Cuprins

1. Spaţii Banach de funcţii

În această secţiune vom defini spaţiile Banach de funcţii peste $\mathbf{R}_+$ şi vom prezenta câteva exemple remarcabile de astfel de spaţii.

Fie $(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}(m), m)$ spaţiul măsurabil $\mathbf{R}_+$ cu m-măsura Lebesgue. Cu $\mathcal{M}$ vom nota spaţiul liniar al funcţiilor m-măsurabile $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$, identificând funcţiile egale a.p.t.

O *normă Banach de funcţii* este o aplicaţie $N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ cu următoarele proprietăţi:

$n_1)$ $N(f) = 0$ dacă şi numai dacă $f = 0$ a.p.t.;

$n_2)$ dacă $|f| \leq |g|$ a.p.t. atunci $N(f) \leq N(g)$;

$n_3)$ $N(\alpha f) = |\alpha| N(f),$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{C}$ şi orice f cu $N(f) < \infty$;

$n_4)$ $N(f + g) \leq N(f) + N(g),$ pentru orice $f, g \in \mathcal{M}$.

Fie $F = F_N$ mulţimea

$$F := \{f \in \mathcal{M} : ||f||_F := N(f) < \infty\}$$

.

Se observă că $(F, ||\cdot||_F)$ este un spaţiu vectorial normat. Dacă F este complet, atunci F se numeşte *spaţiu Banach de funcţii peste* $\mathbf{R}_+$ sau pe scurt *spaţiu Banach de funcţii.*

Remarca 1.1. F este un ideal în $\mathcal{M}$, adică dacă $|f| \leq |g|$ a.p.t. şi $g \in F$, atunci $f \in F$ şi $||f||_F \leq ||g||_F$.

Remarca 1.2. Dacă $f_n \to f$ în norma din F, atunci există un subşir (f_{k_n}) care converge la f a.p.t.

Dacă F este un spaţiu Banach de funcţii definim

$$\Psi_F : \mathbf{R}_+ \to [0, \infty], \quad \Psi_F(t) := \begin{cases} ||\chi_{[0,t)}||_F & , \quad \text{dacă } \chi_{[0,t)} \in F \\ \infty & , \quad \text{dacă } \chi_{[0,t)} \notin F \end{cases}$$

unde $\chi_{[0,t)}$ este funcţia caracteristică a intervalului $[0, t)$.

Funcţia Ψ_F se numeşte *funcţia fundamentală* a spaţiului Banach de funcţii F.

În continuare vom nota cu $\mathcal{F}$ mulţimea spaţiilor Banach de funcţii cu proprietatea

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_F(t) = \infty.$$

Remarca 1.3. Fie F un spaţiu Banach de funcţii. Deoarece $|f| \leq |g|$ a.p.t. implică $||f||_F \leq ||g||_F$ rezultă că funcţia fundamentală este o funcţie crescătoare.

În consecinţă $F \in \mathcal{F}$ dacă şi numai dacă există un şir $t_n \to \infty$ pentru care $\Psi_F(t_n) \to \infty$ pentru $n \to \infty$.

Exemple triviale de spaţii Banach de funcţii sunt spaţiile $L^p(\mathbf{R}_+)$, cu $p \in [1,\infty]$. Din

$$\Psi_{L^p}(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{p}} & , \quad \text{dacă } p \in [1,\infty) \\ \\ 1 & , \quad \text{dacă } p = \infty \end{cases}$$

deducem că $L^p \in \mathcal{F}$ pentru $p \in [1,\infty)$ şi $L^\infty \notin \mathcal{F}$.

Exemplul 1.1. [Ne1] Fie $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0,\infty)$, $\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$. Pentru $p \in [1,\infty]$ considerăm spaţiul

$$L^p_\alpha(\mathbf{R}_+) := \{f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}\,,\ f \text{ măsurabilă cu } \alpha f \in L^p(\mathbf{R}_+)\}$$

În raport cu norma:

$$||f||_{L^p_\alpha} := ||\alpha f||_{L^p}$$

$L^p_\alpha(\mathbf{R}_+)$ este un spaţiu Banach de funcţii cu

$$\Psi_{L^p_\alpha}(t) = \begin{cases} \left(\int_0^t \alpha^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}} & , \quad \text{dacă } p \in [1,\infty) \\ \\ \sup\limits_{s\in[0,t)} \alpha(s) & , \quad \text{dacă } p = \infty \end{cases}$$

Exemplul 1.2. [MS1] Pentru $p \in [1, \infty)$, vom nota cu M^p spaţiul funcţiilor măsurabile $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ cu proprietatea că

$$|||f|||_p := \sup_{t\geq 0} \left(\int_t^{t+1} |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se verifică fără dificultate că $(M^p, |||\cdot|||_p)$ este un spaţiu Banach de funcţii cu

$$\Psi_{M^p}(t) = \begin{cases} t & , \quad \text{dacă } t \in [0,1) \\ 1 & , \quad \text{dacă } t \geq 1 \end{cases}$$

deci $M^p \notin \mathcal{F}$ oricare ar fi $1 \leq p < \infty$.

Exemplul 1.3. [MS1] Dacă $p \in [1, \infty)$ vom nota cu $\mathcal{A}_p$ mulţimea funcţiilor local integrabile $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ cu

$$\sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} \alpha^p(s) ds = \infty.$$

Pentru $p \in [1, \infty)$ şi $\alpha \in \mathcal{A}_p$ fie

$$M^p_\alpha := \{ f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C} \,|\, f \text{ măsurabilă cu } \alpha f \in L^p \}$$

În raport cu norma:

$$|||f|||_{p,\alpha} = |||\alpha f|||_p.$$

M^p_α este un spaţiu Banach de funcţii.

Remarca 1.4. [MS1] Cu notaţiile de mai sus avem că $M^p_\alpha \in \mathcal{F}$ pentru orice $p \in [1, \infty)$ şi $\alpha \in \mathcal{A}_p$.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$. Din $\alpha \in \mathcal{A}_p$ rezultă că există $t_0 \geq 0$ astfel încât

$$\int_{t_0}^{t_0+1} \alpha^p(s)\, ds > \varepsilon^p.$$

Atunci pentru orice $t > t_0 + 1$ avem că:

$$\Psi_{M^p_\alpha}(t) = \sup_{s\geq 0} \left(\int_s^{s+1} \alpha^p(u)\, \chi_{[0,t)}(u)\, du \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{t_0}^{t_0+1} \alpha^p(u)\, du \right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon$$

Rezultă de aici că există $\lim_{t\to\infty} \Psi_{M_\alpha^p}(t) = \infty$ adică $M_\alpha^p \in \mathcal{F}$.

Exemplul 1.4. [MS1] Fie $\mathcal{U}$ mulţimea funcţiilor măsurabile şi nemărginite $u : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$. Pentru $u \in \mathcal{U}$ vom nota cu M_u mulţimea funcţiilor măsurabile $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ cu proprietatea că:

$$|||f|||_u := \sup_{t\in\mathbf{R}_+} u(t)|f(t)| < \infty.$$

Se verifică uşor că $(M_u, ||| \cdot |||_u)$ este un spaţiu Banach de funcţii pentru orice $u \in U$.

Deoarece

$$\Psi_{M_u}(t) = \sup_{s\geq 0} u(s)\chi_{[0,t)}(s) = \sup_{s\in[0,t)} u(s)$$

şi $u \in U$ rezultă că $M_u \in \mathcal{F}$.

Exemplul 1.5. [MS1] Fie Γ mulţimea funcţiilor $\gamma : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ cu proprietăţile

i) $\gamma(t) > t$ pentru orice $t \geq 0$;

ii) $\overline{\lim_{t\to\infty}}(\gamma(t) - t) = \infty$.

Pentru orice $p \in [1, \infty)$ şi $\gamma \in \Gamma$ vom nota cu S_γ^p mulţimea funcţiilor măsurabile $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ cu proprietatea

$$||f||_{p,\gamma} := \sup_{t\geq 0}\left(\int_t^{\gamma(t)} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Atunci $(S_\gamma^p, || \cdot ||_{p,\gamma})$ este un spaţiu Banach de funcţii. În plus, din $\gamma \in \Gamma$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $t_0 > 0$ astfel încât

$$\gamma(t_0) > t_0 + \varepsilon^p$$

şi deci

$$\Psi_{S_\gamma^p}(t) = \sup_{s\geq 0}\left(\int_s^{\gamma(s)} \chi_{[0,t)}(u)du\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{t_0}^{\gamma(t_0)} \chi_{[0,t)}(u)du\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (\gamma(t_0) - t_0)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon$$

pentru orice $t > \gamma(t_0)$. Rezultă de aici că

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_{S^p_\gamma}(t) = \infty$$

deci $S^p_\gamma \in \mathcal{F}$ pentru orice $p \in [1,\infty)$ şi $\gamma \in \Gamma$.

