23.02.2011 MAGS an II, Sem. al II-lea L. Sacu

# Spații de funcții aplicate în teoria controlului

## Cap. I: Spații de funcții

### §1.1. Normă generalizată de funcții

Notăm $m$ = măs. Lebesgue și $\mathcal{M}$ = sp. liniar al fcț. $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ măsurabile Lebesgue în care identificăm funcțiile egale a.p.t.

**Def. 1**: O apl. $N: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ s.n. <u>normă generalizată (de funcții)</u> dacă

$(n_1)$ $N(f) = 0 \iff f = 0$ a.p.t.;

$(n_2)$ dacă $|f(t)| \le |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$ atunci $N(f) \le N(g)$;

$(n_3)$ $N(\alpha f) = |\alpha| \cdot N(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$;

$(n_4)$ $N(f+g) \le N(f) + N(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{M}$.

**Def. 2**: Dacă $N$ este o normă generalizată atunci

$$B = B_N \overset{d}{=} \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \}$$ s.n. <u>spațiu de funcții asociat normei $N$</u>

**Rem. 1**: $B$ - sp. liniar.

**Dem.**: Dacă $f, g \in B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ at. $N(\alpha f + \beta g) \overset{(n_4)}{\le} N(\alpha f) + N(\beta g) =$

$= |\alpha| N(f) + |\beta| N(g) < \infty \implies \alpha f + \beta g \in B$.

**Rem. 2**: $B = B_N$ este un ideal în $\mathcal{M}$ i.e. dacă $|f(t)| \le |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$ și $g \in B$ atunci $f \in B$.

**Dem.**: Rez. imediat din $(n_2)$. $N(f) \le N(g) < \infty$.

Def. 3: Fie $N$ o normă generaliz. și $B = B_N$. ~~Fie~~ Definim

$$|f|_B :\stackrel{d}{=} N(f).$$ Apl. $|\cdot|_B$ s.n. normă de funcții.

Rem. 3: Dacă $N$ este normă generaliz. și $B = B_N$, atunci $(B, |\cdot|_B)$ este S.V.N.

Def. 4: Dacă $(B, |\cdot|_B)$ este complet, at. $B$ s.n. sp. Banach de funcții.

Rem. 4: Dacă $B$ este sp. Banach de funcții și $|f(t)| \le |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+$ și $g \in B$, atunci $f \in B$ și $|f|_B \le |g|_B$.

Not.: $Q(\mathbb{R}_+)$ clasa spațiilor Banach de funcții $B$ cu proprietatea că $\chi_{[0,t)} \in B$, $\forall t > 0$.

Not. Pentru $A \in \mathbb{R}_+$, $\chi_A$ - funcția caracteristică a mulțimii $A$, adică

$$\chi_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

Exemplul 1: $N(f) = \|f\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$.

- Dacă $p \in [1, \infty)$ atunci:

$$N(\chi_{[0,t)}) = \left( \int_0^\infty \chi_{[0,t)}^p(s)\, ds \right)^{1/p} = t^{1/p} < \infty \Rightarrow \chi_{[0,t)} \in B, \ \forall t \ge 0.$$

$$\Rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+), \ \forall p \in [1, \infty).$$

- Dacă $p = \infty$ atunci

$$N(f) = \|f\|_\infty \Rightarrow N(\chi_{[0,t)}) = 1, \ \forall t > 0 \to \chi_{[0,t)} \in B, \ \forall t > 0$$

$$\to L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in Q(\mathbb{R}_+).$$

Def. 5: Fie $B \in Q(\mathbb{R}_+)$. Aplicația $F_B : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $F_B(t) = |\chi_{[0,t)}|_B$ s.n. funcția fundamentală a spațiului $B$.

Prop. 1: Dacă $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ atunci $F_B \in \mathcal{M}^{\neq}_{(0,\infty)}$.

Dem.: Fie $t_1 < t_2$. $\chi_{[0,t_1)} \le \chi_{[0,t_2)} \overset{(n_2)}{\Longrightarrow} F_B(t_1) \le F_B(t_2)$.

Exemplul 2: $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

$$F_B(t) = \begin{cases} t^{1/p} &, p \in [1,\infty) \\ 1 &, p = \infty \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*.$$

## § 1.2. Clase de spații de funcții

Notăm: • $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ = clasa spațiilor Banach de funcții $B \in Q(\mathbb{R}_+)$ cu prop. că:

$\lim\limits_{t\to\infty} F_B(t) = +\infty$ și

• $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ = clasa sp. Banach de funcții $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ cu prop. că

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |\chi_{[n,n+1)}|_B > 0.$$

Exemplul 1: $N(\cdot) = \|\cdot\|_p$, $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Din Ex. 2, § 1.1, rezultă că:

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow p \in [1,\infty)$.

Rem. 1: Incluziunea $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ este strictă.

Exemplul 2: $N(f) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f(t)|\,dt$, $\forall f \in \mathcal{M}$.

1) $N$ - normă generaliz.

$(n_1)$ $N(f) = 0 \Longrightarrow \int_n^{n+1} |f(t)|\,dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$ a.p.t. pe $[n, n+1]$, $\forall n$

$\Rightarrow f = 0$ a.p.t.

$(n_3)$ $N(\alpha f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |\alpha f(t)|\,dt = |\alpha| \cdot N(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$.

$(n_2)$ $|f(t)| \le |g(t)|$ a.p.t. $t \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f(t)|\,dt \le \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |g(t)|\,dt$

$\overset{\sum_{0}^{\infty}}{\Longrightarrow} N(f) \le N(g)$

$(n_4)$ $|f(t)+g(t)| \le |f(t)| + |g(t)|$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |f(t)+g(t)|\,dt \le \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |f(t)|\,dt + \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |g(t)|\,dt \quad \Big|\ \sum_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow N(f+g) \le N(f) + N(g).$$

$\Rightarrow$ $N$ - normă generaliz.

2) Fie $B = B_N = \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \}$, $|f|_B = N(f)$.

Avem $(B, |\cdot|_B)$ e S.N.N.

Arăt. că $(B, |\cdot|_B)$ e complet.

