(t)=\int\limits_0^t\varphi(\tau)d\tau\ge\int\limits_{t_0}^t\varphi(\tau)d\tau\ge\varphi(t_0)(t-t_0),$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{t\to\infty}Y_\varphi(t)=\infty$. Aşadar Y_φ este continuă şi crescătoare pe $[0,\,\infty)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}Y_\varphi(t)=\infty$.

Din (2) rezultă că există $\tilde{c} > 0$ astfel încât

$$\frac{1}{m(A)} \cdot \int_A c|f|dm \le \tilde{c}.$$

Atunci

$$\int_A |f|dm \le \frac{\tilde{c}}{c} m(A),$$

ceea ce demonstrează concluzia anunţată punând $K_A = \dfrac{\tilde{c}}{c}$. $\square$

Corolarul 2.6.3. *Spaţiul Orlicz* $(O_\varphi, \|\cdot\|)$ *este complet.*

Demonstraţie. Din Teorema 2.6.2 şi Corolarul Teoremei Riesz-Fischer. $\square$

2.7 Câteva proprietăţi ale spaţiilor Orlicz

Fie φ ca în paragraful anterior. Începem prin două observaţii imediate (dar importante pentru studiul nostru ulterior).

Observaţia 2.7.1. Dacă $\varphi(t) > 0$, pentru orice $t \in (0, \infty)$, atunci funcţia sa Young Y_φ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ deci şi injectivă.

Observaţia 2.7.2. Dacă $0 < \varphi(t) < \infty$, pentru orice $t \in (0, \infty)$ atunci funcţia sa Young

$$Y_\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

este bijectivă. Această proprietate este adevărată deoarece $Y_\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} Y_\varphi(t) = \infty$ şi Y_φ este continuă.

Exemplul 2.7.1. *Pentru orice $p \in [1,\infty)$ spaţiile $L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ sunt spaţii Orlicz.* Într-adevăr, fixând $p \in [1, \infty)$, considerăm funcţia crescătoare şi continuă

$$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad \varphi(t) = p \cdot t^{p-1}.$$

Funcţia Young asociată acesteia este

$$Y_\varphi(t) = t^p,\ t \geq 0,$$

iar

$$M_\varphi(f) = \int_0^\infty |f(t)|^p dt.$$

Atunci

$$M_\varphi(c \cdot f) = c^p \cdot M_\varphi(f)$$

şi deci

$$M_\varphi(c \cdot f) < \infty \text{ dacă şi numai dacă } M_\varphi(f) < \infty.$$

Deci $(O_\varphi, \|\cdot\|_\varphi) = (L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

Exemplul 2.7.2. *Spaţiul $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ este un spaţiu Orlicz.* Într-adevăr, considerând funcţia crescătoare şi continuă la stânga

$$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t \in [0,1] \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

obţinem că funcţia sa Young este

$$Y_\varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t \in [0,1] \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

Atunci

$$M_\varphi(c\cdot f)=\int_0^\infty Y_\varphi\Big(c\cdot|f(t)|\Big)dt<\infty \quad \text{d.n.d} \quad c\cdot|f(t)|\le 1 \text{ a.p.t. } t\in\mathbb{R}_+ \text{ d.n.d.}$$

$$\text{d.n.d} \quad |f(t)|\le\frac{1}{c} \text{ a.p.t. } t\ge 0, \text{ d.n.d.}$$

$$\text{d.n.d.} \quad f\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}).$$

În plus, cum $\|f\|_\varphi=\inf\left\{c>0\ :\ M_\varphi\Big(\frac{1}{c}f\Big)\le 1\right\}$, avem

$$M_\varphi\Big(\frac{1}{c}f\Big)\le 1 \text{ d.n.d. } |f(t)|\le c \text{ a.p.t.} t\ge 0$$

şi deci $\|f\|_\infty\le c$ ceea ce arată că $\|f\|_\varphi=\|f\|_\infty$.

Aşadar $(O_\varphi,\|\cdot\|_\varphi)=(L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

Considerăm clasele:

- $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B,\|\cdot\|_B)$ cu proprietatea că $\lambda_{[0,\,t)}\in B$, pentru orice $t>0$.
- $\mathcal{B}(\mathcal{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B,\|\cdot\|_B)$ cu $B\in\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty}F_B(t)=\infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B,\|\cdot\|_B)$ cu proprietatea că $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ şi $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\lambda_{[n,\,n+1)}\|_B>0$.

unde, pentru un spaţiu Banach de funcţii $(B,\ \|\cdot\|_B)$ din $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ funcţia F_B notează funcţia sa fundamentală, adică aplicaţia

$$F_B:(0,\ \infty)\to(0,\ \infty),\quad F_B(t)=\|\lambda_{[0,\,t)}\|_B.$$

Remarca 2.7.1. $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\in\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ şi $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\notin\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Remarca 2.7.2. $L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\in\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$, pentru orice $p\in[1,\ \infty)$.

Propoziţia 2.7.1. $O_\varphi\in\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

Demonstraţie. Pentru orice $t>0$ avem:

$$M_\varphi(c\cdot\lambda_{[0,\,t)})=\int_0^\infty Y_\varphi(c\cdot\lambda_{[0,\,t)}(\tau))d\tau=\int_0^t Y_\varphi(c)d\tau=t\cdot Y_\varphi(c)=t\int_0^c\varphi(\tau)d\tau.$$

Deoarece $\varphi_{|_{(0,\infty)}} \neq \infty$ rezultă că există $c > 0$ cu $\varphi(c) \in (0, \infty)$. Atunci

$$Y_\varphi(c) \leq c \cdot \varphi(c) < \infty$$

de unde rezultă că $M_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}) < \infty$ sau echivalent, $\lambda_{[0,t)} \in O_\varphi$, pentru orice $t > 0$. $\square$

Propoziţia 2.7.2. (Funcţia fundamentală a spaţiului Orlicz.) *Dacă* $0 < \varphi(t) < \infty$*, pentru orice* $t > 0$*, atunci*

$$F_{O_\varphi}(t) = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)},$$

pentru orice $t > 0$*.*

Demonstraţie. Pentru orice $t > 0$ avem:

$$F_{O_\varphi}(t) = \|\lambda_{[0,\,t)}\|_\varphi = \inf\left\{c > 0 \ : \ M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,\,t)}\right) \leq 1\right\}.$$

Însă $M_\varphi\left(\dfrac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,\,t)}\right) = t \cdot Y_\varphi\left(\dfrac{1}{c}\right)$ şi atunci

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,\,t)}\right) \leq 1$$

dacă şi numai dacă

$$t \cdot Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq 1$$

ceee ce este echivalent cu

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{t}.$$

Deoarece funcţia Young Y_φ este crescătoare, rezultă că

$$\frac{1}{c} \leq Y_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

sau echivalent

$$\frac{1}{Y_\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)} \leq c.$$

deci $F_{O_\varphi}(t) = \dfrac{1}{Y_\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)}$, pentru orice $t > 0$. $\square$

Propoziţia 2.7.3. *Dacă* $0 < \varphi(t) < \infty$, *pentru orice* $t \in (0, \infty)$, *atunci* $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Demonstraţie. În primul rând să observăm că $O_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Într-adevăr:

$$\lim_{t \to \infty} F_{O_\varphi}(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{Y_\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(s)} = \infty,$$

ceea ce arată că într-adevăr $O_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Vom arăta în continuare că $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda_{[n,\, n+1)}\|_\varphi > 0$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\|\lambda_{[n,\, n+1)}\|_\varphi = \inf \left\{ c > 0 \ : \ M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,\, n+1)}\right) \le 1 \right\}.$$

Dar

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,\, n+1)}\right) = \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,\, n+1)}(\tau)\right) d\tau = \int_n^{n+1} Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) d\tau = Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right).$$

Rezultă că

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,n+1)}\right) \le 1$$

ceea ce implică faptul că $Y_\varphi\left(\dfrac{1}{c}\right) \le 1$ sau echivalent $\dfrac{1}{c} \le Y_\varphi^{-1}(1)$. Atunci $\dfrac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} \le c$ şi deci

$$\|\lambda_{[n,\, n+1)}\|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda_{[n,\, n+1)}\|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} > 0$$

de unde rezultă că într-adevăr $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$. □

Capitolul 3

SPAŢII BANACH DE ŞIRURI

3.1 Spaţii Banach de şiruri

În continuare prin $\mathbb{N}$, R, respectiv $\mathbb{C}$ vom nota mulţimea numerelor naturale, corpul numerelr reale, respectiv, corpul numerelor complexe. Notăm deasemenea cu S spaţiul $\mathbb{C}-$liniar al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ($S = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).

Dacă $s, u \in S$ cu $s_n, u_n \in \mathbb{R}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom scrie că $u \leq s$ dacă $u_n \leq s_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 3.1.1. Numim *normă generalizată de şiruri* o funcţie

$$N : S \to [0, \infty]$$

cu următoarele proprietăţi:

(i) $N(s) = 0$ dacă şi numai dacă $s = 0$;

(ii) dacă $|s| \leq |u|$ atunci $N(s) \leq N(u)$;

(iii) $N(\alpha \cdot s) = |\alpha| \cdot N(s)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $s \in S$ cu $N(s) < \infty$;

(iv) $N(s + u) \leq N(s) + N(u)$, pentru orice $s, u \in S$.