2. Caracterizări echivalente ale uniform stabilităţii C_0-semigrupurilor de operatori

În cele ce urmează X este un spaţiu Banach (real sau complex). Cu $\mathcal{B}(X)$ vom nota spaţiul liniar al operatorilor liniari şi mărginiţi de la X în X. $\mathcal{B}(X)$ este un spaţiu Banach în raport cu norma:

$$||T|| := \inf \{M > 0 : ||T(x)|| \leq M\,||x||,\ \forall x \in X\}$$

Remarca 2.1. Pentru orice $T \in \mathcal{B}(X)$

$$||T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||T(x)|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)||.$$

Fie $\mathbf{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrup pe spaţiul Banach X.

Definiţia 2.1. $\mathbf{T}$ *este uniform exponenţial stabil şi notăm pe scurt u.e.s. dacă există $N, \nu > 0$ astfel încât*

$$\|T(t)\| \leq N\,e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pentru început vom demonstra următoarele leme:

Lema 2.1. [MS1] *Fie $A \in \mathcal{B}(X)$ cu raza spectrală $r(A) \geq 1$. Atunci pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ şi $n \in \mathbf{N}$ există $x \in X$ cu $||x|| = 1$ şi*

$$||A^m x|| \geq \varepsilon, \quad \forall m \in \{0,\dots,n\}.$$

Demonstraţie: Fie $\lambda \in \sigma(A)$ cu $|\lambda| = r(A)$. Atunci există $(x_n) \subset X$ cu $||x_n|| = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Rezultă că $A^m x_n - \lambda^m x_n \to 0$, pentru orice $m \in \mathbf{N}$ (1).

Fie $\varepsilon \in (0,1)$ şi $n \in \mathbf{N}$. Din (1) rezultă că există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$||A^m x_{n_0} - \lambda^m x_{n_0}|| < 1 - \varepsilon$$

pentru orice $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Avem că:

$$|\lambda|^m = ||\lambda^m x_{n_0} - A^m x_{n_0}|| + ||A^m x_{n_0}|| < 1 - \varepsilon + ||A^m x_{n_0}||$$

iar de aici că:

$$||A^m x_{n_0}|| > |\lambda|^m - 1 + \varepsilon \geq \varepsilon, \quad \forall m \in \{0, \ldots, n\}.$$

Lema 2.2. [MS1] *Fie F un spaţiu Banach de funcţii şi $S : \mathbf{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$. Dacă pentru orice $x \in X$ aplicaţia*

$$S_x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad S_x(t) = ||S(t)x||$$

este un element din F, atunci există $M > 0$ astfel încât:

$$||S_x||_F \leq M||x||, \quad \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Fie M_F mulţimea funcţiilor măsurabile $f : \mathbf{R}_+ \to X$ cu $||f|| \in F$. În M_F identificăm funcţiile egale a.p.t. M_F este un spaţiu Banach în raport cu norma:

$$|f|_{M_F} = ||\,||f||\,||_F.$$

Considerăm aplicaţia $\tilde{S} : X \to M_F$ definită prin:

$$\tilde{S}(x)(t) = S(t)(x), \quad \forall t \geq 0.$$

Din teorema graficului închis e suficient să demonstrăm că operatorul liniar $\tilde{S}$ este închis.

Fie $x_n \to x$ în X şi $\tilde{S}(x_n) \to f$ în M_F. $\tilde{S}(x_n) \to f$ în M_F înseamnă:

$$|\tilde{S}(x_n) - f|_{M_F} = \| \| \tilde{S}(x_n) - f \| \|_F \to 0$$

Din Remarca 1.2. rezultă că există un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu proprietatea că:

$$\|\tilde{S}(x_{k_n}) - f\| \longrightarrow 0, \text{ pt. } n \to \infty, \text{ a.p.t.}$$

deci:

$$\tilde{S}(x_{k_n}) \to f \quad \text{ a.p.t. (1).}$$

Deoarece pentru orice $t \geq 0$:

$$\tilde{S}_{x_{k_n}}(t) = S(t)x_{k_n} \to S(t)x = \tilde{S}_x(t) \text{ (2),}$$

din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $\tilde{S}(x) = f$ a.p.t. adică $\tilde{S}(x) = f$ în M_F.

Aşadar $\tilde{S}$ este un operator închis. Din teorema graficului închis rezultă că există $M > 0$ astfel încât:

$$|\tilde{S}(x)|_{M_F} \leq M||x||, \quad \forall x \in X.$$

Cum

$$|\tilde{S}(x)|_{M_F} = \| \|\tilde{S}(x)\| \|_F = \|S_x\|_F$$

rezultă că:

$$\|S_x\|_F \leq M \, \|x\|, \ \forall x \in X.$$

Lema 2.3.(*Müller*) *Fie* $A \in \mathcal{B}(X)$ *cu raza spectrală* $r(A) \geq 1$. *Atunci pentru orice* $\varepsilon \in (0,1)$ *şi orice şir descrescător de numere reale pozitive* (α_n) *cu* $\alpha_n \to 0$ *există* $x \in X$ *cu* $||x|| = 1$ *astfel încât*

$$||A^n x|| \geq \varepsilon \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Demonstraţie: A se vedea [Mu] sau [Ne3].

Definiţia 2.2. *Fie F un spaţiu Banach de funcţii. Un C_0-semigrup* $\mathbf{T}$ *pe spaţiul Banach X se zice F-stabil dacă pentru orice $x \in X$ aplicaţia $t \mapsto ||T(t)x||$ este un element din F.*

Are sens să ne punem problema dacă uniform exponenţial stabilitatea C_0 semigrupului $\mathbf{T}$ implică F-stabilitatea lui oricare ar fi F un spaţiu Banach de funcţii (sau oricare ar fi F un spaţiu Banach de funcţii din $\mathcal{F}$). Răspunsul este negativ după cum arată următorul exemplu:

Exemplul 2.1. [MS1] Fie $\mathcal{M}$ spaţiul funcţiilor măsurabile Lebesgue $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$. Definim

$$N : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad N(f) = \int_0^\infty e^t \, |f(t)| \, dt$$

$F = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ este un spaţiu Banach de funcţii din $\mathcal{F}$ în raport cu norma:

$$||f||_F := \int_0^\infty e^t |f(t)| \, dt.$$

Pentru fiecare $t \geq 0$ definim

$$T(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad T(t)x = e^{-\frac{t}{2}} x.$$

$\mathbf{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ este un C_0-semigrup uniform exponenţial stabil pe $X = \mathbf{R}$. Să remarcăm că $\mathbf{T}$ nu este F-stabil. Mai mult avem că aplicaţia:

$$f_x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad f_x(t) = \|T(t)x\|$$

este în F dacă şi numai dacă $x = 0$. În particular avem că $\mathbf{T}$ nu este F-stabil.

Legătura dintre uniform exponenţial stabilitate şi F-stabilitate este prezentată în următoarea teoremă care constituie rezultatul central al acestei secţiuni.

Teorema 2.1. *Fie* $\mathbf{T}$ *un C_0-semigrup spaţiul Banach X. Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există $F \in \mathcal{F}$ astfel încât* $\mathbf{T}$ *să fie F-stabil.*

Demonstraţie: [MS1] *Necesitatea.* Dacă $\mathbf{T}$ este u.e.s. există $N, \nu > 0$ astfel încât

$$\|T(t)\| \leq N \, e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0$$

.

Dacă $p \in [1, \infty)$ şi $x \in X$ din

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \, dt \le N^p \, \|x\|^p \int_0^\infty \, e^{-\nu pt} \, dt < \infty$$

rezultă că $\mathbf{T}$ este L^p-stabil.

Suficienţa. Din ipoteză avem că pentru orice $x \in X$ aplicaţia

$$S_x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad S_x(t) = ||T(t)x||$$

este un element din F. Din Lema 2.2. rezultă că există $M > 0$ astfel încât

$$||S_x||_F \le M \, ||x||, \quad \forall x \in X \text{ (1)}.$$

Să demonstrăm că $\mathbf{T}$ este u.e.s. Pentru aceasta e suficient să arătăm că $r(T(1)) < 1$.

Presupunem prin absurd că $r(T(1)) \ge 1$. Pentru fiecare $p \in \mathbf{N}^*$ considerăm şirul

$$\alpha_n^p := \begin{cases} 1 & , \quad \text{dacă } n \le p \\ 0 & , \quad \text{dacă } n \ge p+1 \end{cases}$$

Pentru fiecare $p \in \mathbf{N}^*$ din Lema 2.3. aplicată şirului (α_n^p) şi pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ rezultă că există $x_p \in X$ cu $||x_p|| = 1$ şi

$$||T(n)x_p|| \ge \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ cu } n \le p \text{ (2)}.$$

Dacă notăm cu

$$N := \sup\{||T(t)|| : t \in [0, 1]\}$$

atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}, x \in X$ şi $t \in [n, n+1]$ avem că

$$||T(n+1)x|| \le N||T(t)x|| \text{ (3)}.$$

Din (2) şi (3) deducem că:

$$\chi_{[0,p)} \le 2N||T(\cdot)x_p|| = 2NS_{x_p}, \ \forall p \in \mathbf{N}^*.$$

De aici, ţinând seama de relaţia (1) avem că:

$$\Psi_F(p) = \|\chi_{[0,t)}\| \leq 2N\|S_{x_p}\|_F \leq 2MN\|x_p\| = 2MN, \ \forall p \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce contrazice ipoteza $F \in \mathcal{F}$.

