Universitatea de Vest Timişoara

Facultatea de Matematică şi Informatică

Lucrare de licenţă
Clase de spaţii de şiruri şi de spaţii de funcţii şi aplicaţii

Candidat:
Andrei Ioan VANCU

Coordonator ştiinţific:
Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timişoara
2014

Universitatea de Vest Timişoara

Facultatea de Matematică şi Informatică

Specializarea: Matematică - Informatică

Clase de spaţii de şiruri şi de spaţii de funcţii şi aplicaţii

Candidat:
Andrei Ioan VANCU

Coordonator ştiinţific:
Lect. Dr. Aurelian CRĂCIUNESCU

Timişoara
2014

Cuprins

Abstract

Introducere

sekjrgvkf

Capitolul 1

SPAŢII NORMATE. SPAŢII BANACH

1.1 *Spaţii normate*

Fie X un spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{K}$ ($X = SL(\mathbb{K})$).

Definiţia 1.1.1. O funcţie $N : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte normă pe X dacă:

(n_1) $N(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = \theta$ (vectorul nul al spaţiului X);

(n_2) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, pentru orice $x, y \in X$;

(n_3) $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot N(x)$, pentru orice $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple:

1. $|\cdot| :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este o normă (modulul real)
2. $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
   $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe $\mathbb{R}^n$
3. $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$,
   $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{C}^n$ (unde $p \geq 1$) sunt norme pe $\mathbb{C}^n$
4. $\|\cdot\|_p : l^p_N(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+, \|x\|_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, x = (x_n) \in l^p_N(\mathbb{K})$ (unde $p \geq 1$)
5. $\|\cdot\|_\infty : l^\infty_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+, \|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 1}|x_n|, x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty_N(\mathbb{R})$
6. $|\!|\!|\cdot|\!|\!| : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, |\!|\!|f|\!|\!| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ (norma Cebâşev)

7. $\|\cdot\|' : \mathcal{C}'_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, \|f\|' = |f(a)| + \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

8. $\|\cdot\|_1 : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathbb{R}_+, \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt$

9. $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+, \|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (unde $1 \leq p < \infty$)

10. $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+, \|f\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0} \sup\limits_{t\in \complement A} |f(t)|$ (unde $(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură completă)

Remarca 1.1.1. Dacă funcţia $N : X \to \mathbb{R}_+$ verifică doar axiomele (n_2) şi (n_3) vom spune că N este o seminormă pe X.

Remarca 1.1.2. Dacă N este o normă atunci $N(x) > 0$, pentru orice $x \in X \setminus \{\theta\}$.

Remarca 1.1.3. Dacă funcţia $N : X \to \mathbb{R}_+$ este o normă, atunci

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+, \quad d(x, y) = N(x - y)$$

are următoarele proprietăţi:

(d_1) $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

(d_2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, pentru orice $x, y, z \in X$;

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$.

Proprietăţile $(d_1), (d_2), (d_3)$ arată că funcţia d de mai sus este o distanţă pe X, numită *distanţa* (*metrica*) generată de norma N. Numărul real pozitiv $d(x, y)$ se va numi distanţa de la x la y şi în plus ea mai verifică şi următoarea proprietate:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \text{ pentru orice } x, y, z \in X,$$

numită proprietatea de invarianţă la translaţii a metricii d.

Din punct de vedere istoric, dar şi deoarece generalizează modulul pe $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, o normă va fi notată $\|\cdot\|$, eventual specificând spaţiile pe care este definită, $\|\cdot\|_X$.

Dacă $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ o normă pe X, $r > 0$, iar $x \in X$, notăm :

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| < r\}$$

numită *bila deschisă de centru "x" şi rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$),

$$\bar{\mathcal{B}}(x,r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| \leq r\}$$

numită *bila închisă de centru "x" şi rază "r"* (calculată în raport cu norma $\|\cdot\|$) şi

$$\mathcal{S}(x,r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| = r\}$$

numită *sfera de centru "x" şi rază "r"*.

Propoziţia 1.1.1. *Dacă $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ atunci familia*

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \{\emptyset\} \cup \{T \subset X / T \neq \emptyset \text{ a.î. pentru orice } x \in T, \text{ există } r_x > 0 : \mathcal{B}(x, r_x) \subset T\}$$

este o topologie pe X (numită topologia indusă de norma $\|\cdot\|$).

Remarca 1.1.4. Pe un spaţiu normat X sunt corect definite, în sens topologic, noţiunile de limită, convergenţă pentru şir, sau continuitate pentru o funcţie între două spaţii normate. Aceste noţiuni admit însă şi caracterizări speciale în cadrul spaţiilor normate. Caracterizarea convergenţei şirurilor de vectori, dintr-un spaţiu normat poate fi formulată astfel:

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat (topologizat cu topologia din Prop. 1.1.1), iar $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ un şir de vectori din X. În raport cu topologia $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ avem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă există $x \in X$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n \geq n_0$ să avem că $||x_n - x|| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Într-adevăr: *Necesitate.* Pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$ (deschisă). Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $x_n \in \mathcal{B}(x,\varepsilon)]$. Deci, pentru orice $n \geq n_0$, avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Suficienţa. Fie $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\|\cdot\|}}(x)$. Există atunci $T \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ cu $x \in T \subset V \Rightarrow$. Din caracterizarea mulţimilor deschise în topologia normică rezultă că există $r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subset T \subset V$.

Dar există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n \geq n_0$ avem că $\|x_n - x\| < r$. Deci $x_n \in \mathcal{B}(x,r) \subset V$, pentru orice $n \geq n_0$.

Notăm $\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ spaţiul liniar al tuturor şirurilor convergente de vectori din X. Deci

$$\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} = \{(x_n)_{n\geq 1} \subset X / \text{există } x \in X : \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0\}.$$

$\square$

Remarca 1.1.5. Asemănător cazului real (sau al lui $\mathbb{R}^n$) vectorul x dat de convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este unic determinat. Altfel spus, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ atunci există unic $x \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Demonstraţie. Într-adevăr: Fie $x, x' \in X$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x'\| = 0$. Atunci

$$0 \leq \|x - x'\| = \|(x - x_n) + (x_n - x')\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - x'\|,$$

pentru orice $n \geq 1$ şi deci $\|x - x'\| = 0 \Rightarrow x - x' = 0$ sau echivalent $x = x'$. □

Unicul vector $x \in X$ pentru care $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, unde $\Big((x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}\Big)$ se numeşte *limita în X a şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează asemănător cazului scalar cu :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

sau

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x.$$

Remarca 1.1.6. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X astfel încât $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$ (adică generează aceeaşi topologie) vom spune că cele două norme sunt *topologic echivalente* şi vom nota:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2.$$

Dacă $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ conform celor de mai sus, vom avea că $\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|_1)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|_2)}$.

Remarca 1.1.7. Dacă $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$, sunt două norme pe X atunci cele doua norme sunt echivalente dacă şi numai dacă există $m, M > 0$ astfel încât

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1,$$

pentru orice $x \in X$.Vom spune despre cele două norme că sunt *complet echivalente.*

Propoziţia 1.1.2. *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, atunci, pentru orice $x \in X$ avem că $\mathcal{B}(x, r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.*

Demonstraţie. Fie $x \in X$ şi $r > 0$. Pentru orice $y \in \mathcal{B}(x,r)$ rezultă că $\|x-y\| < r$ şi deci, pentru $r^{'} = r - \|x-y\| > 0$ avem că $\mathcal{B}(y,r^{'}) \subset \mathcal{B}(x,r)$.

Într-adevăr: pentru $z \in \mathcal{B}(y,r^{'})$ rezultă că $\|y-z\| < r^{'}$. Dar

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < r^{'} + \|x-y\| = r,$$

pentru orice $z \in \mathcal{B}(x,r)$. Deci $\mathcal{B}(y,r^{'}) \subset \mathcal{B}(x,r)$ ceea ce implică faptul că $\mathcal{B}(x,r) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. □

Propoziţia 1.1.3. *Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spaţiu normat, iar $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar închis al său. ($\bar{X}_0 = X_0$). Aplicaţia :*

$$\|\cdot\|_{X/X_0} : X/X_0 \to \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{x}\|_{X/X_0} = \inf_{y\in\hat{x}} \|y\|_X$$

este o normă pe X/X_0.

Demonstraţie. Într-adevar: Dacă $\|\hat{x}\|_{X/X_0} = 0$ atunci $\inf\limits_{y\in\hat{X}} \|y\|_X = 0$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $y_n \in \hat{x}$ astfel încât $\|y_n\| < \frac{1}{n}$.

Dar $y_n \in \hat{x} = x + X_0$ şi deci există $x_n \in X_0$ astfel încât $y_n = x + x_n$. Atunci

$$\|x_n - (-x)\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

şi deci $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_X}{\longrightarrow}} -x$. Deoarece X_0 este închis rezultă că $-x \in \bar{X}_0 = X_0$, sau echivalent $x \in \bar{X}_0 = X_0$ ceea ce arată că $\hat{x} = \hat{\theta}$, ceea ce arată că este satisfăcută axioma (n_1).

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in X/X_0$. Dacă $x^{'} \in \hat{x}, y^{'} \in \hat{y}$ atunci $x^{'} + y^{'} \in \hat{x} + \hat{y} = x \hat{+} y$ şi deci

$$\|x \hat{+} y\|_{X/X_0} \leq \|x^{'} + y^{'}\|_X \leq \|x^{'}\|_X + \|y^{'}\|_X.$$

Pentru $y^{'}$ fixat, prin trecere la inf pentru $x^{'}$ din $\hat{x}$ rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|y^{'}\|_X,$$

pentru orice $y^{'} \in \hat{y}$. Prin trecere la inf după $y^{'}$ din $\hat{y}$ rezultă că

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_{X/X_0} \leq \|\hat{x}\|_{X/X_0} + \|\hat{y}\|_{X/X_0}$$

şi deci este satisfăcută şi axioma (n_2)

Fie $\hat{x} \in X/X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$. Deoarece $\lambda \cdot \hat{x} = \lambda \hat{\cdot} x$ rezultă că $\lambda \cdot \hat{x} = \{\lambda \cdot x^{'} / x^{'} \in \hat{X}\}$. Atunci

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot \hat{x}\|_{X/X_0} &= \inf_{x^{'}\in\hat{x}} \|\lambda \cdot x^{'}\|_X = \inf_{x^{'}\in\hat{x}} |\lambda| \cdot \|x^{'}\|_X = |\lambda| \cdot \inf_{x^{'}\in\hat{X}} \|x^{'}\|_X = \\ &= |\lambda| \cdot \|\hat{x}\|_{X/X_0} \end{aligned}$$

ceea ce arată că este verificată şi axioma (n_3). □

Observaţia 1.1.1. Spaţiul normat $\left(X/X_0, \|\cdot\|_{X/X_0}\right)$ se numeşte *spaţiu normat cât*, indus de subspaţiul închis X_0.

Observaţia 1.1.2. Dacă X_0 nu este subspaţiu închis, atunci aplicaţia $\|\cdot\|_{X/X_0}$ definită mai sus este doar o seminormă pe X/X_0.

Remarca 1.1.8. În orice spaţiu normat, orice şir convergent este mărginit. Mai precis, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci există $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$.

Demonstraţie. Într-adevăr: Cum $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$ rezultă că există $x \in X$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - x\| < 1$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|,$$

pentru orice $n \geq n_0$.

Notând $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \|x_3\| \cdots \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\} > 0$ avem că

$$\|x_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \geq 1$. □

1.2 *Spaţii Banach. Caracterizare*

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ spaţiu liniar normat şi $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$.

Definiţia 1.2.1. Şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ este convergent în spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ şi vom nota $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, dacă există $x \in X$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, rezultă că $\|x_n - x\| < \varepsilon$ sau dacă există $x \in X$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarca 1.2.1. Înainte de a studia convergenţa unui şir, cu ajutorul definiţiei anterioare, identificăm apriori limita sa x.
Acest lucru poate genera unele dificultăţi practice. Există însă spaţii normate, pentru care studiul convergenţei unui şir ia în calcul numai termenii acestuia. Aceste spaţii se numesc, *spaţii normate complete* sau *spaţii Banach* şi le vom introduce în continuare.

Observaţia 1.2.1. Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (adică distanţa dintre oricare 2 termeni este oricât de mică, începând de la un rang suficient de mare).

