

Spatiu de functii aplicate in teoria controlului

Cap. I : Spatii de Functii

§ 1.1. Norme generalizate de functii

Notam $m = m_{\mu, \delta}$, Lebesgue și $\text{cll} = \text{sp. liniar al fg. } f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ măsurabile
Lebesgue încearcă identificarea funcțiilor simple a j. t.

Def. 1: O apl. $N: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ s.u. normă generalizată (de functii) dacă

$$(n_1) N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow$$

$$(n_2) \text{ dacă } |f(t)| \leq |g(t)| \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+ \text{ atunci } N(f) \leq N(g);$$

$$(n_3) N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{M} \text{ cu } N(f) < \infty;$$

$$(n_4) N(f+g) \leq N(f) + N(g), \forall f, g \in \mathcal{M}.$$

Def. 2: Dacă N este o normă generalizată atunci

$$B = B_N \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} \text{ s.u. } \underline{\text{sunt de functii asociat normei } N}$$

Rem. 1: B - sp. liniar.

Dem.: Dacă $f, g \in B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ at. $N(\alpha f + \beta g) \stackrel{(n_4)}{\leq} N(\alpha f) + N(\beta g) =$
 $= |\alpha| N(f) + |\beta| N(g) < \infty \Rightarrow \alpha f + \beta g \in B.$

Rem. 2: $B = B_N$ este un ideal în \mathcal{M} i.e. dacă $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$

$\& g \in B$ atunci $f \in B$.

Dem.: Rez. imediat din (n_2) : $N(f) \leq N(g) < \infty$.

Def. 3: Fie N o normă generalizată. Să $B = B_N$. Fie definiție

$$\|f\|_B := N(f). \text{ Aplic. } \| \cdot \|_B \text{ e.n. normă de funcții.}$$

Rem. 3: Dacă N este normă generalizată și $B = B_N$, atunci $(B, \|\cdot\|_B)$ este S.V.N.

Def. 4: Dacă $(B, \|\cdot\|_B)$ este complet, at. B s.u. sp. Banach de funcții.

Rem. 4: Dacă B este sp. Banach de funcții și $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$ și $g \in B$, atunci $f \in B$ și $\|f\|_B \leq \|g\|_B$.

Not.: $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spațiilor Banach de funcții B cu proprietatea că

$$\chi_{[0,t)} \in B, \forall t > 0.$$

Dacă $A \in \mathbb{R}_+$, χ_A - funcție caracteristică a mulțimii A , astfel încât

$$\chi_A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

Exemplul 2: $N(f) = \|f\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$.

• Dacă $p \in [1, \infty)$ atunci:

$$N(\chi_{[0,t)}) = \left(\int_0^\infty |\chi_{[0,t)}|^p ds \right)^{1/p} = t^{1/p} < \infty \Rightarrow \chi_{[0,t)} \in B, \forall t > 0.$$

$$\Rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+), \forall p \in [1, \infty)$$

• Dacă $p = \infty$ atunci

$$N(f) = \|f\|_\infty \Rightarrow N(\chi_{[0,t)}) = 1, \forall t > 0 \Rightarrow \chi_{[0,t)} \in B, \forall t > 0$$

$$\Rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+).$$

Def. 5: Fie $B \in Q(\mathbb{R}_+)$. Aplicație $F: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $F_B(t) = \|\chi_{[0,t)}\|_B$

s.m. funcție fundamentală a spațiului B .

Prop. 1: dacă $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ atunci $F_B \in \mathcal{M}_{(0, \infty)}^{\neq}$.

Dem.: Fie $t_1 < t_2$. $\chi_{[t_0, t_1]} \leq \chi_{[t_0, t_2]} \xrightarrow{(u_2)} F_B(t_1) \leq F_B(t_2)$.

Exemplul 2: $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

$$F_B(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ 1, & p = \infty \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

§ 1.2. Clase de spații de funcții

Motivări: $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) =$ clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu prop. cof.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_B(t) = +\infty$$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+) =$ clasa spaț. Banach de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu prop. cof.

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[n, n+1]}|_B > 0.$$

Exemplul 1: $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Dim. Ex. 2, § 1.1, rezulta că

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow p \in [1, \infty).$$

Rmk. 1: Incluziunea $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ este strictă.

Exemplul 2: $N(f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f(t)| dt$, $\forall f \in \mathcal{M}$.

1) N - normă generalizată

$$(n_1) \quad N(f) = 0 \Rightarrow \int_n^{n+1} |f(t)| dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0 \text{ a.p.t. pe } [n, n+1], \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ a.p.t.}$$

$$(n_2) \quad N(\alpha f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |\alpha f(t)| dt = |\alpha| \cdot N(f), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{M} \text{ cu } N(f) < \infty.$$

$$(n_3) \quad |f(t)| \leq |g(t)| \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f(t)| dt \leq \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |g(t)| dt$$

$$\Rightarrow N(f) \leq N(g)$$

$$(n) |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n+1} |f(t) + g(t)| dt \leq \frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n+1} |f(t)| dt + \frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n+1} |g(t)| dt \mid \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow N(f+g) \leq N(f) + N(g).$$

\Rightarrow N -normă generalizată.

$$2) \text{ Fie } B = B_N = \{f \in U : N(f) < \infty\}, \|f\|_B = N(f).$$

Arenă $(B, \|\cdot\|_B)$ este S.N.N.

Astăzi că $(B, \|\cdot\|_B)$ este complet.

