

# Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

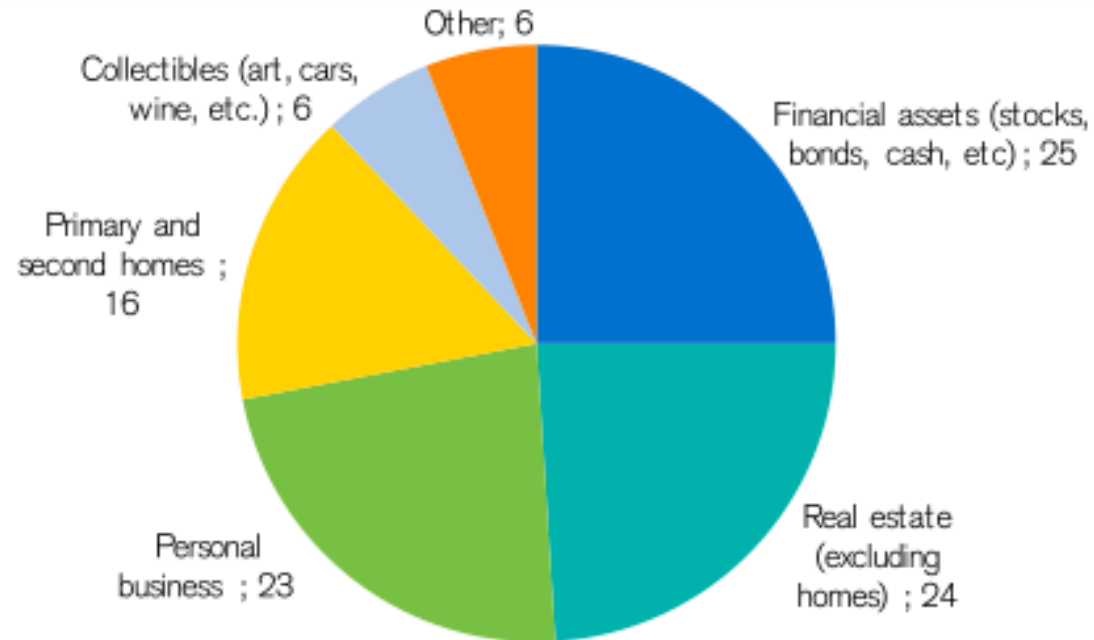
## Portfolioanalyse und -optimierung

- **Einführung**
  - Historische Renditen verschiedener Assetklassen
  - Rendite und Risiko
- Portfolios mit zwei Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Portfolios mit n Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Diskussion

# Geldanlagen

Quellen: Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018

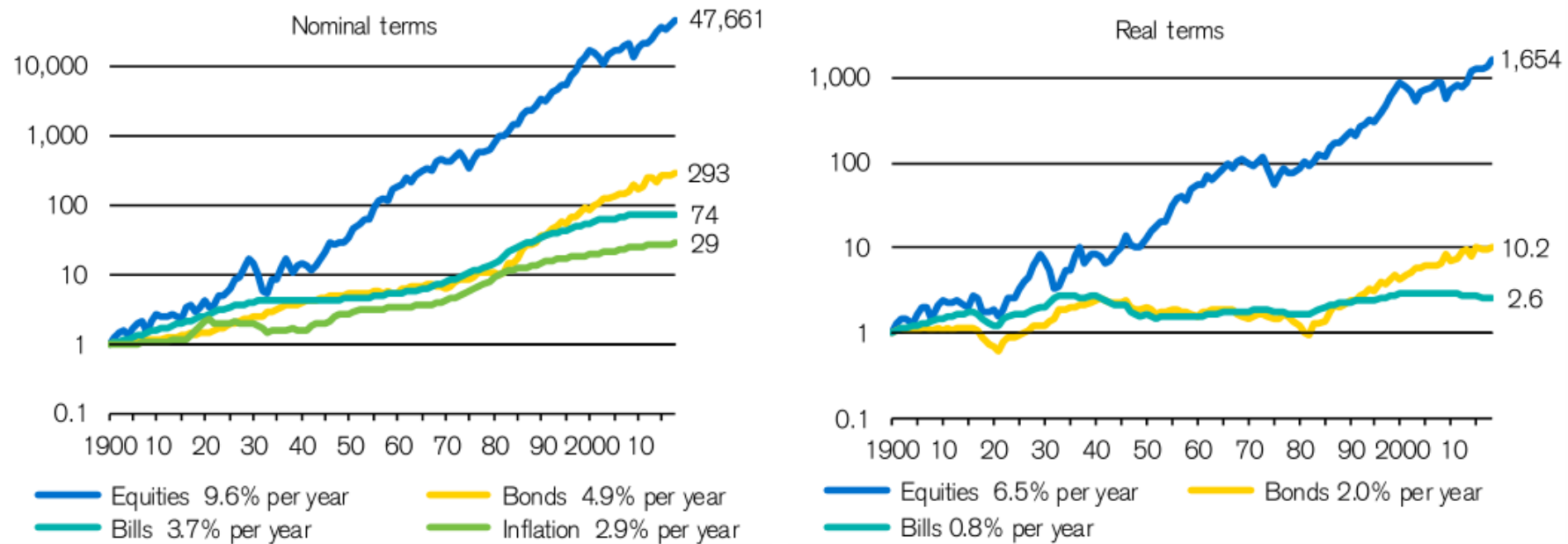
Global average asset allocation of UHNWIs