Demonstraţie. Într-adevăr: Dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varepsilon > 0$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_0$.
Atunci, pentru orice $m, n \geq n_0$ rezultă că

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_0 + x_0 - x_n\| \\ &\leq \|x_m - x_0\| + \|x_n - x_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Definiţia 1.2.2. Şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ este fundamental în spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ şi vom nota $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, pentru orice $n, m \geq n_0$ rezultă $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Notăm cu $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ spaţiul tuturor şirurilor fundamentale din spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$.

Conform remarcii anterioare rezultă $\mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ (adică orice şir convergent este si fundamental). În general, incluziunea reciprocă nu are loc.

Definiţia 1.2.3. Un spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$ pentru care $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$, se numeşte *spaţiu normat complet* sau *spaţiu Banach*.

Remarca 1.2.2.
1. $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach, dacă şi numai dacă $\mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$.
2. Pentru un spaţiu normat, stabilirea proprietaţii de completitudine, se face de obicei individual sau pe clase, însa odată stabilită această proprietate, studiul convergenţei unui şir devine mult mai facil de efectuat.

Exemple:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$;
2. $(\mathbb{K}^n, N)$ -N o normă arbitrară ;
3. $\left(\mathcal{C}_{\mathbb{K}}, |\!|\!|\cdot|\!|\!|\right)$ - unde $\mathbb{K}$ este spaţiu topologic compact;
4. $\left(\mathcal{C}^1_{[a,b]}, \|\cdot\|'\right), \|f\|' = |f(a)| + |\!|\!|f'|\!|\!|, f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$;
5. $\left(l^p_N(\mathbb{K}), \|p\|\right)$;
6. $\left(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p\right), \|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, unde $1 \leq p < \infty$;

7. $\Big(L^\infty(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_\infty\Big)$;

Spaţiu normat care nu este complet: $\Big(\mathcal{C}_{[a,b]}, \|\cdot\|_1\Big), \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Propoziţia 1.2.1. *Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spaţiu normat, iar $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$.*

(a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$, atunci există $M>0 : \|x\| \leq M$, pentru orice $n \geq 1$ (şirul este mărginit).

(b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ şi există $(x_{k_n})_{n\geq 1} \subset (x_n)_n, (x_{k_n})_{n\geq 1} \in \mathcal{C}(X,\|\cdot\|)$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}(X,\|\cdot\|)$.

Observaţia 1.2.2. $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că pentru orice $n \geq n_0$ şi $p \in \mathbb{N}$ rezultă că $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ dacă şi numai dacă $\|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ uniform în raport cu p.

Propoziţia 1.2.2. *Spaţiul normat $(X,\|\cdot\|)$ este complet dacă şi numai dacă orice serie absolut convergentă este şi convergentă.*

Demonstraţie. Necesitatea:
Avem că $(X,\|\cdot\|)$ - spaţiu Banach.
Fie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\| \in \mathcal{C}_{(\mathbb{R},|\cdot|)}$.
Dacă notăm $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, n \geq 1$ avem că

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k\geq n+1} \|x_k\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

uniformă în raport cu p, rezultă că $(s_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$.
Suficienţă:
Avem că $(X,\|\cdot\|)$ spaţiu normat şi orice serie absolut convergentă este şi convergentă.
Fie $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(X,\|\cdot\|)}$.Vom arăta că x_n este convergent, arătând că el conţine un subşir convergent.

- Pentru $\varepsilon = 1$, rezultă că există $n_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < 1$, pentru orice $m, n \geq n_1$, rezultă $\|x_m - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^0}$, pentru orice $m \geq n_1$.

- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, rezultă că există $n_2 > n_1$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}$, pentru orice $m, n \geq n_2$ rezultă că $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2^1}$.

- Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, rezultă că există $n_3 > n_2$ cu proprietatea că $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}$, pentru orice $m, n \geq n_3$ rezultă că $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{2^2}$.

Construim inductiv subşirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ cu proprietatea că

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} &\Rightarrow \sum_{k\geq 2} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 < \infty \\
&\Rightarrow \sum_{k\geq 2} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \in \mathcal{A} \\
&\Rightarrow \sum_{k\geq 2} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_m &= \sum_{k=2}^{m} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) \\
&= x_{n_2} - x_{n_1} + x_{n_3} - x_{n_2} + x_{n_4} - x_{n_3} + \cdots + x_{n_m} - x_{n_{m-1}} = x_{n_m} - x_{n_1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s_m + x_{n_1}) \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} \Rightarrow (x_{n_m})_{m\geq 2} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)} \overset{Prop.1.2.1}{\Longrightarrow} (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(X,\|\cdot\|)}$$

$\square$

Definiţia 1.2.4. Fie $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$, doua $\mathbb{K}$ spaţii normate.
O funcţie $T : X \to Y$ se numeşte aplicaţie liniară de la X în Y (morfism de spaţii liniare), dacă:

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, pentru orice $x, y \in X$ (aditivitate)

(ii) $T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$, pentru orice $x \in X$, şi $\alpha \in \mathbb{K}$ (omogenitate)

dacă şi numai dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, pentru orice $x, y \in X$, şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Vom nota în continuare cu

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y / T \text{ - liniară}\}.$$

Remarca 1.2.3. 1. În raport cu operaţiile

(a) $(T + S)_{(x)} = T(x) + S(x)$

(b) $(\alpha T)_{(x)} = \alpha \cdot T(x)$

avem că $\Big(\mathcal{L}(X, Y), +, \cdot\Big)$ este un $\mathbb{K}$ spaţiu liniar;

2. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ rezultă că $T(\theta_X) = \theta_Y$;

3. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\quad x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$, $\quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $T\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot T(x_k)$;

4. Dacă $X = \mathbb{K}^n, Y = \mathbb{K}^n (\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau $\mathbb{R})$, atunci $T \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n\Big)$ dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$T(X)^t = A \cdot X^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

5. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ convenim să notăm T_x în loc de $T(x)$;

6. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ convenim să o numim operator liniar;

7. Dacă $Y = \mathbb{K}, \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^{\#}($ sau $X^a)$ o vom numi dualul algebric al lui X, iar elementele sale $f \in X^{\#}$ se va numi funcţională liniară.

Propoziţia 1.2.3. *Fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) T este continuă în $x_0 = \theta_X$;

(b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < \varepsilon$, pentru orice $\|x\| < \delta$;

(c) Există $M > 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y \leq M\|x\|_X$, pentru orice $x \in X$;

(d) T este continuă pe X

Demonstraţie. $(a) \Longrightarrow (b)$
$t \in \mathcal{C}_{\theta_X}$ rezultă că pentru orice $V \in T_{\theta_X} = \theta_Y$, există $U \in \mathcal{V}_{\theta_X} : T \cdot U \subset V$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Alegând } V = \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon), \text{ rezultă că există } U \in \mathcal{V}_{\theta_X} : T \cdot U \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon) \\ \text{Cum } U \in \mathcal{V}_{\theta_X}, \text{ rezultă că există } \delta > 0 : \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset U \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T \cdot \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta) \subset \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$, rezultă că pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| < \delta$ avem că $x \in \mathcal{B}_X(\theta_X, \delta)$. Deci $T_x \in \mathcal{B}_Y(\theta_Y, \varepsilon)$ cu $\|T_x\|_Y < \varepsilon$.
$(b) \Longrightarrow (c)$

Pentru $\varepsilon = 1$, există δ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y < 1$, pentru orice $\|x\|_X < \delta$.

$$\begin{aligned}
\text{Dacă } x \in X \Rightarrow & \left\| \frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \cdot x \right\|_X < \delta \\
& \Rightarrow \left\| T\left(\frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \right) \right\|_Y < 1, \text{pentru orice } n \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{\delta}{\|x\|_X + \frac{1}{n}} \cdot \|T_x\|_Y < 1, \text{pentru orice } n \geq 1 \\
& \Rightarrow \|T_x\|_Y < \frac{1}{\delta} \left(\|x\|_X + \frac{1}{n} \right), \text{pentru orice } n \geq 1 \\
& \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \|T_x\|_Y \leq \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\text{not. M¿0}} \cdot \|x\|_X, \text{pentru orice } x \in X.
\end{aligned}$$

$(c) \Longrightarrow (d)$

Observaţia 1.2.3. $T \in \mathcal{C}_{x_0} \overset{T.Heine}{\Longleftrightarrow}$ pentru orice $(x_n)_{n\geq 1} \subset X, x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_X}{\longrightarrow}} x_0$ rezultă că $T_{x_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\|x\|_X}{\longrightarrow}} T_{x_o}$

Demonstraţia este absolut analoagă cazului scalar.
Fie $x \in X$ şi $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ cu proprietatea că $\|x_n - x\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dar $0 \leq \|T_{x_n} - t_x\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M \cdot \|x_n - x\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ rezultă că $t_{x_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\|x\|_Y}{\longrightarrow}} T_x$.
Conform Teoremei lui Heine rezultă că $T \in \mathcal{C}_x$, pentru orice $x \in X$, deci T este continuă pe X.
$(d) \Longrightarrow (a)$
Evident. □

Notăm $\mathcal{B}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y)$ cu proprietatea că există un $M > 0$ astfel încât $\|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X\}$.

Remarca 1.2.4. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ dacă şi numai dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi continuă pe X.

Propoziţia 1.2.4. *(a)* $\Big(\mathcal{B}(X, Y), +, \cdot\Big)$- *subspaţiu liniar în* $\mathcal{L}(X, Y)$;

(b) Funcţia $\mathcal{B}(X, Y) \ni T \longrightarrow \|T\|_{op} = \inf\{M \geq 0$ *cu proprietatea că* $\|T_x\| \leq M \cdot \|x\|_X$, *pentru orice* $x \in X\}$ *este o normă pe* $\mathcal{B}(X, Y)$ *având proprietatea* $\|T_x\|_Y \leq \|T\|_{op} \cdot \|x\|_X$, *pentru orice* $x \in X$;
În plus, dacă $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *şi* $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, *atunci* $S \cdot T \in \mathcal{B}(X, Z)$ *şi* $\|S \cdot T\|_{op} \leq \|S\|_{op} \cdot \|T\|_{op}$.

Demonstraţie. (a) Evident.

(b) Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ rezultă că $\{M \geq 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y \leq M\|x\|_X$, pentru orice $x \in X\}$ este nevidă şi inclusă în $\mathbb{R}_+$, de unde rezultă că există $\|T\|_{\text{op}} = \inf\{M \geq 0$ cu proprietatea că $\|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X\} \in \mathbb{R}_+$. Fie $x \in X$ fixat.
Deoarece $\underbrace{\|T\|_{\text{op}} = \inf\{M \geq 0 / \|T_x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}}_{\mathcal{A}_T}$ rezultă că există $(M_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}_T$ cu proprietatea că $M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|_{\text{op}}$. Deoarece $\|T_x\| \leq M_n \cdot \|x\|_X$, pentru $n \longrightarrow \infty$ rezultă că $\|T_x\|_Y \leq \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X$. $(*)$
Pentru $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ astfel încât $\|T\|_{\text{op}} = 0$ rezultă că $\|T_x\|_Y = 0$, pentru orice $x \in X$. Deci $T_x = \theta$, pentru orice $x \in X$, rezultă că $T = 0$. (1)
Pentru $S \cdot T \in \mathcal{B}(X,Y)$, avem că :

$$\begin{aligned}\|(S+T)_x\|_Y = \|S_x + T_x\|_Y &\leq \\ &\leq \|S_x\|_Y + \|T_x\|_Y \leq \\ &\leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X + \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X = \\ &= (\|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}) \in \mathcal{A}_{S+T}.\end{aligned}$$

Rezultă că $\|S+T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} + \|T\|_{\text{op}}$. (2)
Fixăm $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.
$\|(\alpha \cdot T)_x\|_Y = \|\alpha \cdot T_x\|_Y = |\alpha| \cdot \|T_x\|_Y \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X$, rezultă că $\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \leq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}$, pentru orice $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.
Pentru $\alpha = 0$ rezultă că$\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}$ ($\|0\|_{\text{op}} = 0$).
Pentru $\alpha \neq 0$ în $(*)$, pentru scalarul $\dfrac{1}{\alpha}$ şi operatorul αT, avem

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot T)\|_{\text{op}} \leq |\frac{1}{\alpha}| \cdot \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} &\Leftrightarrow \|T\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \\ &\Leftrightarrow \|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} \geq |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}.\end{aligned}$$

Rezultă că $\|\alpha \cdot T\|_{\text{op}} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\text{op}}$, pentru orice $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.(3)
Din (1), (2) şi (3) avem că $\|\cdot\|_{\text{op}}$ este o normă pe $\mathcal{B}(X,Y)$ (spaţiul liniar al tuturor operatorilor).
Datorită faptului că, compusa a două funcţii este întotdeauna continuă rezultă că $S \cdot T \in \mathcal{B}(X,Z)$, pentru orice $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ şi $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Mai mult,

$$\|(S \circ T)(x)\|_Z = \|S(T_x)\|_Z \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T_x\|_Y \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X,$$

pentru orice $x \in X$, rezultă că $\|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}} \in \mathcal{A}_{S \circ T}$.
Deci $\|S \circ T\|_{\text{op}} \leq \|S\|_{\text{op}} \cdot \|T\|_{\text{op}}$.