Fie $(f_m)_m \in \mathcal{F}_B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_m - f_p|_B < \varepsilon$, $\forall m, p \ge m_0$. (1)

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |f_m(t) - f_p(t)|\,dt < \varepsilon, \ \forall m, p \ge m_0. \quad (2).$$

Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat și $\delta > 0$.

$$\Rightarrow \exists m_\delta \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \quad \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} |f_m(t) - f_p(t)|\,dt \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} |f_m(t) - f_p(t)|\,dt < \frac{\delta}{k+1}, \ \forall m, p \ge m_\delta$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} |f_m(t) - f_p(t)|\,dt < \delta, \quad \forall m, p \ge m_\delta.$$

$$\Rightarrow (f_m)_m \in \mathcal{F}_{L^1_{[k,k+1]}} \Longrightarrow \exists \varphi^k \in L^1_{[k,k+1]} \text{ a.î. } f_m \xrightarrow{L^1_{[k,k+1]}} \varphi^k$$

$$\Longrightarrow \exists (f_{m_j}) \subset (f_m) \text{ cu } f_{m_j} \longrightarrow \varphi^k \text{ a.p.t. pe } [k, k+1].$$

Definim $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(t) = \varphi^k(t)$, $t \in [k, k+1)$

$$\Rightarrow \exists (f_{m_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset (f_m) \text{ cu } f_{m_i} \longrightarrow f \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+.$$

(reconstitui din $f_{m_j}$, pierd mult. de măs. nulă)

Din (2) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f_m(t) - f_{m_i}(t)|\, dt \underset{\substack{\text{trecem la} \\ \text{lim. sub } \int}}{\leq} \varepsilon, \ \forall m, \underset{(m_i \geq 0)}{i} \geq m_0.$

Facem $m_i \to \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon, \ \forall m \geq m_0.$ (3)

Din (3) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_m - f \in B, \ \forall m \geq m_0 \\ f_m \in B \end{array}\right\} \Rightarrow f = -(f_m - f) + f_m \in B$

Din (3) avem că $|f_m - f|_B < \varepsilon, \ \forall m \geq m_0 \Rightarrow f_m \xrightarrow{B} f \Rightarrow B$ e complet

$\Rightarrow (B, |\cdot|_B)$ sp. Banach de funcții.

3) $\mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

$$N(\chi_{[0,t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} \chi_{[0,t)}(s)\, ds \leq \sum_{n=0}^{[t]+1} \frac{1}{n+1} < \infty$$

$\Rightarrow \underset{\forall t > 0}{\chi_{[0,t)}} \in B \Rightarrow B \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}_+)$.

4) $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$F_B(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \chi_{[0,n+1)}(s)\, ds = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Fie $t \geq n+1 \Rightarrow F_B(t) \geq F_B(n+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \Rightarrow F_B(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$

$\Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

5) $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

$$|\chi_{\cancel{[0,t)}[n,n+1)}|_B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \chi_{[n,n+1)}(s)\, ds = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} |\chi_{[n,n+1)}| = 0 \Rightarrow B \notin \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

2.03.2011. ## §1.3. Funcții Young



Fie $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty]$ monoton crescătoare, continuă la stânga cu $\varphi|_{(0,\infty)}\not\equiv 0$ și $\varphi|_{(0,\infty)}\not\equiv\infty$.

Def. 1: Apl. $Y_\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty]$, $Y_\varphi(t)=\int_0^t \varphi(\tau)d\tau$ s.n. funcție Young asociată lui $\varphi$.

Rem. 1: $Y_\varphi(0)=0$ și $Y_\varphi\in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)}$.

Teor. 1: $Y_\varphi\in \mathcal{C}v_{[0,\infty)}$.

Dem.: $Y_\varphi\in \mathcal{C}_{[0,\infty)}$ (Ex.)

Arătăm că $Y_\varphi\in \mathcal{J}_{[0,\infty)}$ (convexă Jensen).

Fie $t,s\geq 0$, $s\leq t$. Arăt. că

$$Y_\varphi\left(\frac{t+s}{2}\right)\leq \frac{1}{2}\left(Y_\varphi(t)+Y_\varphi(s)\right). \quad (1)$$

Dacă $Y_\varphi(t)=\infty$ sau $Y_\varphi(s)=\infty$ $\Rightarrow$ (1) evidentă.

Pp. $Y_\varphi(t), Y_\varphi(s)<\infty$.

$$s\leq \frac{s+t}{2}\leq t$$

$$\Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right)\leq Y_\varphi(t)<\infty.$$

Calculăm $Y_\varphi(t)+Y_\varphi(s)-2Y_\varphi\left(\frac{t+s}{2}\right)=$

$$=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau+\int_0^s\varphi(\tau)d\tau-2\left[\int_0^s\varphi(\tau)d\tau+\int_s^{\frac{t+s}{2}}\varphi(\tau)d\tau\right]=$$

$$\int_0^t \varphi(\tau)d\tau - \int_0^s \varphi(\tau)d\tau - 2\int_s^{\frac{s+t}{2}} \varphi(\tau)\,d\tau = \int_s^t \varphi(\tau)d\tau - 2\int_s^{\frac{t+s}{2}}\varphi(\tau)d\tau =$$

$$\int_s^{\frac{t+s}{2}}\varphi(\tau)d\tau + \int_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - 2\int_s^{\frac{t+s}{2}}\varphi(\tau)d\tau = \int_{\frac{t+s}{2}}^t \varphi(\tau)d\tau - \int_s^{\frac{t+s}{2}}\varphi(\tau)\,d\tau \geq 0,$$

căci $\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}$, $\varphi \geq 0$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_\varphi \in \mathcal{J}_{[0,\infty)} \\ I_\varphi \in \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow I_\varphi \in \mathcal{C}_{v\,[0,\infty)}.$$

## §1.4. Spaţii Orlicz

Fie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ cont. la stânga, crescătoare, $\varphi_{|[0,\infty)} \not\equiv 0$ şi $\varphi_{|[0,\infty)} \not\equiv \infty$ şi

$I_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau,\ \forall t \geq 0.$

Fie $f \in \mathcal{M}$. Definim:

$$M_\varphi(f) \stackrel{d}{=} \int_0^\infty I_\varphi(|f(t)|)\,dt \quad , \text{resp.}$$

$$O_\varphi \stackrel{d}{=} \{ f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty \}.$$

Teor. 1: $O_\varphi$ este subsp. liniar în $\mathcal{M}$.

Dem.: Fie $f, g \in O_\varphi \Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0$ cu $M_\varphi(c_1 f) < \infty$, $M_\varphi(c_2 g) < \infty$.