Fie $(f_m)_m \in \mathcal{F}_B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_m - f_p|_B < \varepsilon$, $\forall m, p \geq m_0$. (1)

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n+1} |f_m(t) - f_p(t)| dt < \varepsilon, \forall m, p \geq m_0. \quad (2).$$

Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat și $\delta > 0$.

$$\Rightarrow \exists m_\delta \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^{k+1} |f_m(t) - f_p(t)| dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n+1} |f_m(t) - f_p(t)| dt < \frac{\delta}{k+1}, \forall m, p \geq m_\delta$$

$$\Rightarrow \sum_{n=k}^{k+1} |f_m(t) - f_p(t)| dt < \delta, \quad \forall m, p \geq m_\delta.$$

$$\Rightarrow (f_m)_m \in \mathcal{F}_{L_{[k, k+1]}} \Rightarrow \exists \varphi^k \in L^1_{[k, k+1]} \text{ a.î. } f_m \xrightarrow{L_{[k, k+1]}} \varphi^k$$

$$\Rightarrow \exists (f_{m_j}) \subset (f_m) \text{ cu } f_{m_j} \xrightarrow{} \varphi^k \text{ a.p.t. } t \in [k, k+1].$$

$$\text{Definim } f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \varphi^k(t), t \in [k, k+1]$$

$$\Rightarrow \exists (f_{m_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset (f_m) \text{ cu } f_{m_i} \xrightarrow{} f \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+$$

(reconstituire din f_m se va întâlni de mai multe ori)

$$\text{dim (2)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^n |f_m(t) - f_{m_i}(t)| dt \leq \varepsilon, \quad \forall m_i \geq m_0.$$

n+1 tends to
 limit - sub S (m_i \geq 0)

$$\text{Focem } m_i \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^n |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall m \geq m_0. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{dim (3)} \Rightarrow f_m - f &\in B, \quad \forall m \geq m_0 \\ f_m &\in B \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} f = -(f_m - f) + f_m \in B \end{array} \right.$$

dim (3) avem că $|f_m - f|_B < \varepsilon, \quad \forall m \geq m_0 \Rightarrow f_m \xrightarrow[B]{} f \Rightarrow f \in B$ e corect

$\Rightarrow (B, \| \cdot \|_B)$ sp. Banach ale funcțiilor.

3) $Q(\mathbb{R}_+)$.

$$N(\chi_{[0,t]}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{n+1} \chi_{[0,t]}(s) ds \leq \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor + 1} \frac{1}{n+1} < \infty$$

$$\Rightarrow \chi_{[0,t]} \in B \Rightarrow B \in Q(\mathbb{R}_+).$$

~~if $t > 0$~~

4) $B(\mathbb{R}_+)$.

$$F_B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \chi_{[0,n+1]}(s) ds = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Fie } t \geq n+1 \Rightarrow F_B(t) \geq F_B(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow F_B(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\longrightarrow} +\infty$$

$\Rightarrow B \in B(\mathbb{R}_+)$.

5) $E(\mathbb{R}_+)$.

$$|\chi_{[0,t] \setminus [m, n+1]}|_B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\chi_{[m, n+1]}(s)| ds = \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[n, n+1]}| = 0 \Rightarrow B \notin E(\mathbb{R}_+).$$

2.03.2011.

§ 1.3. Funcție Young

Fie $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ monoton crescătoare, continuă la stânga

cu $\varphi|_{(0, \infty)} \neq 0$ și $\varphi|_{(0, \infty)} \neq \infty$.

Def. 1.: Apă. $\Upsilon_\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\Upsilon_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(z) dz$ s.u. Funcție Young asociată lui φ .

Rmk. 1: $\Upsilon_\varphi(0) = 0$ și $\Upsilon_\varphi \in \text{cl}_\ell^1 \neq$

Teor. 1: $\Upsilon_\varphi \in \text{loc}_{[0, \infty)}$.

Asem.: $\Upsilon_\varphi \in \text{loc}_{[0, \infty)}$ (ex.)

Arătăm că $\Upsilon_\varphi \in \mathcal{F}_{[0, \infty)}$ (convergență uniformă).

Fie $t, s \geq 0$, $s \leq t$. Arăt. că

$$\Upsilon_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\Upsilon_\varphi(s) + \Upsilon_\varphi(t)). \quad (1)$$

Dacă $\Upsilon_\varphi(t) = \infty$ sau $\Upsilon_\varphi(s) = \infty \Rightarrow (1)$ evident.

Pp: $\Upsilon_\varphi(t), \Upsilon_\varphi(s) < \infty$.

$$s \leq \frac{s+t}{2} \leq t$$

$$\Rightarrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \Upsilon_\varphi(t) < \infty.$$

$$\text{Calculăm } \Upsilon_\varphi(t) + \Upsilon_\varphi(s) - 2\Upsilon_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) =$$

$$= \int_0^t \varphi(z) dz + \int_0^s \varphi(z) dz - 2 \left[\int_0^{\frac{s+t}{2}} \varphi(z) dz + \int_{\frac{s+t}{2}}^t \varphi(z) dz \right] =$$

$$\int_0^t \int_0^s \varphi(z) dz - \int_0^s \int_0^t \varphi(z) dz - 2 \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz = \int_s^t \int_0^z \varphi(\eta) d\eta - 2 \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz =$$

$$\int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz + \int_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(z) dz - 2 \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz = \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz - \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(z) dz \geq 0,$$

co'c' φ cll \neq ,
 $\varphi \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{I}_\varphi \in \mathcal{F}_{[0, \infty)} \\ \mathcal{I}_\varphi \in \mathcal{B} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{I}_\varphi \in \mathcal{B}_{\mathcal{V}[0, \infty)}$$

1. h. Spaltu' Orlicz

Fix $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ cont. lo stanga, crescente, $\varphi(0) \neq 0$ w $\varphi \not\equiv 0$

$$\mathcal{I}_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(z) dz, \forall t \geq 0.$$

Fix f cll. Definim:

$$M_\varphi(f) \stackrel{d}{=} \int_0^\infty \mathcal{I}_\varphi(|f(t)|) dt, \text{ resp.}$$

$$\mathcal{O}_\varphi \stackrel{d}{=} \{ f \text{ cll} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty \}.$$

Teor. 1: \mathcal{O}_φ este lmbg. limită în cll.

