

UNIVERSITATEA DE VEST TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Lucrare de licență
Clase de spații de șiruri și de spații de
funcții și aplicații

Candidat:
Andrei Ioan VANCU

Coordonator științific:
Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timișoara
2014

UNIVERSITATEA DE VEST TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Specializarea: MATEMATICĂ - INFORMATICĂ

Clase de spații de șiruri și de spații de funcții și aplicații

Candidat:

Andrei Ioan VANCU

Coordonator științific:

Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timișoara
2014

Cuprins

Introducere	3
1 SPAȚII NORMATE. SPAȚII BANACH	4
1.1 <i>Spații normate</i>	4
1.2 <i>Spații Banach. Caracterizare</i>	9
2 SPAȚII BANACH DE FUNCȚII	20
2.1 <i>Normă generalizată de funcții</i>	20
2.2 <i>Clase de spații de funcții</i>	22
2.3 <i>Funcție Young</i>	24
2.4 <i>Spații Orlicz</i>	25
2.5 <i>Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții</i>	29
2.6 <i>Completitudinea spațiilor Orlicz</i>	33
2.7 <i>Proprietățile spațiilor Orlicz</i>	35
3 SPAȚII BANACH DE ȘIRURI	38

Abstract

Introducere

sekjrgvkf

Capitolul 1

SPAȚII NORMATE. SPAȚII BANACH

1.1 *Spații normate*

Fie X un spațiu liniar peste corpul \mathbb{K} ($X = SL(\mathbb{K})$).

Definiția 1.1.1. O funcție $N : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ se numește normă pe X dacă:

(n_1) $N(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = \theta$ (vectorul nul al spațiului X);

(n_2) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, pentru orice $x, y \in X$;

(n_3) $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot N(x)$, pentru orice $x \in X$ și $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple:

1. $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o normă (modulul real)
2. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe \mathbb{R}^n
3. $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe \mathbb{C}^n
4. $\|\cdot\|_p : l_N^p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_n) \in l_N^p(\mathbb{K})$ (unde $p \geq 1$)
5. $\|\cdot\|_{\infty} : l_N^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|$, $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_N^{\infty}(\mathbb{R})$
6. $\|\cdot\| : \mathcal{C}_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ (norma Cebâșev)

$$7. \|\cdot\|' : \mathcal{C}_{[a,b]}' \rightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|' = |f(a)| + \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$$

$$8. \|\cdot\|_1 : \mathcal{C}_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$9. \|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{unde } 1 \leq p < \infty)$$

$$10. \|\cdot\|_\infty : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+, \|f\|_\infty = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in C A} |f(t)| \quad (\text{unde } (X, \mathcal{A}, \mu) \text{ este un spațiu cu măsură completă})$$

Remarca 1.1.1. Dacă funcția $N : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ verifică doar axiomele (n_2) și (n_3) vom spune că N este o seminormă pe X .

Remarca 1.1.2. Dacă N este o normă atunci $N(x) > 0$, pentru orice $x \in X \setminus \{\theta\}$.

Remarca 1.1.3. Dacă funcția $N : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o normă, atunci

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad d(x, y) = N(x - y)$$

are următoarele proprietăți:

$$(d_1) \quad d(x, y) = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = y;$$

$$(d_2) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \text{ pentru orice } x, y, z \in X;$$

$$(d_3) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Proprietățile $(d_1), (d_2), (d_3)$ arată că funcția d de mai sus este o distanță pe X , numită *distanța (metrica)* generată de norma N . Numărul real pozitiv $d(x, y)$ se va numi distanța de la x la y și în plus ea mai verifică și următoarea proprietate:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \text{ pentru orice } x, y, z \in X,$$

numită proprietatea de invarianță la translații a metricii d .

Din punct de vedere istoric, dar și deoarece generalizează modulul pe \mathbb{R} sau \mathbb{C} , o normă va fi notată $\|\cdot\|$, eventual specificând spațiile pe care este definită, $\|\cdot\|_X$.

Dacă $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ o normă pe X , $r > 0$, iar $x \in X$, notăm :

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

numită *bila deschisă de centru "x" și rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$),

$$\bar{\mathcal{B}}(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$$

numită *bila închisă de centru "x" și rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$) și

$$\mathcal{S}(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| = r\}$$

numită *sfera de centru "x" și rază "r"*.

Propoziția 1.1.1. *Dacă $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ atunci familia*

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \{\emptyset\} \cup \{T \subset X / T \neq \emptyset \text{ a.î. pentru orice } x \in T, \text{ există } r_x > 0 : \mathcal{B}(x, r_x) \subset T\}$$

este o topologie pe X (numită topologia indusă de norma $\|\cdot\|$).

Remarca 1.1.4. Pe un spațiu normat X sunt corect definite, în sens topologic, noțiunile de limită, convergență pentru șir, sau continuitate pentru o funcție între două spații normate. Aceste noțiuni admit însă și caracterizări speciale în cadrul spațiilor normate. Caracterizarea convergenței șirurilor de vectori, dintr-un spațiu normat poate fi formulată astfel:

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat (topologizat cu topologia din Prop. 1.1.1), iar $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ un șir de vectori din X . În raport cu topologia $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ avem că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă există $x \in X$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n \geq n_0$ să avem că $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Demonstrație. Într-adevăr: *Necesitate.* Pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$ (deschisă). Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $x_n \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. Deci, pentru orice $n \geq n_0$, avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Suficiența. Fie $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$. Există atunci $T \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ cu $x \in T \subset V \Rightarrow$. Din caracterizarea mulțimilor deschise în topologia normică rezultă că există $r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x, r) \subset T \subset V$.

Dar există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $\|x_n - x\| < r$. Deci $x_n \in \mathcal{B}(x, r) \subset V$, pentru orice $n \geq n_0$.

Notăm $\mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$ spațiul liniar al tuturor șirurilor convergente de vectori din X . Deci

$$\mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)} = \{(x_n)_{n \geq 1} \subset X / \text{există } x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0\}.$$

□

Remarca 1.1.5. Asemănător cazului real (sau al lui \mathbb{R}^n) vectorul x dat de convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este unic determinat. Altfel spus, dacă $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$ atunci există unic $x \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Demonstrație. Într-adevăr: Fie $x, x' \in X$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'\| = 0$. Atunci

$$0 \leq \|x - x'\| = \|(x - x_n) + (x_n - x')\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - x'\|,$$

pentru orice $n \geq 1$ și deci $\|x - x'\| = 0 \Rightarrow x - x' = 0$ sau echivalent $x = x'$. \square

Unicul vector $x \in X$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, unde $\left((x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}\right)$ se numește *limita în X a șirului $(x_n)_{n \geq 1}$* și se notează asemănător cazului scalar cu :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

sau

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x.$$

Remarca 1.1.6. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X astfel încât $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ (adică generează aceeași topologie) vom spune că cele două norme sunt *topologic echivalente* și vom nota:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2.$$

Dacă $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ conform celor de mai sus, vom avea că $\mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|_1)} = \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|_2)}$.

Remarca 1.1.7. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X atunci cele două norme sunt echivalente dacă și numai dacă există $m, M > 0$ astfel încât

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1,$$

pentru orice $x \in X$. Vom spune despre cele două norme că sunt *complet echivalente*.

Propoziția 1.1.2. Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu normat, atunci, pentru orice $x \in X$ avem că $\mathcal{B}(x, r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.

Demonstrație. Fie $x \in X$ și $r > 0$. Pentru orice $y \in \mathcal{B}(x, r)$ rezultă că $\|x - y\| < r$ și deci, pentru $r' = r - \|x - y\| > 0$ avem că $\mathcal{B}(y, r') \subset \mathcal{B}(x, r)$.

Într-adevăr: pentru $z \in \mathcal{B}(y, r')$ rezultă că $\|y - z\| < r'$. Dar

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < r' + \|x - y\| = r,$$

pentru orice $z \in \mathcal{B}(x, r)$. Deci $\mathcal{B}(y, r') \subset \mathcal{B}(x, r)$ ceea ce implică faptul că $\mathcal{B}(x, r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. \square

Propoziția 1.1.3. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, iar $X_0 \subset X$ un subspațiu liniar închis al său. ($\bar{X}_0 = X_0$). Aplicația :

$$\|\cdot\|_{X/X_0} : X/X_0 \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{x}\|_{X/X_0} = \inf_{y \in \hat{x}} \|y\|_X$$

este o normă pe X/X_0 .

Demonstrație. Într-adevăr: Dacă $\|\hat{x}\|_{X/X_0} = 0$ atunci $\inf_{y \in \hat{x}} \|y\|_X = 0$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $y_n \in \hat{x}$ astfel încât $\|y_n\| < \frac{1}{n}$.

Dar $y_n \in \hat{x} = x + X_0$ și deci există $x_n \in X_0$ astfel încât $y_n = x + x_n$. Atunci

$$\|x_n - (-x)\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

și deci $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_X} -x$. Deoarece X_0 este închis rezultă că $-x \in \bar{X}_0 = X_0$, sau echivalent $x \in \bar{X}_0 = X_0$ ceea ce arată că $\hat{x} = \hat{\theta}$, ceea ce arată că este satisfăcută axioma (n_1) .

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in X/X_0$. Dacă $x' \in \hat{x}, y' \in \hat{y}$ atunci $x' + y' \in \hat{x} + \hat{y} = \hat{x} \hat{+} y$ și deci

$$\|x \hat{+} y\|_{X/X_0} \leq \|x' + y'\|_X \leq \|x'\|_X + \|y'\|_X.$$

Pentru y' fixat, prin trecere la inf pentru x' din \hat{x} rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|y'\|_X,$$

pentru orice $y' \in \hat{y}$. Prin trecere la inf după y' din \hat{y} rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|\hat{y}\|_{X/X_0}$$

și deci este satisfăcută și axioma (n_2)

Fie $\hat{x} \in X/X_0$ și $\lambda \in \mathbb{K}$. Deoarece $\lambda \cdot \hat{x} = \lambda \cdot x$ rezultă că $\lambda \cdot \hat{x} = \{\lambda \cdot x' / x' \in \hat{x}\}$. Atunci

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot \hat{x}\|_{X/X_0} &= \inf_{x' \in \hat{x}} \|\lambda \cdot x'\|_X = \inf_{x' \in \hat{x}} |\lambda| \cdot \|x'\|_X = |\lambda| \cdot \inf_{x' \in \hat{x}} \|x'\|_X = \\ &= |\lambda| \cdot \|\hat{x}\|_{X/X_0} \end{aligned}$$

ceea ce arată că este verificată și axioma (n_3) . \square

Observația 1.1.1. Spațiul normat $(X/X_0, \|\cdot\|_{X/X_0})$ se numește *spațiu normat cât*, indus de subspațiul închis X_0 .

Observația 1.1.2. Dacă X_0 nu este subspațiu închis, atunci aplicația $\|\cdot\|_{X/X_0}$ definită mai sus este doar o seminormă pe X/X_0 .