Source: Knight Frank (2017)

# Historische Renditen

Cumulative returns on US asset classes in nominal terms (left-hand side) and real terms (right-hand side), 1900–2017



Source: Elroy Dimson, Paul Marsh, and Mike Staunton, [Triumph of the Optimists](#), Princeton University Press, 2002, and subsequent research

Quellen: Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018

# Geldanlage zwischen Rendite und Risiko

Quellen: Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018; Asset Concepts GmbH

Rendite



Risiko



- Realisierte Rendite
  - Rendite = (Ertrag – Aufwand) / Aufwand
  - Rendite = (Verkaufspreis – Einkaufspreis) / Einkaufspreis
  - Rendite von s nach t = (Preis in t – Preis in s) / Preis in s  
= (Preis in t / Preis in s) - 1
- Annualisierte Rendite
  - Jahresrendite = (Preis in (t+365) / Preis in t) - 1
  - Jahresrendite =  $(\prod_{s=1}^{364} (\text{Tagesrendite in } (t + s)) + 1) - 1$
  - Jahresrendite =  $\sqrt[n]{1 + \text{Rendite über } n \text{ Jahre}} - 1$
- Durchschnittliche Rendite

Jahresrenditen =  $(r_{2017}, r_{2016}, r_{2015}, \dots)$

  - Arithmetischer Mittelwert:  $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_t r_t$
  - Geometrisches Mittel:  $\bar{r}_{geom} = \sqrt[T]{\prod_t r_t + 1} - 1$

- Risikoprämie / Überrendite

- Risikofreier Zinssatz  $\tilde{r}$
- Risikoprämie  $d_{2017} = r_{2017} - \tilde{r}_{2017}$
- Mittlere Risikoprämie  $\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_t (r_t - \tilde{r}_t) = \frac{1}{T} \sum_t d_t$