□

Observaţia 1.2.4. 1. Pentru $Y = X$ notăm $\mathcal{B}(X) \overset{def.}{=} \mathcal{B}(X, X)$, iar pentru $Y = \mathbb{K}$, atunci notăm $X' \overset{not.}{=} \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, numit dualul topologic al spaţiului normat X. Elementele sale poartă numele de funcţionale liniare şi continue, iar pentru $f \in X'$, $\|f\|_{\text{op}} = \inf\{M > 0$ cu proprietatea că $|f(x)| \leq M \cdot \|x\|_X$, pentru orice $x \in X\}$.

2. Pentru $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ avem că

$$\|T\|_{\text{op}} = \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} \|T_x\|_Y}_{\gamma_1} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|T_x\|_Y}_{\gamma_2} = \underbrace{\sup_{x \neq \theta} \frac{\|T_x\|_Y}{\|x\|_X}}_{\gamma_3}$$

3. Convenim în continuare să notăm fiecare din normele ce apar, fară indicele aferent (deoarece nu există pericol de confuzie).
$x \in X$, $\|x\|_X$
$y \in Y, \|y\|_Y$
$T \in \mathcal{B}(X, Y), \|T\|_{\text{op}}$

Propoziţia 1.2.5. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $X \neq (0)$, iar $x_0 \in X$. Atunci există $y \in X'$, $\|f\| = 1$ (nenulă), astfel încât $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstraţie. Fixăm $x_0 \in X$ cu $x_0 \neq \theta$.
Definim aplicaţia $f_0 : \underbrace{Sp\{x_0\}}_{\{\lambda \cdot x / \lambda \in \mathbb{K}\}} \to \mathbb{K},\ f_0(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|$.
Observăm că f_0 este o aplicaţie liniară pe $Sp\{x_0\}$.
Mai mult, $|f_0(\lambda \cdot x_0)| = |\lambda \cdot \|x_0\|| = |\lambda| \cdot \|x_0\| = \|\lambda \cdot x_0\|$, rezultă că $|f_0(x)| \leq \|x\|$, pentru orice $x \in Sp\{x_0\}$. Din Teorema lui Hahn Banach, rezultă că există $f : X \to \mathbb{R}$ o aplicatie liniară astfel încât $f/Sp\{x_0\} = f_0$ şi $|f(x)| \leq \|x\|$, pentru orice $x \in X$. Deci $f \in X'$.
$f(x_0) \in Sp\{x_0\} = f_0(x_0) = f_0(1 \cdot x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$

$$\left.\begin{aligned} Deoarece\ |f(x)| < \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow 1 \in \mathcal{A}_f \Rightarrow \|f\| \leq 1 \\ Dar\ \|x_0\| = |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\|| : x_0 \Rightarrow 1 \leq \|f\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|f\| = 1.$$

Orice funcţională f construită ca mai sus pentru un vector nenul, verifică pentru un $x_0 = 0$ condiţiile cerute. □

Consecinţa 1.2.1. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $X \neq (0)$. Atunci:

(a) $X^{'} \neq (0)$

(b) Pentru orice $x \in X$, rezultă că $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)|$.

Demonstraţie. (a) Rezultă din consecinţa directă a Prop. 1.2.5.

(b) Pentru $x \in X$ cu $x \neq \theta$ fixat (dacă $x = \theta$ egalitatea este evidentă), avem că $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|, \|x\|$, pentru orice $f \in X^{'}, \|f\| = 1$ rezultă că $\sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|$. (1)
Din Prop. 1.2.5. rezultă că $f_x \in X^{'}$ cu $\|f_x\| = 1$ astfel încât $f_x(x) = \|x\|$.
Deci $\|x\| = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)|$. (2)
Din (1) şi (2), rezultă că $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)|$.

□

Consecinţa 1.2.2. Fie $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ două spaţii normate şi $X \neq (0)$, $Y \neq (0)$. Atunci $\mathcal{B}(X, Y) \neq (0)$, adică există operatori liniari şi continui, nenuli, de la X la Y.

Demonstraţie. Fixăm $x_0 \in X \setminus \{0\}$ şi $y_0 \in Y \setminus \{0\}$. Din Prop. 1.2.5, rezultă că există $f \in X^{'}$ cu $f \neq 0$. Aplicaţia $T : X \to Y$, $T_x = f(x) \cdot y_0$ este liniară şi nenulă ($y_0 \neq 0$) şi $\|T_x\| = \|f(x) \cdot y_0\| = |f(x)| \cdot \|y_0\| \leq \|f\| \cdot \|y_0\| \cdot \|x\|$, pentru orice $x \in X$, deci rezultă că $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ cu $T \neq 0$. □

Propoziţia 1.2.6. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar închis şi $x_0 \in X \setminus X_0$. Atunci există $f \in X^{'}$ cu $f(x_0) = 1$ şi $f/X_0 = 0$. În plus, $\|f\| = \dfrac{1}{d(x_0, X_0)}$.*

Demonstraţie. $d(x_0, X_0) = \inf\limits_{y \in X_0} \|x_0 - y\|$
Notăm în continuare $r = d(x_0, X_0)$.
Cum $\bar{X}_0 = X_0$ şi $x_0 \notin X_0$ rezultă că $r > 0$ şi $\mathcal{B}(x_0, r) \cap X_0 = \varnothing$.
Definim $f_0 : X_0 \oplus Sp\{x_0\} \to \mathbb{K}$, $f_0(y + \lambda \cdot x_0) = \lambda$.
$\{y + \lambda \cdot x_0 / y \in X_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$
Avem că f_0 este liniară şi pentru $y \in X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}^*$ avem:
$\|y + \lambda \cdot x_0\| = |\lambda| \cdot \underbrace{\|x_0 - \underbrace{\left(-\frac{y}{\lambda}\right)}_{\in X_0}\|}_{\geq r} \geq |\lambda| \cdot r$. Rezultă că $|\lambda| \leq \dfrac{1}{r} \cdot \|y + \lambda \cdot x_0\|$
şi $|f_0(y + \lambda \cdot x_0)| = |\lambda| \leq \dfrac{1}{r} \|y + \lambda \cdot x_0\|$, pentru orice $y \in X_0$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$. Deci

rezultă $|f_0(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|z\|$, pentru orice $z \in X_0 \oplus Sp\{x_0\}$ şi din Teorema lui Hahn - Banach rezultă că există $f : X \to \mathbb{K}$, liniară astfel încât

$$f/X_0 \oplus Sp\{x_0\} = f_0 \text{ şi } \underbrace{|f(x)| \leq \frac{1}{r} \cdot \|x\|, \text{ pentru orice } x \in X}_{\Rightarrow f \in X' \text{ şi } \|f\| \leq \frac{1}{r}} \tag{1}$$

Demonstraţie. Dacă $\in X_0$ rezultă că $f(y) = f_0(y) = f_0(y + 0 \cdot x_0) = 0$. Deci $f/X_0 = 0$. Cum $f(x_0) = f_0(x_0) = f_0(0 + a \cdot x_0) = 1$, rezultă că $f(x_0) = 1$
Dacă $r = \inf_{y \in X_0} \|x_0 - y\|$, rezultă că există $(y_n)_{n \geq 1} \subset X_0$ astfel încât
$\|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n \to \infty} r$.
$|f(x_0 - y_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\|$, rezultă că $1 \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|f\| \cdot r$, iar din $\|f\| \cdot r \geq 1$, rezultă că $\|f\| \geq \frac{1}{r} \overset{(1)}{\Rightarrow} \|f\| = \frac{1}{r}$. □

□

Observaţia 1.2.5. Propoziţia 1.2.5, Consecinţa 1.2.1, Consecinţa 1.2.2 şi Propoziţia 1.2.6, le vom numii în continuare consecinţe ale Teoremei lui Hahn-Banach, în cazul spaţiilor normate.

Propoziţia 1.2.7. *Date X,Y două spaţii normate nenule, avem că $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op})$ este spaţiu Banach dacă şi numai dacă $(Y, \|\cdot\|_{op})$ este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Necesitatea : Avem că $\mathcal{B}(X,Y)$ este complet.
Fie $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)}$.
Fixăm $f \in X'$, cu $\|f\| = 1$ şi definim

$$T_n : X \to Y,\ T_n(x) = f(x) \cdot y_n,\ n \geq 1.$$

Este imediat că $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. În plus, $\|T_n x\| = \|f(x) \cdot y_n\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| \leq \|y_n\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = \|y_n\| \cdot \|x\|$, pentru orice $x \in X$, rezultă că $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\|T_n\|_{op} \leq \|y_n\|$. $(*)$
Alegând un $x \in X \setminus \{0\}$ astfel încât $f(x) = \|x\|$, obţinem că: $\|T_n x\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| = \|x\| \cdot \|y_n\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \Big| : \|x\|$, rezultă că $\|y_n\| \leq \|T_n\| \overset{(*)}{\Rightarrow} \|T_n\| = \|y_n\|$.
Dar $\|T_n - T_m\|_{op} = \|y_n - y_m\|$, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, rezultă că $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\left(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op}\right)}$. Deci $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{\left(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op}\right)}$, rezultă că există $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ astfel încât $\|T_n - T\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Cum $\|T_n x - T_x\| \leq \|T_n - T\|_{op} \cdot \|x\|$, pentru orice $x \in X$, rezultă că

$T_n x \xrightarrow{Y} T_x$.

Alegând $x \in X$ *astfel încât* $f(x) = 1$, *rezultă că* $y_n = T_n x \longrightarrow T_x$ *şi* $(y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$. *Deci* $\mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} \subset \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$ *şi* $(Y, \|\cdot\|)-$ *spaţiu Banach.*

Suficienţa: Avem că $(Y, \|\cdot\|)$ *este spaţiu Banach* $(\mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)})$.
Fie $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{op}\right)}$. *Pentru* $x \in X$ *avem că*

$$0 \leq \|T_m x - T_n x\|_Y = \|(T_m - T_n)_x\|_Y \leq \|T_m - T_n\|_{op} \cdot \|x\| \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de unde rezultă că $(T_n x)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{(Y,\|\cdot\|)} = \mathcal{C}_{(Y,\|\cdot\|)}$, *pentru orice* $x \in X$.
Definim $T : X \to Y,\ T_x = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$.
Datorită proprietăţilor de liniaritate ale operatorului lim, *rezultă că* T *este un operator liniar.*
$\underbrace{T_n(\alpha x + \beta y)}_{T(\alpha x+\beta y)} = \alpha T_n x + \beta T_n y \longrightarrow \alpha T_x + \beta T_y$.
Pentru $\varepsilon = 1$, *rezultă că există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\|T_m - T_n\| \leq 1$, *pentru orice* $m, n \geq n_0$. *Deci* $\|T_m x - T_n x\| \leq \|x\|$, *pentru orice* $m, n \geq n_0$, *iar când* $m \longrightarrow \infty$, *avem că* $\|T_x - T_n x\| \leq \|x\|$, *pentru orice* $n \geq n_0$, *rezultă că*

$$\left.\begin{aligned} T - T_{n_0} \in \mathcal{B}(X,Y) \\ T_{n_0} \in \mathcal{B}(X,Y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{B}(X,Y).$$

Pentru $\varepsilon > 0$, *avem că există* $n_0 \in \mathbb{N}$, *cu proprietatea că* $\|T_m - T_n\| \leq \varepsilon$ *pentru orice* $m, n \geq 0$, *rezultă că* $\|T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$, *pentru orice* $m, n \geq 0$ *şi* $x \in X$.
Pentru $x \in X$ *fixat, atunci când* $n \longrightarrow \infty$ *avem că* $\|T_x - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$, *pentru orice* $n \geq n_0$ *şi* $x \in X$. *Rezultă că* $\|T_n - T\|_{op} \leq \varepsilon$, *pentru orice* $n \geq n_0$ *cu* $T_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{B}(X,Y)}{\longrightarrow}} T$. *Deci* $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{op}\right)}$ *şi* $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{op}\right)} \subset \mathcal{C}_{\left(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|_{op}\right)}$, *rezultă că* $\left(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op}\right)$ *spaţiu Banach.*

$\square$

Consecinţa 1.2.3. Dacă X este un spaţiu normat, atunci $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ este un spaţiu Banach.