Remarca 1.1.8. În orice spațiu normat, orice șir convergent este mărginit. Mai precis, dacă $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$, atunci există $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$.

Demonstrație. Într-adevăr: Cum $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$ rezultă că există $x \in X$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - x\| < 1$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|,$$

pentru orice $n \geq n_0$.

Notând $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \|x_3\| \cdots \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\} > 0$ avem că

$$\|x_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \geq 1$. □

1.2 Spații Banach. Caracterizare

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} spațiu liniar normat și $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$.

Definiția 1.2.1. Șirul $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ este convergent în spațiul normat $(X, \|\cdot\|)$ și vom nota $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$, dacă există $x \in X$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, rezultă că $\|x_n - x\| < \varepsilon$ sau dacă există $x \in X$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Remarca 1.2.1. Înainte de a studia convergența unui șir, cu ajutorul definiției anterioare, identificăm apriori limita sa x .

Acest lucru poate genera unele dificultăți practice. Există însă spații normate, pentru care studiul convergenței unui șir ia în calcul numai termenii acestuia. Aceste spații se numesc, *spații normate complete* sau *spații Banach* și le vom introduce în continuare.

Observația 1.2.1. Dacă $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (adică distanța dintre oricare 2 termeni este oricât de mică, începând de la un rang suficient de mare).

Demonstrație. Într-adevăr: Dacă $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\varepsilon > 0$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci, pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_0 + x_0 - x_n\| \\ &\leq \|x_m - x_0\| + \|x_n - x_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

□

Definiția 1.2.2. Șirul $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ este fundamental în spațiul normat $(X, \|\cdot\|)$ și vom nota $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n, m \geq n_0$ rezultă $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Notăm cu $\mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$ spațiul tuturor șirurilor fundamentale din spațiul normat $(X, \|\cdot\|)$.

Conform remarcii anterioare rezultă $\mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)} \subset \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$ (adică orice șir convergent este și fundamental). În general, incluziunea reciprocă nu are loc.

Definiția 1.2.3. Un spațiu normat $(X, \|\cdot\|)$ pentru care $\mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$, se numește *spațiu normat complet* sau *spațiu Banach*.

Remarca 1.2.2. 1. $(X, \|\cdot\|)$ este un spațiu Banach, dacă și numai dacă $\mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$.

2. Pentru un spațiu normat, stabilirea proprietății de completitudine, se face de obicei individual sau pe clase, însă odată stabilită această proprietate, studiul convergenței unui șir devine mult mai facil de efectuat.

Exemple:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$;
2. (\mathbb{K}^n, N) - N o normă arbitrară ;
3. $(\mathcal{C}_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ - unde \mathbb{K} este spațiu topologic compact;
4. $(\mathcal{C}_{[a,b]}^1, \|\cdot\|')$, $\|f\|' = |f(a)| + \|f'\|$, $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}^1$;
5. $(l_N^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$;
6. $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$, unde $1 \leq p < \infty$;

7. $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$;

Spațiu normat care nu este complet: $(\mathcal{C}_{[a,b]}, \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$.

Propoziția 1.2.1. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, iar $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$.

- (a) Dacă $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$, atunci există $M > 0$: $\|x\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$ (șirul este mărginit).
- (b) Dacă $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$ și există $(x_{k_n})_{n \geq 1} \subset (x_n)_n$, $(x_{k_n})_{n \geq 1} \in \mathcal{C}(X, \|\cdot\|)$, atunci $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}(X, \|\cdot\|)$.

Observația 1.2.2. $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că pentru orice $n \geq n_0$ și $p \in \mathbb{N}$ rezultă că $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ dacă și numai dacă $\|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ uniform în raport cu p .

Propoziția 1.2.2. Spațiul normat $(X, \|\cdot\|)$ este complet dacă și numai dacă orice serie absolut convergentă este și convergentă.

Demonstrație. Necesitatea:

Avem că $(X, \|\cdot\|)$ - spațiu Banach.

Fie $\sum_{n \geq 0} x_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \|x_n\| \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Dacă notăm $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, $n \geq 1$ avem că

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k \geq n+1} \|x_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformă în raport cu p , rezultă că $(s_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$.

Suficiență:

Avem că $(X, \|\cdot\|)$ spațiu normat și orice serie absolut convergentă este și convergentă.

Fie $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(X, \|\cdot\|)}$. Vom arăta că x_n este convergent, arătând că el conține un subșir convergent.

- Pentru $\varepsilon = 1$, rezultă că există $n_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < 1$, pentru orice $m, n \geq n_1$, rezultă $\|x_m - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^0}$, pentru orice $m \geq n_1$.
- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, rezultă că există $n_2 > n_1$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}$, pentru orice $m, n \geq n_2$ rezultă că $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^1}$.

- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, rezultă că există $n_3 > n_2$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}$, pentru orice $m, n \geq n_3$ rezultă că $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{2^2}$.

Construim inductiv subsirul $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ cu proprietatea că

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| &\leq \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \sum_{k \geq 2} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 < \infty \\ &\Rightarrow \sum_{k \geq 2} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \sum_{k \geq 2} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{k=2}^m (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \\ &= x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + x_{n_4} - x_{n_3} + \cdots + x_{n_m} - x_{n_{m-1}} = x_{n_m} - x_{n_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s_m + x_{n_1}) \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)} \Rightarrow (x_{n_m})_{m \geq 2} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)} \xrightarrow{Prop. 1.2.1} (x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(X, \|\cdot\|)}$$

□

Definiția 1.2.4. Fie $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, doua \mathbb{K} spații normate.

O funcție $T : X \rightarrow Y$ se numește aplicație liniară de la X în Y (morfism de spații liniare), dacă:

- (i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, pentru orice $x, y \in X$ (aditivitate)
- (ii) $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$, pentru orice $x \in X$, și $\alpha \in \mathbb{K}$ (omogenitate)

dacă și numai dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, pentru orice $x, y \in X$, și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Vom nota în continuare cu

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y / T \text{ - liniară}\}.$$

Remarca 1.2.3. 1. În raport cu operațiile

- (a) $(T + S)_{(x)} = T(x) + S(x)$
- (b) $(\alpha T)_{(x)} = \alpha \cdot T(x)$

avem că $(\mathcal{L}(X, Y), +, \cdot)$ este un \mathbb{K} spațiu liniar;

2. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ rezultă că $T(\theta_X) = \theta_Y$;
3. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot T(x_k)$;
4. Dacă $X = \mathbb{K}^n, Y = \mathbb{K}^m$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau \mathbb{R}), atunci $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ dacă și numai dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$T(X)^t = A \cdot X^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

5. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ convenim să notăm T_x în loc de $T(x)$;
6. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ convenim să o numim operator liniar;
7. Dacă $Y = \mathbb{K}, \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^\#$ (sau X^a) o vom numi dualul algebric al lui X , iar elementele sale $f \in X^\#$ se va numi funcțională liniară.

Propoziția 1.2.3. Fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) T este continuă în $x_0 = \theta_X$;
- (b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < \varepsilon$, pentru orice $\|x\| < \delta$;
- (c) Există $M > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y \leq M\|x\|_X$, pentru orice $x \in X$;
- (d) T este continuă pe X

Demonstrație. (a) \implies (b)

$t \in \mathcal{C}_{\theta_X}$ rezultă că pentru orice $V \in T_{\theta_X} = \theta_Y$, există $U \in \mathcal{V}_{\theta_X} : T \cdot U \subset V$.

Alegând $V = \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$, rezultă că există $U \in \mathcal{V}_{\theta_X} : T \cdot U \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$ }
Cum $U \in \mathcal{V}_{\theta_X}$, rezultă că există $\delta > 0 : \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset U$ } \implies

$\implies T \cdot \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$, rezultă că pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| < \delta$ avem că $x \in \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta)$. Deci $T_x \in \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$ cu $\|T_x\|_Y < \varepsilon$.

(b) \implies (c)

Pentru $\varepsilon = 1$, există δ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < 1$, pentru orice $\|x\|_X < \delta$.

$$\begin{aligned}
\text{Dacă } x \in X &\Rightarrow \left\| \frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \cdot x \right\|_X < \delta \\
&\Rightarrow \left\| T \left(\frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \right) \right\|_Y < 1, \text{ pentru orice } n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \cdot \|T_x\|_Y < 1, \text{ pentru orice } n \geq 1 \\
&\Rightarrow \|T_x\|_Y < \frac{1}{\delta} \left(\|x\|_X + \frac{1}{n} \right), \text{ pentru orice } n \geq 1 \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T_x\|_Y \leq \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\text{not. } M_0} \cdot \|x\|_X, \text{ pentru orice } x \in X.
\end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (d)

Observația 1.2.3. $T \in \mathcal{C}_{x_0} \xLeftrightarrow{T. Heine} \forall (x_n)_{n \geq 1} \subset X, x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_X} x_0 \Rightarrow T_{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|x\|_X} T_{x_0}$

Demonstrația este absolut analoagă cazului scalar.

Fie $x \in X$ și $(x_n)_{n \geq 1} \subset X : \|x_n - x\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dar $0 \leq \|T_{x_n} - t_x\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M \cdot \|x_n - x\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow t_{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|x\|_X} T_x$.

Conform Teoremei lui Heine $\Rightarrow T \in \mathcal{C}_x, \forall x \in X \Rightarrow T$ continuă pe X .

(d) \Rightarrow (a)

Evident. □

Notăm $\mathcal{B}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) / \exists M > 0 : \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}$.

Remarca 1.2.4. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ dacă și numai dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ și continuă pe X .

Propoziția 1.2.4. (a) $(\mathcal{B}(X, Y), +, \cdot)$ - subspațiu liniar în $\mathcal{L}(X, Y)$;

(b) Funcția $\mathcal{B}(X, Y) \ni T \longrightarrow \|T\|_{op} = \inf\{M \geq 0 / \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}$ este o normă pe $\mathcal{B}(X, Y)$ cu proprietatea că

$$\|T_x\|_Y \leq \|T\|_{op} \cdot \|x\|_X, \forall x \in X;$$

În plus, dacă $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ și $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, atunci $S \cdot T \in \mathcal{B}(X, Z)$ și

$$\|S \cdot T\|_{op} \leq \|S\|_{op} \cdot \|T\|_{op}.$$

Demonstrație. (a) \dots

- (b) Pentru $T \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \{M \geq 0 / \|T_x\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall x \in X\}$ este nevidă și inclusă în $\mathbb{R}_+ \Rightarrow$

$$\exists \|T\|_{\text{op}} = \inf \{M \geq 0 / \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\} \in \mathbb{R}_+.$$

Fie $x \in X$ fixat.

Deoarece $\underbrace{\|T\|_{\text{op}} = \inf \{M \geq 0 / \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}}_{\mathcal{A}_T} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists (M_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_T : M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T\|_{\text{op}}.$$

Deoarece $\|T_x\| \leq M_n \cdot \|x\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T_x\|_Y \leq \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X, \forall x \in X(*)$.