Dacă N este o normă generalizată de şiruri pe S definim mulţimea

$$B_N = \{s \in S \ : \ |s|_B := N(s) < \infty\}.$$

Este uşor de observat (ţinând cont de proprietăţile (*iii*) şi (*iv*)) faptul că $(B_N, |\cdot|_N)$ este un spaţiu liniar normat. Dacă B_N este complet atunci B_N se numeşte spaţiu Banach de şiruri.

Fixată norma generalizată N vom nota, fără a exista pericol de confuzie, B în loc de B_N.

Remarca 3.1.1. B este un ideal în S în sensul că dacă $|s| \le |u|$ şi $u \in B$ atunci de asemenea $s \in B$ şi $|s|_B \le |u|_B$ (de aceea proprietatea (axioma) (ii) se mai numeşte şi proprietatea de ideal a normei generalizate N).

Remarca 3.1.2. Dacă $s_n \longrightarrow s$ în raport cu norma lui B , atunci există un subşir $(s_{n_k})_k$ convergent la s punctual.

Pentru o submulţime $A \subset \mathbb{N}$, prin λ_A vom nota funcţia caracteristică a mulţimii A, adică şirul

$$\lambda_A(n) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{dacă } n \in A \\ 0 & , \quad \text{dacă } n \notin A \end{cases} .$$

Dacă B este un spaţiu Banach de şiruri definim:

$$F_B : \mathbb{N}^* \to \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad F_B(n) := |\lambda_{\{0,1,\dots,n-1\}}|_N$$

Funcţia F_B se numeşte *funcţia fundamentală* a spaţiului Banach de şiruri B.

Remarca 3.1.3. Conform proprietăţii (ii) rezultă că funcţia fundamentală a spaţiului B este crescătoare şi deci există

$$\lim_{n\to\infty} F_B(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} F_B(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{0,1,\dots,n\}}|_N.$$

Considerăm următoarele clase de spaţii Banach de şiruri:

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri B cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} F_B(n) = \infty;$$

(ii) $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri B cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ şi

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{n\}}|_N > 0;$$

(iii) $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|\lambda_{\{j-n_0,\dots,j\}}|_N \ge \varepsilon,$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}, j \ge n_0$.

Remarca 3.1.4. Este uşor de observat că $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: presupunând, prin absurd, că există $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N})\setminus\mathcal{B}(\mathbb{N})$, vom avea că

$$(1) \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} F_B(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{0,1,\ldots,n\}}|_N = M \in (0,\, \infty).$$

Cum $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$, există însă $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|\lambda_{\{j-n_0,\ldots,j\}}|_B \geq M+1,$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$. Pentru $j = n_0$ rezultă că

$$|\lambda_{\{0,1,\ldots,n_0\}}|_B \geq M+1,$$

ceea ce contrazice inegalitatea (1) de mai sus.

Exemplul 3.1.1. Considerăm $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi norma generalizată

$$N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s_n|,\ s = (s_n)_n \in S.$$

Este uşor de observat că spaţiul Banach de şiruri B în corespondenţă cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$, dar $B \notin \mathcal{E}(\mathbb{N})$ şi $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că:

$$F_B(n) = |\lambda_{\{0,1,\ldots,n-1\}}|_N = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} F_B(n) = \infty$, ceea ce arată că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Cum $|\lambda_{\{n\}}|_N = \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{n\}}|_N = 0$ şi deci $B \notin \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

De asemenea, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că

$$|\lambda_{\{n,n+1,\ldots,2n\}}|_N = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1} \leq 1.$$

Aceasta arată că $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.2. Considerăm $\alpha_n = \begin{cases} 1 & , \quad \text{dacă } n = 2k \\ \dfrac{1}{n} & , \quad \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$ şi norma generalizată:

$$N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s_n|, \quad s = (s_n)_n \in S.$$

Spaţiul Banach de şiruri B în corespondenţa cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: Pentru $n \in \mathbb{N}$ avem că $|\lambda_{\{2n+1\}}|_N = \dfrac{1}{2n+1}$ şi deci $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{n\}}|_N = 0$. Rezultă că $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Pe de altă parte, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$ avem că

$$|\lambda_{\{n,n+1,\dots,n+2k+1\}}|_N \geq 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k+1}.$$

Deoarece $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{1}{2k+1} = \infty$ rezultă că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Deci $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.3. Fie $\beta_n = \begin{cases} k & , \quad \text{dacă } n = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 1 & , \quad \text{dacă } n \notin \{2^k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, şi norma generalizată

$$N(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n |s_n|, \quad s = (s_n)_n \in S.$$

Atunci $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că

$$|\lambda_{\{n\}}|_N = \beta_n = \begin{cases} k & , \quad \text{dacă } n = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 1 & , \quad \text{dacă } n \notin \{2^k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

şi deci $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{\{n\}}|_N = 1$, ceea ce arată că $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$. În plus

$$F_B(2^n + 1) = |\lambda_{\{0,1,\dots,2^n\}}|_N \geq |\lambda_{\{2^n\}}|_N = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} F_B(n) = \infty$. Dar

$$|\lambda_{\{2^n+1,2^n+2,\dots,2^{n+1}-1\}}|_N = 1,$$

deci nu oricât de mare, deşi $card\{2^n+1, 2^n+2, \dots, 2^{n+1}-1\} = |2^n - 1| \longrightarrow \infty$. Deci $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Aşadar $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.4. Dacă $p \in [1, \infty)$, atunci $\big(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p\big) = (B_N, |\cdot|_N)$ cu

$$N(s) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \ s = (s_n)_n \in S.$$

În plus avem că $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că $|\lambda_{\{n\}}|_p = 1$, deci $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$, iar $\|\lambda_{\{j-n_0,\dots,j\}}\|_p = (n_0 + 1)^{\frac{1}{p}}$, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$. Rezultă că $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.5. Avem că $\left(\ell^{\infty}(\mathbb{N},\mathbb{C}),\, \|\cdot\|_p\infty\right) = (B_N,\, |\cdot|_N)$ cu

$$N(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|s_n|,\ s = (s_n)_n \in S.$$

În plus avem că $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{C}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Într-adevăr: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că $F_{\ell^\infty}(n) = \|\lambda_{\{0,1,\ldots,n-1\}}\|_\infty = 1$.

Exemplul 3.1.6. Dacă $p \in [1,\infty)$ şi $\alpha = (\alpha_n)_n$ este un şir de numere reale strict pozitive cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, atunci spaţiul $B = l^p_\alpha(\mathbb{N},\mathbb{C})$ al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p < \infty,$$

este un spaţiu Banach de şiruri în raport cu norma :

$$|s|_{l^p_\alpha} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Deoarece $F_{l^p_\alpha}(n) = \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j\right)^{\frac{1}{p}}$, rezultă că $l^p_\alpha(\mathbb{N},\mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.7. Dacă $p \in [1,\infty)$ şi $k = (k_n)_n$ este un şir de numere naturale cu următoarele proprietăţi:

(i) $k_n \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(k_n - n) = \infty$,

atunci spaţiul $E^p_k(\mathbb{N},\mathbb{C})$ al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea :

$$|s|_{E^p_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=n}^{k_n}|s(j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

este un spaţiu Banach de şiruri cu $E^p_k(\mathbb{N},\mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.1.8. (*Spaţiu Orlicz de şiruri*) Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi care nu este identic nulă sau ∞ pe intevalul $(0,\, \infty)$. Definim funcţia:

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

numită *funcţia Young* asociată lui φ.

Pentru $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ considerăm

$$M_N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_N(|s(n)|).$$

Mulţimea O_φ a tuturor şirurilor $s \in S$ cu proprietatea că există $k > 0$ astfel încât $M_\varphi(k \cdot s) < \infty$ este uşor de verificat că este un spaţiu liniar.

În raport cu norma

$$|s|_\varphi = \inf \left\{ k > 0 \;:\; M_\varphi\Big(\frac{1}{k} \cdot s\Big) \right\}$$

este un spaţiu Banach de şiruri , numit spaţiu de şiruri Orlicz. Printre exemplele cunoscute de spaţii de şiruri Orlicz amintim spaţiile Banach $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, care sunt obţinute pentru

$$\varphi_p(t) = p \cdot t^{p-1},$$

dacă $1 \leq p < \infty$ şi respectiv

$$\varphi_\infty(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } 0 \leq t \leq 1 \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases} ,$$

dacă $p = \infty$.

În cele ce vor urma vom nota cu $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor crescătoare

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,$$

cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f(t) > 0$, pentru orice $t > 0$.

Propoziţia 3.1.1. *Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă la stânga. Dacă $\varphi \in \mathcal{F}$, atunci:*

(i) Funcţia Young Y_φ asociată lui φ este bijectivă;

(ii) Funcţia fundamentală F_{O_φ} poate fi exprimată în funcţie de Y_φ^{-1} prin :

$$F_{O_\varphi}(n) = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

(iii) $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{N})$;

Demonstraţie. (i) Avem că Y_φ este o funcţie continuă cu $Y_\varphi(0) = 0$. Din $Y_\varphi(t) > 0$, pentru orice $t > 0$ rezultă că Y_φ este strict crescătoare şi deoarece φ este crescătoare, obţinem că :

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \geq \int_1^t \varphi(s)ds \geq (t-1)\cdot\varphi(1),$$

pentru orice $t > 1$. Aşadar $\lim\limits_{t\to\infty} Y_\varphi(t) = \infty$. În concluzie, obţinem că Y_φ este bijectivă .