Not. $c = \frac{1}{2}\cdot \min\{c_1, c_2\}$.

$$c|f(t)+g(t)| \leq c|f(t)| + c|g(t)| \leq \begin{cases} c_1|f(t)| & , |f(t)| \geq |g(t)| \\ c_2|g(t)| & , |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_\varphi(c|f(t)+g(t)|) \leq \begin{cases} Y_\varphi(c_1|f(t)|), & \text{dacă } |f(t)| \geq |g(t)| \\ Y_\varphi(c_2|g(t)|), & \text{dacă } |f(t)| < |g(t)| \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_\varphi(c|f(t)+g(t)|) \leq Y_\varphi(c_1|f(t)|) + Y_\varphi(c_2|g(t)|), \quad \forall t \geq 0.$$

$$\overset{\int_0^\infty}{\Longrightarrow} M_\varphi(c(f+g)) \leq M_\varphi(c_1 f) + M_\varphi(c_2 g) < \infty$$

$$\Rightarrow f+g \in O_\varphi.$$

Fie $f \in O_\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0 \Rightarrow Y_\varphi(\lambda f) = 0 \Rightarrow M_\varphi(\lambda f) = 0$

Dacă $\lambda \neq 0$, at. din $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ a.î. $M_\varphi(cf) < \infty$.

Fie $\tilde{c} = \frac{c}{|\lambda|}$.

$$M_\varphi(\tilde{c}\lambda f) = \int_0^\infty Y_\varphi(\tilde{c}|\lambda f(t)|)\,dt = M_\varphi(cf) < \infty.$$

$$\Rightarrow \lambda f \in O_\varphi.$$

Fie $f \in \mathcal{M}$. Definim

$$A_f = \{c > 0 : M_\varphi(\tfrac{1}{c} f) \leq 1\}$$

Rem. 2: Dacă $c \in A_f$ atunci $[c, \infty) \subset A_f$.

Dem.: Fie $\tilde{c} > c \Rightarrow M_\varphi(\frac{1}{\tilde{c}} f) = \int_0^\infty Y_\varphi(\underbrace{\tfrac{1}{\tilde{c}}}_{\leq \frac{1}{c}}|f(t)|)\,dt \leq M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1.$

Definim $N : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, $N(f) = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ +\infty, & A_f = \emptyset. \end{cases}$

Teor. 2: $N$ este o normă generalizată de funcții.

Dem.: $(n_1)$ $N(f) = 0 \iff f = 0$ a.p.t.

$$N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \inf A_f = 0 \\ A_f \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \exists (c_n) \in A_f \text{ cu } c_n < N(f) + \frac{1}{n} \text{ și } M_\varphi\left(\frac{1}{c_n} f\right) \leq 1$$

$\Rightarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f = 0$ a.p.t. $\Rightarrow \forall c > 0 \rightarrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}|f(t)|\right) = 0$ a.p.t.

$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) = 0 \leq 1 \Rightarrow A_f = (0, \infty) \neq 0 \Rightarrow N(f) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pp., R.A., $f \neq 0$ a.p.t. $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{L}$, $m(A) > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î.

$|f(t)| \geq \delta$, $\forall t \in A$.

$$\left.\begin{array}{l} A_f \subset (0, \infty) \\ N(f) = 0 \rightarrow A_f \neq \emptyset, \ \inf A_f \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Dem. 2}} A_f = (0, \infty).$$

Fie $c > 0$ arbitrar $\rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \geq M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}|f(t)|\right) dt \geq \int_A \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}|f(t)|\right) dt \geq$$

$$\geq \int_A \Upsilon_\varphi\left(\frac{\delta}{c}\right) dt = \Upsilon_\varphi\left(\frac{\delta}{c}\right) m(A)$$

$$\Rightarrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{\delta}{c}\right) \leq \frac{1}{m(A)}$$

Dar $\Upsilon_\varphi = \int_0^{\delta/c} \varphi(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{m(A)}$, $\forall c > 0$.

$$\xrightarrow{c \searrow 0} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{m(A)}. \quad \text{Dar } \varphi \geq 0 \text{ și } \varphi \in \mathcal{M}^{\neq}_{[0,\infty)}$$

$\Rightarrow \varphi\big|_{(0,\infty)} = 0$ a.p.t., absurd.

Pp. fiind falsă $\Rightarrow f = 0$ a.p.t.

$(n_2)$ Dacă $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.p.t. $t \geq 0$ atunci $N(f) \leq N(g)$.

- Dacă $N(g) = \infty \Rightarrow$ evident
- Dacă $N(g) < \infty \Rightarrow \exists c > 0$ a.î. $M_\varphi\left(\frac{1}{c} g\right) \leq 1$.

E suf. să arăt că $A_g \subset A_f$. Fie $c_1 \in A_g$.

$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) \leq M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} g\right) \leq 1 \Rightarrow A_f \neq \emptyset$ și $A_g \subset A_f$.

$(n_3)$ Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ și $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$.

Arăt. că $N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.

Dacă $\lambda = 0 \underset{(n_1)}{\Longrightarrow}$ evident.

Pp. $\lambda \neq 0$. Este suf. să arăt. că $A_{\lambda f} = |\lambda| A_f$. (3)

$\boxed{\subset}$ Fie $c \in A_{\lambda f} \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c} f\right) \leq 1$.

Fie $c_1 = \frac{c}{|\lambda|}$.

$M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) = M_\varphi\left(\frac{|\lambda|}{c} f\right) = M_\varphi\left(\frac{\lambda}{c} f\right) \leq 1 \Rightarrow c_1 \in A_f$

$\Rightarrow c = c_1 |\lambda| \in |\lambda| A_f \Rightarrow A_{\lambda f} \subset |\lambda| A_f$.

$\boxed{\supset}$ Fie $c \in A_f$. Arăt. că $|\lambda| \cdot c \in A_{\lambda f}$.

$M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda| c} \cdot \lambda f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{|\lambda| c} |\lambda| f\right) = M_\varphi\left(\frac{1}{c} f\right) \leq 1$

$\Rightarrow |\lambda| c \in A_{\lambda f} \Rightarrow |\lambda| A_f \subset A_{\lambda f} \Longrightarrow (3)$.

$\Rightarrow A_{\lambda f} \neq \emptyset \Longrightarrow \inf A_{\lambda f} = |\lambda| \inf A_f \iff$

$N(\lambda f) = |\lambda| \cdot N(f)$.

$(n_4)$ Fie $f, g \in \mathcal{M}$. Arăt. că

$$N(f+g) \le N(f) + N(g). \quad (4)$$

Dacă $N(f) = \infty$ sau $N(g) = \infty \Rightarrow (4)$.

Dacă $N(f), N(g) < \infty \Rightarrow A_f, A_g \neq \emptyset$.

Arăt. că $A_f + A_g \subset A_{f+g}$. (5)

Fie $c_1 \in A_f$ și $c_2 \in A_g \Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right) \le 1$ și $M_\varphi\left(\frac{1}{c_2} g\right) \le 1$.