Pentru $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ astfel încât $\|T\|_{\text{op}} = 0 \Rightarrow \|T_x\|_Y = 0, \forall x \in X \Rightarrow T_x = \theta, \forall x \in X \Rightarrow T = 0.$ (1)

Pentru $S \cdot T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

$$\|(S + T)_x\|_Y = \|S_x + T_x\|_Y \leq \|S_x\|_Y + \|T_x\|_Y \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X + \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X = (\|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}) \in \mathcal{A}_{S+T} \Rightarrow \|S + T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}. \quad (2)$$

Fixăm $T \in \mathcal{B}(X, Y), \alpha \in \mathbb{K}$.

$$\|(\alpha \cdot T)_x\|_Y = \|\alpha \cdot T_x\|_Y = |\alpha| \cdot \|T_x\|_Y \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X, \forall x \in X \Rightarrow \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}, \forall T \in \mathcal{B}(X, Y), \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Pentru $\alpha = 0 \Rightarrow \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}} \quad (\|0\|_{\text{op}} = 0).$

Pentru $\alpha \neq 0$ în (*), pentru scalarul $\frac{1}{\alpha}$ și operatorul αT , avem

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot T) \right\|_{\text{op}} &\leq \left| \frac{1}{\alpha} \right| \cdot \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \Leftrightarrow \|T\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \\ &\Leftrightarrow \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \geq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}, \forall T \in \mathcal{B}(X, Y), \alpha \in \mathbb{K}. \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) avem că $\|\cdot\|_{\text{op}}$ este o normă pe $\mathcal{B}(X, Y)$ (spațiul liniar al tuturor operatorilor).

Datorită faptului că, compusa a două funcții este întotdeauna continuă rezultă că

$$S \cdot T \in \mathcal{B}(X, Z), \forall S \in \mathcal{B}(Y, Z), \forall T \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Mai mult,

$$\|(S \circ T)(x)\|_Z = \|S(T_x)\|_Z \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T_x\|_Y \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X,$$

$$\forall x \in X \Rightarrow \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \in \mathcal{A}_{S \circ T} \Rightarrow \|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}}. \quad \square$$

Observația 1.2.4. 1. Pentru $Y = X$ notăm $\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{B}(X, X)$, iar pentru $Y = \mathbb{K}$, atunci notăm $X' \stackrel{\text{not.}}{=} \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, numit dualul topologic

al spațiului normat X .

Elementele sale poartă numele de funcționale liniare și continue, iar pentru $f \in X'$

$$\|f\|_{\text{op}} = \inf\{M > 0 / |f(x)| \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}.$$

2. Pentru $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ avem că

$$\|T\|_{\text{op}} = \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} \|T_x\|_Y}_{\gamma_1} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|T_x\|_Y}_{\gamma_2} = \underbrace{\sup_{x \neq \theta} \frac{\|T_x\|_Y}{\|x\|_X}}_{\gamma_3}$$

3. Convenim în continuare să notăm fiecare din normele ce apar, fără indicele aferent (deoarece nu există pericol de confuzie).

$$x \in X, \|x\|_X$$

$$y \in Y, \|y\|_Y$$

$$T \in \mathcal{B}(X, Y), \|T\|_{\text{op}}$$

Propoziția 1.2.5. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $X \neq (0)$, iar $x_0 \in X$. Atunci există $y \in X', \|f\| = 1$ (nenulă), astfel încât $f(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstrație. Fixăm $x_0 \in X, x_0 \neq \theta$.

Definim aplicația $f_0 : \underbrace{Sp\{x_0\}}_{\{\lambda \cdot x / \lambda \in \mathbb{K}\}} \rightarrow \mathbb{K}, f_0(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|$.

Observăm că f_0 este o aplicație liniară pe $Sp\{x_0\}$.

Mai mult, $|f_0(\lambda \cdot x_0)| = |\lambda \cdot \|x_0\|| = |\lambda| \cdot \|x_0\| = \|\lambda \cdot x_0\| \Rightarrow |f_0(x)| \leq \|x\|, \forall x \in Sp\{x_0\} \xrightarrow{T.H.B.} \exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ aplicație liniară astfel încât $f|_{Sp\{x_0\}} = f_0$ și $|f(x)| \leq \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow f \in X'$.

$$f(x_0) \in Sp\{x_0\} = f_0(x_0) = f_0(1 \cdot x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Deoarece } |f(x)| \leq \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow 1 \in \mathcal{A}_f \Rightarrow \|f\| \leq 1 \\ \text{Dar } \|x_0\| = |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\| : x_0 \Rightarrow 1 \leq \|f\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|f\| = 1.$$

Orice funcțională f construită ca mai sus pentru un vector nenul, verifică pentru un $x_0 = 0$ condițiile cerute. \square

Consecința 1.2.1. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $X \neq (0)$. Atunci:

(a) $X' \neq (0)$

(b) $\forall x \in X \Rightarrow \|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$.

Demonstrație. (a) Rezultă din consecința directă a Prop. 1.2.5.

(b) Pentru $x \in X, x \neq \theta$ fixat (dacă $x = \theta$ egalitatea este evidentă).

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|, \|x\|, \forall f \in X', \|f\| = 1 \Rightarrow \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|. \quad (1)$$

$$\text{Din Prop. 1.2.5.} \Rightarrow f_x \in X' \text{ cu } \|f_x\| = 1 \text{ astfel încât } f_x(x) = \|x\| \Rightarrow \|x\| = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \sup_{\|f\|=1} |f(x)|. \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

□

Consecința 1.2.2. Fie $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ două spații normate, $X \neq (0), Y \neq (0)$. Atunci $\mathcal{B}(X, Y) \neq (0)$, adică există operatori liniari și continui, nenuli, de la X la Y .

Demonstrație. Fixăm $x_0 \in X \setminus \{0\}, y_0 \in Y \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{Prop. 1.2.5.}} \exists f \in X', f \neq 0$. Aplicația $T : X \rightarrow Y, T_x = f(x) \cdot y_0$ este liniară și nenulă ($y_0 \neq 0$) și $\|T_x\| = \|f(x) \cdot y_0\| = |f(x)| \cdot \|y_0\| \leq \|f\| \cdot \|y_0\| \cdot \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X, Y)$ cu $T \neq 0$. □

Propoziția 1.2.6. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $X_0 \subset X$ un subspațiu liniar închis și $x_0 \in X \setminus X_0$.

Atunci există $f \in X'$ cu $f(x_0) = 1$ și $f|_{X_0} = 0$.

În plus, $\|f\| = \frac{1}{d(x_0, X_0)}$.

Demonstrație. $d(x_0, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|x_0 - y\|$

Notăm în continuare $r = d(x_0, X_0)$.

Cum $\bar{X}_0 = X_0$ și $x_0 \notin X_0 \Rightarrow r > 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}(x_0, r) \cap X_0 = \emptyset$. Definim $f_0 : X_0 \oplus Sp\{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}, f_0(y + \lambda \cdot x_0) = \lambda$.

$\{y + \lambda \cdot x_0 / y \in X_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$

Avem că f_0 este liniară și pentru $y \in X_0$ și $\lambda \in \mathbb{K}^*$ avem:

$$\|y + \lambda \cdot x_0\| = |\lambda| \cdot \|x_0 - \underbrace{\left(-\frac{y}{\lambda}\right)}_{\in X_0}\| \geq |\lambda| \cdot r \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{1}{r} \cdot \|y + \lambda \cdot x_0\| \Rightarrow$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\geq r}$$

$$|f_0(y + \lambda \cdot x_0)| = |\lambda| \leq \frac{1}{r} \|y + \lambda \cdot x_0\|, \forall y \in X_0, \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow |f_0(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|z\|, \forall z \in$$

$X_0 \oplus Sp\{x_0\} \xrightarrow{T.H.B.} \exists f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ liniară astfel încât}$

$$f|_{X_0 \oplus Sp\{x_0\}} = f_0 \text{ și } \underbrace{|f(x)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|x\|, \forall x \in X}_{\Rightarrow f \in X' \text{ și } \|f\| \leq \frac{1}{r}} \quad (1)$$

Demonstrație. Dacă $a \in X_0 \Rightarrow f(y) = f_0(y) = f_0(y + 0 \cdot x_0) = 0 \Rightarrow f/X_0 = 0$.
 $f(x_0) = f_0(x_0) = f_0(0 + a \cdot x_0) = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1$
Cum $r = \inf_{y \in X_0} \|x_0 - y\| \Rightarrow \exists (y_n)_{n \geq 1} \subset X_0$ astfel încât $\|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$.
 $|f(x_0 - y_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\| \Rightarrow 1 \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\| \cdot r \Rightarrow \|f\| \cdot r \geq 1 \Rightarrow \|f\| \geq \frac{1}{r} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f\| = \frac{1}{r}$. □

□

Observația 1.2.5. Propoziția 1.2.5, Consecința 1.2.1, Consecința 1.2.2 și Propoziția 1.2.6 le vom numi în continuare consecințe ale Teoremei lui Hahn-Banach, în cazul spațiilor normate.

Propoziția 1.2.7. Date X, Y două spații normate, nenule, avem că $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{op})$ este spațiu Banach $\iff (Y, \|\cdot\|_{op})$ este spațiu Banach.

Demonstrație. " \implies "

Avem că $\mathcal{B}(X, Y)$ este complet.

Fie $(y_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}_{(Y, \|\cdot\|)}$.

Fixăm $f \in X'$, $\|f\| = 1$ și definim

$$T_n : X \rightarrow Y, T_n(x) = f(x) \cdot y_n, n \geq 1.$$

Este imediat că $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. În plus, $\|T_n x\| = \|f(x) \cdot y_n\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| \leq \|y_n\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = \|y_n\| \cdot \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ și (*)
 $\|T_n\|_{op} \leq \|y_n\|$.

Alegând un $x \in X \setminus \{0\}$ astfel încât $f(x) = \|x\|$, obținem că: $\|T_n x\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| = \|x\| \cdot \|y_n\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|y_n\| \leq \|T_n\| \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \|T_n\| = \|y_n\|$.
Dar $\|T_n - T_m\|_{op} = \|y_n - y_m\|, \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow (T_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{op})} \Rightarrow (T_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{op})} \Rightarrow \exists T \in \mathcal{B}(X, Y)$ astfel încât $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Cum $\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\|_{op} \cdot \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow T_n x \xrightarrow{Y} T x$.

Alegând $x \in X$ astfel încât $f(x) = 1 \Rightarrow y_n = T_n x \rightarrow T x \Rightarrow$

$(y_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(Y, \|\cdot\|)} \Rightarrow \mathcal{F}_{(Y, \|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(Y, \|\cdot\|)} \Rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ - spațiu Banach. " \impliedby "

Avem că $(Y, \|\cdot\|)$ - spațiu Banach ($\mathcal{F}_{(Y, \|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y, \|\cdot\|)}$).