(ii) Deoarece $M_\varphi(\lambda_{\{0,\ldots,n-1\}}) = n\cdot Y_\varphi(1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_{\{0,\ldots,n-1\}} \in O_\varphi$$

şi

$$\begin{aligned} F_{O_\varphi}(n) = |X_{\{0,\ldots,n-1\}}|_N &= \inf\left\{k > 0 : M_g\Big(\frac{1}{k}\Big)\cdot X_{\{0,\ldots,n-1\}} \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{k > 0 : n\cdot Y_N\Big(\frac{1}{k}\Big) \leq 1\right\} \\ &= \frac{1}{Y_\varphi^{-1}\Big(\frac{1}{n}\Big)}. \end{aligned}$$

(iii) Folosind un argument asemănător, ca şi în (ii), vom obţine că :

$$|\lambda_{\{j-n_0,\ldots,j\}}|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}}\Big(\frac{1}{n_0}\Big), \text{ pentru orice } j, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ şi } j \geq n_0. \quad (*)$$

Având în vedere faptul că, Y_φ^{-1} este o funcţie continuă cu $Y_\varphi^{-1}(0) = 0$, din relaţia $(*)$, deducem că $O_\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Observând că $|\lambda_{\{n\}}|_\varphi = \dfrac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi folosind Remarca. 3.1.4, obţinem că $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$. □

Exemplul 3.1.9. Fie $\varphi \in \mathcal{F}$, o funcţie continuă la stânga şi (α_n), un şir de numere reale strict pozitive. Dacă O_φ este un spaţiu Orlicz asociat funcţiei φ, atunci notăm cu O_φ^α , spaţiul tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că şirul $s_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, s_\alpha(n) = \alpha_n \cdot s(n)$, aparţine lui O_φ.
Avem că O_φ este un spaţiu Banach de şiruri , în raport cu norma:

$$|s|_{O_\varphi}^\alpha = |s_\alpha|_{O_\varphi}.$$

Notăm cu $\mathcal{F}_1$, mulţimea tuturor funcţiilor $f \in \mathcal{F}$, cu proprietatea că există $\delta > 0$ şi $c > 0$, astfel încât : $f(2t) \leq c\cdot f(t)$, pentru orice $t \in [0, \delta]$.

Propoziţia 3.1.2. *Dacă φ este o funcţie continuă la stânga, cu $\varphi \in \mathcal{F}_1$ şi $(\alpha_n) \subset (0,\infty)$ un şir care converge la 0 cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \varphi(\alpha_n) = \infty$, atunci $O_\varphi^\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $M > 0$, astfel încât $F_{O_\varphi^\alpha}(n) \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$F_{O_\varphi^\infty}(n) = |X_{\{0,\dots,n-1\}}|_{O_\varphi^\alpha} = \inf\Big\{k > 0 : \sum_{j=0}^{n-1} Y_\varphi\Big(\frac{\alpha_j}{k}\Big) \leq 1\Big\},$$

rezultă că

$$\sum_{j=0}^{n-1} Y_\varphi\Big(\frac{\alpha_j}{M}\Big) \leq 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce arată că

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_N\Big(\frac{\alpha_n}{M}\Big) \leq 1.$$

Fie $\delta > 0$ şi $c > 0$ astfel încât $N(2t) \leq c \cdot N(t)$, pentru orice $t \in [0,\delta]$. Întrucât $\alpha_n \longrightarrow 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\alpha_n < \dfrac{\delta}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$.

Fie $k_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $2^{k_0} \geq M$.

Pentru $n \geq n_0$, avem :

$$\begin{aligned}
Y_N\Big(\frac{\alpha_n}{M}\Big) = \int_0^{\frac{\alpha_n}{M}} N(s)ds \geq \int_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0}}} N(s)ds \geq \\
&\geq \frac{1}{2\cdot c} \cdot \int_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0-1}}} N(s)ds \geq \ldots \geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_0+1}} \cdot \int_0^{2\cdot\alpha_n} N(s)ds \geq \\
&\geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_0+1}} \cdot \int_{\alpha_n}^{2\cdot\alpha_n} N(s)ds \geq \\
&\geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_o+1}} \cdot \alpha_n \cdot N(\alpha_n),
\end{aligned}$$

ceea ce implică $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n \cdot N(\alpha_n) \leq (2\cdot c)^{k_0+1} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} Y_N\Big(\dfrac{\alpha_n}{M}\Big) \leq \infty$.

Prin urmare, $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n \cdot N(\alpha_n)$ este convergentă fapt ce contrazice ipoteza. $\square$

3.2 Spaţii Schäffer de şiruri

În această secţiune vom discuta despre o clasă particulară de spaţii Banach de şiruri scalare şi anume spaţiile Schäffer. Prezentarea noastră are la bază lucrarea [1].

Reamintim că spaţiul tuturor şirurilor complexe l-am notat prin S.

Considerăm operatorii liniari $R, L : S \to S$ definiţi prin

$$Rf(n) = \begin{cases} f(n-1) & , \ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & , \ n = 0 \end{cases} \quad , \quad Lf(n) = f(n+1)$$

numiţi *operatorul shift la dreapta* respectiv, *operatorul shift la stânga*. Este imediat că

$$LRf = f$$

şi

$$RLf(n) = \begin{cases} 0 & , \ n = 0 \\ f(n) & , \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} ,$$

pentru orice $f \in S$. Pentru simplificare, în continuare vom nota $\delta_k = \lambda_{\{k\}}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Definiţia 3.2.1. Un spaţiu Banach de şiruri $(E, \|\cdot\|_E)$ se numeşte *spaţiu Schäffer de şiruri* dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

(s_1) $\delta_0 \in E$,

(s_2) dacă $f \in E$ atunci $Lf, Rf \in E$ şi $\|Rf\|_E = \|f\|_E$,

Reamintim că pentru spaţiul Banach de şiruri $(E, \|\cdot\|_E)$ este verificată şi proprietatea:

"*dacă $f \in S$ şi $g \in E$ astfel încât $|f| \leq |g|$, atunci $f \in E$ şi $\|f\|_E \leq \|g\|_E$*"

Remarca 3.2.1. Proprietatea (s_2) se mai numeşte şi *proprietatea de invarianţă la translaţii* a spaţiilor Schäffer şi este motivul pentru care aceste spaţii sunt cunoscute şi sub numele de *spaţii de şiruri invariante la translaţii.*

Remarca 3.2.2. Conform proprietăţilor (s_1) şi (s_2) rezultă că orice şir cu suport finit este conţinut în orice spaţiu Schäffer de şiruri E. De asemenea, avem că $\|Lf\|_E \leq \|f\|_E$ pentru orice $f \in E$.

Într-adevăr: Să fixăm un spaţiu Schäffer E. Din proprietatea (s_2), inductiv, rezultă că $R^k f \in E$, pentru orice $f \in E$ şi $k \in \mathbb{N}$. Cum $\delta_0 \in E$ şi $R^k \delta_0 = \delta_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, rezultă că $\delta_k \in E$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Orice şir cu suport finit este însă o combinaţie liniară finită de şiruri δ_k, iar cum E este un spaţiu liniar, rezultă că orice şir cu suport finit este conţinut în orice spaţiu Schäffer.

Exemplul 3.2.1. Dintre exemplele des întâlnite de spaţii Schäffer de şiruri amintim spaţiile şirurilor complexe absolut p-sumabile, cu $p \in [1, \infty)$,

$$\ell^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \,:\, \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^p < \infty\} \text{ cu norma } \|f\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^p\right)^{1/p}$$

şi

$$\ell^\infty_{\mathbb{N}|}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \,:\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| < \infty\} \text{ cu norma } \|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|.$$

Subspaţiul din $\ell^\infty_{\mathbb{N}|}(\mathbb{C})$,

$$\ell^\infty_0(\mathbb{C}) = \{\, f \in \ell^\infty \,:\, \lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \,\}$$

(notat şi $c_0(\mathbb{C})$) cu norma indusă, este un alt exemplu de spaţiu Schäffer de şiruri.

Exemplul 3.2.2. Spaţiul şirurilor complexe, convergente, $(c, \|\cdot\|_\infty)$, nu este un spaţiu Schäffer. De fapt el nu este un spaţiu Banach de şiruri căci proprietatea de "ideal" nu este verificată.

Într-adevăr: Şirul $((-1)^n)_n$ nu este conţinut în c deşi este majorat de şirul constant egal cu 1 (convergent, deci din c).

După cum vom vedea mai jos, spaţiile $\ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, $\ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ şi $\ell^\infty_0(\mathbb{C})$ ocupă o poziţie importantă în clasa spaţiilor Schäffer de şiruri.

Pentru E un spaţiu Schäffer de şiruri, se definesc şirurile $\alpha_E, \beta_E \in \mathcal{S}$ prin

$$\alpha_E(n) = \inf\left\{ c > 0 \,:\, \sum_{k=0}^{n} |f(k)| \le c\|f\|_E\,, \text{ pentru orice } f \in E \right\},$$
$$\beta_E(n) = \|\chi_{\{0,1,\ldots,n\}}\|_E\ ,$$

care sunt crescătoare şi $\beta_E(n) > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 3.2.3. Dacă E este un spaţiu Schäffer de şiruri, atunci

$$\sum_{k=m}^{n+m} |f(k)| \le \alpha_E(n)\|f\|_E$$

pentru orice $f \in E$ şi $m, n \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 3.2.1. *Dacă E este un spaţiu Schäffer de şiruri, atunci*

$$n+1 \leq \alpha_E(n)\beta_E(n) \leq 2n+1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Demonstraţia urmează ideile din [5, Prop. 2.1].