Fie $t \ge 0$. $\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)| \le \frac{1}{c_1+c_2}|f(t)| + \frac{1}{c_1+c_2}|g(t)| =$

$$= \frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{|g(t)|}{c_2}.$$

$$Y_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow} \Rightarrow Y_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}|f(t)+g(t)|\right) \le Y_\varphi\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\frac{|f(t)|}{c_1} + \frac{c_2}{c_1+c_2}\cdot\frac{|g(t)|}{c_2}\right) \le$$

$$\overset{Y_\varphi \in Cv}{\le} \frac{c_1}{c_1+c_2} Y_\varphi\left(\frac{|f(t)|}{c_1}\right) + \frac{c_2}{c_1+c_2} Y_\varphi\left(\frac{|g(t)|}{c_2}\right).$$

$$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_1+c_2}(f+g)\right) \le \frac{c_1}{c_1+c_2}\cdot \underbrace{M_\varphi\left(\frac{1}{c_1} f\right)}_{\le 1} + \frac{c_2}{c_1+c_2} \underbrace{M_\varphi\left(\frac{1}{c_2} g\right)}_{\le 1} \le$$

$$\le \frac{c_1}{c_1+c_2} + \frac{c_2}{c_1+c_2} = 1$$

$\Rightarrow$ ~~f+g~~ $c_1 + c_2 \in A_{f+g} \Rightarrow (5)$.

$\Rightarrow A_{f+g} \neq \emptyset \Rightarrow \inf A_{f+g} \le \inf A_f + \inf A_g \Rightarrow (4)$.

Din $(n_1)-(n_4) \Rightarrow N$ este normă generalizată.

Fie $B_N = \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \} = \{ f \in \mathcal{M} : A_f \neq \emptyset \}$

<u>Teor. 3</u>: $O_\varphi = \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \}$.

<u>Dem.</u>: $\boxed{\supset}$ Fie $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists c > 0$ cu

$M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 < \infty \Rightarrow f \in O_\varphi$.

$\boxed{\subset}$ Fie $f \in O_\varphi \Rightarrow \exists c > 0$ cu $M_\varphi(cf) < \infty$.

Cazul I: $M_\varphi(cf) = 0 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset \Rightarrow N(f) < \infty$.

Cazul II: $M_\varphi(cf) > 0. \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $n_0 \geq M_\varphi(cf)$.

$$M_\varphi(cf) = \int_0^\infty \mathcal{I}_\varphi(c|f(t)|)\, dt.$$

(cea mai mică valoare a lui $\varphi$ pe $[0, \frac{c}{n_0}|f(t)|]$ ⇒ toți termenii sunt mai mari)

$\varphi \nearrow$

$$\mathcal{I}_\varphi(c|f(t)|) = \int_0^{c|f(t)|} \varphi(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n_0} \int_{\frac{(j-1)c}{n_0}|f(t)|}^{\frac{jc}{n_0}|f(t)|} \varphi(z)\, dz \geq n_0 \underbrace{\int_0^{\frac{c}{n_0}|f(t)|} \varphi(z)\, dz}_{\neq 0} =$$

$$= n_0 \cdot \mathcal{I}_\varphi\left( \frac{c}{n_0} |f(t)| \right)$$

$$\Rightarrow n_0 \cdot M_\varphi\left( \frac{c}{n_0} f \right) \leq M_\varphi(cf) \leq n_0 \Rightarrow M_\varphi\left( \frac{c}{n_0} f \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{c}{n_0} \right)^{-1} \in A_f \Rightarrow A_f \neq \emptyset.$$

Din teor. 3 ⇒ are sens să definim

$$|f|_\varphi := N(f), \ \forall f \in O_\varphi.$$

Rez. că $|f|_\varphi = \inf_{c>0} \{ M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 \}$

<u>Terminologie</u>: $|\cdot|_\varphi$ s.n. <u>norma Orlicz a funcției $f$</u>.

$\Rightarrow (O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ ste S.V.N.

Terminologie: $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ - sp. Orlicz.

<u>Problemă</u>: completitudinea.

<u>Exemplu</u>: $O_\varphi = \{ f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty \}$.

$Q_\varphi = \{ f \in \mathcal{M} : M_\varphi(f) < \infty \}$.

$Q_\varphi \subsetneqq O_\varphi$.

$$\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty], \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0,1] \\ \infty & , t > 1 \end{cases}$$

$$\Upsilon_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \infty & , t > 1 \\ 0 & , t \in [0,1] \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(t) = 2$.

$M_\varphi(f) = \infty$, $\quad M_\varphi(\frac{1}{2} f) = 0 < \infty$.

7.03.2011. §1.5: Proprietăți de completitudine ale spațiilor de funcții

Fie $N : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ o normă generalizată de funcții,

$B = B_N = \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \}$, $|f|_B := N(f)$.

Rem. 1: $(B, |\cdot|_B)$ este S.V.N.

Rem. 2: $f \in B \iff |f| \in B$. În plus, $|f|_B = \big||f|\big|_B$.

Dem.: $\boxed{\Rightarrow}$ Pp. $f \in B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \big||f|\big| \le |f| \\ f \in B \end{array}\right\} \Rightarrow |f| \in B$ și $N(|f|) \le N(f)$

$\iff \big||f|\big|_B \le |f|_B$. (1)

$\boxed{\Leftarrow}$ Pp. $|f| \in B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |f| \le \big||f|\big| \\ |f| \in B \end{array}\right\} \Rightarrow f \in B$ și $N(f) \le N(|f|)$

$\iff |f|_B \le \big||f|\big|_B$. (2)

$\xRightarrow[(2)]{(1)}$ q.e.d.

Def. 1: Sp. că $N$ satisface proprietatea Beppo-Levi d.n.d.

$(n_5)$ Dacă $0 \le f_n$, $f_n \nearrow f$ a.p.t. atunci $N(f_n) \uparrow N(f)$.

Sp. că $N$ satisf.:

„$(n_6)$" Dacă $A \in \mathcal{X}$ cu $m(A) < \infty$ atunci $N(\chi_A) < \infty$;

„$(n_7)$" $\forall A \in \mathcal{X}$ cu $m(A) < \infty$ $\exists K_A \in (0,\infty)$ astfel încât

$$\int_A |f| \le K_A \cdot N(f), \ \forall f \in \mathcal{M}. \ (*)$$

Rem. 3: Dacă N satisf. $(n_6)$ atunci pt. orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$

$\Rightarrow \chi_A \in B$.

În particular $B \in Q(\mathbb{R}_+)$.

Rem. 4: Dacă $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) = \infty$ atunci $(*)$ e evidentă.

De aceea rel. $(*)$ apare uneori pentru $f \in B$.

Rem. 5: Fie $\mathcal{E}$ – sp. funcțiilor etajate $s: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ cu etaje de măsură finită.