Fie $(T_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{op})}$.

Pentru $x \in X$ avem că $0 \leq \|T_m x - T_n x\|_Y = \|(T_m - T_n)x\|_Y \leq \|T_m - T_n\|_{op} \cdot \|x\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (T_n x)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_{(Y, \|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y, \|\cdot\|)}, \forall x \in X$.

Definim $T : X \rightarrow Y, T x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$.

Datorită proprietăților de liniaritate ale operatorului $\lim \Rightarrow T$ este un operator liniar.

$$\underbrace{T_n(\alpha x + \beta y)}_{T(\alpha x + \beta y)} = \alpha T_n x + \beta T_n y \longrightarrow \alpha T_x + \beta T_y.$$

Pentru $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|T_m - T_n\| \leq 1, \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow \|T_m x - T_n x\| \leq \|x\|, \forall m, n \geq n_0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|T_x - T_n x\| \leq \|x\|, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} T - T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y) \\ T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y) \end{array} \right\} \Rightarrow T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Pentru $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|T_m - T_n\| \leq \varepsilon, \forall m, n \geq 0 \Rightarrow \|T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|, \forall m, n \geq 0, \forall x \in X.$

Pentru $x \in X$ fixat $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T_x - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|, \forall n \geq n_0, \forall x \in X \Rightarrow$

$\|T_n - T\|_{\text{op}} \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{B}(X, Y)} T \Rightarrow (T_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\text{op}})} \Rightarrow$

$\mathcal{F}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\text{op}})} \subset \mathcal{C}_{(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\text{op}})} \Rightarrow (\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\text{op}})$ spațiu Banach.

□

Consecința 1.2.3. Dacă X este un spațiu normat, atunci $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ este un spațiu Banach.

Capitolul 2

SPAȚII BANACH DE FUNȚII

2.1 Normă generalizată de funcții

Fie m =măsură Lebesgue și \mathcal{M} =spațiu liniar al funcțiilor $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ măsurabile Lebesgue în care identificăm funcțiile egale a.p.t.

Definiția 2.1.1. Aplicația $N : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ se numește normă generalizată de funcții dacă:

1. $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.p.t;
2. dacă $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$ atunci $N(f) \leq N(g)$;
3. $N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$;
4. $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{M}$;

Definiția 2.1.2. Fie N o normă generalizată.

Atunci $B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ se numește spațiu de funcții asociat normei N .

Remarca 2.1.1. B este spațiu liniar.

Demonstrație. Dacă $f, g \in B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci $N(\alpha f + \beta g) \leq N(\alpha f) + N(\beta g) = |\alpha| \cdot N(f) + |\beta| \cdot N(g) < \infty \Rightarrow \alpha f + \beta g \in B$ \square

Remarca 2.1.2. Dacă $B = B_W$ este un ideal în \mathcal{M} și $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. cu $t \in \mathbb{R}_+$ și $g \in B$, atunci $f \in B$.

Definiția 2.1.3. Dacă N este o normă generalizată și $B = B_N$, atunci definim $|f|_B := N(f)$. Aplicația $|\cdot|_B$ o numim normă de funcție.

Remarca 2.1.3. Fie N o normă generalizată și $B = B_N$, atunci $(B, |\cdot|_B)$ este spațiu vectorial normat, pe care îl notăm cu S.V.N.

Definiția 2.1.4. Fie $(B, |\cdot|_B)$ -complet. Atunci B se numește spațiu Banach de funcții.

Remarca 2.1.4. Fie B un spațiu Banach de funcții și $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t, cu $t \in \mathbb{R}_+$ și $g \in B$, atunci $f \in B$ și $|f|_B \leq |g|_B$.

Notăm $Q(\mathbb{R})$ clasa spațiilor Banach de funcții B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, $\forall t > 0$.

Notăm, pentru $A \in \mathbb{R}_+$, λ_A - funcția caracteristică a mulțimii A , adică $\lambda_A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lambda_A(t) = \begin{cases} 1 & , t \in A \\ 0 & , t \notin A \end{cases}$$

Exemplul 2.1.1. $N(f) = \|f\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$

1. Dacă $p \in [1, \infty)$ atunci:

$$N(\lambda_{[0,t)}) = \left(\int_0^t \lambda_{[0,t)}^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in B, \\ \forall t > 0 \Rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+)$$

2. Dacă $p = \infty$ atunci:

$$N(f) = \|f\|_\infty \Rightarrow N(\lambda_{[0,t)}) = 1, \forall t > 0 \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in B, \\ \forall t > 0 \Rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R})$$

Definiția 2.1.5. Dacă $B \in Q(\mathbb{R}_+)$, atunci funcția $F_B : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, cu $F_B(t) = |\lambda_{[0,t)}|_B$ se numește funcția fundamentală a spațiului B .

Propoziția 2.1.1. Fie $B \in Q(\mathbb{R}_+)$. Atunci $F_B \in \mathcal{M}_{(0,\infty)}^{\neq}$.

Demonstrație. Dacă $t_1 < t_2$ și $\lambda_{[0,t_1]} \leq \lambda_{[0,t_2]}$, atunci $F_B(t_1) \leq F_B(t_2)$. \square

Exemplul 2.1.2. $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$F_B(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } p \in [1, \infty) \\ 1, & \text{dacă } p = \infty \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

2.2 Clase de spații de funcții

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_B(t) = +\infty$$

- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{[n, n+1)}|_B > 0$$

Exemplul 2.2.1. $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Din §1.1, Exemplul 1.1.2. rezultă că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dacă și numai dacă $p \in [1, \infty)$.

Remarca 2.2.1. $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ este o incluziune strictă.

Exemplul 2.2.2.

$$N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)| dt, \forall f \in \mathcal{M}$$

1. N este o normă generalizată

- $N(f) = 0 \Rightarrow \int_n^{n+1} |f(t)| dt = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$ a.p.t. pe $[n, n+1]$,
 $\forall n \Rightarrow f = 0$ a.p.t.
- $N(\alpha f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |\alpha \cdot f(t)| dt$
- $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t., $t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)| dt \leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)| dt \Rightarrow N(f) \leq N(g)$
- $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t) + g(t)| dt \leq$
 $\leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)| dt + \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)| dt \mid \cdot \sum_0^{\infty} \Rightarrow N(f+g) \leq$
 $\leq N(f) + N(g) \Rightarrow N$ este normă generalizată.

2. Fie $B = B_W = \{f \in \mathcal{M} : N(f) \leq \infty\}$, $|f|_B = N(f)$.

Dacă $(B, |\cdot|_B)$ este spațiu vectorial normat, arătăm că $(B, |\cdot|_B)$ este complet.

$$\text{Dacă } (f_n)_n \in \mathcal{F}_B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : |f_n - f_p|_B < \varepsilon, \forall n, p \geq m_0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \varepsilon, \forall n, p \geq m_0 \quad (2)$$

Dacă $k \in \mathbb{N}$ fixat și $\delta > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists m_\delta \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{1}{k+1} \cdot \int_k^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \\ \int_n^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt &< \frac{\delta}{k+1}, \forall n, p \geq m_0 \Rightarrow \int_k^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \\ \delta, \forall n, p \geq m_\delta &\Rightarrow (f_n)_n \in \mathcal{F}_{L^1[k, k+1]} \Rightarrow \exists \varphi^k \in L^1[k, k+1] \text{ astfel încât} \\ f_n &\xrightarrow{L^1[k, k+1]} \varphi^k \Rightarrow \exists (f_{n_j}) \subset (f_n) \text{ cu } f_{n_j} \rightarrow \varphi^k \text{ a.p.t. pe } [k, k+1]. \end{aligned}$$

Definim aplicația $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \varphi^k(t)$, $t \in [k, k+1) \Rightarrow$

$\exists (f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset (f_n)$ cu $f_{n_i} \rightarrow f$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\text{Din (2)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon, \forall n, i \geq m_0.$$

$$\text{Pentru } m_i \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall n \geq m_0. \quad (3)$$

$$\text{Din (3)} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f_n - f &\in B, \forall n \geq m_0 \\ f_n &\in B \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = -(f_n - f) + f_n \in B$$

Din (3) rezultă $|f_n - f|_B < \varepsilon, \forall n \geq m_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow B$ este complet
 $\Rightarrow (B, |\cdot|_B)$ este un spațiu Banach de funcții.

$$\begin{aligned} 3. N(\lambda_{[0,t]}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} \lambda_{[0,t]}(s) ds \leq \sum_{n=0}^{[t]+1} \frac{1}{n+1} < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t]} \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow B \in Q(\mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

$$4. F_B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \int_k^{k+1} \lambda_{[0,n+1]}(s) ds = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h+1}$$

$$\text{Pentru } t \geq n+1 \Rightarrow F_B(t) \geq F_B(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow F_B(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \\ \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

$$\begin{aligned}
5. \quad |\lambda_{[n,n+1)}|_B &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h+1} \cdot \int_h^{h+1} \lambda_{[n,n+1)}(s) ds = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}| = 0 \Rightarrow B \notin \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)
\end{aligned}$$

2.3 Funcție Young

Fie funcția $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}^{\neq}$, $\varphi \in \mathcal{C}_s$ cu $\varphi|_{(0, \infty)} \not\equiv 0$ și $\varphi|_{(0, \infty)} \not\equiv \infty$.

Definiția 2.3.1. Funcția $Y_\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ se numește funcție Young asociată lui φ .

Remarca 2.3.1. $Y_\varphi(0) = 0$ și $Y_\varphi \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}^{\neq}$

Teorema 2.3.1. $Y_\varphi \in \mathcal{C}v_{[0, \infty)}$

Demonstrație. $Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0, \infty)}$

Demonstrăm că $Y_\varphi \in \mathcal{J}_{[0, \infty)}$ (convexă Jensen).

Fie $t, s \geq 0$, $s \leq t$. Demonstrăm că $Y_\varphi\left(\frac{t+s}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(Y_\varphi(t) + Y_\varphi(s))$. (1)

Fie $Y_\varphi(t) = \infty$ sau $Y_\varphi(s) = \infty \Rightarrow$ (1) evidentă.