În concluzie rezultă că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Remarca 2.2. Teorema precedentă a fost demonstrată pentru prima dată de J.M.A.M. van Neerven în [Ne2]. Demonstraţia dată de Neerven foloseşte esenţial faptul că X este spaţiu Banach complex.

În continuare cu ajutorul Teoremei 2.1. utilizând diverse spaţii Banach de funcţii vom obţine caracterizări echivalente ale u.e.s. C_0-semigrupurilor de operatori.

Teorema 2.2. [Ne1] *Fie X un spaţiu Banach şi $\mathbf{T} = (T(t)_{t\geq 0}$ un C_0-semigrup pe X. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathbf{T}$ este u.e.s.;

(ii) există $\beta \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+), \beta \geq 0$ cu:

$$\int_0^\infty \beta(t)\, dt = \infty \qquad (1)$$

şi $p \in [1, \infty)$ astfel încât:

$$\int_0^\infty \beta(t)\, \|T(t)x\|^p\, dt < \infty, \forall x \in X \ (2)$$

Demonstraţie: Necesitatea. Dacă $\mathbf{T}$ este u.e.s. atunci pentru $\beta \equiv 1$ şi $p \in [1, \infty)$ avem că:

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p\, dt < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Suficienţa. Dacă există $t_0 > 0$ cu $T(t_0) = 0$ atunci $T(t) = 0$ pentru orice $t \geq t_0$ deci $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Presupunem că $T(t) \neq 0$ pentru orice $t_0 \geq 0$. Fie

$$\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty), \quad \alpha(t) = \begin{cases} (\beta(t))^{1/p} & , \quad \text{dacă } \beta(t) > 0 \\ e^{-t}\, \|T(t)\|^{-1} & , \quad \text{dacă } \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Dacă L^p_α este spaţiul Banach de funcţii definit în Exemplul 1.1. atunci:

$$\Psi_{L^p_\alpha}(t) = \left(\int_0^t \alpha^p(s)\, ds\right)^{1/p} \geq \left(\int_0^t \beta(s)\, ds\right)^{1/p}.$$

Din ipoteza (1) deducem că $L^p_\alpha \in \mathcal{F}$. Pentru $x \in X$

$$\| \|T(\cdot)x\| \|_{L^p_\alpha} = \left(\int_0^\infty \alpha^p(t)\, \|T(t)x\|^p\, dt\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \left[(\beta(t))^{1/p} \|T(t)x\| + \frac{\|T(t)x\|}{e^t\, \|T(t)\|} \right]^p dt\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \beta(t)\, \|T(t)x\|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty \frac{\|T(t)x\|^p}{e^{tp}\, \|T(t)\|}\, dt\right)^{1/p} =$$

$$= \int_0^\infty \beta(t)\, \|T(t)x\|^p\, dt \,+\, \|x\| \left(\int_0^\infty e^{-tp}\, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Rezultă de aici că $\mathbf{T}$ este L^p_α-stabil. Ţinând seama că $L^p_\alpha \in \mathcal{F}$, din Teorema 1.2.1. obţinem că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Remarca 2.3. Suficienţa este o generalizare a toremei Datko - Pazy:

Fie X un spaţiu Banach, $\mathbf{T}$ un C_0-semigrup pe X. Dacă există $p \in [1, \infty)$ astfel încât

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p\, dt < \infty \quad \forall x \in X$$

atunci $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Corolarul 2.1. [MS1] *Fie $\mathbf{T}$ un C_0-semigrup pe spaţiul Banach X. Atunci $\mathbf{T}$ este u.e.s. dacă şi numai dacă există o funcţie nemărginită, măsurabilă Lebesgue $u : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ astfel încât:*

$$\sup_{t \geq 0} u(t) ||T(t)x|| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Necesitatea. Dacă $\mathbf{T}$ este u.e.s. atunci există $N, \nu > 0$ astfel încât:

$$\|T(t)\| \leq N\, e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

În particular, pentru $u(t) = e^{\nu t}$ se obţine că:

$$\sup_{t \leq 0} u(t) \|T(t)x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Suficienţa. Rezultă din Teorema 2.1. pentru $F = M_u$, unde M_u este definit în Exemplul 1.4.

Corolarul 2.2. [MS1] *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathbf{T}$ *este u.e.s.;*

ii) există un şir nemărginit $(u_n) \subset (0, \infty)$ *astfel încât:*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n ||T(n)x|| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Necesitatea. Rezultă pentru $u_n = n$.

Suficienţa. Fie

$$M := \sup\{||T(t)|| : t \in [0, 1]\}$$

şi

$$u : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty), \quad u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{M} \chi_{[n,n+1)}(t).$$

Atunci $u \in \mathcal{U}$ (definit în Exemplul 1.4.) şi

$$u(t)||T(t)x|| \leq \frac{u_n}{M} ||T(t-n)||\, ||T(n)x|| \leq u_n ||T(n)x||$$

pentru orice $t \in [n, n+1), n \in \mathbf{N}$ şi $x \in X$.
Rezultă de aici că:

$$\sup_{t \geq 0} u(t)||T(t)x|| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Ţinând seama de Corolarul 2.1. se obţine că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Teorema 2.3. [MS1] *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X*. Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există* $p \in [1, \infty)$ *şi o funcţie local integrabilă* $\beta : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *astfel încât*

i) $\sup\limits_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \beta(s) ds = \infty$

şi

ii) $\sup\limits_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \beta(s) ||T(s)x||^p ds < \infty, \quad \forall x \in X.$

Demonstraţie: Necesitatea. Este imediată pentru $\beta(t) = t$ şi $p \in [1, \infty)$.

Suficienţa. Dacă există $t_0 > 0$ astfel încât $||T(t_0)|| = 0$ atunci $T(t) = 0$ pentru orice $t \geq t_0$ şi deci $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Presupunem că $||T(t)|| > 0$ pentru orice $t \geq 0$. În acest caz considerăm funcţia:

$$\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty),\ \alpha(t) = \begin{cases} (\beta(t))^{1/p} & , \text{ dacă } \beta(t) \neq 0 \\ \\ e^{-t}\, ||T(t)||^{-1} & , \text{ dacă } \beta(t) = 0 \end{cases}$$

Avem că α este local (Lebesgue) integrabilă pe $\mathbf{R}_+$ cu

$$\beta(t) \leq \alpha^p(t), \quad \forall t \geq 0.$$

De aici deducem că

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \alpha^p(s)\, ds = \infty$$

şi

$$(\int_t^{t+1} \alpha^p(s) ||T(s)x||^p ds)^{\frac{1}{p}} \leq [\int_t^{t+1} (\beta^{\frac{1}{p}}(s) + \frac{e^{-s}}{||T(s)||})^p ||T(s)x||^p ds]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (\int_t^{t+1} \beta(s) ||T(s)x||^p ds)^{\frac{1}{p}} + (\int_t^{t+1} \frac{e^{-ps}}{||T(s)||^p} ||T(s)x||^p ds)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} (\int_t^{t+1} \beta(s) ||T(s)x||^p ds)^{\frac{1}{p}} + ||x||,$$

pentru orice $x \in X$ şi $t \geq 0$.
Rezultă că $\mathbf{T}$ este M_α^p-stabil, unde M_α^p este definit în Exemplul 1.3.
Din Teorema 2.1. rezultă că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Corolarul 2.3. [MS1] *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X. *Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există un şir nemărginit* $(\alpha_n) \subset (0, \infty)$ *şi* $p \in [1, \infty)$ *astfel încât*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n \int_n^{n+1} ||T(s)x||^p ds < \infty$$

pentru orice $x \in X$.

Demonstraţie: Necesitatea este imediată pentru $\alpha_n = n$ şi $p \in [1, \infty)$.

Suficienţa. Fie $\beta : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definită prin

$$\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \chi_{[n,n+1)}(t).$$

Atunci β este local integrabilă cu

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \beta(s) ds = \infty.$$

Mai mult avem că

$$\int_t^{t+1} \beta(s)||T(s)x||^p ds \leq \int_n^{n+2} \beta(s)||T(s)x||^p ds =$$

$$= \alpha_n \int_n^{n+1} ||T(s)x||^p ds + \alpha_{n+1} \int_{n+1}^{n+2} ||T(s)x||^p ds \leq 2 \sup_{n \in \mathbf{N}} \alpha_n \int_n^{n+1} ||T(s)x||^p ds,$$

pentru orice $t \geq 0$ şi $n = [t]$.
De aici rezultă că

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \beta(s)||T(s)x||^p ds < \infty$$

pentru orice $x \in X$ iar din Teorema 2.3. că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Teorema 2.4. [MS1] *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X *şi fie* Γ *mulţimea definită în Exemplul 1.5. Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există* $\gamma \in \Gamma$ *şi* $p \in [1, \infty)$ *astfel încât*

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{\gamma(t)} ||T(s)x||^p ds < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Necesitatea. Se verifică fără dificultate pentru $\gamma(t) = 2t$ şi $p \in [1, \infty)$.