Dacă N satisface $(n_6)$ atunci $\mathcal{E} \subset B$.

Dem.: Fie $s \in \mathcal{E} \Rightarrow s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, unde $A_k \in \mathcal{L}$ cu $m(A_k) < \infty$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Avem $\chi_{A_k} \in B$, $B$ = sp. liniar $\Rightarrow s \in B$.

Ex 1: Fie $B = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $|\cdot|_B = \|\cdot\|_p$.

$\boxed{p=1}$ Prop. $(n_7)$ este evidentă.

$\boxed{p=\infty}$ Fie $A \in \mathcal{L}$, $m(A) < \infty$.

$$\int_A |f| \le m(A) \cdot \|f\|_\infty, \ \forall f \in B \Rightarrow K_A = \begin{cases} m(A), & m(A) > 0 \\ 1, & m(A) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{p\in(1,\infty)}$ Fie $A \in \mathcal{L}$, $m(A) < \infty$.

$$\int_A |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f| \chi_A \le \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}_+} \chi_A^q\right)^{1/q} = (m(A))^{1/q} \cdot \|f\|_p, \ \forall f \in B$$

$$\Rightarrow K_A = (m(A))^{1/q}.$$

În concluzie, spațiile $L^p$ satisf. $(n_5) - (n_7)$.

Prop. 1: Dacă N satisface prop. $(n_7)$ și $f_n \to f$ în $B$ atunci pt. orice $A \in \mathcal{L}$ cu $m(A) < \infty$ există $(f_{k_n}) \subset (f_n)$ astfel încât $f_{k_n} \to f$ a.p.t. pe $A$.

Dem.: Fie $f_n \xrightarrow{B} f \Rightarrow |f_n - f|_B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (1)

Fie $A \in \mathcal{X}$ cu $m(A) < \infty$ și $\varepsilon > 0$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm

$$A_n = \{ t \in A : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon \}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \geq \int_{A_n} \frac{1}{\varepsilon} |f_n - f| \geq \int_{A_n} 1\, dm = m(A_n).$$

$$\Rightarrow m(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A |f_n - f| \underset{(n_7)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} K_A \cdot N(f_n - f) = \frac{1}{\varepsilon} K_A |f_n - f|_B \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} 0$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{m} f$ pe $A$.

$\Rightarrow \exists (f_{k_n}) \subset (f_n)$ cu $f_{k_n} \longrightarrow f$ a.p.t. pe $A$.

Corolar: Dacă $N$ satisface $(n_7)$ atunci pt. orice $f_n \longrightarrow f$ în $B$ există $(f_{k_n}) \subset (f_n)$ cu $f_{k_n} \longrightarrow f$ a.p.t.

Dem.: Rez. din $P_1$, utilizând descomp. $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)$ și un procedeu de diagonalizare.

Prop. 2: Dacă $N$ satisf. $(n_7)$ și $N(f) < \infty$ atunci $f$ este finită a.p.t.
$(\forall f \in B \Rightarrow f$ finită a.p.t.$)$

Dem.: Fie $f \in \mathcal{M}$ cu $N(f) < \infty$.

Not. $A = \{ t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| = \infty \}$.

$A_n = \{ t \in \cancel{\mathbb{R}_+} [n, n+1) : |f(t)| = \infty \}$

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (1)

Fie ~~$t \in [n, n+1)$~~ $t \in A_n$, $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrar.

$\Rightarrow |f(t)| \geq k \Rightarrow k \cdot m(A_n) \leq \int_{A_n} |f| \leq \int_{[n,n+1)} |f| \leq K_n \cdot N(f).$

Deci $k\, m(A_n) \leq K_n \cdot N(f)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$k \to \infty \Rightarrow m(A_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow f$ finită a.p.t.

Prop. 3: Dacă $N$ satisface $(n_5)$ și $0 \leq f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f_n \nearrow f$ a.p.t.

atunci are loc una din prop.:

(i) $f \notin B$ și $|f_n|_B \to \infty$;

SAU

(ii) $f \in B$ și $|f_n|_B \to |f|_B$.

Dem.: Din $(n_5)$ avem că $N(f_n) \nearrow N(f)$.

Deducem $f \in B \Leftrightarrow N(f) < \infty$

Lema 1: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha_n = \inf_{k \geq n} x_k$, $\beta_n = \sup_{k \geq n} x_k$ și

$l = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Atunci: (i) $\exists \lim_{n\to\infty} \alpha_n = l$;

(ii) $\exists \lim_{n\to\infty} \beta_n = L$.

Dem.: (i) $(\alpha_n)_n \in \mathcal{M}^{\nearrow} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \alpha_n \stackrel{not.}{=} \alpha \in [0,\infty]$.

$l \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n)$ și $x_{k_n} \to l$.

$\alpha_{k_n} \leq x_{k_n}$, $\forall n \Rightarrow \alpha \leq l$. (1)

Fie $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists h_n \geq n$ a.î. $x_{h_n} \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$

și $\alpha_n \leq x_{h_n} \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$ (2)

$\Rightarrow \exists (x_{h_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{h_n} \to \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \alpha \geq l$ (3)

$\xrightarrow[(3)]{(1)} \alpha = l.$

(ii) $(\beta_n)_n \in \mathcal{M}\downarrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta \in \cancel{\mathbb{R}} [0,\infty]$.

$L \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{k_n} \to L$.

Dar $x_{k_n} \le \beta_{k_n}, \forall n \Rightarrow \underbrace{L \le \beta}$. (4)

Dacă $\beta = \infty \Rightarrow \beta_n = \infty, \forall n$

$\Rightarrow \forall n \ \exists k_n \ge n$ cu $x_{k_n} \ge n \Rightarrow x_{k_n} \to \infty \Rightarrow L = \infty$.

Dacă $\beta < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists k_n > n$ a. î.

$$\beta_n - \frac{1}{n} \le x_{k_n} \le \beta_n$$

$\Rightarrow \exists (x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{k_n} \to \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{L}(x_n) \Rightarrow \underbrace{\beta \le L}$. (5)

$\xrightarrow[(5)]{(4)} L = \beta.$

Teor. L (Fatou)

Dacă N satisface $(m_5)$ și $(f_n)_n \subset B$, $f_n \to f$ a.p.t. și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B < \infty$ atunci $f \in B$ și $|f|_B \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|_B$.

Dem.: Definim $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $h_n(t) = \inf\limits_{m \ge n} |f_m(t)|$.

$\Rightarrow 0 \le h_n \le h_{n+1}$.

Arăt. că $h_n \xrightarrow{\ \ /\!/\ \ } |f|$ a.p.t.