Presupunem $Y_\varphi(t), Y_\varphi(s) < \infty$, $s \leq \frac{s+t}{2} \leq t \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq Y_\varphi(t) < \infty$.
Efectuăm: $Y_\varphi(t) + Y_\varphi(s) - 2 \cdot Y_\varphi\left(\frac{t+s}{2}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \int_0^s \varphi(\tau) d\tau - 2 \cdot \left(\int_0^s \varphi(\tau) d\tau + \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau) d\tau \right) = \\
&= \int_0^t \varphi(\tau) d\tau - \int_0^s \varphi(\tau) d\tau - 2 \cdot \int_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau) d\tau = \\
&= \int_s^t \varphi(\tau) d\tau - 2 \cdot \int_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau) d\tau = \\
&= \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau) d\tau + \int_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau) d\tau - 2 \cdot \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau) d\tau = \\
&= \int_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau) d\tau - \int_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau) d\tau \geq 0 \text{ căci } \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{M}^{\neq} \Rightarrow q.e.d.
\end{aligned}$$

2.4 Spații Orlicz

Fie funcția $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi \in \mathcal{C}^s$, $\varphi \in \mathcal{M}^{\neq}$, $\varphi_{[0, \infty)} \not\equiv 0$ și $\varphi_{[0, \infty)} \not\equiv \infty$ și

$$Y_{\varphi}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \forall t \geq 0.$$

Dacă $f \in \mathcal{M}$, definim:

$$M_{\varphi}(f) = \int_0^{\infty} Y_{\varphi}(|f(t)|) dt \text{ și}$$

$$O_{\varphi} = \{f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_{\varphi}(c \cdot f) < \infty\}.$$

Teorema 2.4.1. O_{φ} este subspațiu liniar în \mathcal{M} .

Demonstrație. Pentru $f, g \in O_{\varphi} \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0$ cu

$$M_{\varphi}(c_1 \cdot f) < \infty, M_{\varphi}(c_2 \cdot g) < \infty.$$

Vom nota:

$$c = \frac{1}{2} \min\{c_1, c_2\}$$

$$c \cdot |f(t) + g(t)| \leq c|f(t)| + c|g(t)| \leq \begin{cases} c_1|f(t)|, & |f(t)| \geq |g(t)| \\ c_2|g(t)|, & |f(t)| < |g(t)| \end{cases} \Rightarrow Y_{\varphi}(c|f(t) +$$

$$g(t)|) \leq \begin{cases} Y_{\varphi}(c_1|f(t)|), & \text{dacă } |f(t)| \geq |g(t)| \\ Y_{\varphi}(c_2|g(t)|), & \text{dacă } |f(t)| < |g(t)| \end{cases} \Rightarrow Y_{\varphi}(c|f(t) + g(t)|) \leq$$

$$Y_{\varphi}(c_1|f(t)|) + Y_{\varphi}(c_2|g(t)|), \forall t \geq 0 \Rightarrow M_{\varphi}(c(f + g)) \leq$$

$$\leq M_{\varphi}(c_1 f) + M_{\varphi}(c_2 g) < \infty \Rightarrow f + g \in O_{\varphi}$$

$$\text{Fie } f \in O_{\varphi}, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Dacă } \lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0 \Rightarrow Y_{\varphi}(\lambda f) = 0 \Rightarrow M_{\varphi}(\lambda f) = 0.$$

$$\text{Dacă } \lambda \neq 0, \text{ din } f \in O_{\varphi} \Rightarrow \exists c > 0 \text{ astfel încât } M_{\varphi}(cf) < \infty \Rightarrow$$

$$\lambda f \in O_{\varphi}. \quad \square$$

$$\text{Pentru } f \in \mathcal{M}. \text{ Definim } A_f = \{c > 0 : M_{\varphi}(\frac{1}{c} \cdot f) \leq 1\}.$$

Remarca 2.4.1. Fie $c \in A_f$. Atunci $[c, \infty) \in A_f$.

$$\text{Demonstrație. Pentru } \tilde{c} > c \Rightarrow M_{\varphi}(\frac{1}{\tilde{c}} f) = \int_0^{\infty} Y_{\varphi}(\frac{1}{\tilde{c}} |f(t)|) dt \leq M_{\varphi}(\frac{1}{c} f) \leq 1.$$

$$\text{Definim aplicația } N : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], N(f) = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ +\infty, & A_f = \emptyset \end{cases} \quad \square$$

Teorema 2.4.2. N este o normă generalizată de funcții.

Demonstrație. $(n_1) \quad N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.p.t.}$

$$N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \inf A_f = 0 \\ A_f \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \exists (c_n) \in A_f \text{ cu } N(f) < c_n < N(f) + \frac{1}{n}$$

$$\text{și } M_{\varphi}(\frac{1}{c_n} f) \leq 1$$

” \Leftarrow ”

$f = 0$ a.p.t. $\Rightarrow \forall c > 0 \Rightarrow Y_\varphi(\frac{1}{c}|f(t)|) = 0$ a.p.t. $\Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{c}f) = 0 \leq 1 \Rightarrow A_f = (0, \infty) \neq \emptyset \Rightarrow N(f) = 0$.

” \Rightarrow ”

Vom presupune prin reducere la absurd că $f \neq 0$ a.p.t.
 $\Rightarrow \exists A \in \alpha, m(A) > 0, \exists \delta > 0$ astfel încât $|f(t)| \geq \delta, \forall t \in A$.

$$N(f) = 0 \Rightarrow A_f \subset (0, \infty) \left\{ \begin{array}{l} A_f \neq \emptyset, \inf A_f \end{array} \right\} \xrightarrow{Rem.1.4.1.} A_f = (0, \infty)$$

Pentru $c > 0$ arbitrar fixat $\Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 \geq M_\varphi(\frac{1}{c}f) = \int_0^\infty Y_\varphi(\frac{1}{c}|f(t)|)dt \geq \int_A Y_\varphi(\frac{\delta}{c})dt = Y_\varphi(\frac{\delta}{c}) \cdot m(A) \Rightarrow Y_\varphi(\frac{\delta}{c}) \leq \frac{1}{m(A)}.$$

$$\text{Însă } Y_\varphi = \int_0^{\frac{\delta}{c}} \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)}, \forall c > 0 \xrightarrow{c \searrow 0} \int_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)},$$

iar pentru $\varphi \geq 0$ și $\varphi \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}^{\mathbb{R}} \Rightarrow \varphi_{(0, \infty)} = 0$ a.p.t. contradicție.
 Presupunerea fiind falsă rezultă că $f = 0$ a.p.t.

(n_2) Pentru $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \geq 0$ rezultă că $N(f) \leq N(g)$

- Pentru $N(g) = \infty \Rightarrow$ evident.
- Pentru $N(g) < \infty \Rightarrow \exists c > 0$ astfel încât $M_\varphi(\frac{1}{c}g) \leq 1$.
 Este suficient să arătăm că $A_g \subset A_f$.
 Dacă $c_1 \in A_g, M_\varphi(\frac{1}{c_1}f) \leq M_\varphi(\frac{1}{c_1}g) \leq 1 \Rightarrow A_f \neq \emptyset$ și $A_g \subset A_f$.

(n₃) Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ și $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$, vom demonstra că $N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.

Pentru $\lambda = 0 \xrightarrow{n_1}$ evident.

Presupunem $\lambda \neq 0$ și arătăm că $A_{\lambda f} = |\lambda|A_f$ (3)
 ” \subset ”

Fie $c \in A_{\lambda f} \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c}f\right) \leq 1$.

Fie $c_1 = \frac{c}{|\lambda|}$.

$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) = M_\varphi\left(\frac{|\lambda|}{c}f\right) = M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c}f\right) \leq 1 \Rightarrow c_1 \in A_f \Rightarrow$
 $\Rightarrow c = c_1|\lambda| \in |\lambda|A_f \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_{\lambda f} \subset |\lambda|A_f$.

” \supset ”

Fie $c \in A_f$. Arătați că $|\lambda| \cdot c \in A_{\lambda f}$

$M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda|c}\lambda f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda|c}|\lambda|f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \Rightarrow |\lambda|c \in A_{\lambda f} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\lambda|A_f \subset A_{\lambda f} \Rightarrow (3)$
 $\Rightarrow A_{\lambda f} \neq \emptyset \Rightarrow \inf A_{\lambda f} = |\lambda| \inf A_f \Leftrightarrow N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.

(n₄) Fie $f, g \in \mathcal{M}$. Arătați că $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ (4)

Pentru $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty \Rightarrow (4)$

Pentru $N(f), N(g) < \infty \Rightarrow A_f, A_g \neq \emptyset$, demonstrăm că $A_f + A_g \subset A_{f+g}$ (5)

Fie $c_1 \in A_f$ și $c_2 \in A_g \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) \leq 1$ și $M_\varphi\left(\frac{1}{c_2}g\right) \leq 1$.

Fie $t \geq 0$.

$\frac{1}{c_1+c_2}|f(t) + g(t)| \leq \frac{1}{c_1+c_2}|f(t)| + \frac{1}{c_1+c_2}|g(t)| = \frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|g(t)|}{c_2}$
 $Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\neq} \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}|f(t) + g(t)|\right) \leq Y_\varphi\left(\frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2} \frac{|g(t)|}{c_2}\right) \leq$
 $\frac{c_1}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|f(t)|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|g(t)|}{c_2}\right) \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}(f+g)\right) \leq$
 $\frac{c_1}{c_1+c_2} M_\varphi\left(\frac{1}{c_1}f\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} M_\varphi\left(\frac{1}{c_2}g\right) \leq \frac{c_1+c_2}{c_1+c_2} = 1$

$\Rightarrow c_1 + c_2 \in A_{f+g} \Rightarrow (5)$

$\Rightarrow A_{f+g} \neq \emptyset \Rightarrow \inf A_{f+g} \leq \inf A_f + \inf A_g \Rightarrow (4)$

Din (n₁)-(n₄) rezultă că N este normă generalizată.

□

Avem $B_n = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = \{f \in \mathcal{M} : A_f \neq \emptyset\}$.

Teorema 2.4.3. $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$

Demonstrație. "⊃" Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 < \infty \Rightarrow f \in O_\varphi$.

"⊂" Pentru $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty$.

Cazul 1: $M_\varphi(cf) = 0 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow N(f) < \infty$

Cazul 2: $M_\varphi(cf) > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $n_0 \geq M_\varphi(cf)$

$$M_\varphi(cf) = \int_0^\infty Y_\varphi(c|f(t)|)dt$$

$$Y_\varphi(c|f(t)|) = \int_0^{c|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\frac{(j-1)c}{n_0}|f(t)|}^{\frac{jc}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau \geq n_0 \int_0^{\frac{c}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= n_0 Y_\varphi\left(\frac{c}{n_0}|f(t)|\right) \Rightarrow n_0 M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq M_\varphi(cf) \leq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{c}{n_0}\right)^{-1} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset$$

Din Teorema 1.4.3 rezultă că putem defini:

$$|f|_\varphi = N(f), \forall f \in O_\varphi.$$

$$\text{Rezultă că } |f|_\varphi = \inf_{c>0} \left\{ M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \right\}.$$

□

Terminologie 2.4.1. Numim $|\cdot|$, norma Orlicz a funcției f . Atunci rezultă $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ este S.V.N.

Terminologie 2.4.2. $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ este spațiu Orlicz.