Dem: Fix $f, g \in \mathcal{O}_\varphi \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty, M_\varphi(c_2 g) < \infty$.

$$\text{Not. } c = \frac{1}{2} \cdot \min\{c_1, c_2\}.$$

$$c |f(t) + g(t)| \leq c |f(t)| + c |g(t)| \leq \begin{cases} c_1 |f(t)| & , |f(t)| \geq |g(t)| \\ c_2 |g(t)| & , |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (c|f(t)+g(t)|) \leq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} (c_1|f(t)|), \text{ doc } |f(t)| \geq |g(t)| \\ \int_{\mathbb{R}} (c_2|g(t)|), \text{ doc } |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (c|f(t)+g(t)|) \leq \int_{\mathbb{R}} (c_1|f(t)|) + \int_{\mathbb{R}} (c_2|g(t)|), \forall t \geq 0.$$

$$\stackrel{\infty}{\sum} \Rightarrow M_q(c(f+g)) \leq M_q(c_1 f) + M_q(c_2 g) < \infty$$

$$\Rightarrow f+g \in \mathcal{O}_q.$$

Fix $f \in \mathcal{O}_q$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Doc $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = 0 \Rightarrow M_q(\lambda f) = 0$
 Doc $\lambda \neq 0$, at- dim $f \in \mathcal{O}_q \Rightarrow \exists c > 0$ a.s. $M_q(cf) < \infty$.

$$\text{Fix } \tilde{c} = \frac{c}{|\lambda|}.$$

$$M_q(\tilde{c}\lambda f) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{c} \lambda |f(t)|) dt = M_q(cf) < \infty.$$

$$\Rightarrow \lambda f \in \mathcal{O}_q.$$

Fix $f \in \mathcal{M}$. Definim

$$A_f = \left\{ c > 0 : M_q\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \right\}$$

Rem. 2: Doc $c \in A_f$ atunci $[c, \infty) \subset A_f$.

$$\underline{\text{Dem.}} \text{ Fix } \tilde{c} > c \Rightarrow M_q\left(\frac{1}{\tilde{c}}f\right) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\tilde{c}}|f(t)|\right) dt \leq M_q\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1.$$

$$\text{Definim } N: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], N(f) = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ +\infty, & A_f = \emptyset \end{cases}$$

Teor. 2: Este o normă generalizată de funcție.

Dem.: (n.) $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.p.t.

$$N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \inf A_f = 0 \Rightarrow \exists (c_n) \in A_f \text{ cu } N_{A_f} c_n < N(f) + \frac{1}{n} \\ A_f \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow M_q\left(\frac{1}{c_n} f\right) \leq 1$$

\Rightarrow

$$\Leftarrow f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow \forall c > 0 \rightarrow \Upsilon_q\left(\frac{1}{c} |f(t)|\right) = 0 \text{ a.p.t.}$$

$$\Rightarrow M_q\left(\frac{1}{c} f\right) = 0 \leq 1 \Rightarrow A_f = (0, \infty) \neq \emptyset \Rightarrow N(f) = 0.$$

\Leftarrow P.p., R.A., $f \neq 0$ a.p.t. $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{L}, m(A) > 0, \exists \delta > 0$ a.i.

$$|f(t)| \geq \delta, \forall t \in A.$$

$$\begin{aligned} A_f \subset (0, \infty) \\ N(f) = 0 \rightarrow A_f \neq \emptyset, \inf A_f \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Pentru 2} \\ \Rightarrow A_f = (0, \infty) \end{array} \right\}$$

$$\text{Fie } c > 0 \text{ arbitrar} \rightarrow M_q\left(\frac{1}{c} f\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \geq M_q\left(\frac{1}{c} f\right) = \int_0^\infty \Upsilon_q\left(\frac{1}{c} |f(t)|\right) dt \geq \int_A \Upsilon_q\left(\frac{1}{c} |f(t)|\right) dt \geq$$

$$\geq \int_A \Upsilon_q\left(\frac{\delta}{c}\right) dt = \Upsilon_q\left(\frac{\delta}{c}\right) m(A)$$

$$\Rightarrow \Upsilon_q\left(\frac{\delta}{c}\right) \leq \frac{1}{m(A)}$$

$$\text{Dacă } \Upsilon_q = \int_0^\infty q(z) dz \leq \frac{1}{m(A)}, \forall c > 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty q(z) dz \leq \frac{1}{m(A)}. \quad \text{Dacă } q \geq 0 \text{ sau } q \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}^+$$

$\Rightarrow \varphi|_{(0, \infty)} = 0$ a.p.t., adică:

P. fără fel se $\Rightarrow f=0$ a.p.t.

(n₂) Dacă $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \geq 0$ atunci $N(f) \leq N(g)$.

• Dacă $N(g) = \infty \Rightarrow$ evident

• Dacă $N(g) < \infty \Rightarrow \exists c > 0$ a.i. $M_g\left(\frac{1}{c}g\right) \leq 1$.

Eșuf. să arăt că $A_g \subset A_f$. Fie $g \in A_g$

$$M_g\left(\frac{1}{c}f\right) \leq M_g\left(\frac{1}{c}g\right) \leq 1 \Rightarrow A_f \neq \emptyset \text{ și } A_g \subset A_f$$

(n₃) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ și f cu $N(f) < \infty$.

Anat. că $N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.

Dacă $\lambda = 0 \stackrel{(n_1)}{\Rightarrow}$ evident.

P. $\lambda \neq 0$. Este suf. să anat. că $A_{\lambda f} = |\lambda| A_f$. (3)

□ Fie $c \in A_{\lambda f} \Rightarrow M_g\left(\frac{\lambda}{c}f\right) \leq 1$.

$$\text{Fie } c_1 = \frac{c}{|\lambda|}$$

$$M_g\left(\frac{1}{c}f\right) = M_g\left(\frac{|\lambda|}{c}f\right) = M_g\left(\frac{\lambda}{c_1}f\right) \leq 1 \Rightarrow c_1 \in A_f$$

$$\Rightarrow c = \lambda c_1 \in |\lambda| A_f \Rightarrow A_{\lambda f} \subset |\lambda| A_f$$

□ Fie $c \in A_f$. Anat. că $|\lambda| \cdot c \in A_{\lambda f}$.

$$M_g\left(\frac{1}{|\lambda|c} \cdot \lambda f\right) = M_g\left(\frac{1}{|\lambda|c} |\lambda| f\right) = M_g\left(\frac{1}{c} f\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow |\lambda|c \in A_{\lambda f} \Rightarrow |\lambda| A_f \subset A_{\lambda f} \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow A_{\lambda f} \neq \emptyset \Rightarrow \inf A_{\lambda f} = |\lambda| \inf A_f \Leftrightarrow$$

$$N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$$

(n₄) Fie $f, g \in \text{cll}.$ Arăt. că

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g). \quad (4)$$

Dacă $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty \Rightarrow (4).$

Dacă $N(f), N(g) < \infty \Rightarrow A_f, A_g \neq \emptyset.$

Arăt. că $A_f + A_g \subset A_{f+g}. \quad (5)$

Fie $c_1 \in A_f$ și $c_2 \in A_g \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) \leq 1$ și $M_\varphi\left(\frac{1}{c_2}g\right) \leq 1.$