Punând $f = \lambda_{\{0,1,\dots,n\}}$ în inegalitatea

$$\sum_{k=0}^{n} |f(k)| \leq \alpha_E(n) \|f\|_E$$

obţinem că

$$n+1 \leq \alpha_E(n)\beta_E(n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru operatorii shift R şi L mai sus definiţi am văzut că

$$LRf = f$$

şi

$$RLf(n) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ f(n) & , \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases},$$

pentru orice $f \in S$. Atunci

$$\|Lf\|_E = \|RLf\|_E \leq \|f\|_E,$$

pentru orice $f \in E$. Dar

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} |f(k)|\Big)\lambda_{\{0,1,\dots,n\}} = \sum_{k=0}^{n} L^k\Big(|f|\lambda_{\{0,1,\dots,n\}}\Big) + \sum_{j=1}^{n} R^j\Big(|f|\lambda_{\{0,.1,\dots,n-j\}}\Big).$$

Aplicând proprietatea de "ideal" obţinem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |f(k)|\beta_E(n) &= \left\| \Big(\sum_{k=0}^{n} |f(k)|\Big)\lambda_{\{0,1,\dots,n\}} \right\|_E = \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} L^k\Big(|f|\lambda_{\{0,1,\dots,n\}}\Big) + \sum_{j=1}^{n} R^j\Big(|f|\lambda_{\{0,.1,\dots,n-j\}}\Big) \right\|_E \leq \\
&\leq \left\| \sum_{k=0}^{n} L^k\Big(|f|\lambda_{\{0,1,\dots,n\}}\Big) \right\|_E + \left\| \sum_{j=1}^{n} R^j\Big(|f|\lambda_{\{0,.1,\dots,n-j\}}\Big) \right\|_E \leq \\
&\leq (2n+1)\|f\|_E,
\end{aligned}$$

pentru orice $f \in E$.

□

Exemplul 3.2.3. Alte exemple remarcabile de spaţii Schäffer de şiruri sunt spaţiile Orlicz de şiruri discutate în sectiunle anterioare.

Fie $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi neidentic 0 sau ∞ pe $(0, \infty)$. Funcţia Young ataşată lui φ este defintă prin

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \ , \ t \geq 0.$$

Spaţiul Orlicz generat de φ este spaţiul:

$$\ell_\varphi = \{ \, f \in \mathcal{S} \ : \ \text{există } c > 0 \text{ a. î.} \sum_{k=0}^{n} Y_\varphi(c|f(k)|) < \infty \, \} \ \ \text{cu norma}$$

$$\|f\|_\varphi = \inf\{ \, c > 0 \ : \ \sum_{k=0}^{n} Y_\varphi(\, c^{-1}|f(k)| \,) \leq 1 \, \} \quad \text{(norma Luxemburg) .}$$

Reamintim că pentru $1 \leq p < \infty$, luând $\varphi(t) = pt^{p-1}$ avem că $(\ell_\varphi, \| \cdot \|_\varphi) \equiv (\ell^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}), \| \cdot \|_p)$ şi de asemenea $\ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ este un spaţiu Orlicz de şiruri, obţinut pentru $\varphi(t) = 0$ dacă $t \in [0, \, 1]$ şi $\varphi(t) = \infty$ dacă $t > 1$.

Pentru spaţiul Banach de şiruri $(\ell_\varphi, \| \cdot \|_\varphi)$ condiţiile (s_1) şi (s_2) sunt verificate, deci $(\ell_\varphi, \| \cdot \|_\varphi)$ este un spaţiu Schäffer de şiruri.

Remarca 3.2.4. Conform Propoziţiei 3.1.1., pentru orice $1 \leq p \leq \infty$ (cu convenţia $\dfrac{1}{\infty} = 0$) avem

$$\alpha_{\ell^p}(n) = (n+1)^{1-\frac{1}{p}} \quad , \quad \beta_{\ell^p}(n) = (n+1)^{\frac{1}{p}}$$

iar în general, pentru spaţiile Orlicz de şiruri,

$$\alpha_{\ell^\Phi}(n) = (n+1)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad , \quad \beta_{\ell^\Phi}(n) = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} \ .$$

Remarca 3.2.5. Dacă $p \in [1, \infty)$ şi $(\ell_\varphi, \| \cdot \|_\varphi) = (\ell^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}), \| \cdot \|_p)$, atunci $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{Y_\varphi(t)}{t^p} = 1$.

Într-adevăr: Dacă $(\ell_\varphi, \| \cdot \|_\varphi) = (\ell^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}), \| \cdot \|_p)$, atunci

$$\|\chi_{\{0,1,\ldots,n\}}\|_\varphi = \|\chi_{\{0,1,\ldots,n\}}\|_p,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce este echivalent cu

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $x \in (0, 1]$ şi $m = \left[\frac{1}{x}\right] \in \mathbb{N}^*$. Cum Y_φ^{-1} este crescătoare, vom avea că

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{1}{p}} = Y_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{m+1}\right) \leq Y_\varphi^{-1}(x) \leq Y_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ceea ce implică

$$\left[\frac{1}{([1/x]+1)x}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\Phi^{-1}(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \leq \left[\frac{1}{x[1/x]}\right]^{\frac{1}{p}} ,$$

pentru orice $x \in (0, 1]$. Deci $\lim_{x\to 0} \Phi^{-1}(x)x^{-\frac{1}{p}} = 1$ şi

$$\lim_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u^p} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\left[\frac{\Phi^{-}1(\Phi(u))}{(\Phi(u))^{1/p}}\right]^p} = 1 .$$

Exemplul 3.2.4. (*Exemplu de spaţiu Orlicz de şiruri, diferit de orice ℓ^p*) Considerăm funcţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ by $\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt[m]{t}}{m^2}$. Atunci,

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{1+\frac{1}{m}}}{m(m+1)} .$$

Avem că $\ell_\varphi \neq \ell^p$, pentru orice $p \in [1, \infty]$.

Într-adevăr: Avem că

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$$

şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t^p} = \infty,$$

pentru orice $p \in (1, \infty)$. Conform remarcii anterioare obţinem afirmaţia din enunţ pentru $p \in [1, \infty)$. De asemenea, $\ell^\varphi \neq \ell^\infty$ deoarece $\lambda_{\mathbb{N}} \in \ell^\infty \setminus \ell^\varphi$.

Pentru două spaţii Banach $(B_1, \|\cdot\|_1)$ şi $(B_2, \|\cdot\|_2)$, vom spune că B_1 este scufundat continuu în B_2 (şi vom nota $B_1 \hookrightarrow B_2$) dacă $B_1 \subset B_2$ şi există o constantă $c > 0$ astfel încât

$$\|f\|_2 \leq c\|f\|_1$$

pentru orice $f \in B_1$. Aceasta este echivalent cu a spune că aplicaţia canonică de incluziune

$$j_{B_1,B_2} : B_1 \to B_2, \quad j_{B_1,B_2}(x) = x, \ x \in B_1,$$

este continuă.

Are loc următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.2.2. *Dacă $(E, \|\cdot\|_E)$ este un spaţiu Schäffer de şiruri, atunci*

$$\ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$$

cu

(i) $\|f\|_E \leq \beta_E(0)\|f\|_1$*, pentru orice* $f \in \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$*;*

(ii) $\beta_E(0)\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$*, pentru orice* $f \in E$*.*

Demonstraţie. Fie $f \in E$ si $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $|f(k)\delta_k| \leq |f|$, conform proprietăţii de "ideal", rezultă că $|f(k)|||\delta_k||_E \leq ||f||_E$. Deci

$$|f(k)| \leq \frac{1}{\beta_E(0)}||f||_E,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că $f \in \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ si

$$||f||_\infty \leq \frac{1}{\beta_E(0)}||f||_E, \tag{3.2.1}$$

pentru orice $f \in E$.

Fie acum $f \in \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, iar pentru $k \in \mathbb{N}$, $f_k = \sum\limits_{j=0}^{k} f(j)\delta_j$. Avem că $f_k \in E$ (având suport finit), iar

$$||f_{k+p} - f_k||_E \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} |f(j)|\beta_E(0) = \beta_E(0)||f_{k+p} - f_k||_1,$$

pentru orice $k, p \in \mathbb{N}$. Cum şirul $(f_k)_{k\geq 0}$ este convergent în $\ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ rezultă că el este fundamental (deci şi convergent) în $(E, ||\cdot||_E)$. Fie $g \in E$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} ||f_k - g||_E = 0$. Conform primei părţi a demonstraţiei avem ca $g \in \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, iar din relatia (3.2.1) rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} ||f_k - g||_\infty = 0$. Dar şirul $(f_k)_{k\geq 0}$ converge la f in $\ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ si deci $f = g \in E$. În plus, avem că $||f_k||_E \leq \beta_E(0)||f_k||_1$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, şi făcând $k \to \infty$ rezultă că $||f||_E \leq \beta_E(0)||f||_1$. □

Propoziţia 3.2.3. *Dacă $(E, \|\cdot\|_E)$ şi $(F, \|\cdot\|_F)$ sunt două spaţii Schäffer de şiruri, atunci $E \hookrightarrow F$ dacă şi numai dacă $E \subset F$.*

Propoziţia 3.2.4. *Fie $(E, \|\cdot\|_E)$ un spaţiu Schäffer de şiruri. Atunci:*

(i) α_E este mărginit dacă şi numai dacă $E = \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ şi $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_E$;

(ii) β_E este mărginit dacă şi numai dacă $\ell^\infty_0(\mathbb{C}) \subset E$.