Exemplul 2.4.1. $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty\}$

$$Q_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : M_\varphi(f) < \infty\}$$

$$Q_\varphi \subsetneq O_\varphi$$

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0, 1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$$

$$Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau = \begin{cases} \infty, t > 1 \\ 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 2$$

$$M_\varphi(f) = \infty, M_\varphi\left(\frac{1}{n_0}f\right) = 0 < \infty.$$

2.5 Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Definim aplicația $N : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ca o normă generalizată de funcții ,
 $B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$, $|f|_B := N(f)$.

Remarca 2.5.1. $(B, |\cdot|_B)$ este S.V.N.

Remarca 2.5.2. $f \in B \Leftrightarrow |f| \in B$. În plus , $|f|_B = \|f\|_B$.

Demonstrație. " \Rightarrow "

$$\left. \begin{array}{l} \text{Presupunem } f \in B \Rightarrow \|f\| \leq |f| \\ f \in B \end{array} \right\} \Rightarrow |f| \in B \text{ și } N(|f|) \leq N(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_B \leq |f|_B \quad (1)$$

" \Leftarrow "

$$\left. \begin{array}{l} \text{Presupunem } f \in B \Rightarrow |f| \leq \|f\| \\ |f| \in B \end{array} \right\} \Rightarrow f \in B \text{ și } N(f) \leq N(|f|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f|_B \leq \|f\|_B \quad (2)$$

\Rightarrow q.e.d. □

Definiția 2.5.1. Spunem că N satisface proprietatea Beppo-Levi dacă și numai dacă:

(n5) Pentru $0 \leq f_n, f_n \nearrow f$ a.p.t. rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

Spunem că N satisface:

(n6) Pentru $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty \Rightarrow N(\lambda_A) < \infty$;

(n7) Pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty \exists K_A \in (0, \infty)$ astfel încât:

$$\int A|f| \leq K_A \cdot N(f), \forall f \in \mathcal{M}. \quad (*)$$

Remarca 2.5.3. Dacă N satisface (n6), atunci pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ rezultă că $\lambda_A \in B$. În special $B \in Q(R_+)$.

Remarca 2.5.4. Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) = \infty \Rightarrow (*)$ este evidentă.

De aceea relația $(*)$ este adevărată pentru $f \in B$.

Remarca 2.5.5. Fie \mathcal{E} spațiul funcțiilor etajate $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, cu etaje de măsură finită.

Dacă N satisface (n6), atunci $\mathcal{E} \subset B$.

Demonstrație. Pentru $s \in \mathcal{E} \Rightarrow s = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \lambda_{A_k}$, unde $A_k \in \mathcal{L}$ cu

$$m(A_k) < \infty, \forall k = 1, n.$$

Pentru $\lambda_{A_k} \in B$ și B =spațiu liniar, rezultă că $s \in B$. □

Exemplul 2.5.1. Fie $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), |\cdot|_B = \|\cdot\|_p$.

Pentru $p=1$, proprietatea (n7) este satisfăcută.

Pentru $p = \infty$, $A \in \mathcal{L}$ și $m(A) < \infty$ rezultă

$$\int_A |f| \leq m(A) \cdot \|f\|_\infty, \forall f \in B \Rightarrow K_A = \begin{cases} m(A) & , m(A) > 0 \\ 1 & , m(A) = 0 \end{cases}$$

Pentru $p \in (1, \infty)$, fie $A \in \mathcal{L}, m(A) < \infty$.

$$\int_A |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f| \cdot \lambda_A \leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}_+} \lambda_A^q \right)^{\frac{1}{q}} = (m(A))^{\frac{1}{q}}.$$

În final, spațiile L^p verifică (n5)-(n7).

Propoziția 2.5.1. Dacă N verifică proprietatea (n7) și $f_n \rightarrow f$ în B , atunci pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$, $\exists f_{k_n} \subset f_n$ astfel încât $f_{k_n} \rightarrow f$ a.p.t. pe A .

Demonstrație. Fie $f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow |f_n - f|_B \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (1)

Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ și $\varepsilon > 0$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm:

$$A_n = \{t \in A : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \geq \int_{A_n} \frac{1}{\varepsilon} |f_n - f| \geq \int_{A_n} 1 dm = m(A_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} K_A N(f_n - f) = \frac{1}{\varepsilon} K_A |f_n - f|_B \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(1)} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f \text{ pe } A \Rightarrow \exists (f_{k_n}) \subset (f_n) \text{ cu } f_{k_n} \rightarrow f \text{ a.p.t. pe } A. \quad \square$$

Corolarul 2.5.2. Dacă N verifică (n7), atunci pentru orice $f_n \rightarrow f$ în B există $(f_{k_n}) \subset (f_n)$ cu $f_{k_n} \rightarrow f$ a.p.t.

Demonstrație. Rezultă din Propoziția 1.5.1, folosind descompunerea

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) \text{ și un procedeu de diagonalizare.} \quad \square$$

Propoziția 2.5.3. Dacă N verifică (n7) și $N(f) < \infty$, atunci f este finită a.p.t. ($\forall f \in B \Rightarrow f$ finită a.p.t.)

Demonstrație. Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$, vom nota

$$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| = \infty\}.$$

$$A_n = \{t \in [n, n+1) : |f(t)| = \infty\}$$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (1)$$

$$\text{Fie } t \in A_n, k \in \mathbb{N}^* \text{ arbitrar} \Rightarrow |f(t)| \geq k \Rightarrow k \cdot m(A_n) \leq \int_{A_n} |f| \leq \int_{[n, n+1)} |f| \leq$$

$$\leq K_n \cdot N(f).$$

Deci, rezultă că $k \cdot m(A_n) \leq K_n \cdot N(f), \forall k \in \mathbb{N}^*$.

$h \rightarrow \infty \Rightarrow m(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow f$ finită a.p.t. □

Propoziția 2.5.4. Dacă N verifică (n5) și $0 \leq f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ și $f_n \nearrow f$ a.p.t., atunci una din propoziții este adevărată:

$$1. f \notin B \text{ și } |f_n|_B \rightarrow \infty$$

sau

$$2. f \in B \text{ și } |f_n|_B \rightarrow |f|_B.$$

Demonstrație. Din (n5) rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

Deducem $f \in B$ dacă și numai dacă $N(f) < \infty$. □

Lemă 2.5.5. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+, \alpha_n = \inf_{k \geq n} x_k, \beta_n = \sup_{k \geq n} x_k$ și

$$l = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Atunci:

$$(i) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = l$$

$$(ii) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = L.$$

Demonstrație. (i) $(\alpha_n)_n \in \mathcal{M}^\neq \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \stackrel{not}{=} \alpha \in [0, \infty]$

$$l \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n) \text{ și } x_{k_n} \rightarrow l$$

$$\alpha_{k_n} \leq x_{k_n}, \forall n \Rightarrow \alpha \leq l \quad (1)$$

$$\text{Fie } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists h_n \geq n \text{ astfel încât } x_{h_n} \leq \alpha_n + \frac{1}{n} \text{ și } \alpha_n \leq x_{h_n} \leq \alpha_n + \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \exists (x_{h_n}) \subset (x_n) \text{ cu } x_{h_n} \rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \alpha \geq l \quad (3)$$

$$\stackrel{(4)}{\underset{(3)}{\longrightarrow}} \alpha = l$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & (\beta_n)_n \in \mathcal{M}^{\approx} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta \in [0, \infty] \\
& L \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n) \text{ cu } x_{k_n} \rightarrow L \\
& \text{Dar } x_{k_n} \leq \beta_{k_n}, \forall n \Rightarrow L \leq \beta \\
& \text{Dacă } \beta = \infty \Rightarrow \beta_n = \infty, \forall n \\
& \Rightarrow \forall n \exists k_n \geq n \text{ cu } x_{k_n} \geq n \Rightarrow x_{k_n} \rightarrow \infty \Rightarrow L = \infty \\
& \text{Dacă } \beta < \infty \text{ rezultă că } \forall n \in \mathbb{N}^* \exists h_n \geq n \text{ astfel încât } \beta_n - \frac{1}{n} \leq x_{h_n} \leq \beta_n. \\
& \Rightarrow \exists (x_{h_n}) \subset (x_n) \text{ cu } x_{h_n} \rightarrow \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \beta \leq L \\
& \xrightarrow[(5)]{(4)} L = \beta
\end{aligned} \tag{4}$$

□

Teorema 2.5.6 (Fatou). *Dacă N verifică (n_5) și $(f_n)_n \subset B, f_n \rightarrow f$ a.p.t. și $\varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B < \infty$, atunci $f \in B$ și $|f|_B \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B$.*

Demonstrație. Definim $h_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, h_n(t) = \inf_{m \geq n} |f_m(t)| \Rightarrow 0 \leq h_n \leq h_{n+1}$.

Demonstrăm că $h_n \rightarrow |f|$ a.p.t.

$f_n \rightarrow f$ a.p.t. $\Rightarrow |f_n| \rightarrow |f|$ a.p.t.

$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f_n(t)|\}, m(\mathcal{C}A) = 0$

Pentru $t \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$, din definiția lui $h_n(t)$, avem că $\exists m_n > n$ astfel încât $h_n(t) \leq |f_{m_n}(t)| \leq h_n(t) + \frac{1}{n} \Rightarrow h_n(t) \rightarrow |f(t)| \Rightarrow h_n \rightarrow |f|$ pe A (deci a.p.t.).

Deci $0 \leq h_n, \forall n, h_n \nearrow |f|$.

Din $(n_5) \Rightarrow N(h_n) \nearrow N(|f|)$ (1)

$h_n \leq |f_n| \Rightarrow N(h_n) \leq N(|f_n|), \forall m \geq n \Rightarrow N(h_n) \leq \inf_{m \geq n} N(|f_m|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} N(h_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq n} N(|f_m|)) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} N(|f_n|)$ (2)

Însă $f_n \in B \Rightarrow N(|f_n|) = N(f_n) = |f_n|_B \xrightarrow[(2)]{(1)} N(|f|) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B < \infty$

$|f| \in B \xrightarrow{Rem.1.5.2} f \in B$ și $|f|_B \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|_B$.

□

2.6 Completitudinea spațiilor Orlicz

Fie aplicația $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}^{\neq} \cap \mathcal{C}_{[0, \infty]}^s$ cu $\varphi/(0, \infty) \neq 0$ și $\varphi/(0, \infty) \neq \infty$.

$$Y_{\varphi} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], Y_{\varphi}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

$$M_{\varphi}(f) = \int_0^{\infty} Y_{\varphi}(|f|), \forall f \in \mathcal{M}$$

$$O_{\varphi} = \{f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } \mathcal{M}_{\varphi}(cf) < \infty\}$$

$$|f|_{\varphi} = \inf \left\{ c > 0 : \mathcal{M}_{\varphi}\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \right\}$$

Remarca 2.6.1. $A_f = \left\{ c > 0 : \mathcal{M}_{\varphi}\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 \right\}, \forall f \in \mathcal{M}$.

$$N : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], N_f = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ \infty, & A_f = \emptyset \end{cases}$$

Deci $O_{\varphi} = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ și $|f|_{\varphi} = N(f), \forall f \in O_{\varphi}$.