Capitolul 2

SPAŢII BANACH DE FUNCŢII

2.1 *Normă generalizată de funcţii*

Fie m=măsură Lebesque şi $\mathcal{M}$=spaţiu liniar al funcţiilor $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ măsurabile Lebesque în care identificăm funcţiile egale a.p.t.

Definiţia 2.1.1. Aplicaţia $N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se numeşte normă generalizată de funcţii dacă:

1. $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.p.t;
2. dacă $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$ atunci $N(f) \leqslant N(g)$;
3. $N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,$\forall f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$;
4. $N(f + g) \leqslant N(f) + N(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{M}$;

Definiţia 2.1.2. Fie N o normă generalizată.
Atunci $B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ se numeşte spaţiu de funcţii asociat normei N.

Remarca 2.1.1. B este spaţiu liniar.

Demonstraţie. Dacă $f, g \in B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci $N(\alpha f + \beta g) \leqslant N(\alpha f) + N(\beta g) = |\alpha| \cdot N(f) + |\beta| \cdot N(g) < \infty \Rightarrow \alpha f + \beta g \in B$ □

Remarca 2.1.2. Dacă $B = B_W$ este un ideal in $\mathcal{M}$ şi $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t. cu $t \in \mathbb{R}_+$ şi $g \in B$, atunci $f \in B$.

Definiţia 2.1.3. Dacă N este o normă generalizată şi $B = B_N$, atunci definim $|f|_B := N(f)$. Aplicaţia $|\cdot|_B$ o numim normă de funcţie.

Remarca 2.1.3. Fie N o normă generalizată şi $B = B_N$, atunci $(B, |\cdot|_B)$ este spaţiu vectorial normat, pe care îl notăm cu S.V.N .

Definiţia 2.1.4. Fie $(B, |\cdot|_B)$-complet.Atunci B se numeşte spaţiu Banach de funcţii.

Remarca 2.1.4. Fie B un spaţiu Banach de funcţii şi $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ a.p.t , cu $t \in \mathbb{R}_+$ şi $g \in B$,atunci $f \in B$ şi $|f|_B \leqslant |g|_B$.

Notăm $Q(\mathbb{R})$ clasa spaţiilor Banach de funcţii B cu proprietatea că $\lambda_{[0,t)} \in B$, $\forall t > 0$.
Notăm,pentru $A \in \mathbb{R}_+$, λ_A - funcţia caracteristică a mulţimii A, adică $\lambda_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\lambda_A(t) = \begin{cases} 1 & , t \in A \\ 0 & , t \notin A \end{cases}$$

Exemplul 2.1.1. $N(f) = \|f\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+ , \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$

1. Dacă $p \in [1, \infty)$ atunci:
   $N(\lambda_{[0,t)}) = (\int\limits_0^\infty \lambda^p_{[0,t)}(s)ds)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in B$, $\forall t > 0 \Rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+)$

2. Dacă $p = \infty$ atunci:
   $N(f) = \|f\|_\infty \Rightarrow N(\lambda_{[0,t)}) = 1$, $\forall t > 0 \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in B$, $\forall t > 0 \Rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R})$

Definiţia 2.1.5. Dacă $B \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}_+)$,atunci funcţia $F_B : (0, \infty) \to (0, \infty)$,cu $F_B(t) = |\lambda_{[0,t)}|_B$ se numeşte funcţia fundamentală a spaţiului B.

Propoziţia 2.1.1. *Fie $B \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}_+)$.Atunci $F_B \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{(0,\infty)}$.*

Demonstraţie. Dacă $t_1 < t_2$ şi $\lambda_{[0,t_1]} \leqslant \lambda_{[0,t_2]}$, atunci $F_B(t_1) \leqslant F_B(t_2)$. □

Exemplul 2.1.2. $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$F_B(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{p}}, \text{dacă } p \in [1, \infty) \\ 1, \text{dacă } p = \infty \end{cases} \quad , \forall t \in \mathbb{R}^*_+;$$

2.2 *Clase de spaţii de funcţii*

Vom nota cu:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spaţiilor Banach de funcţii $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că
$$\lim_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$$
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spaţiilor de funcţii $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}|_B > 0$$

Exemplul 2.2.1. $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$,$B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.Din §1.1, Exemplul 1.1.2. rezultă că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dacă şi numai dacă $p \in [1, \infty)$.

Remarca 2.2.1. $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ este o incluziune strictă.

Exemplul 2.2.2.

$$N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt, \forall f \in \mathcal{M}$$

1. N este o normă generalizată

   - $N(f) = 0 \Rightarrow \int_n^{n+1} |f(t)|dt = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$ a.p.t. pe $[n, n+1]$, $\forall n \Rightarrow f = 0$ a.p.t.
   - $N(\alpha f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |\alpha \cdot f(t)|dt$
   - $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t , $t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt \leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)|dt \Rightarrow N(f) \leq N(g)$
   - $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t) + g(t)|dt \leq$
   $\leq \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |f(t)|dt + \frac{1}{n+1} \cdot \int_n^{n+1} |g(t)|dt \mid \cdot \sum_0^{\infty} \Rightarrow N(f+g) \leq$
   $\leq N(f) + N(g) \Rightarrow N$ este normă generalizată.

2. Fie $B = B_W = \{f \in \mathcal{M} : N(f) \leq \infty\}, |f|_B = N(f)$.
Dacă $(B, |\cdot|_B)$ este spaţiu vectorial normat, arătăm că $(B, |\cdot|_B)$ este complet.

Dacă $(f_n)_n \in \mathcal{F}_B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : |f_n - f_p|_B < \varepsilon, \forall n, p \geq m_o$ (1)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \varepsilon, \forall n, p \geq m_0$ (2)

Dacă $k \in \mathbb{N}$ fixat şi $\delta > 0 \Rightarrow$
$\exists\ m_\delta \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{k+1} \cdot \int\limits_{k}^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \frac{\delta}{k+1}, \forall n, p \geq m_0 \Rightarrow \int\limits_{k}^{k+1} |f_n(t) - f_p(t)| dt < \delta, \forall n, p \geq m_\delta \Rightarrow (f_n)_n \in \mathcal{F}_{L^1_{[k,k+1]}} \Rightarrow \exists \varphi^k \in L^1_{[k,k+1]}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{L^1_{[k,k+1]}} \varphi^k \Rightarrow \exists (f_{n_j}) \subset (f_n)$ cu $f_{n_j} \to \varphi^k$ a.p.t. pe $[k, k+1]$.

Definim aplicaţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(t) = \varphi^k(t), t \in [k, k+1) \Rightarrow$
$\exists (f_{ni})_{i \in \mathbb{N}} \subset (f_n)$ cu $f_{ni} \to f$ a.p.t, $t \in \mathbb{R}_+$.
Din (2) $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} |f_n(t) - f(t)| \mathrm{dt} < \varepsilon, \forall n, i \geq m_0$.
Pentru $m_i \to \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall n \geq m_0$. (3)

$$Din(3) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} f_n - f \in B, \forall n \geq m_0 \\ f_n \in B \end{array}\right\} \Rightarrow f = -(f_n - f) + f_n \in B$$

Din (3) rezultă $|f_n - f|_B < \varepsilon, \forall n \geq m_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow B$ este complet $\Rightarrow (B, |\cdot|_B)$este un spaţiu Banach de funcţii.

3. $N(\lambda_{[0,t)}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \int\limits_{n}^{n+1} \lambda_{[0,t)}(s)$ ds $\leq \sum\limits_{n=0}^{[t]+1} \frac{1}{n+1} < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow B \in Q(\mathbb{R}_+)$

4. $F_B(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \int\limits_{k}^{k+1} \lambda_{[0,n+1)}(s) \mathrm{ds} = \sum\limits_{h=0}^{n} \frac{1}{h+1}$
Pentru $t \geq n+1 \Rightarrow F_B(t) \geq F_B(n+1) \xrightarrow{n \to \infty} \infty \Rightarrow F_B(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

5. $|\lambda_{[n,n+1)}|_B = \sum\limits_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h+1} \cdot \int\limits_h^{h+1} \lambda_{[n,n+1)}(s)\text{ds}{=}\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}| = 0 \Rightarrow B \notin \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$

2.3 *Funcţie Young*

Fie funcţia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty], \varphi \in \mathcal{M}^{\not\nearrow}_{[0,\infty)}, \varphi \in \mathcal{C}_s$ cu $\varphi/_{(0,\infty)} \not\equiv 0$ şi $\varphi/_{(0,\infty)} \not\equiv \infty$.

Definiţia 2.3.1. Funcţia $Y_\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, $Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau$ se numeşte funcţie Young asociată lui φ.

Remarca 2.3.1. $Y_\varphi(0) = 0$ şi $Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\not\nearrow}_{[0,\infty)}$

Teorema 2.3.1. $Y_\varphi \in \mathcal{C}v_{[0,\infty)}$

Demonstraţie. $Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0,\infty)}$
Demonstrăm că $Y_\varphi \in \mathcal{J}_{[0,\infty)}$ (convexă Jensen).
Fie $t, s \geq 0, s \leq t$. Demonstrăm că $Y_\varphi(\frac{t+s}{2}) \leq \frac{1}{2}(Y_\varphi + Y_\varphi(s))$. (1)
Fie $Y_\varphi(t) = \infty$ sau $Y_\varphi(s) = \infty \Rightarrow$ (1) evidentă.
Presupunem $Y_\varphi(t), Y_\varphi(s) < \infty, s \leq \frac{s+t}{2} \leq t \Rightarrow Y_\varphi(\frac{s+t}{2}) \leq Y_\varphi(t) < \infty$.
Efectuăm: $Y_\varphi(t) + Y_\varphi(s) - 2 \cdot Y_\varphi(\frac{t+s}{2}) =$

$$= \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau - 2 \cdot \left(\int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau \right) =$$

$$= \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau - \int\limits_0^s \varphi(\tau)d\tau - 2 \cdot \int\limits_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_s^t \varphi(\tau)d\tau - 2 \cdot \int\limits_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - 2 \cdot \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - \int\limits_s^{\frac{t+s}{2}} \varphi(\tau)d\tau \geq 0 \text{ căci } \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{M}^{\not\nearrow} \Rightarrow q.e.d.$$

2.4 *Spaţii Orliez*

Fie funcţia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$,$\varphi \in \mathcal{C}^s$,$\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}$,$\varphi_{[0,\infty)} \not\equiv 0$ şi $\varphi_{[0,\infty)} \not\equiv \infty$ şi $Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau, \forall t \geq 0$.
Dacă $f \in \mathcal{M}$,definim:
$M_\varphi(f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(|f(t)|)dt$ şi
$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : \exists\, c > 0 \text{ cu } M_\varphi(c \cdot f) < \infty\}$.

Teorema 2.4.1. *O_φ este subspaţiu liniar în $\mathcal{M}$.*

Demonstraţie. Pentru $f, g \in O_\varphi \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0$ cu
$M_\varphi(c_1 \cdot f) < \infty, M_\varphi(c_2 \cdot f) < \infty$.
Vom nota:
$c = \frac{1}{2}\min\{c_1, c_2\}$
$c \cdot |f(t) + g(t)| \leq c|f(t)| + c|g(t)| \leq \begin{cases} c_1|f(t)|, |f(t)| \geq |g(t)| \\ c_2|g(t)|, |f(t)| < |g(t)| \end{cases} \Rightarrow Y_\varphi(c|f(t) + g(t)|) \leq \begin{cases} Y_\varphi(c_1|f(t)|), \text{dacă } |f(t)| \geq |g(t)| \\ Y_\varphi(c_2|g(t)|), \text{dacă } |f(t)| < |g(t)| \end{cases} \Rightarrow Y_\varphi(c|f(t) + g(t)|) \leq Y_\varphi(c_1|f(t)|) + Y_\varphi(c_2|g(t)|), \forall t \geq 0 \Rightarrow M_\varphi(c(f+g)) \leq$
$\leq M_\varphi(c_1 f) + M_\varphi(c_2 g) < \infty \Rightarrow f + g \in O_\varphi$
Fie $f \in O_\varphi, \lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0 \Rightarrow Y_\varphi(\lambda f) = 0 \Rightarrow M_\varphi(\lambda f) = 0$.
Dacă $\lambda \neq 0$, din $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ astfel încât $M_\varphi(cf) < \infty \Rightarrow$
$\lambda f \in O_\varphi$. □

Pentru $f \in \mathcal{M}$. Definim $A_f = \{c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c} \cdot f) \leq 1\}$.