Demonstraţie. i) Necesitatea. Dacă $\alpha E \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, fixând arbitrar $f \in E$, deoarece

$$\sum_{k=0}^{n} |f(k)| \leq ||\alpha_E||_\infty ||f||_E,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $E \subset \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ şi în plus $||f||_1 \leq ||a_E||_\infty ||f||_E$. Conform 3.2.2 de mai sus obţinem ca $E = \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

Suficienţa. Fie $M \geq 0$ astfel ca $||f||_1 \leq M||f||_E$, pentru $f \in E = \ell^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Pentru orice $f \in E$ si $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\sum_{k=0}^{n} |f(k)| \leq ||f||_1 \leq M||f||_E,$$

ceea ce arată că $\alpha_E(n) \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $\alpha_E \in \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

ii) Necesitatea. Avem că $\beta_E \in \ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ (adică este mărginit) şi să fixăm arbitrar $f \in \ell^\infty_0(\mathbb{C})$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0,$$

rezultă că există un şir strict crescător de numere naturale $(i_n)_{n\geq 0}$ cu $i_0 = 0$, astfel încât, pentru $n \in \mathbb{N}$ să avem că

$$|f(k)| \leq \frac{||f||_\infty}{2^n},$$

pentru orice $k \geq i_n$. Fie

$$f_n = \sum_{k=0}^{i_{n+1}-1} f(k)\delta_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} f(j)\delta_j.$$

Avem că $f_n \in E$ şi

$$\begin{aligned} ||f_{n+p} - f_n||_E &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} f(j)\delta_j \right\|_E \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left\| \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} f(j)\delta_j \right\|_E \leq \\ &\leq ||\beta_E||_\infty ||f||_\infty \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{||b_E||_\infty ||f||_\infty}{2^n}, \end{aligned}$$

pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$. Aceasta arată că şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ este fundamental deci convergent în E. Fie $g \in E$ limita acestui şir (în norma $||\cdot||_E$). Atunci şirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge la g şi în spaţiul $\ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Dar f fiind din $\ell^\infty_0(\mathbb{C})$ avem că $(f_n)_{n\geq 0}$ converge la f în $\ell^\infty_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Rezultă că $f = g$ şi deci $f \in E$.

Suficienţa. Avem că $\ell^\infty_0(\mathbb{C}) \hookrightarrow E$ şi deci există $M > 0$ astfel ca $||f||_E \leq M|f||_\infty$, pentru orice $f \in \ell^\infty_0(\mathbb{C})$. Cum $\varphi_{\{0,1,\ldots,n\}} \in \ell^\infty_0(\mathbb{C})$, rezultă că

$$0 \leq b_E(n) = ||\varphi_{\{0,1,\ldots,n\}}||_E \leq M||\varphi_{\{0,1,\ldots,n\}}||_\infty = M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. □

Pentru $(E, \|\cdot\|_E)$ un spaţiu Schäffer de şiruri şi $\mathbb{X}$ un spaţiu Banach considerăm

$$\mathcal{E}(\mathbb{X}) = \{\, f \in \mathbb{X}^{\mathbb{N}} \,:\, \|f\| \in E \,\},$$

unde $\|f\| = (\|f(n)\|)_n$ şi

$$\|f\|_{E(\mathbb{X})} = \|\, \|f\|\, \|_E.$$

Se poate arăta că $(E(\mathbb{X}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{X})})$ este un spaţiu Banach (a se vedea, de exemplu [4, Remark 2.1] sau [1, Lemma 3.8]).

Următoarele proprietăţi ale acestui spaţiu sunt simple verificări.

Propoziţia 3.2.5. *Spaţiul* $(E(\mathbb{X}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{X})})$ *este un spaţiu Banach cu următoarele proprietăţi:*

(i) Dacă f este un şir de vectori din X, cu suport finit, atunci $f \in E(\mathbb{X})$.

(ii) Dacă $f \in E(\mathbb{X})$, atunci $Lf \in E(\mathbb{X})$, $Rf \in E(\mathbb{X})$ şi $\|Lf\|_{E(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{E(\mathbb{X})}$, $\|Rf\|_{E(\mathbb{X})} = \|f\|_{E(\mathbb{X})}$.

(iii) Dacă f este un şir de vectori din X, iar $g \in E(\mathbb{X})$ astfel încât $\|f\| \leq \|g\|$, atunci $f \in E(\mathbb{X})$ şi $\|f\|_{E(\mathbb{X})} \leq \|g\|_{E(\mathbb{X})}$.

Capitolul 4

APLICAŢII

4.1 Familii de evoluţie în timp discret. Dihotomii exponenţiale uniforme

În continuare vom nota prin Δ mulţimea perechilor $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu $m \leq n$, iar prin X vom nota un spaţiu Banach fixat.

Definiţia 4.1.1. O familie $\mathcal{U} := \{U(m, n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ de operatori liniari şi mărginiţi pe X o numim **familie de evoluţie (în timp discret)** dacă

(e_1) $U(n, n) = I$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

(e_2) $U(m, n)U(n, n_0) = U(m, n_0)$ pentru orice $m, n, n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$.

Dacă, în plus, există $M, \omega \in \mathbb{R}$ astfel încât

(e_3) $\|U(m, n)\| \leq Me^{\omega(m-n)}$ pentru orice $(m, n) \in \Delta$,

atunci spunem că $\mathcal{U}$ are **creştere exponenţială uniformă**.

Remarca 4.1.1. Familiile de evoluţie în timp discret apar ca solutii ale ecuaţiilor diferenţiale abstracte (recursive) de forma

$$x(n + 1) = A(n)x(n)\ ,\ n \in \mathbb{N}\ . \tag{4.1.1}$$

unde $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de operatori liniari si mărginiţi pe spaţiul Banach X. Considerând

$$U(m, n) = \begin{cases} A(m-1)...A(n+1)A(n) & ,\ m > n \\ I & ,\ m = n \end{cases}$$

proprietaţile (e_1), (e_2) sunt imediate. De asemenea, se poate verifica faptul că (e_3) este verificată dacă şi numai dacă $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\| < \infty$.

Definiţia 4.1.2. Familia de evoluţie $\{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ are o **dihotomie exponenţială uniformă** dacă există o familie de proiectori $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi două constante $N,\nu>0$ astfel încât

(d_1) $U(m,n)P(n)=P(m)U(m,n)$ pentru orice $(m,n)\in\Delta$;

(d_2) pentru fiecare $(m,n)\in\Delta$, restricţia lui $U(m,n)$ de la $\ker P(n)$ până în $\ker P(m)$, notat cu $U(m,n)_{|}$, este inversabilă;

(d_3) pentru orice $(m,n)\in\Delta$ şi $x\in X$ avem:

$$\|U(m,n)P(n)x\|\leq Ne^{-\nu(m-n)}\|P(n)x\|$$

şi

$$\|U(m,n)(I-P(n))x\|\geq\frac{1}{N}e^{\nu(m-n)}\|(I-P(n))x\|.$$

Remarca 4.1.2. Dacă familia de evoluţie $\{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ are o dihotomie exponenţială uniformă, atunci

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|P(n)\|<\infty\ .$$

Demonstraţia, pe care o vom prezenta în continuare, urmează ca în [8, Lema 4.2].

Într-adevăr: Fie $n_0\in\mathbb{N}$ fixat, $P_0=P(n_0)$ şi $P_1=I-P(n_0)$. Notăm

$$\gamma_{n_0}=\inf\{||x_0+x_1||\ :\ x_0\in Im\,P_0,x_1\in Im\,P_1,||x_0||=||x_1||=1\}$$

(distanţa unghiulară dintre subspaţiile închise $Im\,P_0$ şi $Im\,P_1$). Dacă $x\in X$ cu $P_kx\neq0$, $k=0,1$, atunci

$$\begin{aligned}\gamma_{n_0}&\leq\left\|\frac{P_0x}{||P_0x||}+\frac{P_1x}{||P_1x||}\right\|=\frac{1}{||P_0x||}\left\|P_0x+\frac{||P_0x||}{||P_1x||}P_1x\right\|=\\&=\frac{1}{||P_0x||}\left\|x+\frac{||P_0x||-||P_1x||}{||P_1x||}P_1x\right\|\leq\frac{2||x||}{||P_0x||}.\end{aligned}$$

Rezultă deci că

$$||P_0||\leq2\gamma_{n_0}^{-1}.$$

Rămâne să arătăm că există o constantă $c>0$ independentă de n_0 astfel încât $\gamma_{n_0}\geq c$.