Suficienţa. Rezultă din Teorema 2.1. pentru spaţiul Banach de funcţii $F = S_\gamma^p$ definit în Exemplul 1.5.

Corolarul 2.4. [MS1] *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X*. Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există* $p \in [1, \infty)$ *şi un şir* (γ_n) *de numere reale pozitive cu proprietăţile:*

i) $\gamma_n > n, \quad \forall n \in \mathbf{N}$,

ii) $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} (\gamma_n - n) = \infty$,

iii) $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \int_n^{\gamma_n} ||T(s)x||^p ds < \infty, \quad \forall x \in X$.

Demonstraţie: Necesitatea rezultă imediat pentru $\gamma_n = 2n$ şi $p \in [1, \infty)$.

Suficienţa. Fie $\gamma : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ funcţia definită prin

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \, \chi_{[n,n+1)}(t).$$

Condiţiile (i) şi (ii) arată că $\gamma \in \Gamma$, unde Γ este mulţimea definită în Exemplul 1.5.

Dacă $x \in X$, $t \in \mathbf{R}_+$ şi $n = [t]$ atunci

$$\int_t^{\gamma(t)} ||T(s)x||^p ds \leq \int_n^{\gamma_n} ||T(s)x||^p ds \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_n^{\gamma_n} ||T(s)x||^p ds < \infty.$$

Rezultă de aici că $\mathbf{T}$ este S_γ^p-stabil, unde S_γ^p este spaţiul Banach de funcţii definit în Exemplul 1.5. Deoarece $S_\gamma^p \in \mathcal{F}$, din Teorema 2.1. obţinem că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

3. Spaţii Orlicz. Teorema Littman - Neerven

Fie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to [0, \infty]$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi neidentic egală cu 0 sau ∞ pe $(0, \infty)$. Definim

$$\Phi(t) := \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

O funcţie Φ de această formă se numeşte *funcţie Young*.

Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ o funcţie măsurabilă şi Φ o funcţie Young. Definim

$$M_\varphi(f) := \int_0^\infty \Phi(|f(s)|)\, ds.$$

Propoziţia 3.1. *Mulţimea*

$$L_\varphi := \{f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C} \,|\, f \text{ măsurabilă şi } \exists k > 0 \text{ a.î. } M_\varphi(k\, f) < \infty\}$$

este un spaţiu liniar. În raport cu norma:

$$N_\varphi(f) := \ inf\, \{k > 0 \,:\, M_\varphi(\frac{1}{k}\, f) \le 1\}$$

L_φ este un spaţiu Banach de funcţii.

Demonstraţie: Fie $f, g \in L_\varphi$ şi $k_1, k_2 > 0$ astfel încât $M_\varphi(k_1\, f) < \infty$ respectiv $M_\varphi(k_2\, g) < \infty$. Fie $k = \min\, \{k_1, k_2\}/2$.

Pentru orice $t \ge 0$ avem că:

$$k\,|(f+g)(t)| \le k\,|f(t)| + k\,|g(t)| \le \begin{cases} k_2\,|g(t)| & , \quad \text{dacă } |f(t)| \le |g(t)| \\ k_1\,|f(t)| & , \quad \text{dacă } |f(t)| > |g(t)| \end{cases}$$

Ţinând seama că Φ este crescătoare obţinem de aici că:

$$\Phi(k\,|(f+g)(t)|) \le \begin{cases} \Phi(k_2\,|g(t)|) & , \quad \text{dacă } |f(t)| \le |g(t)| \\ \Phi(k_1\,|f(t)|) & , \quad \text{dacă } |f(t)| > |g(t)| \end{cases}$$

deci în particular:

$$\Phi(k\,|(f+g)(t)|) \leq \Phi(k_1\,|f(t)|) + \Phi(k_2\,|g(t)|), \quad \forall\, t \geq 0 \ (1)$$

Integrând în relaţia (1) deducem că:

$$M_\varphi(k\,(f+g)) \leq M_\varphi(k_1\,f) + M_\varphi(k_2\,g) < \infty$$

deci $f+g \in L_\varphi$.

Fie acum $f \in L_\varphi$ şi $\lambda \in \mathbf{C}$.

a) dacă $\lambda = 0$ atunci $\lambda f = 0$ şi $M_\varphi(\lambda\,f) = 0$ deci $\lambda f \in L_\varphi$;

b) dacă $\lambda \neq 0$ fie $q = k/|\lambda|$ unde $k > 0$ cu proprietatea că $M_\varphi(k\,f) < \infty$. Atunci:

$$M_\varphi(q(\lambda f)) = \int_0^\infty \Phi(q|\lambda\,f(s)|)\,ds = \int_0^\infty \Phi(k\,|f(s)|)\,ds = M_\varphi(k\,f) < \infty.$$

Rezultă că $\lambda f \in L_\varphi$, deci L_φ este spaţiu liniar.

Fie $\mathcal{M} = \{\,f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C} \mid f$ măsurabilă $\}$. Pentru fiecare $f \in \mathcal{M}$ considerăm mulţimea

$$A_f = \{k > 0 : \ M_\varphi(\frac{1}{k}\,f) \leq 1\}$$

Se observă că dacă $A_f \neq \emptyset$ şi $k \in A_f$ atunci $[k,\infty) \subset A_f$. Definim:

$$N : \mathcal{M} \to [0,\infty], \quad N(f) = \begin{cases} \inf A_f & , \quad \text{dacă } A_f \neq \emptyset \\ \infty & , \quad \text{dacă } A_f = \emptyset \end{cases}$$

Să demonstrăm că N este o normă Banach de funcţii.

n_1) Fie f măsurabilă, $f = 0$ a.p.t. Atunci pentru orice $k > 0$, $\frac{1}{k}\,f = 0$ a.p.t. Rezultă de aici că $\Phi(\frac{1}{k}|f|) = 0$ a.p.t. deci $M_\varphi(\frac{1}{k}\,f) = 0$.

Obţinem în acest mod că $A_f = (0,\infty)$, deci $N(f) = 0$.

Fie acum f măsurabilă cu $N(f) = 0$. Rezultă că $A_f = (0,\infty)$.

Presupunem prin absurd că $f \neq 0$ a.p.t. deci există $A \subset \mathbf{R}_+$ măsurabilă şi $c > 0$ astfel încât

$$|f(t)| \geq c\,, \quad \forall t \in A.$$

Pentru orice $k > 0$:

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\,f) = \int_0^\infty \Phi(\frac{1}{k}\,|f(t)|)\,dt \geq \int_A \Phi(\frac{1}{k}\,|f(t)|)\,dt \geq$$

$$\geq m(A)\,\Phi(\frac{c}{k}) = m(A)\,\int_0^{\frac{c}{k}} \varphi(s)ds.$$

Din $A_f = (0, \infty)$ rezultă că:

$$\int_0^{\frac{c}{k}} \varphi(s)\,ds \leq \frac{1}{m(A)}, \quad \forall k > 0.$$

Făcând $k \searrow 0$ obţinem de aici că

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \leq \frac{1}{m(A)} \quad (2).$$

Ţinând seama că $\varphi \geq 0$ şi φ este crescătoare convergenţa integralei $\int_0^\infty \varphi(s)\,ds$ implică $\varphi \equiv 0$ (absurd).

Rezultă în acest mod că $f \equiv 0$ a.p.t.

n_2) Fie f, g măsurabile cu $|f| \leq |g|$ a.p.t. Dacă $N(g) = \infty$ atunci (evident) $N(f) \leq N(g)$.

Dacă $N(g) < \infty$ există $k > 0$ pentru care

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\,g) \leq 1.$$

Din $|f| \leq |g|$ a.p.t. rezultă că :

$$\Phi(\frac{1}{k}\,|f(t)|) \leq \Phi(\frac{1}{k}\,|g(t)|) \quad \text{a.p.t.}$$

deci

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\,f) \leq M_\varphi(\frac{1}{k}\,g) \leq 1.$$

Obţinem astfel că $A_f \neq \emptyset$. În plus, din raţionamentul precedent avem $A_g \subset A_f$. Rezultă de aici că:

$$N(f) = \inf A_f \leq \inf A_g = N(g).$$

n_3) Fie $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$ şi $\alpha \in \mathbf{C}$.