Remarca 2.4.1. Fie $c \in A_f$. Atunci $[c, \infty) \in A_f$.

Demonstraţie. Pentru $\tilde{c} > c \Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{\tilde{c}} f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(\frac{1}{\tilde{c}}|f(t)|)dt \leq M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1$.
Definim aplicaţia $N : \mathcal{M} \to [0,\infty], N(f) = \begin{cases} \inf A_f, A_f \neq \varnothing \\ +\infty, A_f = \varnothing \end{cases}$ □

Teorema 2.4.2. *N este o normă generalizată de funcţii.*

Demonstraţie. (n_1) $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.p.t.

$N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \inf A_f = 0 \\ A_f \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow \exists (c_n) \in A_f$ cu $N(f) < c_n < N(f) + \frac{1}{n}$
şi $M_\varphi(\frac{1}{c_n} f) \leq 1$

”$\Longleftarrow$”
$f = 0$ a.p.t. $\Rightarrow \forall c > 0 \Rightarrow Y_\varphi(\frac{1}{c}|f(t)|) = 0$ a.p.t $\Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{c}f) = 0 \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_f = (0, \infty) \neq 0 \Rightarrow N(f) = 0$.

”$\Longrightarrow$”
Vom presupune prin reducere la absurd că $f \neq 0$ a.p.t.
$\Rightarrow \exists A \in \alpha, m(A) > 0, \exists \delta > 0$ astfel încât $|f(t)| \geq \delta, \forall t \in A$.

$$\left.\begin{array}{r} A_f \subset (0,\infty) \\ N(f) = 0 \Rightarrow A_f \neq \varnothing, \inf A_f \end{array}\right\} \xRightarrow{Rem.1.4.1.} A_f = (0,\infty)$$

Pentru $c > 0$ arbitrar fixat $\Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \geq M_\varphi(\frac{1}{c}f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(\frac{1}{c}|f(t)|)dt \geq \int\limits_A Y_\varphi(\frac{\delta}{c})dt = Y_\varphi(\frac{\delta}{c}) \cdot m(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow Y_\varphi(\frac{\delta}{c}) \leq \frac{1}{m(A)}$.
Însă $Y_\varphi = \int\limits_0^{\frac{\delta}{c}} \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)}, \forall c > 0 \xRightarrow{c \searrow 0} \int\limits_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \leq \frac{1}{m(A)}$,
iar pentru $\varphi \geq 0$ şi $\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)} \Rightarrow \varphi_{(0,\infty)} = 0$ a.p.t. contradicţie.
Presupunerea fiind falsă rezultă că $f = 0$ a.p.t.

(n_2) Pentru $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \geq 0$ rezultă că $N(f) \leq N(g)$

- Pentru $N(g) = \infty \Rightarrow$ evident.

- Pentru $N(g) < \infty \Rightarrow \exists c > 0$ astfel încât $M_\varphi(\frac{1}{c}g) \leq 1$.
  Este suficient să arătăm că $A_g \subset A_f$.
  Dacă $c_1 \in A_g, M_\varphi(\frac{1}{c_1}f) \leq M_\varphi(\frac{1}{c_1}g) \leq 1 \Rightarrow A_f \neq \varnothing$ şi $A_g \subset A_f$.

(n_3) Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$, vom demonstra că $N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.
Pentru $\lambda = 0 \overset{n_1}{\Rightarrow}$ evident.
Presupunem $\lambda \neq 0$ şi arătăm că $A_{\lambda_f} = |\lambda| A_f$ (3)
"$\subset$"

Fie $c \in A_{\lambda_f} \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c} f\right) \leq 1$.
Fie $c_1 = \frac{c}{|\lambda|}$.

$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) = M_\varphi\left(\frac{|\lambda|}{c}\right) = M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c} f\right) \leq 1 \Rightarrow c_1 \in A_f \Rightarrow$
$\Rightarrow c = c_1|\lambda| \in |\lambda| A_f \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\lambda f} \subset |\lambda| A_f$.

"$\supset$"
Fie $c \in A_f$.Arătaţi că $|\lambda| \cdot c \in A_{\lambda_f}$
$M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda| c} \lambda f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda| c} |\lambda| f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) \leq 1 \Rightarrow |\lambda| c \in A_{\lambda_f} \Rightarrow$
$\Rightarrow |\lambda| A_f \subset A_{\lambda_f} \Rightarrow (3)$
$\Rightarrow A_{\lambda_f} \neq \varnothing \Rightarrow \inf A_{\lambda_f} = |\lambda| \inf A_f \Leftrightarrow N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

(n_4) Fie $f, g \in \mathcal{M}$.Arătaţi că $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ (4)
Pentru $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty \Rightarrow (4)$
Pentru $N(f), N(g) < \infty \Rightarrow A_f, A_g \neq \varnothing$, demonstrăm că $A_f + A_g \subset A_{f+g}$ (5)
Fie $c_1 \in A_f$ şi $c_2 \in A_g \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) \leq 1$ şi $M_\varphi\left(\frac{1}{c_2} g\right) \leq 1$.
Fie $t \geq 0$.
$\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)| \leq \frac{1}{c_1+c_2}|f(t)| + \frac{1}{c_1+c_2}|g(t)| = \frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|g(t)|}{c_2}$
$Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow} \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)|\right) \leq Y_\varphi\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2}\frac{|g(t)|}{c_2}\right) \leq \frac{c_1}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|f(t)|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} \cdot Y_\varphi\left(\frac{|g(t)|}{c_2}\right) \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}(f+g)\right) \leq \frac{c_1}{c_1+c_2} M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} M_\varphi\left(\frac{1}{c_2} g\right) \leq \frac{c_1+c_2}{c_1+c_2} = 1$
$\Rightarrow c_1 + c_2 \in A_{f+g} \Rightarrow (5)$
$\Rightarrow A_{f+g} \neq \varnothing \Rightarrow \inf A_{f+g} \leq \inf A_f + \inf A_g \Rightarrow (4)$
Din (n_1)-(n_4) rezultă că N este normă generalizată.

$\square$

Avem $B_n = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\} = \{f \in \mathcal{M} : A_f \neq \varnothing\}$.

Teorema 2.4.3. $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$

Demonstraţie. "$\supset$" Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty \Rightarrow A_f \neq \varnothing \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1 < \infty \Rightarrow f \in O_\varphi$.
"$\subset$"Pentru $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty$.

Cazul 1: $M_\varphi(cf) = 0 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \varnothing \Rightarrow N(f) < \infty$

Cazul 2: $M_\varphi(cf) > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $n_0 \geq M_\varphi(cf)$

$$M_\varphi(cf) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(c|f(t)|)dt$$

$$Y_\varphi(c|f(t)|) = \int\limits_0^{c|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{n_0} \int\limits_{\frac{(j-1)c}{n_0}|f(t)|}^{\frac{j^c}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau \geq n_0 \int\limits_0^{\frac{c}{n_0}|f(t)|} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= n_0 Y_\varphi\left(\frac{c}{n_0}|f(t)|\right) \Rightarrow n_0 M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq M_\varphi(cf) \leq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{c}{n_0}f\right) \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{c}{n_0}\right)^{-1} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \varnothing$$

Din Teorema 1.4.3 rezultă că putem definii:
$|f|_\varphi = N(f), \forall f \in O_\varphi$.
Rezultă că $|f|_\varphi = \inf\limits_{c>0}\left\{M_\varphi\left(\frac{1}{c}f\right) \leq 1\right\}$.

□

Terminologie 2.4.1. Numim $|\cdot|$, norma Orliez a funcţiei f. Atunci rezultă $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ este S.V.N.

Terminologie 2.4.2. $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ este spaţiu Orliez.

Exemplul 2.4.1. $O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty\}$
$Q_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : M_\varphi(f) < \infty\}$
$Q_\varphi \subsetneqq O_\varphi$

$$\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty], \varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$$

$$Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau = \begin{cases} \infty, t > 1 \\ 0, t \in [0,1] \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(t) = 2$

$M_\varphi(f) = \infty, M_\varphi\left(\frac{1}{n_0}f\right) = 0 < \infty$.

2.5 *Proprietăţi de completitudine ale spaţiilor de funcţii*

Definim aplicaţia $N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ca o normă generalizată de funcţii ,
$B = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}, |f|_B := N(f)$.

Remarca 2.5.1. $(B, |\cdot|_B)$ este S.V.N.

Remarca 2.5.2. $f \in B \Leftrightarrow |f| \in B$. În plus , $|f|_B = \|f\|_B$.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$"

$$\left.\begin{array}{r}\text{Presupunem } f \in B \Rightarrow \|f\| \leq |f| \\ f \in B\end{array}\right\} \Rightarrow |f| \in B \text{ şi } N(|f|) \leq N(f) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \|f\|_B \leq |f|_B$ (1)
"$\Leftarrow$"

$$\left.\begin{array}{r}\text{Presupunem } f \in B \Rightarrow |f| \leq \|f\| \\ |f| \in B\end{array}\right\} \Rightarrow f \in B \text{ şi } N(f) \leq N(|f|) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |f|_B \leq \|f\|_B$ (2)
$\Rightarrow$ q.e.d. ☐

Definiţia 2.5.1. Spunem că N satisface proprietatea Beppo-Levi dacă şi numai dacă:
(n5) Pentru $0 \leq f_n, f_n \nearrow f$ a.p.t. rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.
Spunem că N satisface:
(n6) Pentru $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty \Rightarrow N(\lambda_A) < \infty$;
(n7) Pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ $\exists K_A \in (0, \infty)$ astfel încât:
$\int A|f| \leq K_A \cdot N(f), \forall f \in \mathcal{M}$. (*)

Remarca 2.5.3. Dacă N satisface (n6), atunci pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ rezultă că $\lambda_A \in B$. În special $B \in Q(R_+)$.

Remarca 2.5.4. Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) = \infty \Rightarrow$ (*) este evidentă.
De aceea relaţia (*) este adevărată pentru $f \in B$.

Remarca 2.5.5. Fie $\mathcal{E}$ spaţiul funcţiilor etajate $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, cu etaje de masură finită.
Dacă N satisface (n6), atunci $\mathcal{E} \subset B$.

Demonstraţie. Pentru $s \in \mathcal{E} \Rightarrow s = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \lambda_{Ak}$, unde $A_k \in \mathcal{L}$ cu
$m(A_k) < \infty, \forall k = 1, n$.
Pentru $\lambda_{A_k} \in B$ şi B=spaţiu liniar, rezultă că $s \in B$. ☐

Exemplul 2.5.1. Fie $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), |\cdot|_B = \|\cdot\|_p$.
Pentru p=1, proprietatea (n7) este satisfăcută.
Pentru $p = \infty$, $A \in \mathcal{L}$ şi $m(A) < \infty$ rezultă

$$\int_A |f| \leq m(A) \cdot \|f\|_\infty, \forall f \in B \Rightarrow K_A = \begin{cases} m(A) & , m(A) > 0 \\ 1 & , m(A) = 0 \end{cases}$$

Pentru $p \in (1, \infty)$, fie $A \in \mathcal{L}, m(A) < \infty$.
$\int\limits_A |f| = \int\limits_{\mathbb{R}_+} |f| \cdot \lambda_A \leq (\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int\limits_{\mathbb{R}_+} {\lambda_A}^q)^{\frac{1}{p}} = (m(A))^{\frac{1}{q}}$.
În final, spaţiile L^p verifică (n5)-(n7).