$$\text{Fie } t \geq 0. \quad \frac{1}{c_1+c_2} |f(t)+g(t)| \leq \frac{1}{c_1+c_2} |f(t)| + \frac{1}{c_1+c_2} |g(t)| =$$

$$= \frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2} \frac{|g(t)|}{c_2}.$$

$$Y_\varphi \in \text{cll}^{\neq} \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2} |f(t)+g(t)|\right) \leq Y_\varphi\left(\frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2} \cdot \frac{|g(t)|}{c_2}\right) \leq$$

$$\stackrel{Y_\varphi \in \text{cll}^{\neq}}{\leq} \frac{c_1}{c_1+c_2} Y_\varphi\left(\frac{|f(t)|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} Y_\varphi\left(\frac{|g(t)|}{c_2}\right).$$

$$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2} (f+g)\right) \leq \frac{c_1}{c_1+c_2} \underbrace{M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right)}_{\leq 1} + \frac{c_2}{c_1+c_2} \underbrace{M_\varphi\left(\frac{1}{c_2} g\right)}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{c_1+c_2} + \frac{c_2}{c_1+c_2} = 1$$

$\Rightarrow \cancel{f+g \in A_{f+g}} \Rightarrow (5).$

$\Rightarrow A_{f+g} \neq \emptyset \Rightarrow \inf A_{f+g} \leq \inf A_f + \inf A_g \Rightarrow (4).$

Din (n₁) - (n₄) $\Rightarrow N$ este normă generalizată.

Fie $B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = \{f \in \mathcal{M} : A_f \neq \emptyset\}$

Teor. 3: $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$.

Dem.: $\boxed{\supseteq}$ Fie $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1 < \infty \Rightarrow f \in O_\varphi$.

$\boxed{\subseteq}$ Fie $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty$.

Cazul I: $M_\varphi(cf) = 0 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow N(f) < \infty$.

Cazul II: $M_\varphi(cf) > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $n_0 \geq M_\varphi(cf)$.

$$M_\varphi(cf) = \int_0^\infty \varphi(c|f(t)|) dt.$$

$\varphi \uparrow$ (ce mai mică valoare re $\left[\varphi \left(\frac{c}{n_0} |f(t)| \right) \right] \Rightarrow$ termeni sunt mai mici)

$$\varphi(c|f(t)|) = \int_0^{c|f(t)|} \varphi(z) dz = \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\frac{(j-1)}{n_0} |f(t)|}^{\frac{j}{n_0} |f(t)|} \varphi(z) dz \geq n_0 \int_{0}^{\frac{n_0}{n_0} |f(t)|} \varphi(z) dz =$$

$$= n_0 \cdot \varphi\left(\frac{n_0}{n_0} |f(t)|\right)$$

$$\Rightarrow n_0 \cdot M_\varphi\left(\frac{c}{n_0} f\right) \leq M_\varphi(cf) \leq n_0 \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{c}{n_0} f\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{n_0}\right) \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset.$$

Din teor. 3 \Rightarrow are sens să definișim

$$|f|_\varphi := N(f), \forall f \in O_\varphi.$$

$$\text{Rez. că } |f|_\varphi = \inf_{c>0} \{ M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \}$$

Terminologie: 1. $|f|_\varphi$ și nume Orlicz-a funcție f.

$\Rightarrow (O_\varphi, l \cdot l_\varphi)$ este S.V.N.

Terminologie: $(O_\varphi, l \cdot l_\varphi)$ - sp. Orlicz.

Probleme: completitudinea.

Exemplu: $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M}: \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty\}$.

$$Q_\varphi = \{f \in \mathcal{M}: M_\varphi(f) < \infty\}.$$

$$Q_\varphi \subsetneq O_\varphi.$$

$$\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ \infty, & t > 1 \end{cases}$$

$$I_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(z) dz = \begin{cases} \infty, & t > 1 \\ 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = 2.$$

$$M_\varphi(f) = \infty, \quad M_\varphi(\frac{1}{2}f) = 0 < \infty.$$

10.03.2011.

§1.5: Proprietăți de completeitate ale spațiilor de funcții

- 15

Fie $N: M \rightarrow [0, \infty]$ o normă generalizată de funcții:

$$B = B_N = \{f \in M : N(f) < \infty\}, \quad \|f\|_B := N(f).$$

Rew. 1: $(B, \|\cdot\|_B)$ este S.V.N.

Rew. 2: $f \in B \Leftrightarrow |f| \in B$. În plus, $\|f\|_B = \|f\|_B$.

Dem: \Rightarrow Pp. $f \in B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|f\| \leq \|f\| \\ f \in B \end{array} \right\} \Rightarrow \|f\| \in B$ și $N(\|f\|) \leq N(f)$

$$\Leftrightarrow \|f\|_B \leq \|f\|_B. \quad (1)$$

\Leftarrow Pp. $|f| \in B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|f\| \leq \|f\| \\ |f| \in B \end{array} \right\} \Rightarrow f \in B$ și $N(f) \leq N(|f|)$

$$\Leftrightarrow \|f\|_B \leq \|f\|_B. \quad (2)$$

$\stackrel{(1)}{\underline{\underline{\Rightarrow}}} \text{q.e.d.}$

Def. 1: Sp. că N satisface proprietatea Beppo-Levi d.-a-d.

(m_5) Deci $0 \leq f_n, f_n \nearrow f$ a.p.t. atunci $N(f_n) \uparrow N(f)$.

Sp. că N este:

" (m_6) " Deci $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ atunci $N(\chi_A) < \infty$,

" (n_f) " $\forall A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty \exists K_A \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\int_A |f| \leq K_A \cdot N(f), \quad \forall f \in M. \quad (*)$$

Rem. 3: Dacă N satisfăcă (n_0) atunci pt. orice $A \in \mathcal{Z}$ cu $m(A) < \infty$

$$\Rightarrow \chi_A \in B.$$

În particular $B \in Q(\mathbb{R}_+)$.

Rem. 4: Dacă $f \in M$ cu $N(f) = \infty$ atunci $(*)$ e evidentă.

De aceea rel. $(*)$ apare uneori pentru $f \in B$.

Rem. 5: Fie \mathcal{E} -sp. funcțiilor etajate $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ cu etajă de măsură finită.