Fixăm $x_0\in Im\,P_0$, $x_1\in Im\,P_1$ cu $||x_0||=||x_1||=1$. Din proprietatea de mărginire uniformă rezultă că

$$\begin{aligned}||x_0+x_1|| &\geq M^{-1}e^{-\omega(n-n_0)}||U(n,n_0)x_0+U(n,n_0)x_1|| \geq \\ &\geq M^{-1}e^{-\omega(n-n_0)}\Big(N^{-1}e^{-\nu(n-n_0)}-Ne^{-\nu(n-n_0)}\Big) = \\ &= c_{n-n_0},\end{aligned}$$

pentru orice $n \geq n_0$, şi deci $\gamma_{n_0} \geq c_{n-n_0}$. Deoarece, pentru m suficient de mare avem $c_M > 0$ rezultă că $0 < c_m < \gamma_{n_0}$.

Pentru o familie de evoluţie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$, subspaţiul lui $x \in X$ cu traiectoria $(U(n+n_0,n_0)x)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescătoare la zero va fi notat cu $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ (numit şi **subspaţiul stabil pentru $\mathcal{U}$ la momentul** n_0). Este uşor de verificat că

$$U(n,n_0)\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0) \subset \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n)\ , \quad (n,n_0)\in\Delta\ . \tag{4.1.2}$$

Remarca 4.1.3. Dacă familia de evoluţie $\mathcal{U}$ are o dihotomie exponenţială uniformă cu $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de proiectoare, atunci $P(n_0)X = \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr, incluziunea $P(n_0)X \subset \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ este imediată. Acum, fie $x \in \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ şi observăm că

$$\|U(n,n_0)(I-P(n_0))x\| \geq \frac{1}{N}e^{\nu(n-n_0)}\|(I-P(n_0))x\|\ .$$

Întrucât

$$\|U(n,n_0)(I-P(n_0))x\| \leq \|U(n,n_0)x\| + Ne^{-\nu(n-n_0)}\|P(n_0)x\| \to 0,$$

obţinem că $I-P(n_0)x = 0$. Prin urmare, $x = P(n_0)x \in P(n_0)X$.

În particular, obţinem că $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ este un subspaţiu închis a lui X, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definiţia 4.1.3. Fie $E, F \subset X^{\mathbb{N}}$ două spaţii Banach şi $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie. Perechea (E,F) spunem că este **admisibilă** pentru $\mathcal{U}$ dacă pentru orice $f \in E$, există $x \in X$ astfel încât şirul $u(\cdot,f,x)$ definit prin

$$u(n,f,x) = \begin{cases} x & ,\ n=0 \\ U(n,0)x + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U(n,k)f(k-1) & ,\ n \geq 1 \end{cases}$$

aparţine lui F.

Remarca 4.1.4. Dacă $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ este determinat de ecuaţia diferenţială (4.1.1), atunci soluţia sistemului

$$\begin{cases} x(n+1) = A(n)x(n) + f(n) & , \ n \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases}$$

este dată de şirul $(u(n; f, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Fixat $\mathcal{F}(X) \subset X^{\mathbb{N}}$ un şir de spaţiu Schäffer şi $n_0 \in \mathbb{N}$, definim subspaţiul vectorial a lui X

$$X_{1,\mathcal{F}}(n_0) := \{x \in X \ : \ (U(n+n_0, n_0)x)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X)\} \ . \tag{4.1.3}$$

Datorită proprietaţiilor şirurilor de spaţii Schäffer, avem că

$$X_{1,\mathcal{F}}(n_0) = \{x \in X \ : \ \exists\, f \in \mathcal{F}(X),\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } U(n, n_0)x = f(n) \ , \forall\, n \geq n_1\} \ .$$

De aici, putem stabili, de asemenea, că

$$U(n, n_0)X_{1,\mathcal{F}}(n_0) \subset X_{1,\mathcal{F}}(n) \ , \quad (n, n_0) \in \Delta \ . \tag{4.1.4}$$

Teorema 4.1.1. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ două şiruri de spaţii Schäffer şi fie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie. Presupunem că:*

(h_1) *subspaţiul $X_{1,\mathcal{F}}(0)$ este închis şi admite un completar închis, i.e. există un subspaţiu închis $X_{2,\mathcal{F}}(0)$ a lui X pentru care avem*

$$X = X_{1,\mathcal{F}}(0) \oplus X_{2,\mathcal{F}}(0)$$

(vom nota cu $P_{\mathcal{F}}(0)$ şi $Q_{\mathcal{F}}(0)$ proiecţiile corespunzătoare)

(h_2) *perechea $(\mathcal{E}(X), \mathcal{F}(X))$ este admisibilă pentru familia de evoluţie $\mathcal{U}$*

(h_3) *$\alpha_{\mathcal{E}}(n)\beta_{\mathcal{F}}(n) \to \infty$.*

Atunci, familia de evoluţie $\mathcal{U}$ are o dihotomie exponenţială uniformă. În plus, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$, subspaţiul $X_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ coincide cu $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ şi admite o completare închisă dată de $X_{2,\mathcal{F}}(n_0) := U(n_0, 0)X_{2,\mathcal{F}}(0)$.

Teorema 4.1.2. *Dacă familia de evoluţie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ are o dihotomie exponenţială uniformă, atunci fiecare pereche $(\mathcal{E}(X), \mathcal{F}(X))$ a şirurilor de spaţii Schäffer cu $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ este admisibilă pentru $\mathcal{U}$.*

Propoziţia 4.1.3. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ două şiruri de spaţii Schäffer, fie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie şi presupunem (h_1) şi (h_2) din Teorema 4.1.1. Apoi, pentru orice $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ există un unic $y \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ astfel încât $u(\cdot, f, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.*

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ şi $x \in \mathbb{X}$ date prin definiţie 4.1.3. Considerând $y = x - P_{\mathcal{F}}(0)x = Q_{\mathcal{F}}(0)x$, avem că $y \in \mathbb{X}2, \mathcal{F}(0)$ şi $u(n,f,y) = u(n,f,x) - U(n,0)P_{\mathcal{F}}(0)x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Întrucât $u(\,\cdot\,,f,x,\theta) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ şi $(U(n,0)P_{\mathcal{F}}(0)x) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$, rezultă că $u(\,\cdot\,,f,y) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Pentru a demonstra unicitatea lui y, presupunem că există $z \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ cu proprietatea $u(\,\cdot\,,f,z) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Întrucât $u(n;f,y) - u(n;f,z) = U(n,0)(y-z)$, avem că $y - z \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0) \cap \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ şi prin urmare $z = y$.

$\square$

Pentru orice $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$, vectorul unic $y \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ va fi notat cu x_f.

Propoziţia 4.1.4. *Fie* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *două şiruri de spaţii Schäffer, şi* $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *o familie de evoluţie, atunci presupunem că* (h_1) *şi* (h_2) *din Teorema 4.1.1. Atunci, există o constantă* $K > 0$ *astfel încât*

$$\|u(\,\cdot\,;f,x_f)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \leq K\|f\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})}\ ,\ \textit{pentru orice } f \in \mathcal{E}(\mathbb{X}).$$

Demonstraţie. Definim operatorul

$$\mathfrak{U} : \mathcal{E}(\mathbb{X}) \to \mathcal{F}(\mathbb{X}) \quad , \quad \mathfrak{U}f = u(\,\cdot\,;f,x_f)$$

(unde x_f este dat de Propoziţia 4.1.3 pentru orice $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$). Este uşor de verificat că $\mathfrak{U}_\theta$ este un operator liniar şi vom demonstra că acesta este de asemenea închis.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{X})$ astfel încât $\|f_n - f\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})} \to 0$ şi $\|\mathfrak{U}f_n - g\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \to 0$ cum $n \to \infty$, unde $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ şi $g \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Din Propoziţia 3.2.2, avem că $\|f_n - f\|_{\ell^\infty(\mathbb{X})} \to 0$ şi $\|u(\cdot;f_n,x_{f_n}) - g\|_{\ell^\infty(\mathbb{X})} \to 0$ cum $n \to \infty$, şi, prin urmare $x_{f_n} \to g(0)$. Întrucât $\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ este un subspaţiu închis, de asemenea conţine $g(0)$.

Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, avem că

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{m} U(m,k)f_n(k-1) - \sum_{k=1}^{m} U(m,k)f(k-1) \right\| \leq \\ \leq\ & \sum_{k=1}^{m} \|U(m,k)\|\,\|f_n(k-1) - f(k-1)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

şi astfel

$$(\mathfrak{U}f_n)(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} U(m,0)g(0) + \sum_{k=1}^{m} U(m,k)f(k-1) = u(m;f,g(0))\ .$$

Din Propoziţia 4.1.3, deducem că $x_f = g(0)$ şi astfel

$$(\mathfrak{U}f_n)(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\mathfrak{U}f)(m)\ ,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Prin urmare, $\mathfrak{U}$ este un operator liniar închis şi din Teorema graficului închis este de asemenea mărginit, adică există $K > 0$ astfel încât

$$\|u(\,\cdot\,; f, x_f)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} = \|\mathfrak{U}f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \leq K\|f\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})}$$

şi demonstraţia este completă. □

Propoziţia 4.1.5. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ două şiruri de spaţii Schäffer, $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie şi presupunem că avem (h_1) şi (h_2) din Teorema 4.1.1. Atunci, avem că*

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) \oplus \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$$

pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$, unde $\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0) := U(n_0, 0)\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$.