Propoziția 2.6.1. Dacă $f \in O_{\varphi}$ și $|f|_{\varphi} > 0$ rezultă că $M_{\varphi}\left(\frac{1}{|f|_{\varphi}}f\right) \leq 1$ (*)

Demonstrație. $f \in O_{\varphi} \Rightarrow N(f) < \infty \Rightarrow |f|_{\varphi} = N(f) \in (0, \infty)$

Dar $N(f) = \inf A_f \Rightarrow \exists c_n \in (0, \infty)$ cu $c_n \searrow N(f)$.

$$M_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n}f\right) = \int_0^{\infty} Y_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n}|f(t)|\right) dt$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_n}|f(t)| \nearrow \frac{1}{N(f)}|f(t)| \\ Y_{\varphi} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}^{\neq} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n}|f(t)|\right) \nearrow Y_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)}|f(t)|\right)$$

$$\xrightarrow{T.conv.monotone} M_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n}f\right) \rightarrow M_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)}f\right)$$

$$\begin{aligned} & \text{Dar } c_n \in A_f, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_{\varphi}\left(\frac{1}{c_n}f\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_{\varphi}\left(\frac{1}{N(f)}f\right) \leq \\ & 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow M_{\varphi}\left(\frac{1}{|f|_{\varphi}}f\right) \leq 1. \end{aligned} \quad \square$$

Remarca 2.6.2. Fie $f \in O_{\varphi}$ cu $|f|_{\varphi} > 0$. Atunci $|f|_{\varphi} \in A_f$.

Teorema 2.6.2. Norma N verifică proprietățile $(n_5), (n_6)$ și (n_7) .

Demonstrație. (n_5)

Pentru $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ cu $f_n \nearrow f$ a.p.t. $f_n \leq f_{n+1}$

$$\xrightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$f_n \leq f \xrightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f), \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$\text{Fie } \alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} N(f_n). \quad (3)$$

$$\text{Din (2) rezultă că } \alpha \leq N(f). \quad (4)$$

$$\textbf{Cazul 1: } \alpha = \infty \stackrel{(4)}{\Rightarrow} N(f) = \infty \Rightarrow N(f) = 2.$$

$$\textbf{Cazul 2: } \alpha = 0 \Rightarrow N(f_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow f = 0 \text{ a.p.t.} \\ \Rightarrow N(f) = 0 \Rightarrow N(f) = \alpha$$

Cazul 3: Vom presupune că $0 < N(f_n) \leq \alpha < \infty, \forall n$ efectuăm:

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right) dt \leq \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n(t)\right) dt = M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right) \\ N(f_n) < \infty \Rightarrow f_n \in O_\varphi \stackrel{p_1}{\Rightarrow} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right) \leq 1 \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \leq 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \\ f_n \nearrow f \text{ a.p.t.} \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \nearrow Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \text{ a.p.t.} \quad (5)$$

Din teorema convergenței monotone rezultă că:

$$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right) dt \rightarrow \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f(t)\right) dt = M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right).$$

$$\text{Din (5) și (6)} \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in A_f \Rightarrow N(f) \leq \alpha \Rightarrow N(f) = \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} N(f) = N(f).$$

(n₆)

Pentru $A \in \alpha$ cu $m(A) < \infty$, arătăm că $\lambda_A \in O_\varphi (A\lambda_A \neq \emptyset)$.

$$Y_\varphi(0) = 0, Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0, \infty)} \Rightarrow \exists c > 0 \text{ astfel încât } Y_\varphi(c) \leq \frac{1}{m(A)} \quad (m(A) > 0)$$

$$M_\varphi(c \cdot \lambda_A) = \int_0^\infty Y_\varphi(c \cdot \lambda_A(t)) dt = \int_A Y_\varphi(c) \cdot m(A) \leq 1 < \infty \Rightarrow \lambda_A \in O_\varphi.$$

(n₇)

Pentru $A \in \alpha$, cu $m(A) < \infty$, arătați că $\exists k_A > 0$, cu $S_A|f| \leq k_A \cdot N(f)$, $\forall f \in \mathcal{M}$ (1)

Cazul 1: $N(f) = \infty \Rightarrow (1)$ – evident.

Cazul 2: $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow \int_A |f| = 0 \Rightarrow (1)$

Cazul 3: $0 < N(f) < \infty$ Notăm $c = \frac{1}{N(f)} > 0$.

$$Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)} \int_A c|f|\right) \stackrel{Y_\varphi \in \mathcal{C}_v}{\leq} \frac{1}{m(A)} \cdot \int_A Y_\varphi(c|f|) \leq \frac{1}{m(A)} \cdot \int_0^\infty Y_\varphi(c|f|) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_\varphi(c|f|)}{m(A)} = \frac{1}{m(A)} \cdot M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)}f\right) \leq \frac{1}{m(A)} < \infty \\
&\Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)} \cdot \int_A c|f|\right) \leq \frac{1}{m(A)}
\end{aligned} \tag{2}$$

□

Observația 2.6.1. $\varphi/(0,\infty) \not\equiv 0 \wedge \varphi/(0,\infty) \not\equiv \infty \Rightarrow \exists t_0 \in (0, \infty)$
cu $\varphi(t_0) \in (c, \infty)$

Pentru $t > t_0$ $Y_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \geq \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \geq \varphi(t_0)(t - t_0)$,
 $\forall t \geq t_0 \xrightarrow{\text{crit.maj.}} \lim_{t \rightarrow \infty} Y_\varphi(t) = \infty$. Așadar $Y_\varphi \in \mathcal{M}_{[0,\infty)}^{\neq} \cap \mathcal{C}_{[0,\infty)}$ și
 $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_\varphi(t) = \infty$.

Din (2) $\Rightarrow \exists \tilde{c} > 0$ astfel încât $\frac{1}{m(A)} \cdot \int_A c|f| \leq \tilde{c} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_A |f| \leq \frac{\tilde{c} \cdot m(A)}{c} = \underbrace{\tilde{c} \cdot m(A)}_{k_A} \cdot N(f) \Rightarrow (1)$

Corolarul 2.6.3. *Spațiul Orlicz $(O_\varphi, |\cdot|)$ este complet.*

Demonstrație. Din Teorema 1.6.2 și Corolarul Teoremei Riesz-Fischer. □

2.7 Proprietățile spațiilor Orlicz

Fie φ ca în § 1.6 .

Remarca 2.7.1. Fie $\varphi(t) > 0, \forall t \in (0, \infty)$. Atunci $Y_\varphi \in \mathcal{M}_{[0,\infty)}^{\neq}$, așadar injectivă.

Remarca 2.7.2. Fie $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \in (0, \infty) \Rightarrow Y_\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bijectivă.

($Y_\varphi(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} Y_\varphi(t) = \infty, Y_\varphi$ continuă \Rightarrow concluzie)

Exemplul 2.7.1. Pentru $p \in [1, \infty), \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \varphi(t) = p \cdot t^{p-1}$,

$Y_\varphi(t) = t^p, t \geq 0, M_\varphi(f) = \int_0^\infty |f|^p dt$.

$M_\varphi(c \cdot f) = c^p \cdot M_\varphi(f) \Rightarrow [M_\varphi(c \cdot f) < \infty \Leftrightarrow M_\varphi(f) < \infty]$

$(O_\varphi, |\cdot|_\varphi) = (L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

Exemplul 2.7.2. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0, 1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$

$$Y_\varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0, 1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$$

$$M_\varphi(c \cdot f) = \int_0^\infty Y_\varphi(c \cdot |f(t)|) dt < \infty \Leftrightarrow c \cdot |f(t)| \leq 1 \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{c}$$

a.p.t. $t \geq 0 \Leftrightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
 $|f|_\varphi = \inf\{c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1\}$

$$M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1 \Leftrightarrow |f(t)| \leq c \text{ a.p.t. } \Rightarrow \|f\|_\infty \leq c \Rightarrow |f|_\varphi = \|f\|_\infty.$$

Așadar $(O_\varphi, |\varphi|) \equiv (L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Considerăm clasele:

- $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ — clasa spațiilor Banach de funcții $(B, |\cdot|_B)$ cu $\lambda_{[0,t)} \in B, \forall t > 0$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ — clasa spațiilor Banach de funcții $(B, |\cdot|_B)$ cu $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} F_B(t) = \infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ — clasa spațiilor Banach de funcții $(B, |\cdot|_B)$ cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ și $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}|_B > 0$.

Remarca 2.7.3. $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ și $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Remarca 2.7.4. $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+), \forall p \in [1, \infty)$.

Propoziția 2.7.1. $O_\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

$$\text{Demonstrație. } M_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}) = \int_0^\infty Y_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}(\tau)) d\tau = \int_0^t Y_\varphi(c) d\tau = t \cdot Y_\varphi(c).$$

$$Y_\varphi(c) = \int_0^c \varphi(\tau) d\tau. \text{ Deoarece } \varphi/(0, \infty) \not\equiv \infty \text{ rezultă că } \exists c > 0 \text{ cu } \varphi(c) \in (0, \infty)$$

$$\Rightarrow Y_\varphi(c) \leq c \cdot \varphi(c) < \infty \Rightarrow M_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}) < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in O_\varphi, \forall t > 0. \quad \square$$

Propoziția 2.7.2 (Funcția fundamentală a spațiului Orlicz). *Pentru* $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \geq 0$ *rezultă că* $F_{O_\varphi}(t) = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}, \forall t > 0$.

$$\text{Demonstrație. } F_{O_\varphi}(t) = |\lambda_{[0,t)}|_\varphi.$$

$$|\lambda_{[0,t)}| = \inf \left\{ c > 0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,t)}\right) \leq 1 \right\}.$$

$$\hat{\text{Însă}} M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,t)}\right) = t \cdot Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right).$$

Observăm că $M_\varphi(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,t]}) \leq 1 \Leftrightarrow t \cdot Y_\varphi(\frac{1}{c}) \leq 1 \Leftrightarrow Y_\varphi(\frac{1}{c}) \leq \frac{1}{t} \xLeftrightarrow{Y_\varphi \in \mathcal{M}^\neq} \frac{1}{c} \leq Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t}) \Leftrightarrow \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})} \leq c \Rightarrow F_{O_\varphi}(t) = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}, \forall t > 0.$ □

Propoziția 2.7.3. Pentru $0 < f(t) < \infty, \forall t \in (0, \infty)$ rezultă că $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Demonstrație. **Pasul 1:** $O_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{O_\varphi}(t) \stackrel{P_2}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(s)} = \infty \Rightarrow O_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Pasul 2: $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi > 0.$

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n \in \mathbb{N}, |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi &= \inf \left\{ c > 0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,n+1)}\right) \leq 1 \right\}, \\ M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,n+1)}\right) &= \int_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,n+1)}(\tau)\right) d\tau = \int_n^{n+1} Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) d\tau = Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[n,n+1)}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c} \leq Y_\varphi^{-1}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} \leq c \Rightarrow \\ \Rightarrow |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi &= \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow O_\varphi &\in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

□

Capitolul 3

SPAȚII BANACH DE ȘIRURI

Notăm cu S spațiul liniar al tuturor șirurilor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definiția 3.0.1. Numim normă Banach de șiruri o funcție $N : S \rightarrow [0, \infty]$ cu următoarele proprietăți:

- (i) $N(s) = 0$ dacă și numai dacă $s = 0$;
- (ii) dacă $|s| \leq |u|$ atunci $N(s) \leq N(u)$;
- (iii) $N(\alpha \cdot s) = |\alpha| \cdot N(s)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ și $s \in S$ cu $N(s) < \infty$;
- (iv) $N(s + u) \leq N(s) + N(u)$, pentru orice $s, u \in S$.