Dacă N satisfăcă (n_0) atunci $\mathcal{E} \subset B$.

Dem.: Fie $s \in \mathcal{E} \Rightarrow s = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}$, unde $A_k \in \mathcal{Z}$ cu $m(A_k) < \infty$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Aveam $\chi_{A_k} \in B$, B -sp. liniar $\Rightarrow s \in B$.

Ex 1: Fie $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $1 \cdot \|f\|_B = \|f\|_p$.

P=1 Prop. (n_2) este evidentă.

P=\infty Fie $A \in \mathcal{Z}$, $m(A) < \infty$.

$$\int_A |f| \leq m(A) \cdot \|f\|_\infty, \quad \forall f \in B \quad \Rightarrow K_A = \begin{cases} m(A), & m(A) > 0 \\ 1, & m(A) = 0 \end{cases}$$

p \in (1, \infty) Fie $A \in \mathcal{Z}$, $m(A) < \infty$.

$$\int_A |f|^p = \int_{\mathbb{R}_+} |f|^p \chi_A \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}_+} \chi_A^p \right)^{1/2} = (m(A))^{1/2} \cdot \|f\|_p, \quad \forall f \in B$$

$$\Rightarrow K_A = (m(A))^{1/2}.$$

În concluzie, spațiile L^p satisfăc $(n_5) - (n_7)$.

Prop. 1: Dacă N satisfăcă prop. (n_7) și $f_n \rightarrow f$ în B atunci pt. orice $A \in \mathcal{Z}$ cu $m(A) < \infty$ există $(f_{k_n}) \subset (f_n)$ astfel încât $f_{k_n} \rightarrow f$ a.p.t. pe A .

Dem.: Fie $f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow \|f_n - f\|_B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (1)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ cu $m(A) < \infty$ și $\varepsilon > 0$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm

$$A_n = \{t \in A : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \geq \int_{A_n} \frac{1}{\varepsilon} |f_n - f| \geq \int_{A_n} 1 dm = m(A_n)$$

$$\Rightarrow m(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \stackrel{(n)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} k_A \cdot N(f_n - f) = \frac{1}{\varepsilon} k_A \|f_n - f\|_B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f \text{ pe } A$$

$$\Rightarrow (f_{k_n}) \subset (f_n) \text{ cu } f_{k_n} \rightarrow f \text{ a.p.t. pe } A$$

Concluzie: Dacă N satisfacă (n₇) atunci pt. orice $f_n \rightarrow f$ în B există

$$(f_{k_n}) \subset (f_n) \text{ cu } f_{k_n} \rightarrow f \text{ a.p.t.}$$

Dem.: Reg. dim P_i , utilizând decomp. $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1)$ și un procedeu de diagonalizare.

Prop. 2: Dacă N satisf. (n₇) și $N(f) < \infty$ atunci f este finită a.p.t.
 $(\forall f \in B \Rightarrow f \text{ finită a.p.t.})$

Dem.: Fie $f \in M$ cu $N(f) < \infty$.

$$\text{Not. } A = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| = \infty\}.$$

$$A_n = \{t \in \mathbb{R}_+ : [n, n+1) : |f(t)| = \infty\}$$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (1)$$

Fie $t \in [n, n+1)$ și $t \in A_n$, $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrar.

$$\Rightarrow |f(t)| \geq k \Rightarrow k \cdot m(A_m) \leq \sum_{A_m} |f| \leq \sum_{[n, n+1]} |f| \leq k_n \cdot N(f).$$

Dacă $k \cdot m(A_m) \leq k_n \cdot N(f)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$k \rightarrow \infty \Rightarrow m(A_m) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow f$ finită a.p.t.

Prop. 3: Dacă N satisfacă (n_5) și $0 \leq f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f_n \nearrow f$ a.p.t.

atunci are loc una din prop.:

(i) $f \notin B$ și $|f_n|_B \rightarrow \infty$;

Sau

(ii) $f \in B$ și $|f_n|_B \rightarrow |f|_B$.

Dem: Din (n_5) avem că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

Deducem $f \in B \Leftrightarrow N(f) < \infty$

Lemă 1: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$, $a_m = \inf_{k \geq m} x_k$, $b_m = \sup_{k \geq m} x_k$ și

$$l = \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m, \quad L = \limsup_{m \rightarrow \infty} x_m.$$

Atunci: (i) $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = l$;

(ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = L$.

Dem: (i) $(a_m)_m \in M^{\neq} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \stackrel{\text{not.}}{=} d \in [0, \infty]$.

$l \in \mathcal{Z}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_m}) \subset (x_n)$ și $x_{k_m} \rightarrow l$.

$a_{k_m} \leq x_{k_m}$, $\forall n \Rightarrow \underline{d \leq l}$. (1)

Fie $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists n \geq m$ a.î. $x_{k_m} \leq a_m + \frac{1}{m}$.

și $d_m \leq x_{k_m} \leq a_m + \frac{1}{m}$ (2)

$\Rightarrow \exists (x_{k_m}) \subset (x_n)$ cu $x_{k_m} \rightarrow d \Rightarrow d \in \mathcal{Z}(x_n) \Rightarrow \underline{d \geq l}$ (3)

$$\xrightarrow{(1)} \alpha = b.$$

(ii) $(\beta_m)_m \in \mathbb{C}H \nexists \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = p \in \mathbb{R}_{\text{closed}} [0, \infty]$.

$L \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow f(x_{k_n}) \subset (x_n) \text{ cu } x_{k_n} \rightarrow L$.

Dacă $x_{k_m} \leq \beta_{k_m}, \forall m \Rightarrow \underline{L \leq \beta}$ (4)

Dacă $\beta = \infty \Rightarrow \beta_m = \infty, \forall m$

$\Rightarrow \forall n \exists k_n \geq n \text{ cu } x_{k_n} \geq n \Rightarrow x_{k_n} \rightarrow \infty \Rightarrow L = \infty$.

Dacă $\beta < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \exists h_m > n \text{ a. c.}$

$$\beta_m - \frac{1}{m} \leq x_{k_m} \leq \beta_m$$

$\Rightarrow f(x_{k_m}) \subset (x_n) \text{ cu } x_{k_m} \rightarrow \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \underline{\beta \leq L}$ (5)

$$\xrightarrow{(4)} \underline{L = \beta}.$$

Teor. L (Fatou)

Dacă N este o mulțime măsurabilă și $(f_n)_n \subset B$, $f_n \rightarrow f$ a.p.t. și $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B < \infty$ atunci

$f \in B$ și $|f|_B \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B$.