Dacă $\alpha = 0$ atunci $\alpha f = 0$ deci conform n_1) avem că

$$N(\alpha f) = 0 = \alpha N(f)$$

Dacă $\alpha \neq 0$ egalitatea $N(\alpha f) = |\alpha| N(f)$ revine la a demonstra că:

$$A_{\alpha f} = |\alpha| A_f$$

Fie $k \in A_f$. Atunci:

$$M_\varphi(\frac{1}{|\alpha| k} (\alpha f)) = \int_0^\infty \Phi(\frac{1}{|\alpha| k} |\alpha f(t)|) \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(\frac{1}{k} |f(t)|) \, dt = M_\varphi(\frac{1}{k} f) \leq 1.$$

Rezultă de aici că $|\alpha| k \in A_{\alpha f}$ deci $|\alpha| A_f \subset A_{\alpha f}$.
Reciproc, fie $k \in A_{\alpha f}$. Din:

$$M_\varphi(\frac{|\alpha|}{k} f) = \int_0^\infty \Phi(\frac{|\alpha|}{k} |f(t)|) \, dt = M_\varphi(\frac{1}{k} \alpha f) \leq 1$$

rezultă că $\frac{k}{|\alpha|} \in A_f$ deci $A_{\alpha f} \subset |\alpha| A_f$.
În concluzie avem că $A_{\alpha f} = |\alpha| A_f$ adică

$$N(\alpha f) = |\alpha| N(f).$$

n_4) Fie $f, g \in \mathcal{M}$. Dacă $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty$ atunci (evident)

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$

Să presupunem că $N(f) < \infty$ şi $N(g) < \infty$. Analog ca mai sus se arată că dacă $k_1 \in A_f$ şi $k_2 \in A_g$ atunci $k_1 + k_2 \in A_{f+g}$. Rezultă de aici că $A_f + A_g \subset A_{f+g}$ deci

$$N_\varphi(f + g) \leq N_\varphi(f) + N_\varphi(g).$$

Am arătat astfel că N este o normă Banach de funcţii. Să demonstrăm în continuare că:

$$F_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = L_\varphi.$$

Incluziunea $F_N \subset L_\varphi$ este evidentă. Fie $f \in L_\varphi$. Există atunci $k > 0$ astfel încât $M_\varphi(k\,f) < \infty$.

Dacă $M_\varphi(k\,f) = 0$ rezultă că $f \in F_N$. Dacă $M_\varphi(k\,f) > 0$ fie $n_0 \in \mathbf{N}^*$ cu $n_0 \geq M_\varphi(k\,f)$. Din

$$\Phi(k\,|f(t)|) = \int_0^{k\,|f(t)|} \varphi(s)\,ds = \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\frac{j-1}{n_0}\,k\,|f(t)|}^{\frac{j}{n_0}\,k\,|f(t)|} \varphi(s)ds \geq$$

$$\geq n_0 \int_0^{\frac{k}{n_0}\,|f(t)|} \varphi(s)ds = n_0 \Phi(\frac{k}{n_0}\,|f(t)|), \quad \forall t \geq 0$$

obţinem că

$$M_\varphi(\frac{k}{n_0}\,f) = \int_0^\infty \Phi(\frac{k}{n_0}\,|f(t)|)dt \leq \frac{1}{n_0}\int_0^\infty \Phi(k|f(t)|)dt = \frac{1}{n_0} M_\varphi(kf) \leq 1.$$

Rezultă că $f \in F_N$.

Aşadar $F_N = L_\varphi$ şi pentru orice $f \in L_\varphi$

$$||f||_{L_\varphi} = \inf\{k > 0 : M_\varphi(\frac{1}{k}f) \leq 1\} = N_\varphi(f)$$

deci (L_φ, N_φ) este un spaţiu Banach de funcţii.

Definiţia 3.1. Spaţiile Banach de funcţii de forma (L_φ, N_φ) se numesc *spaţii Orlicz*.

Exemple triviale de spaţii Orlicz sunt spaţiile $L^p(\mathbf{R}_+)$ cu $p \in [1, \infty]$. Ele se obţin pentru

$$\varphi(t) = p\,t^{p-1}$$

dacă $p \in [1, \infty)$, respectiv pentru

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t \in [0, 1] \\ \infty & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

dacă $p = \infty$.

Remarca 3.1. Pentru orice $t > 0$ funcţia caracteristică a intervalului $[0, t) : \chi_{[0,t)} \in L_\varphi$.

Demonstraţie: Fie $t > 0$. Pentru orice $k > 0$

$$M_\varphi(k\,\chi_{[0,t)}) = \int_0^\infty \Phi(k\,\chi_{[0,t)}(s))\,ds = \int_0^t \Phi(k)\,ds = t\,\Phi(k)\ (1).$$

Deoarece φ nu este identic egală cu ∞ pe $(0,\infty)$ rezultă că există $c > 0$ pentru care

$$0 \le \varphi(c) < \infty$$

Atunci

$$\Phi(c) = \int_0^c \varphi(s)\,ds \le c\,\varphi(c) < \infty \quad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$M_\varphi(c\,\chi_{[0,t)}) \le t\,c\,\varphi(c) < \infty, \quad \forall t \ge 0$$

deci $\chi_{[0,t)} \in L_\varphi$ pentru orice $t > 0$.

Propoziţia 3.2. *Dacă $0 < \varphi(t) < \infty$ pentru orice $t > 0$ atunci spaţiul Orlicz L_φ are următoarele proprietăţi:*

(i) funcţia Young Φ este bijectivă;

(ii) funcţia fundamentală Ψ_{L_φ} se exprimă în funcţie de Φ^{-1} prin:

$$\Psi_{L_\varphi}(t) = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})}, \quad t > 0;$$

(iii) $\lim\limits_{t\to\infty} \Psi_{L_\varphi}(t) = \infty$, deci $L_\varphi \in \mathcal{F}$.

Demonstraţie: (i) Din $\varphi(t) \in (0,\infty)$ pentru orice $t \in (0,\infty)$ rezultă că funcţia Young

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds$$

este strict crescătoare. Din

$$\Phi(t) \ge \int_1^t \varphi(s)\,ds \ge (t-1)\,\varphi(1), \quad \forall t > 1$$

rezultă că $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$. Ţinând seama că Φ este continuă pe $\mathbf{R}_+$ şi $\Phi(0) = 0$ obţinem că Φ este bijectivă.

(ii) Din Remarca 3.1. avem că pentru orice $t > 0$ funcţia $\chi_{[0,t)} \in L_\varphi$. Fie $t > 0$.

$$\Psi_{L_\varphi}(t) = N_\varphi(\chi_{[0,t)}) = \{\, k > 0 \; : \; M_\varphi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}) \leq 1 \,\}.$$

Din

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}) = \int_0^\infty \Phi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}(s))\, ds = t\, \Phi(\frac{1}{k}), \quad \forall k > 0$$

rezultă că:

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}) \leq 1 \Longleftrightarrow t\, \Phi(\frac{1}{k}) \leq 1 \Longleftrightarrow \Phi(\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{t}.$$

Deoarece Φ este strict crescătoare şi Φ^{-1} are această proprietate deci:

$$M_\varphi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}) \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{k} \leq \Phi^{-1}(\frac{1}{t}) \Longleftrightarrow \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})} \leq k$$

De aici rezultă că:

$$\Psi_{L_\varphi}(t) = \inf\{\, k > 0 \; : \; M_\varphi(\frac{1}{k}\, \chi_{[0,t)}) \leq 1 \,\} = \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})}, \;\; \forall t > 0.$$

iii) Φ continuă implică Φ^{-1} continuă. În plus din $\Phi(0) = 0$ avem că $\Phi^{-1}(0) = 0$. Rezultă atunci că:

$$\lim_{t\to\infty} \Psi_{L_\varphi}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi^{-1}(\frac{1}{t})} = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{\Phi^{-1}(y)} = \infty$$

adică $L_\varphi \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.1. *(Littman - Neerven) Fie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ o funcţie crescătoare cu $\varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$. Dacă $\mathbf{T}$ este un C_0 semigrup pe spaţiul Banach X cu proprietatea că:*

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)\, dt < \infty, \quad \forall x \in X$$

atunci $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Demonstraţie: În prima etapă vom demonstra că:

$$\lim_{t\to\infty} ||T(t)x|| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Fie $x \in X$, cu $||x|| = 1$. Presupunem prin absurd că $||T(t)x|| \not\to 0$ pentru $t \to \infty$. Există atunci $\varepsilon > 0$ şi $t_n \to \infty$ astfel încât:

$$||T(t_n)x|| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $t_0 \geq 1$ şi $t_{n+1} - t_n \geq 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Să notăm cu

$$N = \sup_{s\in[0,1]} ||T(s)||.$$

Dacă $n \in \mathbf{N}$ şi $t \in [t_n - 1, t_n]$ din

$$||T(t_n)x|| \leq ||T(t_n - t)||\,||T(t)x|| \leq N\,||T(t)x||$$

obţinem că:

$$||T(t)x|| \geq \frac{\varepsilon}{N}, \quad \forall t \in [t_n - 1, t_n],\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

De aici rezultă că:

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)\,dt \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{t_n-1}^{t_n} \varphi(||T(t)x||)\,dt \geq \sum_{n=0}^\infty \varphi(\frac{\varepsilon}{N}) = \infty$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Înseamnă că presupunerea făcută a fost falsă deci

$$\lim_{t\to\infty} ||T(t)x|| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Din principiul mărginirii uniforme rezultă că există $M > 0$ astfel încât

$$||T(t)x|| \leq M\,||x||, \quad \forall x \in X,\ \forall t \geq 0. \text{ (1).}$$

În continuare considerăm funcţia

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\varphi(1)} \begin{cases} \lim\limits_{s \nearrow t} \varphi(s) & , \quad \text{dacă } t \in (0,1] \\ \varphi(1) & , \quad \text{dacă } t > 1 \end{cases}$$

Funcţia φ_1 este crescătoare, continuă la stânga cu $\varphi_1(t) \in (0, \infty)$ pentru orice $t > 0$. În plus $\varphi_1(t) \in [0,1]$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $\varphi_1(t) = 1$ pentru orice $t > 1$.