Propoziţia 2.5.1. *Dacă N verifică proprietatea (n7) si $f_n \to f$ în B, atunci pentru orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$, $\exists f_{k_n} \subset f_n$ astfel încât $f_{k_n} \to f$ a.p.t. pe A.*

Demonstraţie. Fie $f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow |f_n - f|_B \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ (1)
Fie $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ şi $\varepsilon > 0$.
Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm:
$A_n = \{t \in A : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}$
$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_A |f_n - f| \geq \int\limits_{A_n} \frac{1}{\varepsilon}|f_n - f| \geq \int\limits_{A_n} 1 dm = m(A_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_A |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} K_A N(f_n - f) = \frac{1}{\varepsilon} K_A |f_n - f|_B \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} 0$
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f$ pe $A \Rightarrow \exists (f_{k_n}) \subset (f_n)$ cu $f_{k_n} \to f$ a.p.t. pe A. □

Corolarul 2.5.2. *Dacă N verifică (n7), atunci pentru orice $f_n \to f$ în B există $(f_{k_n}) \subset (f_n)$ cu $f_{k_n} \to f$ a.p.t.*

Demonstraţie. Rezultă din Propoziţia 1.5.1, folosind descompunerea $\mathbb{R}_+ = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)$ şi un procedeu de diagonalizare. □

Propoziţia 2.5.3. *Dacă N verifică (n7) şi $N(f) < \infty$, atunci f este finită a.p.t. ($\forall f \in B \Rightarrow f$ finită a.p.t.)*

Demonstraţie. Pentru $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$, vom nota
$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| = \infty\}$.
$A_n = \{t \in [n, n+1) : |f(t)| = \infty\}$
$A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad (1)$
Fie $t \in A_n, k \in \mathbb{N}^*$ arbitrar $\Rightarrow |f(t)| \geq k \Rightarrow k \cdot m(A_n) \leq \int\limits_{A_n} |f| \leq \int\limits_{[n,n+1)} |f| \leq$
$\leq K_n \cdot N(f)$.
Deci, rezultă că $k \cdot m(A_n) \leq K_n \cdot N(f), \forall k \in \mathbb{N}^*$.
$h \to \infty \Rightarrow m(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow$ f finită a.p.t. $\square$

Propoziţia 2.5.4. *Dacă N verifică (n5) şi $0 \leq f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $f_n \nearrow f$ a.p.t, atunci una din propoziţii este adevărată:*

1. *$f \notin B$ şi $|f_n|_B \to \infty$*

   sau

2. *$f \in B$ şi $|f_n|_B \to |f|_B$.*

Demonstraţie. Din (n5) rezultă că $N(f_n) \nearrow N(f)$.
Deducem $f \in B$ dacă şi numai dacă $N(f) < \infty$. $\square$

Lemă 2.5.5. *Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+, \alpha_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k, \beta_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$ şi $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.*
Atunci:

(i) $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = l$

(ii) $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = L$.

Demonstraţie. (i) $(\alpha_n)_n \in \mathcal{M}^{\nearrow} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \overset{not}{=} \alpha \in [0, \infty]$
$l \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n)$ şi $x_{k_n} \to l$
$\alpha_{k_n} \leq x_{k_n}, \forall n \Rightarrow \alpha \leq l \qquad (1)$
Fie $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists h_n \geq n$ astfel încât $x_{h_n} \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$ şi $\alpha_n \leq x_{h_n} \leq$
$\leq \alpha_n + \frac{1}{n} \qquad (2)$
$\Rightarrow \exists (x_{h_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{h_n} \to \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow$
$\alpha \geq l \qquad (3)$
$\xrightarrow[(3)]{(4)} \alpha = l$

(ii) $(\beta_n)_n \in \mathcal{M}^{\searrow} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta \in [0, \infty]$
$L \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{k_n} \to L$
Dar $x_{k_n} \leq \beta_{k_n}, \forall n \Rightarrow L \leq \beta$ (4)
Dacă $\beta = \infty \Rightarrow \beta_n = \infty, \forall n$
$\Rightarrow \forall n \exists k_n \geq n$ cu $x_{k_n} \geq n \Rightarrow x_{k_n} \to \infty \Rightarrow L = \infty$
Dacă $\beta < \infty$ rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists h_n \geq n$ astfel încât $\beta_n - \frac{1}{n} \leq x_{h_n} \leq \beta_n$.
$\Rightarrow \exists (x_{h_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{h_n} \to \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \beta \leq L$ (5)
$\xrightarrow[(5)]{(4)} L = \beta$

$\square$

Teorema 2.5.6 (Fatou). *Dacă N verifică (n_5) şi $(f_n)_n \subset B, f_n \to f$ a.p.t. şi $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B < \infty$, atunci $f \in B$ şi $|f|_B \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B$.*

Demonstraţie. Definim $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, h_n(t) = \inf\limits_{m\geq n} |f_n(t)| \Rightarrow 0 \leq h_n \leq h_n + 1$.
Demonstrăm că $h_n \to |f|$ a.p.t.
$f_n \to f$ a.p.t. $\Rightarrow |f_n| \to |f|$ a.p.t.
$A = \{t \in \mathbb{R}_+ : |f_n(t)|\}, m(\complement A) = 0$
Pentru $t \in A$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, din definiţia lui $h_n(t)$, avem că $\exists m_n > n$ astfel încât $h_n(t) \leq |f_{m_n}(t)| \leq h_n(t) + \frac{1}{n} \Rightarrow h_n(t) \to |f(t)| \Rightarrow h_n \to |f|$ pe A (deci a.p.t.).
Deci $0 \leq h_n, \forall n, h_n \nearrow |f|$.
Din $(n_5) \Rightarrow N(h_n) \nearrow N(|f|)$ (1)
$h_n \leq |f_n| \Rightarrow N(h_n) \leq N(|f_n|), \forall m \geq n \Rightarrow N(h_n) \leq \inf\limits_{m\geq n} N(|f_n|) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} N(h_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{m\geq n} N(|f_n|)) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} N(|f_n|)$ (2)
Însă $f_n \in B \Rightarrow N(|f_n|) = N(f_n) = |f_n|_B \xrightarrow[(2)]{(1)} N(|f|) \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B < \infty$
$|f| \in B \stackrel{Rem.1.5.2}{\Rightarrow} f \in B$ şi $|f|_B \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B$.

$\square$

2.6 *Completitudinea spaţiilor Orliez*

Fie aplicaţia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty], \varphi \in \mathcal{M}^{\not\nearrow}_{[0,\infty)]} \cap \mathcal{C}^s_{[0,\infty)}$ cu $\varphi/_{(0,\infty)} \neq 0$ şi $\varphi/_{(0,\infty)} \neq \infty$.

$Y_\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty], Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau$

$M_\varphi(f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(|f|), \forall f \in \mathcal{M}$

$O_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } \mathcal{M}_\varphi(cf) < \infty\}$

$|f|_\varphi = \inf \left\{ c > 0 : \mathcal{M}_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 \right\}$

Remarca 2.6.1. $A_f = \left\{ c > 0 : \mathcal{M}_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 \right\}, \forall f \in \mathcal{M}$.

$N : \mathcal{M} \to [0, \infty], N_f = \begin{cases} \inf A_f, A_f \neq \varnothing \\ \infty, A_f = \varnothing \end{cases}$

Deci $O_\varphi = B_N = \{f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty\}$ şi $|f|_\varphi = N(f), \forall f \in O_\varphi$.

Propoziţia 2.6.1. *Dacă $f \in O_\varphi$ şi $|f|_\varphi > 0$ rezultă că $M_\varphi \left(\frac{1}{|f|_\varphi} f \right) \leq 1$ (*)*

Demonstraţie. $f \in O_\varphi \Rightarrow N(f) < \infty \Rightarrow |f|_\varphi = N(f) \in (0, \infty)$
Dar $N(f) = \inf A_f \Rightarrow \exists c_n \in (0, \infty)$ cu $c_n \searrow N(f)$.

$M_\varphi \left(\frac{1}{c_n} f \right) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi \left(\frac{1}{c_n} |f(t)| \right) dt$

$$\left. \begin{array}{r} \dfrac{1}{c_n} |f(t)| \nearrow \dfrac{1}{N(f)} |f(t)| \\ Y_\varphi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}^{\not\nearrow} \end{array} \right\} \Rightarrow Y_\varphi \left(\frac{1}{c_n} |f(t)| \right) \nearrow Y_\varphi \left(\frac{1}{N(f)} |f(t)| \right)$$

$\xRightarrow{T.conv.monotone} M_\varphi \left(\frac{1}{c_n} f \right) \to M_\varphi \left(\frac{1}{N(f)} f \right)$

Dar $c_n \in A_f, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_\varphi \left(\frac{1}{c_n} f \right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{n \to \infty} M_\varphi \left(\frac{1}{N(f)} f \right) \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M_\varphi \left(\frac{1}{|f|_\varphi} f \right) \leq 1.$ □

Remarca 2.6.2. Fie $f \in O_\varphi$ cu $|f|_\varphi > 0$.Atunci $|f|_\varphi \in A_f$.

Teorema 2.6.2. *Norma N verifică proprietăţile $(n_5), (n_6)$ şi (n_7).*

Demonstraţie. (n_5)
Pentru $O \leq f_n \leq f_{n+1}$ cu $f_n \nearrow f$ a.p.t. $f_n \leq f_{n+1}$

$\xRightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$ (1)

$f_n \leq f \xRightarrow{(n_2)} N(f_n) \leq N(f), \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

Fie $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$. (3)

Din (2) rezultă că $\alpha \leq N(f)$. (4)

Cazul 1: $\alpha = \infty \overset{(4)}{\Rightarrow} N(f) = \infty \Rightarrow N(f) = 2$.

Cazul 2: $\alpha = 0 \Rightarrow N(f_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n = 0$ a.p.t. $\Rightarrow f = 0$ a.p.t $\Rightarrow N(f) = 0 \Rightarrow N(f) = \alpha$

Cazul 3: Vom presupune că $0 < N(f_n) \leq \alpha < \infty, \forall n$ efectuăm:

$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right)dt \leq \int\limits_{0}^{\infty} Y_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n(t)\right)dt = M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right)$

$N(f_n) < \infty \Rightarrow f_n \in O_\varphi \overset{p_1}{\Rightarrow} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)}f_n\right) \leq 1 \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \leq 1$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ (5)

$f_n \nearrow f$ a.p.t. $\Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) \nearrow Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right)$ a.p.t.

Din teorema convergenţei monotone rezultă că:

$M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n\right) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f_n(t)\right)dt \to \int\limits_0^\infty Y_\varphi(\frac{1}{\alpha}f(t))dt = M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha}f\right)$.

Din (5) şi (6) $\Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{\alpha}f) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in A_f \Rightarrow N(f) \leq \alpha \Rightarrow N(f) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} N(f) = N(f)$.

(n_6)

Pentru $A \in \alpha$ cu $m(A) < \infty$,arătăm că $\lambda_A \in O_\varphi(A\lambda_A \neq \varnothing)$.

$Y_\varphi(0) = 0, Y_\varphi \in \mathcal{C}_{[0,\infty)} \Rightarrow \exists c > 0$ astfel încât $Y_\varphi(c) \leq \dfrac{1}{m(A)}$ $(m(A) > 0)$

$M_\varphi(c\cdot\lambda_A) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(c\cdot\lambda_A(t))\,dt = \int\limits_A Y_\varphi(c)\cdot m(A) \leq 1 < \infty \Rightarrow \lambda_A \in O_\varphi$.

(n_7)

Pentru $A \in \alpha$, cu $m(A) < \infty$,arătaţi că $\exists k_A > 0$, cu $S_A|f| \leq k_A \cdot N(f)$, $\forall f \in \mathcal{M}$ (1)

Cazul 1: $N(f) = \infty \Rightarrow (1)-$ evident.

Cazul 2: $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ a.p.t. $\Rightarrow \int\limits_A |f| = 0 \Rightarrow (1)$

Cazul 3: $0 < N(f) < \infty$ Notăm $c = \frac{1}{N(f)} > 0$.

$Y_\varphi\left(\frac{1}{m(A)}\int\limits_A c|f|\right) \overset{Y_\varphi\in\mathcal{C}_v}{\leq} \frac{1}{m(A)}\cdot\int\limits_A Y_\varphi(c|f|) \leq \frac{1}{m(A)}\cdot\int\limits_0^\infty Y_\varphi(c|f|) =$

$= \frac{M_\varphi(c|f|)}{m(A)} = \frac{1}{m(A)} \cdot M_\varphi(\frac{1}{N(f)} f) \leq \frac{1}{m(A)} < \infty$

$$\Rightarrow Y_\varphi \left(\frac{1}{m(A)} \cdot \int\limits_A c|f| \right) \leq \frac{1}{m(A)} \tag{2}$$

□

Observaţia 2.6.1. $\varphi/_{(0,\infty)} \not\equiv 0 \wedge \varphi/_{(0,\infty)} \not\equiv \infty \Rightarrow \exists t_0 \in (0,\infty)$ cu $\varphi(t_0) \in (c,\infty)$

Pentru $t > t_0$ $Y_\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau \geq \int\limits_{t_0}^t \varphi(\tau)d\tau \geq \varphi(t_0)(t-t_0)$, $\forall t \geq t_0 \overset{crit.maj.}{\Longrightarrow} \lim\limits_{t\to\infty} Y_\varphi(t) = \infty$. Aşadar $Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}_{[0,\infty)}$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} Y_\varphi(t) = \infty$.