Dem.: Definim $h_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h_n(t) = \inf_{m \geq n} |f_m(t)|$.

$$\Rightarrow 0 \leq h_n \leq h_{n+1}.$$

Ast. că $\frac{h_n}{n} \rightarrow 1/f$ a.p.t.

$f_n \rightarrow f$ a.p.t. $\Rightarrow |f_n| \rightarrow |f|$ a.p.t.

$A = \{t \in \mathbb{R}_+: |f_n(t)| \rightarrow |f(t)|\}$, $m(A) = 0$.

Fie $t \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Dăm def. lui $h_n(t)$ astfel că

$$\exists m_n > n \text{ astfel incât: } |h_n(t)| \leq |f_{m_n}(t)| \leq h_n(t) + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow h_m(t) \rightarrow |f(t)| \Rightarrow h_m \rightarrow |f| \text{ pe } A \text{ (daca a.p. t.)}$$

Dacă $0 \leq h_n, h_n, h_n \rightarrow |f|$.

$$\text{Din (n₅)} \Rightarrow N(h_m) \nearrow N(|f|). \quad (1)$$

$$h_m(t) \leq |f_m| \Rightarrow N(h_m) \leq N(|f_m|), \quad t_m \geq n.$$

$$\Rightarrow N(h_m) \leq \inf_{m \geq n} N(|f_m|)$$

$$\Rightarrow \liminf_{m \rightarrow \infty} N(h_m) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} N(|f_m|) \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} N(|f_n|). \quad (2)$$

$$\text{Dar } f_n \in B \rightarrow N(|f_n|) = N(f_n) = \|f_n\|_B.$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} N(|f|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_B < \infty$$

$$\Rightarrow |f| \in B \stackrel{\text{Rm. 2}}{\Rightarrow} f \in B \text{ și } \|f\|_B \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_B.$$

Probl.: Se poate remunța lo ipoteza $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_B < \infty$?

Teor. 2 (Riesz-Fischer)

Fie N-normă generalizată cu prop. (n₅) și (n₇). Dacă $(f_n) \subset B$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B < \infty$ atunci $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge în B la o funcție F și

$$\|F\|_B \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_B.$$

$$\text{Dem.: definițim } S_n = \sum_{k=0}^n \|f_k\| \text{ și } S = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|.$$

$$f_n \in B \Rightarrow \|f_n\| \in B, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n \in B, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$0 \leq S_n \leq S_{n+1} \text{ și } S_n \nearrow S \stackrel{(n_5)}{\Rightarrow} \frac{N(S_n)}{\|S_n\|_B} \rightarrow N(S).$$

$$|S_n|_B = \left| \sum_{k=0}^n |f_k| \right|_B \leq \sum_{k=0}^n |f_k|_B$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_B < \infty \stackrel{\text{Teor. 1}}{\Rightarrow} S \in B, \text{ și } |S|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_B. \quad (1)$$

Din (M_7) , cf. prop. 2 $\Rightarrow S$ este finită a.p.t.

$F_m = \sum_{k=0}^m f_k$. Fie $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ a.p.t. (există, căci se finită a.p.t.)

$$|F_m| \leq \sum_{k=0}^m |f_k|, \text{ și } |F(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| = S(t) \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Dacă } S \in B \Rightarrow F \in B \text{ și } |F|_B \leq |S|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_B.$$

Concluzie: Dacă N satisfacă (M_5) și (M_7) atunci $(B, \| \cdot \|_B)$ este complet.

Dem.: S.V. N este complet \Leftrightarrow orice serie abs. conv. este cond.

Din Riesz-Fischer $\Rightarrow (B, \| \cdot \|_B)$ este complet.

Rem. 2: Concluzia teor. Riesz-Fischer rez. a constat într-o ipoteză adițională \Leftrightarrow

dacă înlocuim condiția (M_7) cu

(M_8) $\forall f \in B \Rightarrow f = \text{finită a.p.t.}$

Ex1: Sp. Banach de funcții care nu satisfac (M_7)

§ 1.6. Completitudinea spațiilor Obiect

Fie $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi \in M_{[0, \infty)}^{\neq} \cap \mathcal{L}_{[0, \infty)}^{\delta}$ cu $\varphi|_{(0, \infty)} \not\equiv 0 \Rightarrow \varphi|_{(0, \infty)} \not\equiv \infty$.

$\Sigma_{\varphi}: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, $\Sigma_{\varphi}(t) = \int_0^t \varphi(z) dz$

$$M_{\varphi}(f) = \int_0^{\infty} \Sigma_{\varphi}(|f|), \quad \forall f \in \mathcal{M},$$

$$\Omega_{\varphi} = \{f \in \mathcal{M}: \exists c > 0 \text{ cu } M_{\varphi}(cf) < \infty\},$$

$$|f|_{\varphi} = \inf \{c > 0 : M_{\varphi}\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1\}$$

Remarca: $A_f = \{c > 0 : M_{\varphi}\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1\}, \quad \forall f \in \mathcal{M},$

$$N: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], \quad N_f = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ \infty, & A_f = \emptyset \end{cases}$$

Atunci $D_{\varphi} = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ și $|f|_{\varphi} = N(f), \quad \forall f \in \Omega_{\varphi}$.

Prop.: Dacă $f \in \Omega_{\varphi}$ și $|f|_{\varphi} > 0$ atunci

$$M_{\varphi}\left(\frac{1}{|f|_{\varphi}} \cdot f\right) \leq 1. \quad (*)$$

Dem.: $f \in \Omega_{\varphi} \Rightarrow N(f) < \infty \Rightarrow |f|_{\varphi} = N(f) \in (0, \infty)$.