Dacă Φ_1 este funcţia Young asociată funcţiei φ_1 atunci pentru orice $t \in (0,1]$ avem că:

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(s)\, ds \leq t\, \varphi_1(t) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi(1)\, \varphi(t) \ \ (2).$$

În continuare demonstrăm că semigrupul $\mathbf{T}$ este L_{φ_1}-stabil unde L_{φ_1} este spaţiul Orlicz asociat funcţiei φ_1.

Fie $x \in X$ cu $||x|| \leq 1/M$ şi

$$f_x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad f_x(t) = ||T(t)x||.$$

Din relaţia (1) avem că $f_x(t) \in [0,1]$ pentru orice $t \geq 0$, Ţinând seama de relaţia (2) obţinem că:

$$M_{\varphi_1}(f_x) = \int_0^\infty \Phi_1(f_x(s))\, ds \leq \varphi(1) \int_0^\infty \varphi(f_x(s))\, ds =$$

$$= \varphi(1) \int_0^\infty \varphi(||T(s)x||)\, ds < \infty.$$

Rezultă că $f_x \in L_{\varphi_1}$ pentru orice x cu $||x|| \leq 1/M$. Deoarece L_{φ_1} este spaţiu liniar deducem că $f_x \in L_{\varphi_1}$ pentru orice $x \in X$ adică $\mathbf{T}$ este L_{φ_1}-stabil. (3)

Din $\varphi_1(t) \in (0, \infty)$ pentru orice $t > 0$ şi din Propoziţia 3.2. rezultă că $L_{\varphi_1} \in \mathcal{F}$. (4)

Din relaţiile (3), (4) şi din Teorema 2.1. obţinem că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Remarca 3.2. Teorema precedentă a fost demonstrată iniţial de W. Littman în 1989 în [Li]. Demonstraţia de mai sus îi aparţine lui J. van Neerven şi a fost publicată în [Ne1].

Remarca 3.3. În teorema Littman - Neerven pentru

$$\varphi(t) = t^p, \quad \forall t \leq 0$$

şi $p \in [1, \infty)$ se obţine teorema Datko - Pazy.

Se pune în mod natural problema dacă teorema precedentă nu poate fi formulată cu „dacă sî numai dacă“ adică dacă este adevărată următoarea propoziţie

P. *Fie* $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *o funcţie crescătoare cu proprietatea că* $\varphi(t) > 0$ *pentru orice* $t > 0$ *şi* $\mathbf{T}$ *un* C_0 *semigrup pe spaţiul Banach* X*.*

Atunci $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă*

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)\, dt < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Răspunsul este negativ, după cum arată următorul exemplu:

Exemplul 3.1. Fie $X = \mathbf{R}, T(t)x = e^{-t}\, x$ pentru orice $x \in X$ şi $t \geq 0$ iar

$$\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{dacă } t = 0 \\ -\frac{1}{ln\, t} & , \quad \text{dacă } t \in (0, \frac{1}{e}] \\ e \cdot t & , \quad \text{dacă } t > \frac{1}{e} \end{cases}$$

Dacă $x \neq 0$

$$\int_0^\infty \varphi(|T(t)x|)\, dt = \int_0^\infty \varphi(e^{-t}\, |x|)\, dt =$$

(prin schimbarea de variabilă $e^{-t}\, |x| = y$)

$$= \int_0^{|x|} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy \geq \int_0^{\alpha_x} - \frac{1}{y\, ln\, y}\, dy$$

unde $\alpha_x = \min\{|x|, \frac{1}{e}\}$. Dar, pentru orice $\varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^{\alpha_x} -\frac{1}{y\, \ln\, y}\, dy = -\, ln(\,-\, lny)\, \Big|_\varepsilon^{\alpha_x} = ln(ln\, \frac{1}{\varepsilon}) - ln(-ln\alpha_x) \;\to \infty \;\text{ pentru }\; \varepsilon \searrow 0.$$

În concluzie avem că deşi $\mathbf{T}$ este u.e.s.

$$\int_0^\infty \varphi(|T(t)x|)\, dt = \infty, \quad \forall x \neq 0.$$

Corolarul 3.1. *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X*. Atunci* $\mathbf{T}$ *este u.e.s. dacă şi numai dacă există* $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *crescătoare cu* $\varphi(t) > 0$ *pentru orice* $t > 0$ *şi*

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)\, dt < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Demonstraţie: Pentru necesitate se poate lua $\varphi(t) = t$. Suficienţa este teorema Littman - Neerven.

În continuare vom prezenta două generalizări ale teoremei Littman - Neerven în care ipoteza:

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)\, dt < \infty, \quad \forall x \in X$$

se înlocuieşte cu

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)\,||T(t)x||)\, dt < \infty, \quad \forall x \in X$$

unde $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ este o funcţie măsurabilă Lebesgue.

Generalizările respective se obţin impunând o condiţie suplimentară asupra funcţiei φ.

Definiţia 3.2. Spunem că o funcţie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ satisface condiţia Δ_2 dacă există $K > 0$ astfel încât:

$$\varphi(t) \leq K\, \varphi(\frac{t}{2}), \quad \forall t \geq 0.$$

Următorul rezultat a fost demonstrat de Neerven în [Ne1].

Teorema 3.2. *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X *şi* $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *o funcţie crescătoare satisfăcând condiţia* Δ_2*. Fie* $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ *măsurabilă Lebesgue cu proprietatea că* $\varphi \circ \alpha \in {L^1}_{loc}\,(\mathbf{R}_+)$ *şi*

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t))\, dt = \infty. \quad (1).$$

Dacă

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)\,||T(t)x||)\,dt < \infty, \quad \forall x \in X \ (2)$$

atunci **T** *este u.e.s.*

Pentru demonstrarea Teoremei 3.3. avem nevoie de:

Teorema 3.3. *(Neerven)* [Ne1] *Fie* **T** *un* C_0*-semigrup pe spaţiul Banach* X *cu* $\omega_0(\mathbf{T}) \geq 0$. *Atunci pentru orice* $\varepsilon \in (0,1)$ *şi orice* $\alpha : [0,\infty) \to [0,1]$ *descrescătoare cu* $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$ *există* $x \in X$ *cu* $||x|| = 1$ *astfel încât:*

$$||T(t)x|| \geq (1-\varepsilon)\,\alpha(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstraţie: Fie $\alpha : [0,\infty) \to [0,1]$ descrescătoare cu $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$.
Etapa I. Considerăm funcţia $\beta : [0,\infty) \to [0,1]$

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(0) & , \quad \text{dacă } t \in [0,1) \\ \alpha(t-1) & , \quad \text{dacă } t \geq 1 \end{cases}$$

Funcţia β este descrescătoare şi $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = 0$. Fie $T = T(1)$. Din

$$r(T) = e^{t\,\omega_0(T)}, \quad \forall t \geq 0$$

rezultă că

$$r(T) = r(T(1)) = e^{\omega_0(T)} \geq 1.$$

Aplicând Lema 2.3. alegem un vector $x_0 \in X$ cu $||x_0|| = 1$ şi

$$||T^k(x_0)|| \geq \frac{1}{2}\,\beta(k), \quad \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} ||T(t)||$ atunci pentru orice $t \geq 0$ avem:

$$||T(t)x_0|| \geq \frac{1}{M}\,||T([t]+1)x_0|| \geq \frac{1}{2M}\,\beta([t]+1) \geq$$

$$= \frac{1}{2M}\,\alpha([t]) \geq \frac{1}{2M}\,\alpha(t) \quad (1).$$

Etapa a II-a. Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Demonstrăm că în relaţia (1) putem înlocui $1/2M$ cu $1-\varepsilon$. Fie $\delta > o$ astfel încât

$$\frac{1-\delta}{1+\delta} \geq 1-\varepsilon.$$

Din $\alpha(t) \searrow 0$ rezultă că putem alege un şir $(M_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$ cu $0 = M_0 < M_1 < \ldots$ astfel încât

$$0 \leq \alpha(t) \leq \frac{1}{(1+\delta)^n}, \quad \forall t \geq M_n,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

În continuare alegem un şir $(N_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$ astfel încât $0 = N_0 < N_1 < \ldots$ şi:

$$\begin{cases} N_n \geq M_n & , \ \forall\, n \in \mathbf{N} \\ N_n + N_m \leq N_{m+n} & , \ \forall\, m,n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Fie

$$\gamma : [0,\infty) \to [0,1], \quad \gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^n}\ \chi_{[N_n,\, N_{n+1})}(t)$$

Să demonstrăm că

$$\gamma(t+s) \geq \frac{\gamma(t)\,\gamma(s)}{1+\delta}, \quad \forall t,s \geq 0.$$