Din (2) $\Rightarrow \exists \tilde{c} > 0$ astfel încât $\frac{1}{m(A)} \cdot \int\limits_A c|f| \leq \tilde{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_A |f| \leq \frac{\tilde{c}\cdot m(A)}{c} = \underbrace{\tilde{c} \cdot m(A)}_{k_A} \cdot N(f) \Rightarrow (1)$

Corolarul 2.6.3. *Spaţiul Orliez $(O_\varphi, |\cdot|)$ este complet.*

Demonstraţie. Din Teorema 1.6.2 şi Corolarul Teoremei Riesz-Fischer. □

2.7 *Proprietăţile spaţiilor Orliez*

Fie φ ca în § 1.6 .

Remarca 2.7.1. Fie $\varphi(t) > 0, \forall t \in (0,\infty)$. Atunci $Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)}$, aşadar injectivă.

Remarca 2.7.2. Fie $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow Y_\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijectivă.

$\big(Y_\varphi(0) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} Y_\varphi(t) = \infty, Y_\varphi$ continuă $\Rightarrow$ concluzie $\big)$

Exemplul 2.7.1. Pentru $p \in [1,\infty), \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty), \varphi(t) = p \cdot t^{p-1}$,
$Y_\varphi(t) = t^p, t \geq 0, M_\varphi(f) = \int\limits_0^\infty |f|^p dt$.
$M_\varphi(c \cdot f) = c^p \cdot M_\varphi(f) \Rightarrow [M_\varphi(c \cdot f) < \infty \Leftrightarrow M_\varphi(f) < \infty]$
$(O_\varphi, |\cdot|_\varphi) = (L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$

Exemplul 2.7.2. $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty], \varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$

$Y_\varphi(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1] \\ \infty, t > 1 \end{cases}$

$M_\varphi(c\cdot f) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(c\cdot|f(t)|)dt < \infty \Leftrightarrow c\cdot|f(t)| \leq 1$ a.p.t. $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{c}$ a.p.t. $t \geq 0 \Leftrightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
$|f|_\varphi = \inf\{c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1\}$

$M_\varphi(\frac{1}{c}f) \leq 1 \Leftrightarrow |f(t)| \leq c$ a.p.t. $\Rightarrow \|f\|_\infty \leq c \Rightarrow |f|_\varphi = \|f\|_\infty$.

Aşadar $(O_\varphi, |\varphi|) \equiv (L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Considerăm clasele:

- $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B, |\cdot|_B)$ cu $\lambda_{[0,t)} \in B, \forall t > 0$.
- $\mathcal{B}(\mathcal{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B, |\cdot|_B)$ cu $B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} F_B(t) = \infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)-$ clasa spaţiilor Banach de funcţii $(B, |\cdot|_B)$ cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ şi $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_{[n,n+1)}|_B > 0$.

Remarca 2.7.3. $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$ şi $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Remarca 2.7.4. $L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+), \forall p \in [1, \infty)$.

Propoziţia 2.7.1. $O_\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

Demonstraţie. $M_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}) = \int\limits_0^\infty Y_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}(\tau))d\tau = \int\limits_0^t Y_\varphi(c)d\tau = t \cdot Y_\varphi(c)$.
$Y_\varphi(c) = \int\limits_0^c \varphi(\tau)d\tau$. Deoarece $\varphi/_{(0,\infty)} \not\equiv \infty$ rezultă că $\exists c > 0$ cu $\varphi(c) \in (0,\infty)$ $\Rightarrow Y_\varphi(c) \leq c \cdot \varphi(c) < \infty \Rightarrow M_\varphi(c \cdot \lambda_{[0,t)}) < \infty \Rightarrow \lambda_{[0,t)} \in O_\varphi, \forall t > 0$. $\square$

Propoziţia 2.7.2 (Funţia fundamentală a spaţiului Orliez)**.** *Pentru* $0 < \varphi(t) < \infty, \forall t \geq 0$ *rezultă că* $F_{O_\varphi}(t) = \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}, \forall t > 0$.

Demonstraţie. $F_{O_\varphi}(t) = |\lambda_{[0,t)}|_\varphi$.
$|\lambda_{[0,t)}| = \inf\left\{c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,t)}) \leq 1\right\}$.
Însă $M_\varphi(\frac{1}{c} \cdot \lambda_{[0,t)}) = t \cdot Y_\varphi(\frac{1}{c})$.

Observăm că $M_\varphi(\frac{1}{c}\cdot\lambda_{[0,t)})\leq 1 \Leftrightarrow t\cdot Y_\varphi(\frac{1}{c})\leq 1 \Leftrightarrow Y_\varphi(\frac{1}{c})\leq \frac{1}{t} \xLeftrightarrow{Y_\varphi\in\mathcal{M}^{\not\rightleftarrows}}$
$\xLeftrightarrow{Y_\varphi\in\mathcal{M}^{\not\rightleftarrows}} \frac{1}{c}\leq Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t}) \Leftrightarrow \frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}\leq c \Rightarrow F_{O_\varphi}(t)=\frac{1}{Y_\varphi^{-1}}(\frac{1}{t}), \forall t>0.$ □

Propoziţia 2.7.3. *Pentru* $0<f(t)<\infty, \forall t\in(0,\infty)$ *rezultă că* $O_\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Demonstraţie. **Pasul 1:** $O_\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

$$\lim_{t\to\infty}F_{O_\varphi}(t)\overset{P_2}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{Y_\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}=\lim_{\substack{t\to 0\\ s\to 0}}\frac{1}{Y_\varphi^{-1}(s)}=\infty\Rightarrow O_\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Pasul 2: $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi>0$.

Pentru $n\in\mathbb{N}, |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi=\inf\left\{c>0: M_\varphi(\frac{1}{c}\cdot\lambda_{[n,n+1)})\leq 1\right\}$,

$$M_\varphi(\tfrac{1}{c}\cdot\lambda_{[n,n+1)})=\int_0^\infty Y_\varphi\left(\tfrac{1}{c}\cdot\lambda_{[n,n+1)}(\tau)\right)d\tau=\int_n^{n+1}Y_\varphi(\tfrac{1}{c})d\tau=Y_\varphi(\tfrac{1}{c})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_\varphi(\tfrac{1}{c}\cdot\lambda_{[n,n+1)})\leq 1\Leftrightarrow Y_\varphi(\tfrac{1}{c})\leq 1\Leftrightarrow \tfrac{1}{c}\leq Y_\varphi^{-1}(1)\Leftrightarrow \tfrac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)}\leq c\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi=\tfrac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)},\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_{[n,n+1)}|_\varphi=\tfrac{1}{Y_\varphi^{-1}(1)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow O_\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}_+).$$

□

Capitolul 3

SPAŢII BANACH DE ŞIRURI

Notăm cu S spaţiul liniar al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Definiţia 3.0.1. Numim normă Banach de şiruri o funcţie $N : S \to [0, \infty]$ cu următoarele proprietăţi:

(i) $N(s) = 0$ dacă şi numai dacă $s = 0$;

(ii) dacă $|s| \leq |u|$ atunci $N(s) \leq N(u)$;

(iii) $N(\alpha \cdot s) = |\alpha| \cdot N(s)$, pentru orice $\alpha \in C$ şi $s \in S$ cu $N(s) < \infty$;

(iv) $N(s + u) \leq N(s) + N(u)$, pentru orice $s, u \in S$.

Fie $B = B_N$ mulţimea definită de $B := \{s \in S : |S|_B := N(s) < \infty\}$. Este uşor de observat faptul că $(B, |\cdot|_B)$ este un spaţiu liniar normat. Dacă B este complet atunci B se numeşte spaţiu Banach de şiruri.

Remarca 3.0.5. B este un ideal în S (dacă $|s| \leq |u|$ şi $u \in B$ atunci de asemenea $s \in B$ şi $|s|_B \leq |u|_B$).

Remarca 3.0.6. Dacă $s_n \longrightarrow s$ în raport cu norma lui B , atunci există un subşir (s_{kn}) convergent la s punctual.

Dacă B este un spaţiu Banach de şiruri definim:

$$F_B : \mathbb{N}^* \to \bar{\mathbb{R}}_+, F_B(n) := \begin{cases} |X_{\{0,\ldots,n-1\}}|_B & \text{,dacă } X_{\{0,\ldots,n-1\}} \in B \\ \infty & \text{,dacă } X_{\{0,\ldots,n-1\}} \notin B \end{cases}.$$

Funcţia F_B se numeşte funcţia fundamentală a spaţiului Banach de şiruri B.

Vom nota cu:

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri B cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} F_B(n) = \infty$;

(ii) $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri B cu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ şi $\inf_n |X_{\{n\}}|_B > 0$;

(iii) $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ mulţimea tuturor spaţiilor Banach de şiruri cu proprietatea că: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|X_{\{j-n_0,\dots,j\}}|_B \geq \varepsilon$, pentru orice $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$.

Remarca 3.0.7. Este uşor de observat că $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.3. Considerăm $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi norma

$$|S|_B = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |S(n)|.$$

Este uşor de observat că spaţiul Banach de şiruri B în corespondenţă cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$, dar $B \notin \mathcal{E}(\mathbb{N})$ şi $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.4. Considerăm $\alpha_n = \begin{cases} 1, n = 2k \\ \frac{1}{n}, n = 2k+1 \end{cases}$ şi norma:

$$|S|_B = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |S(n)|.$$

Atunci este uşor de observat că spaţiul Banach de şiruri B în corespondenţa cu norma de mai sus are proprietatea că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$, dar $\inf_{n\in\mathbb{N}} |X_{\{n\}}|_B = 0$. Rezultă că $B \in \mathcal{L}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.5. Fie $\beta_n = \begin{cases} k, n = 2^k \\ 1, n \notin \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$ şi norma

$$|S|_B = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot |s(n)|.$$

Apoi , observăm că $\inf_{n\in\mathbb{N}} |X_{\{n\}}|_B = 1$, $\lim_{n\to\infty} F_B(n) = \infty$, dar $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{N})$, aşadar $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{L}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.6. Dacă $p \in [1, \infty]$, atunci $B = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ cu $|S|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |S(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$ are proprietatea că $B \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cup \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Într-adevăr este uşor de observat că $|X_{\{n\}}|_p = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $|X_{\{j-n_0,\dots,j\}}|_p = (n_0+1)^{\frac{1}{p}}$, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $j \in \mathbb{N}, j \geq n_0$.

Exemplul 3.0.7. Dacă $p \in [1, \infty)$ şi $\alpha = (\alpha_n)$ este un şir de numere reale strict pozitive cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, atunci spaţiul $B = l^p_\alpha(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p < \infty$, este un spaţiu Banach de şiruri în raport cu norma :

$$|s|_{l^p_\alpha} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |s(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

deoarece $F_{l^p_\alpha}(n) = \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j \right)^{\frac{1}{p}}$, rezultă că $l^p_\alpha(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.8. Dacă $p \in [1, \infty)$ şi $k = (k_n)_n$ este un şir de numere naturale cu următoarele proprietăţi:

(i) $k_n \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(k_n - n) = \infty$,

atunci spaţiul $E^p_k(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ al tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea :

$$|s|_{E^p_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=n}^{k_n} |s(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

este un spaţiu Banach de şiruri cu $E^p_k(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Exemplul 3.0.9 (Spaţiu Orlicz de şiruri)**.** Fie $N : \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ o funcţie nedescrescătoare, continuă la stânga şi care nu este identic nulă sau ∞ pe intevalul $(0, \infty)$. Definim : $Y_N(t) = \int\limits_0^t N(s)ds$, care se numeşte funcţia Young asociată lui N.

Fie $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Considerăm $M_N(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_N(|s(n)|)$.

Mulţimea O_N a tuturor şirurilor s cu proprietatea că există $k > 0$ astfel încât $M_N(k \cdot s) < \infty$ este uşor de verificat că este un spaţiu liniar.

În raport cu norma $|s|_N = \inf\{k > 0 : M_N(\frac{1}{k} \cdot s)\}$ este un spaţiu Banach de şiruri , numit spaţiu de şiruri Orlicz.

Exemple banale de spaţii de şiruri Orlicz sunt: $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}), 1 \leq p \leq \infty$, care sunt obţinute pentru $N(t) = p \cdot t^{p-1}$, dacă $1 \leq p \leq \infty$ şi

$N(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq 1 \\ \infty, t > 1 \end{cases}$, dacă $p = \infty$.

În cele ce vor urma vom nota cu $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor nedescrescătoare $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f(t) > 0$, pentru orice $t > 0$.