Dar $N(f) = \inf A_f \Rightarrow \exists c_n \in (0, \infty)$ cu $c_n \searrow N(f)$.

$$M_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n} f\right) = \int_0^{\infty} \Sigma_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n} |f(t)|\right) dt \leq$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_n} |f(t)| &\rightarrow \frac{1}{N(f)} |f(t)| \\ \end{aligned} \right\} \rightarrow \Sigma_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)} |f(t)|\right) \rightarrow \Sigma_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)} |f(t)|\right)$$

$\Sigma_{\varphi} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}^{\delta}$

T: conu
monotone $M_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n} f\right) \rightarrow M_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)} f\right)$. Dar $c_n \in A_f$, then N .

$$\Rightarrow M_q\left(\frac{1}{c_n}f\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_q\left(\frac{1}{N(f)}f\right) \leq 1 \Leftrightarrow M_q\left(\frac{1}{N(f)}f\right) \leq 1.$$

Rem.2: dacă $f \in Q_p$ cu $\|f\|_p > 0 \Rightarrow \|f\|_p \in A_f$.

Teor. 1: Norma N satisface proprietătile (n_5) , (n_6) și (n_7) .

Dem.: (n_5) Fie $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ cu $f_n \nearrow f$ a.p.t.

$$f_n \leq f_{n+1} \xrightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$f_n \leq f \xrightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

$$\text{Fie } \alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} N(f_n). \quad (3)$$

$$\text{Din (2)} \Rightarrow \alpha \leq N(f). \quad (4)$$

$$\underline{\text{Cazul 1: }} \alpha = \infty \xrightarrow{(4)} N(f) = \infty \Rightarrow N(f) = \alpha.$$

$$\underline{\text{Cazul 2: }} \alpha = 0 \Rightarrow N(f_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n = 0 \text{ a.p.t.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow N(f) = 0 \Rightarrow N(f) = \alpha.$$

Cazul 3: Fără a pierde generalit., putem pp.că $0 < N(f_n) \leq \alpha < \infty$, tn.

$$\text{calculăm } M_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int_0^\infty \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right) dt \leq \int_0^\infty \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n(t)\right) dt = M_q\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right).$$

$$N(f_n) < \infty \Rightarrow f_n \in Q_p \xrightarrow{\text{Prop.1}} M_q\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right) \leq 1.$$

$$\Rightarrow M_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

$$f_n \nearrow f \text{ a.p.t.} \Rightarrow \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \nearrow \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \text{ a.p.t.}$$

$$\text{Din teor. conv.-monotone} \Rightarrow M_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int_0^\infty \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right) dt \xrightarrow{\text{conv.}} \int_0^\infty \mathcal{Y}_q\left(\frac{1}{\alpha}f(t)\right) dt = M_q\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \quad (6)$$

$$\text{Din (5) și (6)} \Rightarrow M_q\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in A_f \Rightarrow N(f) \leq \alpha.$$

$$\Rightarrow N(f) = \alpha.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} N(f_m) = N(f).$$

(M₀) Fie $A \in \mathcal{D}$ cu $m(A) < \infty$. Arătăm că $\chi_A \in \mathcal{O}_\varphi$ ($A_{x_0} \neq \emptyset$).

$$Y_\varphi(0) = 0, Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0, \infty)} \Rightarrow \exists c > 0 \text{ a.p.t. } Y_\varphi(c) \leq \frac{1}{m(A)} \quad (\frac{f}{m(A)} > 0).$$

$$M_\varphi(c \chi_A) = \int_0^\infty Y_\varphi(c \chi_A(t)) dt = \int_A Y_\varphi(c) \cdot m(A) \leq 1 < \infty$$

$$\Rightarrow \chi_A \in \mathcal{O}_\varphi.$$

(M₁) Fie $A \in \mathcal{D}$ cu $m(A) < \infty$. Arătăm că $\int |f| \leq k_A \cdot N(f)$, teorema (1) ($m(A) > 0$)

Cazul 1: $N(f) = \infty \Rightarrow (1)$ evidentă.

Cazul 2: $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ a.p.t. $\Rightarrow \int_A |f| = 0 \Rightarrow (1)$

Cazul 3: $0 < N(f) < \infty$. Notăm $c = \frac{1}{N(f)} > 0$.

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)} \int_A c|f|\right) \stackrel{\substack{Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0, \infty)} \\ \text{dup. Jensen}}}{\leq} \frac{1}{m(A)} \cdot \int_A Y_\varphi(c|f|) \leq \frac{1}{m(A)} \int_0^\infty Y_\varphi(c|f|) = \frac{M_\varphi(c|f|)}{m(A)}.$$

$$= \frac{1}{m(A)} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)} f\right) \leq \frac{1}{m(A)} < \infty$$

$$\Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)} \int_A c|f|\right) \leq \frac{1}{m(A)}. \quad (2)$$

Dec.: $\varphi|_{(0, \infty)} \neq 0 \wedge \varphi|_{(0, \infty)} \neq \infty \Rightarrow \exists t_0 \in (0, \infty)$ cu $\varphi(t_0) \in (0, \infty)$

Fie $t > t_0$.

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(z) dz \geq \int_{t_0}^t \varphi(z) dz \geq \varphi(t_0)(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Cit. mij.

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} Y_\varphi(t) = \infty$$

Dacă $\Upsilon_q \in CM_{[0, \infty)} \cap C_{[0, \infty)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Upsilon_q(t) = \infty$.

Din (2) $\Rightarrow \exists \tilde{R} > 0$ a.c. $\frac{1}{m(A)} \int_A |f| \leq \tilde{R}$.

$$\Rightarrow \int_A |f| \leq \frac{\tilde{R} m(A)}{c} = \frac{\tilde{R} m(A)}{k_A} N(f) \Rightarrow (1).$$

Concluzie: Sp. Olicz $(D_q, \| \cdot \|_q)$ este complet.

Dem.: Din Teo. 1 și Concluzia lui T. Kiesz-Fischer.

Teme Dat $D_q \ni l \cdot l_q$ ca în debutul paragrafului, demonstrați completările
(refac rationamentul din Kiesz-Fischer)

Teme Inegalitatea lui Jensen. (Judit, Theta).

$$\Upsilon\left(\frac{1}{m(A)} \int_A |f|\right) \leq \frac{1}{m(A)} \int_A \Upsilon(|f|), \quad \forall f \in C_v, A \in \mathcal{Z}, 0 < m(A) < \infty.$$

§ 1. f. Proprietățile spațiilor Olicz

Fie φ ca în § 1-a.

Rem. 1: Dacă $\varphi(t) \geq 0, \forall t \in (0, \infty) \Rightarrow \Upsilon_\varphi \in CM_{[0, \infty)},$ deci injectivă.