Demonstraţie. Fie $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{X}$ şi considerăm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ dat de

$$f(n) = -\delta_{n_0}(n)U(n+1, n_0)x\ .$$

Evident, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ şi $\|f\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})} = \beta_{\mathcal{E}}(0)\|U(n_0+1, n_0)x\|$. Atunci, există un unic $y \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ astfel încât $(u(n; f, y))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Dar, pentru orice $n \geq n_0$

$$u(n; f, y) = U(n, 0)y - U(n, n_0)x = U(n, n_0)\left(U(n_0, 0)y - x\right)\ .$$

Întrucât $u(\cdot, f, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$, deducem că $U(n_0, 0)y - x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$. Observând că $x = (x - U(n_0, 0)y) + U(n_0, 0)y$ şi că $U(n_0, 0)y \in X_{2,\mathcal{F}}(n_0)$, concluzionăm că x aparţine lui $\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) + \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$.

Fie $x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) \cap \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$. Atunci, există $z \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ astfel încât $x = U(n_0, 0)z$. Pe de altă parte, $x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ şi prin urmare $(U(n + n_0, n_0)x)_{n\in\mathbb{N}}$ constă în $\mathcal{F}(\mathbb{X})$. Dar pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem că $U(n, n_0)x = U(n, 0)z$ şi astfel $z \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0)$. Prin urmare $z \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0) \cap \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ şi de aici obţinem că $x = 0$.

□

Remarca 4.1.5. Presupunem (h_1) din Teorema 4.1.1, avem că

$$U(n, 0)P_{\mathcal{F}}(0)x \in \mathbb{X}_0(n) \quad \text{şi} \quad U(n, 0)Q_{\mathcal{F}}(0)x \neq 0\ ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr, fie $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $y = U(n, 0)P_{\mathcal{F}}(0)x$. Întrucât $P_{\mathcal{F}}(0)x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0)$ şi $U(k, n)y = U(k, 0)x$, pentru orice $k \geq n$, rezultă că $y \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n)$.

Pentru a doua parte, presupunem prin reducere la absurd că există $n > 0$ astfel încât $U(n, 0)Q_{\mathcal{F}}(0))x = 0$. Atunci, $U(k, 0)Q_{\mathcal{F}}(0)x = U(k, n)U(n, 0)Q_{\mathcal{F}}(0)x = 0$, pentru orice $k \geq n$. Astfel, $Q_{\mathcal{F}}(0)x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0) \cap X_{2,\mathcal{F}}(0)$, sau echivalent, $x = 0$, ceea ce nu este posibil.

Demonstraţia pentru următorul rezultat, poate fi obţinută din [3, 20C, p.39], în timp ce pentru al doilea, demonstraţia este analoagă.

Lemă 4.1.6. *Dacă* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *este un şir,* $H > 0$*,* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\eta \in (0, 1)$ *astfel încât*

(i) $h(k) \leq Hh(n)$*, pentru orice* $k \in \{n, n+1, ..., n+n_0\}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *şi*

(ii) $h(n + n_0) \leq \eta\, h(n)$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*,*

atunci există $N, \nu > 0$ *(depinzând numai de* H, n_0, η*) astfel încât*

$$h(m) \leq Ne^{-\nu(m-n)}h(n) \ , \ \text{pentru orice } (m, n) \in \Delta \ .$$

Lemă 4.1.7. *Dacă* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *este un şir,* $H > 0$*,* $n_0 > 0$ *şi* $\eta > 1$ *astfel încât*

(i) $h(k) \geq Hh(n)$*, pentru orice* $k \in [n, n + n_0]$*,* $n \in \mathbb{N}$ *şi*

(ii) $h(n + n_0) \geq \eta\, h(n)$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*,*

atunci există $N, \nu > 0$ *(depinzând numai de* H, n_0, η*) astfel încât*

$$h(m) \geq Ne^{\nu(m-n)}h(n) \ , \ \text{pentru orice } (m, n) \in \Delta \ .$$

Demonstraţia Teoremei 4.1.1.

Fie $x \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0) \setminus \{0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ şi considerăm şirul

$$f(n) = \delta_{n_0}(n) \frac{U(n + 1, 0)x}{\|U(n_0 + 1, 0)x\|} \ , \quad n \in \mathbb{N} \, . \tag{4.1.5}$$

Evident, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ cu $\|f\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})} = \beta_{\mathcal{E}}(0)$. Luând

$$x_f := -\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n_0}(k - 1) \frac{x}{\|U(n_0 + 1, 0)x\|} = \frac{-x}{\|U(n_0 + 1, 0)x\|} \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0) \ , \tag{4.1.6}$$

observăm că

$$\begin{aligned} u(n; f, x_f) &= U(n, 0)x_f + \sum_{k=1}^{n} U(n, k)f(k - 1) = \\ &- \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_{n_0}(k - 1) \frac{U(n, 0)x}{\|U(n_0 + 1, 0)x\|} = \\ &= \begin{cases} 0 & , \ n > n_0 \\ \dfrac{-U(n, 0)x}{\|U(n_0 + 1, 0)x\|} & , \ 1 \leq n \leq n_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

şi prin urmare $u(\,\cdot\,; f, x_f) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Din Propoziţia 4.1.4, obţinem că

$$\|u(n; f, x_f)\| \leq K\frac{\beta_{\mathcal{E}}(0)}{\beta_{\mathcal{F}}(0)}$$

şi de aici că

$$\|U(n,0)x\| \leq K\frac{\beta_{\mathcal{E}}(0)}{\beta_{\mathcal{F}}(0)}\|U(n_0+1,0)x\| \ ,$$

pentru orice $0 \leq n \leq n_0$. Fixând $L_2 := \min\{1, (K\beta_{\mathcal{E}}(0))^{-1}\beta_{\mathcal{F}}(0)\}$, putem scrie

$$\|U(m,0)x\| \geq L_2\|U(n,0)x\|, \tag{4.1.8}$$

pentru orice $(m,n) \in \Delta$ şi $x \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$. Am obţinut deasemenea că pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$, operatorul $U(n_0,0)_{|} : \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0) \to \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$ astfel încât $\|U(n_0,0)_{|}x\| \geq L_2\|x\|$ pentru orice $x \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$, şi astfel subspaţiul $\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$ este închis.

Fie $x \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0) \setminus \{0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ şi considerăm şirul

$$g(n) = \chi_{\{n_0,\ldots,n_0+m-1\}}(n)\frac{U(n+1,0)x}{\|U(n_0+m,0)x\|} \tag{4.1.9}$$

pentru care avem că $g \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$ cu $\|g\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})} \leq \frac{1}{L_2}\beta_{\mathcal{E}}(m-1)$. Luăm

$$x_g := -\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\{n_0,\ldots,n_0+m-1\}}(k)\,\frac{x}{\|U(n_0+m,0)x\|} = -m\frac{x}{\|U(n_0+m,0)x\|} \tag{4.1.10}$$

şi avem că

$$\begin{aligned} u(n; g, x_g) &= -\sum_{k=n+1}^{\infty}\chi_{\{n_0,\ldots,n_0+m-1\}}(k-1)\frac{U(n,0)x}{\|U(n_0+m,0)x\|} \\ &= \begin{cases} 0 & ,\ n \geq n_0+m \\ -(n_0+m-n)\dfrac{U(n,0)x}{\|U(n_0+m,0)x\|} & ,\ n_0 \leq n < n_0+m \\ -m\dfrac{U(n,0)x}{\|U(n_0+m,0)x\|} & ,\ 0 < n < n_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Este uşor de observat că $u(\,\cdot\,; g, x_g) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ şi din Propoziţia 4.1.4, avem că

$$\|u(\,\cdot\,; g, x_g)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \leq \frac{K}{L_2}\beta_{\mathcal{E}}(m-1) \ .$$

Pe de altă parte avem că

$$\begin{aligned}\frac{m(m+1)}{2}\frac{\|U(n_0,0)x\|}{\|U(n_0+m,0)x\|} &\leq \frac{1}{L_2}\sum_{k=n_0}^{n_0+m-1}\|u(k;g,x_g)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{L_2}\alpha_{\mathcal{F}}(m-1)\|u(\,\cdot\,;g,x_g)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}\end{aligned}$$

Prin urmare, folosind Propoziţia 3.2.1, obţinem

$$\|U(n_0+m,0)x\| \geq \frac{L_2^2}{2K}\frac{m(m+1)}{(2m-1)^2}\alpha_{\mathcal{E}}(m-1)\beta_{\mathcal{F}}(m-1)\|U(n_0,0)x\|\ , \tag{4.1.12}$$

Luând $m_0 \in \mathbb{N}$ asftel încât

$$\eta_2 := \frac{L_2^2}{2K}\frac{m_0(m_0+1)}{(2m_0-1)^2}\alpha_{\mathcal{E}}(m_0-1)\beta_{\mathcal{F}}(m_0-1)\ >\ 1\ ,$$

şi folosind Lema 4.1.7, obţinem că există $N_2,\nu_2>0$ astfel încât

$$\|U(m,0)x\| \geq N_2e^{\nu_2(m-n)}\|U(n,0)x\|\ ,$$

pentru orice $(m,n)\in\Delta$ şi $x\in\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$. Dacă $x\in\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci există $y\in\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ astfel încât $x=U(n,0)y$ şi astfel

$$\|U(m,n)x\| = \|U(m,0)y\| \geq N_2e^{\nu_2(m-n)}\|U(n,0)y\| = N_2e^{\nu_2(m-n)}\|x\|\ ,$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}$, $m\geq n$.