Fie $B = B_N$ mulțimea definită de $B := \{s \in S : |s|_B := N(s) < \infty\}$. Este ușor de observat faptul că $(B, |\cdot|_B)$ este un spațiu liniar normat. Dacă B este complet atunci B se numește spațiu Banach de șiruri.

Remarca 3.0.5. B este un ideal în S (dacă $|s| \leq |u|$ și $u \in B$ atunci de asemenea $s \in B$ și $|s|_B \leq |u|_B$).

Remarca 3.0.6. Dacă $s_n \rightarrow s$ în raport cu norma lui B , atunci există un subșir (s_{k_n}) convergent la s punctual.

Dacă B este un spațiu Banach de șiruri definim:

$$F_B : \mathbb{N}^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, F_B(n) := \begin{cases} |X_{\{0, \dots, n-1\}}|_B, & \text{dacă } X_{\{0, \dots, n-1\}} \in B \\ \infty, & \text{dacă } X_{\{0, \dots, n-1\}} \notin B \end{cases}.$$

Funcția F_B se numește funcția fundamentală a spațiului Banach de șiruri B .

Vom nota cu:

- (i) $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri B cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} F_B(n) = \infty$;
- (ii) $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri B cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ și $\inf_n |X_{\{n\}}|_B > 0$;
- (iii) $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ mulțimea tuturor spațiilor Banach de șiruri cu proprietatea că: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|X_{\{j-n_0, \dots, j\}}|_B \geq \varepsilon$, pentru orice $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$.

Remarca 3.0.7. Este ușor de observat că $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.3. Considerăm $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și norma

$$|S|_B = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |S(n)|.$$

Este ușor de observat că spațiul Banach de șiruri B în corespondență cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$, dar $B \notin \mathcal{E}(\mathbb{N})$ și $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.4. Considerăm $\alpha_n = \begin{cases} 1, n = 2k \\ \frac{1}{n}, n = 2k + 1 \end{cases}$ și norma:

$$|S|_B = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |S(n)|.$$

Atunci este ușor de observat că spațiul Banach de șiruri B în corespondență cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$, dar $\inf_{n \in \mathbb{N}} |X_{\{n\}}|_B = 0$.

Rezultă că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.5. Fie $\beta_n = \begin{cases} k, n = 2^k \\ 1, n \notin \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$ și norma

$$|S|_B = \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n \cdot |s(n)|.$$

Apoi, observăm că $\inf_{n \in \mathbb{N}} |X_{\{n\}}|_B = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_B(n) = \infty$, dar $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$, așadar $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.6. Dacă $p \in [1, \infty]$, atunci $B = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ cu

$|S|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |S(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ are proprietatea că $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cup \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Într-adevăr este ușor de observat că $|X_{\{n\}}|_p = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $|X_{\{j-n_0, \dots, j\}}|_p = (n_0 + 1)^{\frac{1}{p}}$, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ și $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$.

Exemplul 3.0.7. Dacă $p \in [1, \infty)$ și $\alpha = (\alpha_n)$ este un șir de numere reale strict pozitive cu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, atunci spațiul $B = l_{\alpha}^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ al tuturor șirurilor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p < \infty$, este un spațiu Banach de șiruri în raport cu norma :

$$|s|_{l_{\alpha}^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

deoarece $F_{l_{\alpha}^p}(n) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \right)^{\frac{1}{p}}$, rezultă că $l_{\alpha}^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.8. Dacă $p \in [1, \infty)$ și $k = (k_n)_n$ este un șir de numere naturale cu următoarele proprietăți:

- (i) $k_n \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (k_n - n) = \infty$,

atunci spațiul $E_k^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ al tuturor șirurilor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea :

$$|s|_{E_k^p} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=n}^{k_n} |s(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

este un spațiu Banach de șiruri cu $E_k^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.9 (Spațiu Orlicz de șiruri). Fie $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ o funcție nedescrescătoare, continuă la stânga și care nu este identic nulă sau ∞ pe intervalul $(0, \infty)$. Definim : $Y_N(t) = \int_0^t N(s)ds$, care se numește funcția Young asociată lui N .

Fie $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Considerăm $M_N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_N(|s(n)|)$.

Mulțimea O_N a tuturor șirurilor s cu proprietatea că există $k > 0$ astfel încât $M_N(k \cdot s) < \infty$ este ușor de verificat că este un spațiu liniar.

În raport cu norma $|s|_N = \inf \{k > 0 : M_N(\frac{1}{k} \cdot s)\}$ este un spațiu Banach de șiruri, numit spațiu de șiruri Orlicz.

Exemple banale de spații de șiruri Orlicz sunt: $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, care sunt obținute pentru $N(t) = p \cdot t^{p-1}$, dacă $1 \leq p \leq \infty$ și

$$N(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \infty, & t > 1 \end{cases}, \text{ dacă } p = \infty.$$

În cele ce vor urma vom nota cu \mathcal{F} mulțimea tuturor funcțiilor nedescrescătoare $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, cu proprietatea că $f(0) = 0$ și $f(t) > 0$, pentru orice $t > 0$.

Propoziția 3.0.4. Fie $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă la stânga. Dacă $N \in \mathcal{F}$, atunci:

(i) Funcția Young Y_N asociată lui N este bijectivă;

(ii) Funcția fundamentală F_{O_N} poate fi exprimată în funcție de Y_N^{-1} prin :

$$F_{O_N}(n) = \frac{1}{Y_N^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*;$$

(iii) $O_N \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{N})$;

Demonstrație. (i) Avem că Y_N este o funcție continuă cu $Y_N(0) = 0$.

Din $N(t) > 0$, pentru orice $t > 0$ rezultă că Y_N este strict crescătoare și deoarece N este descrescătoare, obținem că :

$$Y_N(t) = \int_0^t N(s)ds \geq \int_1^t N(s)ds \geq (t-1) \cdot N(1), \text{ pentru orice } t > 1,$$

așadar $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_N(t) = \infty$.

În concluzie, obținem că Y_N este bijectivă .

(ii) Pentru că $M_N(X_{\{0, \dots, n-1\}}) = n \cdot Y_g(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, X_{\{0, \dots, n-1\}} \in O_N$ și

$$\begin{aligned} F_{O_N}(n) &= |X_{\{0, \dots, n-1\}}|_N = \inf \left\{ k > 0 : M_g\left(\frac{1}{k}\right) \cdot X_{\{0, \dots, n-1\}} \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ k > 0 : n \cdot Y_N\left(\frac{1}{k}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \frac{1}{Y_N^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

(iii) Folosind un argument asemănător, ca și în (ii), vom obține că :

$$|X_{\{j-n_0, \dots, j\}}|_N = \frac{1}{Y_N^{-1}\left(\frac{1}{n_0}\right)}, \text{ pentru orice } j, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ și } j \geq n_0. \quad (*)$$

Având în vedere faptul că, Y_N^{-1} este o funcție continuă cu $Y_N^{-1}(0) = 0$, din relația (*), deducem că $O_N \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Observând că $|X_{\{n\}}|_N = \frac{1}{Y_N^{-1}(1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și folosind Rem. 3.0.7, obținem că $O_N \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

□

Exemplul 3.0.10. Fie $N \in \mathcal{F}$, o funcție continuă la stânga și (α_n) , un șir de numere reale strict pozitive. Dacă O_N este un spațiu Orlicz asociat funcției N , atunci notăm cu O_N^α , spațiul tuturor șirurilor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, cu proprietatea că șirul $s_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $s_\alpha(n) = \alpha_n \cdot s(n)$, aparține lui O_N .
Avem că O_N este un spațiu Banach de șiruri, în raport cu norma:

$$|s|_{O_N}^\alpha = |s_\alpha|_{O_N}.$$

Notăm cu \mathcal{F}_1 , mulțimea tuturor funcțiilor $f \in \mathcal{F}$, cu proprietatea că există $\delta > 0$ și $c > 0$, astfel încât : $f(2t) \leq c \cdot f(t)$, pentru orice $t \in [0, \delta]$.

Propoziția 3.0.5. Dacă N este o funcție continuă la stânga, cu $N \in \mathcal{F}_1$ și $(\alpha_n) \subset (0, \infty)$ un șir care converge la 0 cu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot N(\alpha_n) = \infty$, atunci $O_N^\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că există $M > 0$, astfel încât $F_{O_N^\alpha}(n) \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem :

$$F_{O_N^\alpha}(n) = |X_{\{0, \dots, n-1\}}|_{O_N^\alpha} = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{j=0}^{n-1} Y_N\left(\frac{\alpha_j}{k}\right) \leq 1 \right\},$$

rezultă că

$$\sum_{j=0}^{n-1} Y_N\left(\frac{\alpha_j}{M}\right) \leq 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce arată că

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_N\left(\frac{\alpha_n}{M}\right) \leq 1.$$

Fie $\delta > 0$ și $c > 0$ astfel încât $N(2t) \leq c \cdot N(t)$, pentru orice $t \in [0, \delta]$. Întrucât $\alpha_n \rightarrow 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\alpha_n < \frac{\delta}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$.

Fie $k_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $2^{k_0} \geq M$.

Pentru $n \geq n_0$, avem :

$$\begin{aligned}
Y_N\left(\frac{\alpha_n}{M}\right) &= \int_0^{\frac{\alpha_n}{M}} N(s)ds \geq \int_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0}}} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{2 \cdot c} \cdot \int_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0-1}}} N(s)ds \geq \dots \geq \frac{1}{(2 \cdot c)^{k_0+1}} \cdot \int_0^{2 \cdot \alpha_n} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{(2 \cdot c)^{k_0+1}} \cdot \int_{\alpha_n}^{2 \cdot \alpha_n} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{(2 \cdot c)^{k_0+1}} \cdot \alpha_n \cdot N(\alpha_n),
\end{aligned}$$

ceea ce implică $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n \cdot N(\alpha_n) \leq (2 \cdot c)^{k_0+1} \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} Y_N\left(\frac{\alpha_n}{M}\right) \leq \infty$.

Prin urmare, $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \cdot N(\alpha_n)$ este convergentă fapt ce contrazice ipoteza. \square