$f_n \to f$ a.p.t. $\Rightarrow |f_n| \to |f|$ a.p.t.

$A = \{ t \in \mathbb{R}_+ : |f_n(t)| \to |f(t)| \}$, $m(\complement A) = 0$.

Fie $t \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Din def. lui $h_n(t)$ avem că

$\exists m_n > n$ astfel încât: $h_n(t) \le |f_{m_n}(t)| \le h_n(t) + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow h_n(t) \to |f(t)| \Rightarrow h_n \to |f|$ pe $A$ (deci a.p.t.)

Deci $0 \le h_n$, $\forall n$, $h_n \nearrow |f|$.

Din $(n_5) \Rightarrow N(h_n) \nearrow N(|f|)$. (1)

$h_n \le |f_m| \to N(h_n) \le N(|f_m|)$, $\forall m \ge n$.

$\Rightarrow N(h_n) \le \inf\limits_{m \ge n} N(|f_m|)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} N(h_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \left( \inf\limits_{m\ge n} N(|f_m|)\right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} N(|f_n|)$. (2)

Dar $f_n \in B \to N(|f_n|) = N(f_n) = |f_n|_B$.

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} N(|f|) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|_B < \infty$

$\to |f| \in B \overset{\text{Rem. 2}}{\Longrightarrow} f \in B$ și $\underset{\substack{\| \\ ||f||_B}}{|f|_B} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|_B$.

<u>Probl.</u>: Se poate renunța la ipoteza $\underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|_B < \infty$ ?

<u>Teor. 2</u> (Riesz - Fischer)

Fie $N$ - normă generalizată cu prop. $(n_5)$ și $(n_7)$. Dacă $(f_n)_n \subset B$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}' |f_n|_B < \infty$ atunci $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n}{}' f_k$ converge în $B$ la o funcție $F$ și

$$|F|_B \le \sum_{n=0}^{\infty}{}' |f_n|_B .$$

<u>Dem.</u>: Definim $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}{}' |f_k|$ și $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' |f_k|$.

$f_n \in B \Rightarrow |f_n| \in B$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$0 \le S_n \le S_{n+1}$ și $S_n \nearrow S \overset{(n_5)}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\| \\ |S_n|_B}}{N(S_n)} \to N(S)$.

$$|S_n|_B = \left| \sum_{k=0}^{n}{}' |f_k| \right|_B \leq \sum_{k=0}^{n}{}' |f_k|_B$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |S_n|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty}{}' |f_k|_B < \infty \xRightarrow{\text{Teor. 1}} S \in B \text{ și } |S|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty}{}' |f_k|_B. \quad (1)$$

Din $(n_7)$, cf. prop. 2 $\Rightarrow$ $S$ ește finită a.p.t.

$F_n = \sum_{k=0}^{n}{}' f_k$. Fie $F = \sum_{k=0}^{\infty}{}' f_k$ a.p.t. (există, căci $S$ e finită a.p.t.)

$$|F_n| \leq \sum_{k=0}^{n}{}' |f_k|, \forall n, \quad |F(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty}{}' |f_k(t)| = S(t) \text{ a.p.t. } t \in \mathbb{R}_+$$

Dar $S \in B \Rightarrow F \in B$ și $|F|_B \leq |S|_B \leq \sum_{k=0}^{\infty}{}' |f_k|_B$.

<u>Corolar 1</u>: Dacă $N$ satisface $(n_5)$ și $(n_7)$ atunci $(B, |\cdot|_B)$ ește complet.

<u>Dem.</u>: S.V.N. ește complet $\Leftrightarrow$ orice serie abs. conv. ește conv.

Din Riesz Fischer $\Rightarrow$ $(B, |\cdot|_B)$ ește complet.

<u>Rem. 2</u>: Concluzia teor. Riesz-Fischer resp. a corolarului 1 rămâne adevărată și dacă înlocuim cond. $(n_7)$ cu

$(n_8)$ $\forall f \in B \Rightarrow f$ = finită a.p.t.

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Sp. Banach de funcții care nu satisface $(n_7)$

# § 1.6. Completitudinea spațiilor Orlicz

Fie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, $\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}^{s}_{[0,\infty)}$ cu $\varphi|_{(0,\infty)} \not\equiv 0$ și $\varphi|_{(0,\infty)} \not\equiv \infty$.

$I_\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $I_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau$

$M_\varphi(f) = \int_0^\infty I_\varphi(|f|)$, $\forall f \in \mathcal{M}$,

$O_\varphi = \{ f \in \mathcal{M} : \exists c > 0 \text{ cu } M_\varphi(cf) < \infty \}$,

$|f|_\varphi = \inf \{ c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 \}$

<u>Rem 1</u>: $A_f = \{ c > 0 : M_\varphi(\frac{1}{c} f) \leq 1 \}$, $\forall f \in \mathcal{M}$,

$N : \mathcal{M} \to [0,\infty]$, $N_f = \begin{cases} \inf A_f, & A_f \neq \emptyset \\ \infty, & A_f = \emptyset \end{cases}$

Atunci $O_\varphi = B_N = \{ f \in \mathcal{M} : N(f) < \infty \}$ și $|f|_\varphi = N(f)$, $\forall f \in O_\varphi$.

<u>Prop.</u>: Dacă $f \in O_\varphi$ și $|f|_\varphi > 0$ atunci

$$M_\varphi\left( \frac{1}{|f|_\varphi} \cdot f \right) \leq 1. \quad (*)$$

<u>Dem.</u>: $f \in O_\varphi \Rightarrow N(f) < \infty \Rightarrow |f|_\varphi = N(f) \in (0,\infty)$.

Dar $N(f) = \inf A_f \Rightarrow \exists c_n \in (0,\infty)$ cu $c_n \searrow N(f)$.

$$M_\varphi\left( \frac{1}{c_n} f \right) = \int_0^\infty I_\varphi\left( \frac{1}{c_n} |f(t)| \right) dt$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{c_n} |f(t)| \nearrow \frac{1}{N(f)} |f(t)| \\ I_\varphi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}^{\nearrow} \end{array} \right\} \Rightarrow I_\varphi\left( \frac{1}{c_n} |f(t)| \right) \nearrow I_\varphi\left( \frac{1}{N(f)} |f(t)| \right)$$

$\xRightarrow[\text{monotone}]{\text{T. conv.}}$ $M_\varphi\left( \frac{1}{c_n} f \right) \longrightarrow M_\varphi\left( \frac{1}{N(f)} f \right)$. Dar $c_n \in A_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c_n} f\right) \le 1, \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{n\to\infty} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)} f\right) \le 1 \Longleftrightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{|f|_\varphi} f\right) \le 1.$

<u>Rem. 2</u>: Dacă $f \in \mathcal{O}_\varphi$ cu $|f|_\varphi > 0 \Longrightarrow |f|_\varphi \in A_f$.