Propoziţia 3.0.4. *Fie $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă la stânga. Dacă $N \in \mathcal{F}$, atunci:*

(i) Funcţia Young Y_N asociată lui N este bijectivă;

(ii) Funcţia fundamentală F_{O_N} poate fi exprimată în funcţie de Y_N^{-1} prin :

$$F_{O_N}(n) = \frac{1}{Y_N^{-1}(\frac{1}{n})},\ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*;$$

(iii) $O_N \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \cap \mathcal{L}(\mathbb{N})$;

Demonstraţie. (i) Avem că Y_N este o funcţie continuă cu $Y_N(0) = 0$. Din $N(t) > 0$, pentru orice $t > 0$ rezultă că Y_N este strict crescătoare şi deoarece N este descrescătoare, obţinem că :

$$Y_N(t) = \int_0^t N(s)ds \geq \int_1^t N(s)ds \geq (t-1)\cdot N(1),\ \text{pentru orice } t > 1,$$

aşadar $\lim\limits_{t\to\infty} Y_N(t) = \infty$.
În concluzie, obţinem că Y_N este bijectivă .

(ii) Pentru că $M_N(X_{\{0,\ldots,n-1\}}) = n \cdot Y_g(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, X_{\{0,\ldots,n-1\}} \in O_N$ şi

$$\begin{aligned} F_{O_N}(n) = |X_{\{0,\ldots,n-1\}}|_N &= \inf\left\{k > 0 : M_g\Big(\frac{1}{k}\Big)\cdot X_{\{0,\ldots,n-1\}} \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{k > 0 : n\cdot Y_N\Big(\frac{1}{k}\Big) \leq 1\right\} \\ &= \frac{1}{Y_N^{-1}\Big(\frac{1}{n}\Big)}. \end{aligned}$$

(iii) Folosind un argument asemănător, ca şi în (ii), vom obţine că :

$$|X_{\{j-n_0,\ldots,j\}}|_N = \frac{1}{Y_N^{-1}}\Big(\frac{1}{n_0}\Big),\ \text{pentru orice } j, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ şi } j \geq n_0. \quad (*)$$

Având în vedere faptul că, Y_N^{-1} este o funcţie continuă cu $Y_N^{-1}(0) = 0$, din relaţia $(*)$, deducem că $O_N \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$.

Observând că $|X_{\{n\}}|_N = \frac{1}{Y_N^{-1}(1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi folosind Rem. 3.0.7, obţinem că $O_N \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$.

$\square$

Exemplul 3.0.10. Fie $N \in \mathcal{F}$, o funcţie continuă la stânga şi (α_n), un şir de numere reale strict pozitive. Dacă O_N este un spaţiu Orlicz asociat funcţiei N, atunci notăm cu O_N^α , spaţiul tuturor şirurilor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că şirul $s_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, s_\alpha(n) = \alpha_n \cdot s(n)$, aparţine lui O_N.
Avem că O_N este un spaţiu Banach de şiruri , în raport cu norma:

$$|s|_{O_N}^\alpha = |s_\alpha|_{O_N}.$$

Notăm cu $\mathcal{F}_1$, mulţimea tuturor funcţiilor $f \in \mathcal{F}$, cu proprietatea că există $\delta > 0$ şi $c > 0$, astfel încât : $f(2t) \le c \cdot f(t)$, pentru orice $t \in [0, \delta]$.

Propoziţia 3.0.5. *Dacă N este o funcţie continuă la stânga, cu $N \in \mathcal{F}_1$ şi $(\alpha_n) \subset (0, \infty)$ un şir care converge la 0 cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot N(\alpha_n) = \infty$, atunci $O_N^\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $M > 0$, astfel încât $F_{O_N^\alpha}(n) \le M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât , pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem :

$$F_{O_N^\infty}(n) = |X_{\{0,\dots,n-1\}}|_{O_N^\alpha} = \inf\Big\{k > 0 : \sum_{j=0}^{n-1} Y_N\Big(\frac{\alpha_j}{k}\Big) \le 1\Big\},$$

rezultă că

$$\sum_{j=0}^{n-1} Y_N\Big(\frac{\alpha_j}{M}\Big) \le 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce arată că

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_N\Big(\frac{\alpha_n}{M}\Big) \le 1.$$

Fie $\delta > 0$ şi $c > 0$ astfel încât $N(2t) \le c \cdot N(t)$, pentru orice $t \in [0, \delta]$. Întrucât $\alpha_n \longrightarrow 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\alpha_n < \frac{\delta}{2}$, pentru orice $n \ge n_0$.
Fie $k_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $2^{k_0} \ge M$.

Pentru $n \geq n_0$, avem :

$$
\begin{aligned}
Y_N\Big(\frac{\alpha_n}{M}\Big) = \int\limits_0^{\frac{\alpha_n}{M}} N(s)ds \geq \int\limits_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0}}} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{2\cdot c}\cdot \int\limits_0^{\frac{\alpha_n}{2^{k_0-1}}} N(s)ds \geq \ldots \geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_0+1}}\cdot \int\limits_0^{2\cdot\alpha_n} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_0+1}}\cdot \int\limits_{\alpha_n}^{2\cdot\alpha_n} N(s)ds \\
&\geq \frac{1}{(2\cdot c)^{k_o+1}}\cdot \alpha_n \cdot N(\alpha_n),
\end{aligned}
$$

ceea ce implică $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n \cdot N(\alpha_n) \leq (2\cdot c)^{k_0+1} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} Y_N(\frac{\alpha_n}{M}) \leq \infty$.
Prin urmare, $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n \cdot N(\alpha_n)$ este convergentă fapt ce contrazice ipoteza. $\square$

Capitolul 4

LAST

4.1 *Familii de evoluţie în timp discret. Dihotomii exponenţiale uniforme*

Definiţia 4.1.1. O familie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ de operatori liniari finiţiţi pe $\mathbb{X}$ o numim **familie de evoluţie (în timp discret)** dacă

(e_1) $U(n,n) = I$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

(e_2) $U(m,n)U(n,n_0) = U(m,n_0)$ pentru orice $m,n,n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$.

Dacă, în plus, există $M,\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât

(e_3) $\|U(m,n)\| \leq Me^{\omega(m-n)}$ pentru orice $(m,n) \in \Delta$,

atunci spunem că $\mathcal{U}$ are **creştere exponenţială uniformă**.

Remarca 4.1.1. Familiile de evoluţie în timp discret apar ca solutii ale ecuaţiilor diferenţiale abstracte (recursive) de forma

$$x(n+1) = A(n)x(n)\ ,\ n \in \mathbb{N}\ , \tag{4.1.1}$$

unde $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de operatori liniari si finiţi. Considerăm

$$U(m,n) = \begin{cases} A(m-1)...A(n+1)A(n) & ,\ m > n \\ I & ,\ m = n \end{cases}$$

proprietaţile (e_1), (e_2) sunt imediate. De asemenea, se poate verifica faptul că (e_3) este verificată dacă şi numai dacă $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\| < \infty$.

Definiţia 4.1.2. Familia de evoluţie $\{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ are o **dihotomie exponenţială uniformă** dacă există o familie de proiectoare $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ şi două constante $N, \nu > 0$ astfel încât

(d_1) $U(m,n)P(n) = P(m)U(m,n)$ pentru orice $(m,n) \in \Delta$;

(d_2) pentru fiecare $(m,n) \in \Delta$, restricţia lui $U(m,n)$ de la $\ker P(n)$ până la $\ker P(m)$, notat cu $U(m,n)_|$, este inversabilă;

(d_3) $\|U(m,n)P(n)x\| \le Ne^{-\nu(m-n)}\|P(n)x\|$ şi $\|U(m,n)(I-P(n))x\| \ge$ $\ge \frac{1}{N}e^{\nu(m-n)}\|(I-P(n))x\|$ pentru fiecare $(m,n) \in \Delta$ şi fiecare $x \in \mathbb{X}$.

Remarca 4.1.2. Dacă familia de evoluţie $\{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ are o dihotomie exponenţială uniformă, atunci

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P(n)\| < \infty \ .$$

Demonstraţia urmează ca în [**?**, Lema 4.2].

Pentru o familie de evoluţie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$, subspaţiul lui $x \in \mathbb{X}$ cu traiectoria $(U(n+n_0,n_0)x)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescătoare la zero va fi notat cu $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ (numit şi **subspaţiul stabil $\mathcal{U}$ la momentul** n_0). Este uşor de verificat că

$$U(n,n_0)\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0) \subset \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n) \ , \quad (n,n_0) \in \Delta \ . \tag{4.1.2}$$

Remarca 4.1.3. Dacă familia de evoluţie $\mathcal{U}$ are o dihotomie exponenţială uniformă cu $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de proiectoare, atunci $P(n_0)\mathbb{X} = \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr, incluziunea $P(n_0)\mathbb{X} \subset \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ este imediată. Acum, fie $x \in \mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ şi observăm că

$$\|U(n,n_0)(I-P(n_0))x\| \ge \frac{1}{N}e^{\nu(n-n_0)}\|(I-P(n_0))x\| \ .$$

Întrucât

$$\|U(n,n_0)(I-P(n_0))x\| \le \|U(n,n_0)x\| + Ne^{-\nu(n-n_0)}\|P(n_0)x\| \to 0 \text{ cum } n \to \infty \ ,$$

obţinem că $I - P(n_0)x = 0$. Prin urmare, $x = P(n_0)x \in P(n_0)\mathbb{X}$.

În particular, obţinem că $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ este un subşpaţiu închis a lui $\mathbb{X}$, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definiţia 4.1.3. Fie $E, F \subset \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ două spaţii Banach şi $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie. Perechea (E,F) spunem că este **admisibilă** pentru $\mathcal{U}$ dacă pentru orice $f \in E$, există $x \in \mathbb{X}$ astfel încât şirul $u(\cdot, f, x)$ definit prin

$$u(n,f,x) = \begin{cases} x & , \ n = 0 \\ U(n,0)x + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U(n,k)f(k-1) & , \ n \geq 1 \end{cases}$$

constă în F.

Remarca 4.1.4. Dacă $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ este determinat de ecuaţia diferenţială (4.1.1), atunci soluţia sistemului

$$\begin{cases} x(n+1) = A(n)x(n) + f(n) & , \ n \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{X} \end{cases}$$

este dată de şirul $(u(n; f, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Fixat $\mathcal{F}(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ un şir de spaţiu Schäffer şi $n_0 \in \mathbb{N}$, definim subspaţiul vectorial a lui $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) := \{x \in \mathbb{X} \, : \, (U(n+n_0, n_0)x)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{X}) \} \ . \tag{4.1.3}$$

Datorită proprietaţiilor şirurilor de spaţii Schäffer, avem că

$$\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) = \{x \in \mathbb{X} \, : \, \exists\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}) \text{ şi } n_1 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } U(n,n_0)x = f(n) \, , \forall\, n \geq n_1\} \ .$$

De aici, putem stabili, de asemenea, că

$$U(n,n_0)\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0) \subset \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n) \ , \quad (n,n_0) \in \Delta \ . \tag{4.1.4}$$

Teorema 4.1.1. *Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ două şiruri de spaţii Schäffer şi fie $\mathcal{U} := \{U(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ o familie de evoluţie. Presupunem că:*

(h_1) *subspaţiul $\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0)$ este închis şi admite o completare închiă, i.e. există un subspaţiu închis $\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$ a lui $\mathbb{X}$ care satisface descompunerea*

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(0) \oplus \mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$$

(vom nota cu $P_{\mathcal{F}}(0)$ şi $Q_{\mathcal{F}}(0)$ proiecţiile corespunzătoare)

(h_2) *perechea $(\mathcal{E}(\mathbb{X}), \mathcal{F}(\mathbb{X}))$ este admisibilă pentru familia de evoluţie $\mathcal{U}$*

(h_3) $\alpha_{\mathcal{E}}(n)\beta_{\mathcal{F}}(n) \to \infty$.

Atunci, familia de evoluţie $\mathcal{U}$ *are o dihotomie exponenţială uniformă. În plus, pentru orice* $n_0 \in \mathbb{N}$, *subspaţiul* $\mathbb{X}_{1,\mathcal{F}}(n_0)$ *coincide cu* $\mathbb{S}_{\mathcal{U}}(n_0)$ *şi admite o completare închisă dată de* $\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(n_0) := U(n_0, 0)\mathbb{X}_{2,\mathcal{F}}(0)$.

Teorema 4.1.2. *Dacă familia de evoluţie* $\mathcal{U} := \{U(m, n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ *are o dihotomie exponenţială uniformă, atunci fiecare pereche* $(\mathcal{E}(\mathbb{X}), \mathcal{F}(\mathbb{X}))$ *a şirurilor de spaţii Schäffer cu* $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ *este admisibilă pentru* $\mathcal{U}$.