Fie $t,s \geq 0$. Atunci există k_t respectiv k_s astfel încât $N_{k_t} \leq t \leq N_{k_t+1}$ respectiv $N_{k_s} \leq s < N_{k_s+1}$. Avem că:

$$\gamma(t) = \frac{1}{(1+\delta)^{k_t}}, \quad \gamma(s) = \frac{1}{(1+\delta)^{k_s}} \quad (2).$$

Din $t+s < N_{k_t+1} + N_{k_s+1} \leq N_{k_t+k_s+2}$ rezultă că

$$\gamma(t+s) \geq \frac{1}{(1+\delta)^{k_t+k_s+1}} \quad (3)$$

Din (2) şi (3) obţinem că:

$$\gamma(t+s) \geq \frac{\gamma(t)\,\gamma(s)}{1+\delta} \quad \forall\, t,s \geq 0.$$

Conform celor demonstrate în prima etapă există $x_0 \in X$ cu proprietatea că:

$$||T(t)x_0|| \geq \frac{1}{2M}\,\gamma(t) \quad \forall\, t \geq 0.$$

Fie

$$\eta = \inf_{t \geq 0} \frac{||T(t)x_0||}{\gamma(t)}$$

Atunci $\eta \geq 1/2M$ şi

$$||T(t)x_0|| \geq \eta\,\gamma(t), \quad t \geq 0.$$

Din

$$\sup_{t \geq 0} \frac{\eta\,\gamma(t)}{||T(t)x_0||} = 1$$

rezultă că există $t_0 \geq 0$ astfel încât

$$\frac{\eta\,\gamma(t_0)}{||T(t_0)x_0||} \geq 1 - \delta.$$

Fie $x = \frac{T(t_0)x_0}{||T(t_0)x_0||}$. Atunci pentru orice $t \geq 0$ avem succesiv că:

$$||T(t)x|| \;=\; \frac{||T(t+t_0)x_0||}{||T(t_0)x_0||} \;\geq\; \frac{\eta\,\gamma(t+t_0)}{||T(t_0)x_0||} \;\geq\; \frac{\eta}{1+\delta}\;\frac{\gamma(t)\,\gamma(t_0)}{||T(t_0)x_0||} \;\geq$$

$$\geq\; \frac{1-\delta}{1+\delta}\,\gamma(t) \;\geq\; (1-\varepsilon)\,\gamma(t) \;\geq\; (1-\varepsilon)\,\alpha(t).$$

Rezultă în final că:

$$||T(t)x|| \geq (1-\varepsilon)\,\alpha(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Putem trece acum la demonstraţia Teoremei 3.2.

Demonstraţie: Din faptul că φ satisface condiţia Δ_2 rezultă că există $K > 0$ astfel încât

$$\varphi(t) \leq K\,\varphi(\frac{t}{2}), \quad t \geq 0.$$

Fie $t_0 = 0$. Din ipoteza (1) rezultă că există $t_1 > 0$ astfel încât:

$$\int_0^{t_1} \varphi(\alpha(t))\,dt \geq 1.$$

Presupunem că am determinat $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$ cu proprietatea că:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{k-1}}\right) dt \geq 1, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Deoarece $\varphi \circ \alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ avem că

$$\int_{t_{n-1}}^{\infty} \varphi(\alpha(t))\,dt = \infty.$$

Ţinând seama că φ satisface condiţia Δ_2 avem că:

$$\varphi(\alpha(t)) \leq K\,\varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2}\right) \leq \ldots \leq K^{n-1}\,\varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{n-1}}\right), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Rezultă de aici că:

$$\int_{t_{n-1}}^{\infty} \varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{n-1}}\right) dt \geq \frac{1}{K^{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{\infty} \varphi(\alpha(t))\,dt = \infty.$$

Există atunci $t_n > t_{n-1}$ astfel încât:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{n-1}}\right) dt \geq 1.$$

Prin inducţie se obţine un şir strict crescător $(t_n)_{n\geq 0}$ cu:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{n-1}}\right) dt \geq 1, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Presupunem prin absurd că $\omega_0(T) \geq 0$. Fie:

$$\gamma : \mathbf{R}_+ \to [0, 1], \quad \gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,\chi_{[t_{n-1}, t_n)}(t)$$

Din Teorema 3.3. rezultă că există $x \in X$ cu $||x|| = 1$ şi

$$||T(t)x|| \geq \frac{1}{2}\,\gamma(t), \quad \forall\, t \geq 0$$

Utilizând faptul că φ este crescătoare şi faptul că φ satisface condiţia Δ_2 obţinem succesiv că:

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)\,||T(t)x||)\,dt \geq \int_0^\infty \varphi\left(\alpha(t)\,\frac{\gamma(t)}{2}\right)\,dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{K}\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)\,\gamma(t))\,dt = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi\left(\frac{\alpha(t)}{2^{n-1}}\right)\,dt = \infty$$

în contradicţie cu ipoteza (2).

Obţinem astfel că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Pentru cea de-a doua generalizare a teoremei Littman - Neerven avem nevoie de următoarele consideraţii:

Exemplul 3.2. [MS2] Fie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ crescătoare, continuă la stânga şi L_φ spaţiul Orlicz asociat.

Dacă $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ este o funcţie măsurabilă Lebesgue cu proprietatea că $\varphi \circ \alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ considerăm spaţiul:

$$L^\alpha_\varphi := \{\, f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C} \,|\, f \;\text{ măsurabilă cu }\; \alpha\, f \in L_\varphi \,\}.$$

În raport cu norma:

$$||f||_{L^\alpha_\varphi} := ||\alpha\, f||_{L_\varphi}$$

L^α_φ este un spatiu Banach de funcţii peste $\mathbf{R}_+$.

Definiţia 3.3. Spunem că o funcţie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ satisface condiţia Δ_2 în 0 dacă există $\varepsilon > 0$ şi $K > 0$ astfel încât:

$$\varphi(t) \leq K\,\varphi(\frac{t}{2}), \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon]$$

Propoziţia 3.3. [MS2] Cu notaţiile din Exemplul 3.2. dacă φ satisface condiţia Δ_2 în 0, α este descrescătoare la 0 şi

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\, \varphi(\alpha(t))\, dt = \infty$$

atunci $L_\varphi^\alpha \in \mathcal{F}$.

Demonstraţie: Deoarece φ satisface condiţia Δ_2 în 0 există $\varepsilon > 0$ şi $K > 0$ astfel încât

$$\varphi(t) \leq K\, \varphi(\frac{t}{2}), \forall\, t \in [0, \varepsilon].$$

Presupunem prin absurd că $L_\varphi^\alpha \notin \mathcal{F}$. Atunci există $M > 0$ astfel încât:

$$\Psi_{L_\varphi^\alpha}(t) \leq M, \quad \forall\, t > 0$$

Din

$$\Psi_{L_\varphi^\alpha}(t) = ||\, \chi_{[0,t)}\, ||_{L_\varphi^\alpha} = ||\alpha\, \chi_{[0,t)}||_{L_\varphi} = \inf\{\, k > 0\, :\, M_\varphi\left(\frac{\alpha}{k}\, \chi_{[0,t)}\right) \leq 1\,\}$$

rezultă în particular că:

$$M_\varphi(\frac{\alpha}{M}\, \chi_{[0,t)}) \leq 1, \quad \forall\, t > 0$$

adică

$$\int_0^t \Phi\left(\frac{\alpha(s)}{M}\right)\, ds \leq 1, \quad \forall t > 0.$$

Fie $n_0 \in \mathbf{N}^*$ cu $2^{n_0} > M$ şi $\alpha \in [0, \varepsilon]$. Ţinând seama că φ este crescătoare şi din condiţia Δ_2 obţinem succesiv că:

$$\Phi(\frac{\alpha}{M}) = \int_0^{\frac{\alpha}{M}} \varphi(u)\, du \geq \int_0^{\frac{\alpha}{2^{n_0}}} \varphi(u)\, du \geq$$

$$\geq \frac{1}{K} \int_0^{\frac{\alpha}{2^{n_0}}} \varphi(2u)\, du = \frac{1}{2K} \int_0^{\frac{\alpha}{2^{n_0-1}}} \varphi(u)\, du \geq \ldots$$

$$\geq \frac{1}{(2K)^{n_0+1}} \int_0^{2\alpha} \varphi(u)\, du \geq \frac{1}{(2K)^{n_0+1}} \int_\alpha^{2\alpha} \varphi(u)\, du \geq \frac{1}{(2K)^{n_0+1}}\, \alpha\, \varphi(\alpha)$$

Notând cu $K_1 = (2K)^{n_0+1}$ avem că:

$$\alpha\,\varphi(\alpha) \leq K_1\,\Phi(\frac{\alpha}{M}), \quad \forall\,\alpha \in [0, \varepsilon].$$

Din $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$ rezultă că există $t_0 > 0$ astfel încât:

$$\alpha(t) \leq \varepsilon, \quad \forall\,t \geq t_0$$

Atunci

$$\alpha(s)\,\varphi(\alpha(s)) \leq K_1\,\Phi(\frac{\alpha(s)}{M}), \quad \forall\,s \geq t_0.$$

Integrând pe $[t_0, t]$ obţinem că:

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,\varphi(\alpha(s))\,ds \leq K_1 \int_{t_0}^{t} \Phi(\frac{\alpha(s)}{M})\,ds \leq K_1 \int_{0}^{t} \Phi(\frac{\alpha(s)}{M})\,ds \leq K_1, \quad \forall\,t > t_0.$$

Făcând $t \to \infty$ rezultă că:

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(s)\,\varphi(\alpha(s))\,ds \leq K_1 \quad (1).$$

Cum $\alpha\,(\varphi \circ \alpha)$ este descrescătoare avem că:

$$\int_{0}^{t_0} \alpha(s)\,\varphi(\alpha(s))\,ds \leq \alpha(0)\,\varphi(\alpha(0)) \quad (2).$$

Din (1) şi (2) obţinem că

$$\int_{0}^{\infty} \alpha(s)\,\varphi(\alpha(s))\,ds \leq K_1 + \alpha(0)\,\varphi(\alpha(0)) < \infty$$

în contradicţie cu ipoteza.