<u>Teor. 1</u>: Norma N satisface proprietățile $(n_5)$, $(n_6)$ și $(n_7)$.

<u>Dem.</u>: $(n_5)$ Fie $0 \le f_n \le f_{n+1}$ cu $f_n \nearrow f$ a.p.t.

$f_n \le f_{n+1} \underset{(n_2)}{\Longrightarrow} N(f_n) \le N(f_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$ (1)

$f_n \le f \underset{(n_2)}{\Longrightarrow} N(f_n) \le N(f), \forall n \in \mathbb{N}.$ (2)

Fie $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$. (3)

Din (2) $\Longrightarrow \alpha \le N(f)$. (4)

<u>Cazul 1</u>: $\alpha = \infty \overset{(4)}{\Longrightarrow} N(f) = \infty \Longrightarrow N(f) = \alpha$.

<u>Cazul 2</u>: $\alpha = 0 \Longrightarrow N(f_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n = 0$ a.p.t.

$\Longrightarrow f = 0$ a.p.t. $\Longrightarrow N(f) = 0. \Longrightarrow N(f) = \alpha$.

<u>Cazul 3</u>: Fără a micșora generalit., putem pp. că $0 < N(f_n) \le \alpha < \infty, \forall n$.

calculăm $M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n\right) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n(t)\right) dt \le \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)} f_n(t)\right) dt = M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)} f_n\right)$.

$N(f_n) < \infty \Rightarrow f_n \in \mathcal{O}_\varphi \underset{\text{Prop 1}}{\Longrightarrow} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f_n)} f_n\right) \le 1$.

$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n\right) \le 1, \forall n \in \mathbb{N}.$ (5)

$f_n \nearrow f$ a.p.t. $\Longrightarrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n\right) \nearrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f\right)$ a.p.t.

Din teor. conv. monotone $\Longrightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n\right) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f_n(t)\right) dt \longrightarrow \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f(t)\right) dt =$

$= M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f\right)$ (6)

Din (5) și (6) $\Longrightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{\alpha} f\right) \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in A_f \Longrightarrow N(f) \le \alpha$.

$\Longrightarrow N(f) = \alpha$.

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} N(f_n) = N(f)$.

$(n_6)$ Fie $A \in \mathcal{X}$ cu $m(A)<\infty$. Arătăm că $\chi_A \in O_\varphi$ ( $A_{\chi_A} \neq \emptyset$).

$$\Upsilon_\varphi(0)=0,\ \Upsilon_\varphi \in \mathcal{C}_{[0,\infty)} \Longrightarrow \exists c>0 \text{ a.î. } \Upsilon_\varphi(c) \le \frac{1}{m(A)} \left(\overset{Ip}{m(A)}>0\right).$$

$$M_\varphi(c\chi_A) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi(c\chi_A(t))\,dt = \int_A \Upsilon_\varphi(c)\cdot m(A) \le 1 < \infty$$

$\Rightarrow \chi_A \in O_\varphi$.

$(n_7)$ Fie $A \in \mathcal{X}$ cu $m(A)<\infty$. Arăt. că $\exists k_A>0$ cu $\int_A |f| \le k_A \cdot N(f)$, $\forall f \in \mathcal{M}$ (1)
$(m(A)>0)$

Cazul 1: $N(f)=\infty \Longrightarrow (1)$ evidentă.

Cazul 2: $N(f)=0 \Rightarrow f=0$ a.p.t. $\Rightarrow \int_A |f|=0 \Longrightarrow (1)$.

Cazul 3: $0<N(f)<\infty$. Notăm $c=\frac{1}{N(f)}>0$.

$$\Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{m(A)}\int_A c|f|\right) \underset{\substack{\Upsilon_\varphi \in \mathrm{Conv} \\ \text{Ineg. Jensen}}}{\le} \frac{1}{m(A)}\cdot\int_A \Upsilon_\varphi(c|f|) \le \frac{1}{m(A)}\int_0^\infty \Upsilon_\varphi(c|f|) = \frac{M_\varphi(c|f|)}{m(A)}$$

$$= \frac{1}{m(A)} M_\varphi\left(\frac{1}{N(f)} f\right) \le \frac{1}{m(A)} < \infty$$

$$\Rightarrow \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{m(A)}\int_A c|f|\right) \le \frac{1}{m(A)}. \quad (2)$$

Obs.: $\varphi|_{(0,\infty)} \not\equiv 0 \wedge \varphi|_{(0,\infty)} \not\equiv \infty \Longrightarrow \exists t_0 \in (0,\infty)$ cu $\varphi(t_0) \in (0,\infty)$.

Fie $t > t_0$.

$$\Upsilon_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \ge \int_{t_0}^t \varphi(\tau)\,d\tau \ge \varphi(t_0)(t-t_0),\ \forall t \ge t_0.$$

Crit. maj.
$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \Upsilon_\varphi(t) = \infty$

Deci $\Upsilon_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}_{[0,\infty)}$ și $\lim\limits_{t\to\infty} \Upsilon_\varphi(t) = \infty$.

Din (2) $\Rightarrow \exists\ \tilde{c} > 0$ a.î. $\frac{1}{m(A)} \int_A c|f| \leq \tilde{c}$.

$$\Rightarrow \int_A |f| \leq \frac{\tilde{c}\, m(A)}{c} = \underbrace{\boxed{\tilde{c}\, m(A)}}_{k_A} N(f) \Rightarrow (1).$$

Corolar 1: Sp. Orlicz $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi)$ este complet.

Dem: Din Teo. 1 și Corolar 1 al T. Riesz-Fischer.

$\boxed{\text{Temă}}$ Dat $O_\varphi$ și $|\cdot|_\varphi$ ca în debutul paragrafului, demonstrați completitudinea (refac raționamentul din Riesz-Fischer)

$\boxed{\text{Temă}}$ Inegalitatea lui Jensen. (Rudin, Theta).

$$\Upsilon\left(\frac{1}{m(A)} \int_A |f|\right) \leq \frac{1}{m(A)} \int_A \Upsilon(|f|),\ \Upsilon \in \mathcal{C}_v,\ A \in \mathcal{L},\ 0 < m(A) < \infty.$$

## §1.7. Proprietățile spațiilor Orlicz

Fie $\varphi$ ca în §1.6.

Rem. 1: Dacă $\varphi(t) > 0,\ \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow \Upsilon_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}_{[0,\infty)}$, deci injectivă.