Rem. 2: Dacă $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \in (0, \infty) \Rightarrow \Upsilon_\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bijecțivă.

$(\Upsilon_\varphi(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \Upsilon_\varphi(t) = \infty, \Upsilon_\varphi$ cont. \Rightarrow concl.)

Ex. 1: Fie $p \in [1, \infty), \varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \varphi(t) = p \cdot t^{p-1}.$

$$\Upsilon_\varphi(t) = t^p, t \geq 0, M_\varphi(f) = \int_0^\infty |f(t)|^p dt$$

$$M_\varphi(f) = C^p M_q(f) \Rightarrow [M_\varphi(f) < \infty \Leftrightarrow M_q(f) < \infty]$$

$$(D_\varphi, \| \cdot \|_\varphi) \equiv (L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \| \cdot \|_p)$$

$$\text{Ex.2: } \varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ \infty, & t > 1 \end{cases}$$

$$Y_\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ \infty, & t > 1 \end{cases}$$

$$M_\varphi(c f) = \int_0^\infty Y_\varphi(c f(t)) dt < \infty \Leftrightarrow c |f(t)| \leq 1 \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{c} \text{ a.p.t. } t \geq 0. \Leftrightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

$$\|f\|_{\varphi} = \inf \left\{ c > 0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \right\}.$$

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \Leftrightarrow |f(t)| \leq c \text{ a.p.t.} \Rightarrow \|f\|_\infty \leq c.$$

$$\Rightarrow \|f\|_{\varphi} = \|f\|_\infty.$$

$$\text{Deci } (\mathcal{D}_\varphi, \| \cdot \|_\varphi) = (L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty).$$

Teme Conexiuni între spațiile $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ și \mathcal{Q}_p .

- exemplu de sp. Banach care nu este L^p , și

- inclusiuni între sp. de tip L^p și sp. Banach.

considerăm clasele:

- $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ - clasa sp. Banach de funcții $(B, \| \cdot \|_B)$ cu prop. că $\chi_{[0,t]} \in B$, $\forall t > 0$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - clasa sp. Banach de funcții $(B, \| \cdot \|_B)$ cu $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} F_B(t) = \infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ - clasa sp. Banach de funcții $(B, \| \cdot \|_B)$ cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ și $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[\tau_n, m_n]}|_B > 0$.

Rm. 3: $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ și $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Rm. 4: $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$, $\forall p \in [1, \infty)$.

Prop. 1: $\mathcal{O}_\varphi \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}_+)$.

$$\text{Denum.: } M_\varphi(c \cdot X_{[0,t]}) = \int_0^\infty \Sigma_\varphi(c \cdot X_{[0,t]}^{(z)}) dz = \int_0^t \Sigma_\varphi(c) dz = t \cdot \Sigma_\varphi(c).$$

$$\Sigma_\varphi(c) = \int_0^c \varphi(z) dz. \text{ Cum } \varphi|_{(0,\infty)} \neq \infty \Rightarrow \exists c > 0 \text{ cu } \varphi(c) \in (0, \infty).$$

$$\Rightarrow \Sigma_\varphi(c) \leq c \cdot \varphi(c) < \infty \Rightarrow M_\varphi(c \cdot X_{[0,t]}) < \infty \Rightarrow X_{[0,t]} \in \mathcal{O}_\varphi, \forall t > 0$$

Prop. 2 (Funcție fundamentală a spectrului oblic)

$$\text{Dacă } 0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \geq 0 \text{ atunci } F_{\mathcal{O}_\varphi}(t) = \frac{1}{\Sigma_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \forall t > 0.$$

$$\text{Denum.: } F_{\mathcal{O}_\varphi}(t) = |X_{[0,t]}|_\varphi.$$

$$|X_{[0,t]}| = \inf \left\{ c > 0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c} X_{[0,t]}\right) \leq 1 \right\}.$$

$$\text{Dar } M_\varphi\left(\frac{1}{c} X_{[0,t]}\right) = t \cdot \Sigma_\varphi\left(\frac{1}{c}\right).$$

$$\text{Obș. că } M_\varphi\left(\frac{1}{c} X_{[0,t]}\right) \leq 1 \Leftrightarrow t \cdot \Sigma_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Sigma_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{c} \leq \Sigma_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\Sigma_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} \leq c.$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{O}_\varphi}(t) = \frac{1}{\Sigma_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \forall t > 0.$$

Prop. 3: Dacă $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \in (0, \infty)$ atunci $\mathcal{O}_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Denum.: Pasul 1, $\mathcal{O}_\varphi \in \mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{\mathcal{O}_\varphi}(t) \stackrel{\text{P}_2}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Sigma_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} \frac{1}{\Sigma_\varphi^{-1}(s)} = \infty.$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_\varphi \in \mathbb{B}(\mathbb{R}_+).$$

Paral 2. $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[n, n+1]}|_\varphi > 0$

Fie $n \in \mathbb{N}$. $|\chi_{[n, n+1]}|_\varphi = \inf \left\{ c > 0 : M_\varphi \left(\frac{1}{c} \chi_{[n, n+1]} \right) \leq 1 \right\}$.

$$M_\varphi \left(\frac{1}{c} \chi_{[n, n+1]} \right) = \int_0^\infty Y_\varphi \left(\frac{1}{c} \chi_{[n, n+1]}(\varphi) \right) d\varphi = \int_n^{n+1} Y_\varphi \left(\frac{1}{c} \right) d\varphi = Y_\varphi \left(\frac{1}{c} \right).$$

$$\Rightarrow M_\varphi \left(\frac{1}{c} \chi_{[n, n+1]} \right) \leq 1 \Leftrightarrow Y_\varphi \left(\frac{1}{c} \right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c} \leq Y_\varphi^{-1}(1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} \leq c.$$

$$\Rightarrow |\chi_{[n, n+1]}|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[n, n+1]}|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} > 0$$

$$\Rightarrow D_\varphi \in \Sigma(\mathbb{R}_+).$$

Teme pt. referate („The asympt. behaviour“)

§1.2., p.22 - Spatiu Banach de „gorun“.

- D.1.2.1., R.1.2.1., F_B, R.1.2.3. justif., E.1.2.1., E.1.2.3.
- E.1.2.4., E.1.2.5.
- E.1.2.7. (sp. obiect de studiu), P.1.2.1.
- Ex.1.2.8., P.1.2.2.