Apoi, fie $x\in\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ pentru orice $n_0\in\mathbb{N}^*$, considerăm secvenţa

$$h(n) = \delta_{n_0}(n+1)x\ , \tag{4.1.13}$$

şi observăm că $h\in\mathcal{E}(\mathbb{X})$ cu $\|h\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})}=\beta_{\mathcal{E}}(0)\|x\|$. Este uşor de observat că

$$u(n;h,0) = \begin{cases} U(n,n_0)x & ,\ n\geq n_0 \\ 0 & ,\ 0\leq n<n_0\end{cases}$$

aparţine lui $\mathcal{F}(\mathbb{X})$. Atunci, avem că

$$\|U(n,n_0)x\| \leq \frac{K}{\beta_{\mathcal{E}}(0)}\|x\|\ ,\ n\geq n_0 \tag{4.1.14}$$

Pentru cazul în care $n_0=0$, observăm că

$$u(n;\delta_0U(1,0)x,0) = U(n,0)x\ ,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi ca mai sus, avem că

$$\|U(n,0)x\| \leq \frac{K}{\beta_{\mathcal{E}}(0)}\|U(1,0)\| \, \|x\| \ . \tag{4.1.15}$$

Luând $L_1 := \max\{1, \frac{K}{\beta_{\mathcal{E}}(0)}, \frac{K}{\beta_{\mathcal{E}}(0)}\|U(1,0)\|\}$, putem scrie

$$\|U(n,n_0)x\| \leq L_1\|x\| \ ,$$

pentru orice $(n,n_0) \in \Delta$ şi $x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$.

Fie $x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $m \in \mathbb{N}$. Considerăm că şirul

$$k(n) = \chi_{\{n_0,\dots,n_0+m\}}(n+1)U(n+1,n_0)x \tag{4.1.16}$$

aparţine lui $\mathcal{E}(\mathbb{X})$ cu $\|k\|_{\mathcal{E}(\mathbb{X})} \leq L_1\beta_{\mathcal{E}}(m)\|x\|$. Deasemenea, avem că

$$u(n;k,0) = \begin{cases} 0 & , \ n < n_0 \\ (n-n_0+1)U(n,n_0)x & , \ n_0 \leq n \leq n_0+m \\ (m+1)U(n,n_0)x & , \ n > n_0+m \end{cases} \tag{4.1.17}$$

şi, prin urmare $u(\,\cdot\,;k,0) \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$. Din Propoziţia 4.1.4, avem că

$$\|u(\,\cdot\,;k,0)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \leq KL_1\beta_{\mathcal{E}}(m)\|x\| \ .$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)(m+2)}{2}\|U(n_0+m,n_0)x\| \ &\leq \ L_1\sum_{n=n_0}^{n_0+m}\|u(n;k,0)\| \leq \\ &\leq \ L_1\alpha_{\mathcal{F}}(m)\|u(\,\cdot\,;k,0)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\|U(n_0+m,n_0)x\| \leq 2KL_1^2\frac{(2m+1)^2}{(m+1)(m+2)}\frac{1}{\alpha_{\mathcal{E}}(m)\beta_{\mathcal{E}}(m)}\|x\| \tag{4.1.18}$$

şi alegem $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\eta_1 := 2KL_1^2\frac{(2m_0+1)^2}{(m_0+1)(m_0+2)}\frac{1}{\alpha_{\mathcal{E}}(m_0)\beta_{\mathcal{E}}(m_0)} < 1$$

Prin urmare, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$, avem că

$$\|U(n+m_0,n_0)x\| \leq \eta_1\|U(n,n_0)x\| \ ,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$. Aplicând Lema 4.1.6, există $N_1, \nu_1 > 0$ astfel încât
$$\|U(m,n_0)x\| \leq N_1 e^{-\nu_1(m-n)} \|U(n,n_0)x\| \ ,$$
În particular, putem scrie
$$\|U(m,n)x\| \leq N_1 e^{-\nu_1(m-n)} \|x\| \ , \ (m,n) \in \Delta \, , \ x \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n) \ . \qquad (4.1.19)$$
De aici, obţinem deasemenea că $\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n)$ este un subspaţiu închis pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, dacă $y \in \overline{\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n)}$ fie $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încât $x_j \in \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n)$ pentru orice $j \in \mathbb{N}$ şi $x_j \to y$. Pentru $j \to \infty$ în
$$\|U(m,n)x_j\| \leq N_1 e^{-\nu_1(m-n)} \|x_j\| \ ,$$
obţinem că $(U(m+n,n)y)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Pentru a arăta că $U(n,n_0)_| : \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0) \to \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n)$ este inversabil, fie $x \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n)$ şi considerăm şirul
$$r(m) = -\delta_n(m+1)U(m+1,n)x \ , \ m \in \mathbb{N} \ .$$
Avem că $r \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Din Propoziţia 4.1.3, rezultă ca există un unic $x_r \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ astfel încât şirul
$$u(m;r,x_r) = U(m,0)x_r + \sum_{k=1}^{m} U(m,k)r(k) \ , \ m \in \mathbb{N}$$
aprţine lui $\mathcal{F}(\mathbb{X})$. Dar, $u(m;r,x_r) = U(m,n)(U(n,0)x_r - x)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, şi prin urmare $U(n,0)x_r = x$. Există un $y = U(n_0,0)x_r \in \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0)$ care satisface $U(n,n_0)y = x$. Din moment ce restricţia $U(n,n_0)_| : \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0) \to \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n)$ a fost deja dovedită (vezi Remarca 4.1.5 de mai sus), rezultă că este inversabil.

Demonstraţia Teoremei 4.1.2.

Fie $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ o familie de proiectoare dată de Definiţia 4.1.2. Din Remarca 4.1.2, avem că există $C > 0$ astfel încât $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P(n)\| \leq C$ şi $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q(n)\| \leq C$, unde $Q(n) := I - P(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Acum, fie $f \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$. Întrucât $f \in \ell^\infty(\mathbb{X})$ şi
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|U(k,n)_|^{-1} Q(k) f(k-1)\| \leq NC\|f\|_\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\nu(k-n)} = \frac{NCe^{-\nu}}{1-e^{-\nu}} \|f\|_\infty \ ,$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$,
$$x := \sum_{k=1}^{\infty} U(k,0)_|^{-1} Q(k) f(k-1)$$

există un element în $Q(0)\mathbb{X}$. Putem defini deasemenea, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ fixând $\varphi(0) = x$ şi

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} U(n,k)P(k)f(k-1) - \sum_{k=n+1}^{\infty} U(k,n)_|^{-1}Q(k)f(k-1) \quad (4.1.20)$$

pentru orice $n \geq 1$. Cum seria de mai sus este absolut convergentă, φ este corect definit. Putem scrie deasemenea,

$$\begin{aligned}\|\varphi(n)\| &\leq NC\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\nu(n-k)}\|f(k-1)\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\nu(k-n)}\|f(k-1)\|\right) = \\ &= NC\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\nu k}\|R^{k+1}f\|(n) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu k}\|L^{k-1}f\|(n)\right) \leq \\ &\leq NC\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\nu k}\|R^{k+1}f\|(n) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu k}\|L^{k-1}f\|(n)\right).\end{aligned}$$

Din ipoteză, avem că $L^{k-1}f, R^{k+1}f \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ şi deasemenea $\|L^{k-1}f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}$, $\|R^{k+1}f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} = \|f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, putem scrie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|e^{-\nu k}\|R^{k+1}f\|\right\|_{\mathcal{F}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|e^{-\nu k}\|L^{k-1}f\|\right\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1+e^{-\nu}}{1-e^{-\nu}}\|f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})} \ .$$

Rezultă că şirul

$$\phi := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\nu k}\|R^{k+1}f\| + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu k}\|L^{k-1}f\|$$

există ca şi element în $\mathcal{F}$ cu $\|\phi\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1+e^{-\nu}}{1-e^{-\nu}}\|f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}$. În plus, întrucât $\|\varphi(n)\| \leq NC\phi(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Pe de altă parte, se poate verifica faptul că

$$\varphi(n) = U(n,0)x + \sum_{k=1}^{n} U(n,k)f(k-1) \ ,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel $u(\,\cdot\,; f, x) = \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Bibliografie

[1] Coffman C.V., Schäffer J.J., *Dichotomies for Linear Difference Equations*, Math. Annalen, 172 (1967), 139-166.

[2] Craciunescu A., *Analiză funcţională. Notiţe de curs.* Anul III, Semestrul I, 2013.

[3] Massera J.L., Schäffer J.J., *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York, 1966.

[4] Preda P., Pogan A., Preda C., *Schäffer spaces and uniform exponential stability of linear skew-product semiflows*, J. Diff. Eqs., 212 (2005), 191-207.

[5] Preda P., Pogan A., Preda C., *Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 12 (2005), no. 5, 621-631.

[6] Sasu A. L., *Spaţii de funcţii. Notiţe de curs.* Master MAGS, Anul I, Semestrul I, 2013.

[7] Megan M., Sasu A. L., Sasu B., *The Asymptotic Behaviour of Evolution Families*, Editura Mirton, Timişoara, 2003.

[8] Van Minh N., Räbiger F., Schnaubelt R., *Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line*, Int. Eq. Op. Theory, 32 (1998), 332-353.