În concluzie rezultă că $L_\varphi^\alpha \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.4. *Fie* $\mathbf{T}$ *un* C_0 *- semigrup pe spaţiul Banach* $X, \varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *o funcţie crescătoare cu* $\varphi(t) > 0$*, pentru orice* $t > 0$ *care satisface condiţia* Δ_2 *în* 0*. Fie* $\alpha : \mathbf{R}_+ \to (0, \infty)$ *descrescătoare cu proprietatea că*

$$\int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha(t))dt = \infty.$$

Dacă

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)||T(t)x||)dt < \infty, \quad \forall x \in X$$

atunci $\mathbf{T}$ *este u.e.s.*

Proof: Funcţia α fiind descrescătoare există

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = l.$$

Dacă $l > 0$ atunci pentru orice $x \in X$:

$$\int_0^\infty \varphi(||T(t)x||)dt \leq \int_0^\infty \varphi(\frac{\alpha(t)}{l}||T(t)x||)dt =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\alpha(t)||T(t)\frac{x}{l}||)dt < \infty.$$

Din teorema Littman-Neerven rezultă că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Să presupunem acum că $l = 0$.

Demonstrăm într-o primă etapă că

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)||T(t)x|| = 0.$$

Fie $x \in X$ cu $||x|| = 1$. Presupunem prin reducere la absurd că limita de mai sus nu este nulă. Există atunci $\varepsilon > 0$ şi $t_n \to \infty$ astfel încât:

$$\alpha(t_n)||T(t_n)x|| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $t_0 \geq 0$ şi

$$t_{n+1} - t_n \geq 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Să notăm cu

$$N = \sup_{s\in[0,1]} ||T(s)||.$$

Dacă $n \in \mathbf{N}$ şi $t \in [t_n - 1, t_n]$ din

$$||T(t_n)x|| \leq ||T(t_n - t)||\,||T(t)x|| \leq N||T(t)x||$$

obţinem că

$$\alpha(t)||T(t)x|| \geq \alpha(t_n)||T(t)x|| \geq \frac{\alpha(t_n||(T(t_n)x||}{N} \geq \frac{\varepsilon}{N},$$

oricare ar fi $t \in [t_n - 1, t_n]$, şi $n \in \mathbf{N}$.
De aici rezultă că:

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(t)||T(t)x||)dt \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n-1}^{t_n} \varphi(\alpha(t)||T(t)x||dt \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\frac{\varepsilon}{N}) = \infty$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Înseamnă că presupunerea făcută a fost falsă, deci

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)||T(t)x|| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Din Principiul mărginirii uniforme rezultă că există $M > 0$ astfel încât

$$\alpha(t)||T(t)x|| \leq M||x||, \quad \forall x \in X, \forall t \geq 0. \ (1)$$

În continuare considerăm funcţia:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\varphi(1)} \begin{cases} \lim\limits_{s\nearrow t} \varphi(s), & \text{dacă} \quad t \in (0,1] \\ \varphi(1), & \text{dacă} \quad t > 1 \end{cases}$$

Funcţia φ_1 este crescătoare şi continuă la stânga.
Deoarece φ satisface condiţia Δ_2 în zero rezultă că există $\varepsilon \in (0,1)$ şi $K > 0$ încât:

$$\varphi(t) \leq K\varphi(\frac{t}{2}), \qquad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

Fie $t \in [0, \varepsilon]$. Pentru orice $s < t$

$$\varphi(s) \leq K\varphi(\frac{s}{2}) \leq K \lim_{s\nearrow t} \varphi(\frac{s}{2}) = K\varphi(1)\varphi_1(\frac{t}{2}).$$

Trecând la limită pentru $s \nearrow t$ rezultă că

$$\varphi_1(t) \leq K\varphi_1(\frac{t}{2}), \qquad \forall t \in [0, \varepsilon],$$

deci f_1 satisface condiţia Δ_2 în zero(cu aceleaşi constante: ε, K).

Dacă Φ_1 este funcţia Young asociată funcţiei φ_1 atunci pentru orice $t \in (0,1]$ avem că

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(s)ds \leq t\varphi_1(t) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_1\varphi(t), \ (2)$$

Demonstrăm în continuare că $\mathbf{T}$ este $L^\alpha_{\varphi_1}$ - stabil, unde $L^\alpha_{\varphi_1}$ este spaţiul definit în Exemplul 3.2. corespunzător funcţiilor φ_1 şi α_1.

Fie $x \in X$ cu $||x|| \leq \frac{1}{M}$ şi

$$f_x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad f_x(t) = ||T(t)x||.$$

Faptul că $f_x \in L^\alpha_{\varphi_1}$ revine la a demonstra că $\alpha f_x \in L_{\varphi_1}$. Din relaţia (1) avem că

$$\alpha(t)f_x(t) \leq 1, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ţinând seama de (2) obţinem că

$$M_{\varphi_1}(\alpha f_x) = \int_0^\infty \Phi(\alpha(s)f_x(s))ds \leq$$

$$\leq \varphi(1)\int_0^\infty \varphi(\alpha(s)||T(s)x||)ds < \infty,$$

deci $f_x \in L^\alpha_{\varphi_1}$. Cum L_{φ_1} este spaţiu liniar rezultă că $f_x \in L^\alpha_{\varphi_1}$ pentru orice $x \in X$.(3)

Să demonstrăm că

$$\int_0^\infty \alpha(t)\varphi_1(\alpha(t))dt = \infty.$$

Din $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$ rezultă că există $c > 0$ astfel încât

$$q(t) < 1, \qquad t \geq c.$$

Din

$$\int_0^\infty \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt = \int_0^c \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt + \int_c^\infty \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt$$

şi din faptul că

$$\int_0^c \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt \le \alpha(0)\varphi(\alpha(0))$$

rezultă că

$$\int_c^\infty \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt = \infty.$$

Deoarece mulţimea discontinuităţilor unei funcţii crescătoare este cel mult numărabilă rezultă că

$$\varphi(t) - \varphi(1)\varphi_1(t) = 0, \quad \text{a.p.t.} t \in [0,1].$$

În particular

$$\varphi(\alpha(t)) = \varphi(1)\varphi_1(\alpha(t)) \quad \text{a.p.t. } t \in [0,\infty).$$

Rezultă de aici că

$$\int_c^\infty \alpha(t)\varphi_1(\alpha(t))dt = \frac{1}{\varphi(1)}\int_c^\infty \alpha(t)\varphi(\alpha(t))dt = \infty,$$

Deci

$$\int_0^\infty \alpha(t)\varphi_1(\alpha(t))dt = \infty.$$

Din Propoziţia 3.3. obţinem că $L^\alpha_{\varphi_1} \in \mathcal{F}$, (4).

Din (3), (4) şi Teorema 3.1. rezultă că $\mathbf{T}$ este u.e.s.

Bibliografie

[Ne1] J.van Neerven - *The Asymptotic Behavoiur of Semigroups of Linear Operators*, Theory Advances and Applications, vol.88, Birkhauser 1996

[Ne2] J.van Neerven - *Exponential Stability of Operators and Operator Semigroups,* J.Funct.Anal.,130(1995), 293-309

[Ne3] J.van Neerven - *On the orbits of an operator with spectral radius one*, Czech.Math.J.45, (120), 1995, 405-502

[MS1] M.Megan, B.Sasu, L.Sasu - *Banach Function Spaces and Stability of C_0 -Semigroups in Banach Spaces,*preprint în Sem.An.Mat.Apl.în T.Contr., nr 90, (1998)

[MS2] M.Megan, B.Sasu - *A generalization of a theorem of Littman*(în curs de apariţie)

[Li] W.Littman - *A generalization of a theorem of Datko and Pazy*, Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci.,130, Springer-Verlag, Berlin(1989), 318-323

[Mü] V.Müler - *Local spectral radius formula for operators on Banach spaces,* Czech.Math.J. 38(1988)