Rem. 2: Dacă $0 < \varphi(t) < \infty,\ \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow \Upsilon_\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijectivă.

$(\Upsilon_\varphi(0) = 0,\ \lim\limits_{t\to\infty} \Upsilon_\varphi(t) = \infty,\ \Upsilon_\varphi$ cont. $\Rightarrow$ concl.)

Ex. 1: Fie $p \in [1,\infty)$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(t) = p \cdot t^{p-1}$.

$$\Upsilon_\varphi(t) = t^p,\ t \geq 0,\quad M_\varphi(f) = \int_0^\infty |f(t)|^p dt$$

$$M_\varphi(cf) = c^p M_\varphi(f) \Rightarrow [M_\varphi(cf) < \infty \Leftrightarrow M_\varphi(f) < \infty]$$

$$(O_\varphi, |\cdot|_\varphi) \equiv (L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p).$$

<u>Ex2</u>: $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$, $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,1] \\ \infty, & t>1 \end{cases}$

$$Y_\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,1] \\ \infty, & t>1 \end{cases}$$

$$M_\varphi(cf) = \int_0^\infty Y_\varphi(c|f(t)|)\,dt < \infty \iff c|f(t)| \le 1 \text{ a.p.t. } t\in\mathbb{R}$$

$$\iff |f(t)| \le \frac{1}{c} \text{ a.p.t. } t\ge 0. \iff f\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}).$$

$$|f|_\varphi = \inf\{c>0 : M_\varphi(\tfrac{1}{c}f)\le 1\}.$$

$$M_\varphi(\tfrac{1}{c}f) \le 1 \iff |f(t)|\le c \text{ a.p.t.} \implies \|f\|_\infty \le c.$$

$$\implies |f|_\varphi = \|f\|_\infty.$$

Deci $(O_\varphi, |\cdot|_\varphi) \equiv (L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

$\boxed{\text{Temă}}$ Conexiuni între spațiile $L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ și $O_\varphi$.

- exemplu de sp. Orlicz care nu este $L^p$ și
- incluziuni între sp. de tip $L^1$ și sp. Orlicz.

considerăm clasele:

- $Q(\mathbb{R}_+)$ - clasa sp. Banach de funcții $(B, |\cdot|_B)$ cu prop. că $\chi_{[0,t)}\in B$, $\forall t>0$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - clasa sp. Banach de funcții $(B,|\cdot|_B)$ cu $B\in Q(\mathbb{R}_+)$ și $\lim_{t\to\infty} F_B(t) = \infty$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ - cls. sp. Banach de funcții $(B,|\cdot|_B)$ cu $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ și $\inf_{n\in\mathbb{N}} |\chi_{[n,n+1)}|_B > 0$.

<u>Rem. 3</u>: $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\in Q(\mathbb{R}_+)$ și $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\notin\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

<u>Rem. 4</u>: $L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\in\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$, $\forall p\in[1,\infty)$.

Prop. 1: $O_\varphi \in Q(\mathbb{R}_+)$.

Dem.: $M_\varphi(c \cdot \chi_{[0,t)}) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi(c\,\chi_{[0,t)}(\tau))\,d\tau = \int_0^t \Upsilon_\varphi(c)\,d\tau = t \cdot \Upsilon_\varphi(c)$.

$\Upsilon_\varphi(c) = \int_0^c \varphi(\tau)\,d\tau$. Cum $\varphi_{|(0,\infty)} \not\equiv \infty \Rightarrow \exists c>0$ cu $\varphi(c) \in (0,\infty)$.

$\Rightarrow \Upsilon_\varphi(c) \leq c \cdot \varphi(c) < \infty \Longrightarrow M_\varphi(c \cdot \chi_{[0,t)}) < \infty \Rightarrow \chi_{[0,t)} \in O_\varphi, \forall t>0$

Prop. 2 (Funcție fundamentală a spațiului Orlicz)

Dacă $0 < \varphi(t) < \infty$, $\forall t \geq 0$ atunci $F_{O_\varphi}(t) = \dfrac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$, $\forall t > 0$.

Dem.: $F_{O_\varphi}(t) = |\chi_{[0,t)}|_\varphi$.

$|\chi_{[0,t)}| = \inf\left\{c>0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[0,t)}\right) \leq 1\right\}$.

Dar $M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[0,t)}\right) = t \cdot \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$.

Obs. că $M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[0,t)}\right) \leq 1 \Longleftrightarrow t\,\Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq 1 \Longleftrightarrow$

$$\Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{t} \underset{\Upsilon_\varphi \in \mathcal{M}^{\nearrow}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{c} \leq \Upsilon_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} \leq c.$$

$$\Rightarrow F_{O_\varphi}(t) = \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}, \ \forall t>0.$$

Prop. 3: Dacă $0<\varphi(t)<\infty$, $\forall t \in (0,\infty)$ atunci $O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Dem.: Pasul 1, $O_\varphi \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_+)$.

$$\lim_{t\to\infty} F_{O_\varphi}(t) \overset{P_2}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{\substack{s\to 0 \\ s>0}} \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}(s)} = \infty.$$

$\Rightarrow O_\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Pasul 2. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\chi_{[n,n+1)}|_\varphi > 0$.

Fie $n\in\mathbb{N}$. $|\chi_{[n,n+1)}|_\varphi = \inf\left\{c>0 : M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[n,n+1)}\right) \le 1\right\}$.

$$M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[n,n+1)}\right) = \int_0^\infty \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[n,n+1)}(\tau)\right)d\tau = \int_n^{n+1} \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right)d\tau = \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right).$$

$$\Rightarrow M_\varphi\left(\frac{1}{c}\chi_{[n,n+1)}\right) \le 1 \iff \Upsilon_\varphi\left(\frac{1}{c}\right) \le 1 \iff \frac{1}{c} \le \Upsilon_\varphi^{-1}(1) \iff$$

$$\frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}(1)} \le c.$$

$$\Rightarrow |\chi_{[n,n+1)}|_\varphi = \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}(1)}, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} |\chi_{[n,n+1)}|_\varphi = \frac{1}{\Upsilon_\varphi^{-1}(1)} > 0$$

$$\Rightarrow O_\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+).$$

Teme pt. referate („The asympt. behaviour")

§1.2., p.22 – Spații Banach de șiruri.

- D.1.2.1., R.1.2.1., $F_B$, R.1.2.3. justif., E.1.2.1., E.1.2.3.
- E.1.2.4., E.1.2.5.
- E.1.2.7. (sp. Orlicz de șiruri), P.1.2.1.
- Ex.1.2.8., P.1.2.2.