- Risiko / Volatilität

- Standardabweichung der Rendite

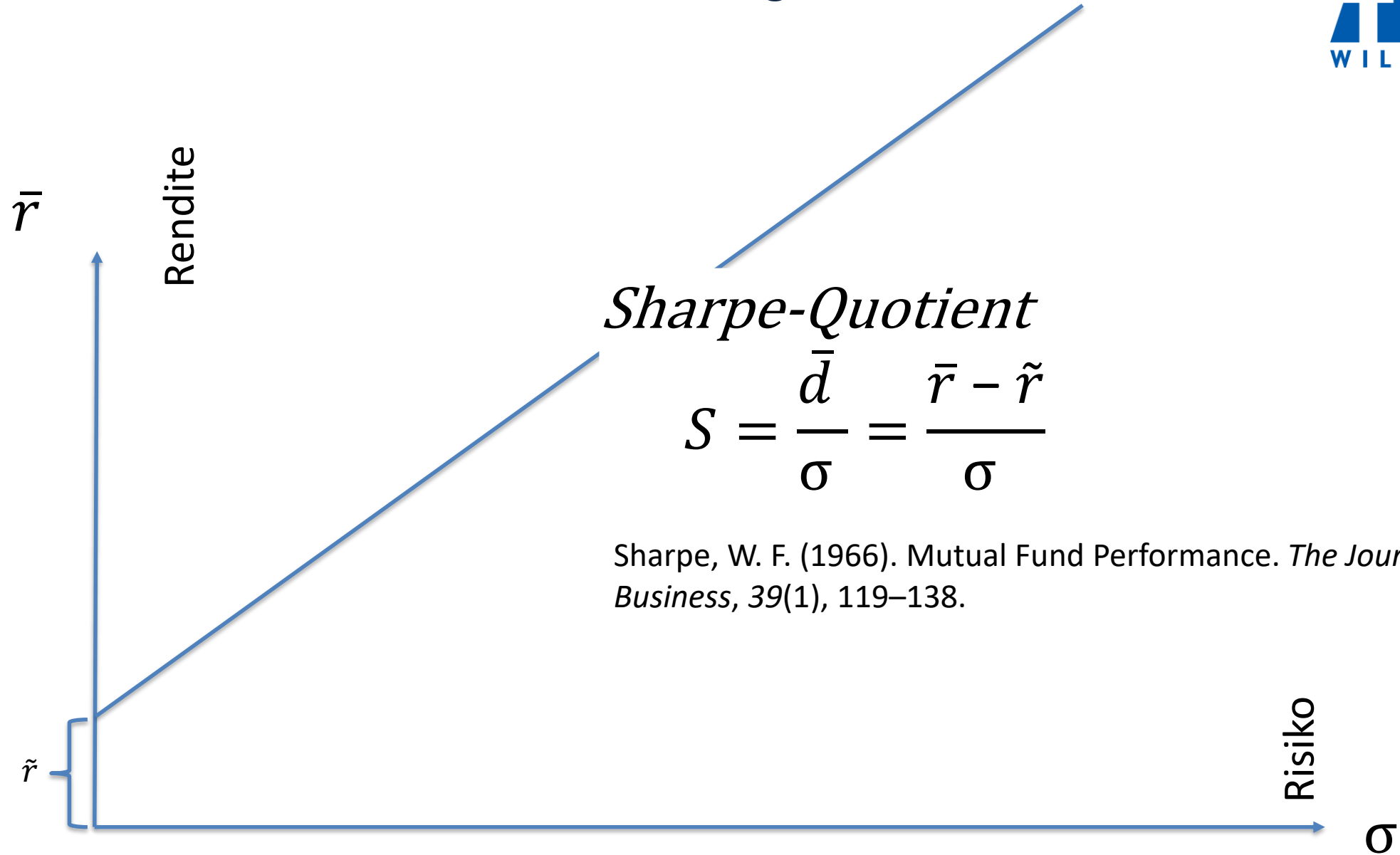
$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_t (r_t - \bar{r})^2}$$

- Standardabweichung der Risikoprämie

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_t (d_t - \bar{d})^2}$$

- Für einen konstanten risikofreien Zinssatz gilt:  $\sigma_r = \sigma_d$

# Rendite und Risiko vergleichen



Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119–138.



# Übersicht

- Einführung
  - Historische Renditen verschiedener Assetklassen
  - Rendite und Risiko
- **Portfolios mit zwei Assets**
  - **Rendite und Risiko des Portfolios**
  - **Optimales Portfolio, Effizienter Rand**
- Portfolios mit n Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Diskussion

# Portfoliotheorie – zwei Assets

- Für zwei verschiedenen Wertpapiere  $x$  und  $y$   
z.B. Aktien von Infineon und Unilever  
mit
  - Erwarteter Rendite  $r_x$ , bzw.  $r_y$  und
  - Volatilität / Standardabweichung der Rendite  $\sigma_x$ , bzw.  $\sigma_y$   
wobei  $r_x > r_y$  und  $\sigma_x > \sigma_y$
- Bilde ein Portfolio  $w = (w_x, w_y)$  mit  $w_x + w_y = 1$  und
  - $w_x$  der Anteil des Wertpapiers  $x$  sowie
  - $w_y$  der Anteil des Wertpapiers  $y$
- Dann gilt für das Portfolio

- Erwartete Rendite:

$$r_w = w_x \cdot r_x + w_y \cdot r_y$$

- Volatilität / Standardabweichung der Rendite bzw. Überrendite:

$$\sigma_w = \sqrt{(w_x \cdot \sigma_x)^2 + (w_y \cdot \sigma_y)^2 + 2 \cdot w_x \cdot \sigma_x \cdot w_y \cdot \sigma_y \cdot \rho_{x,y}}$$

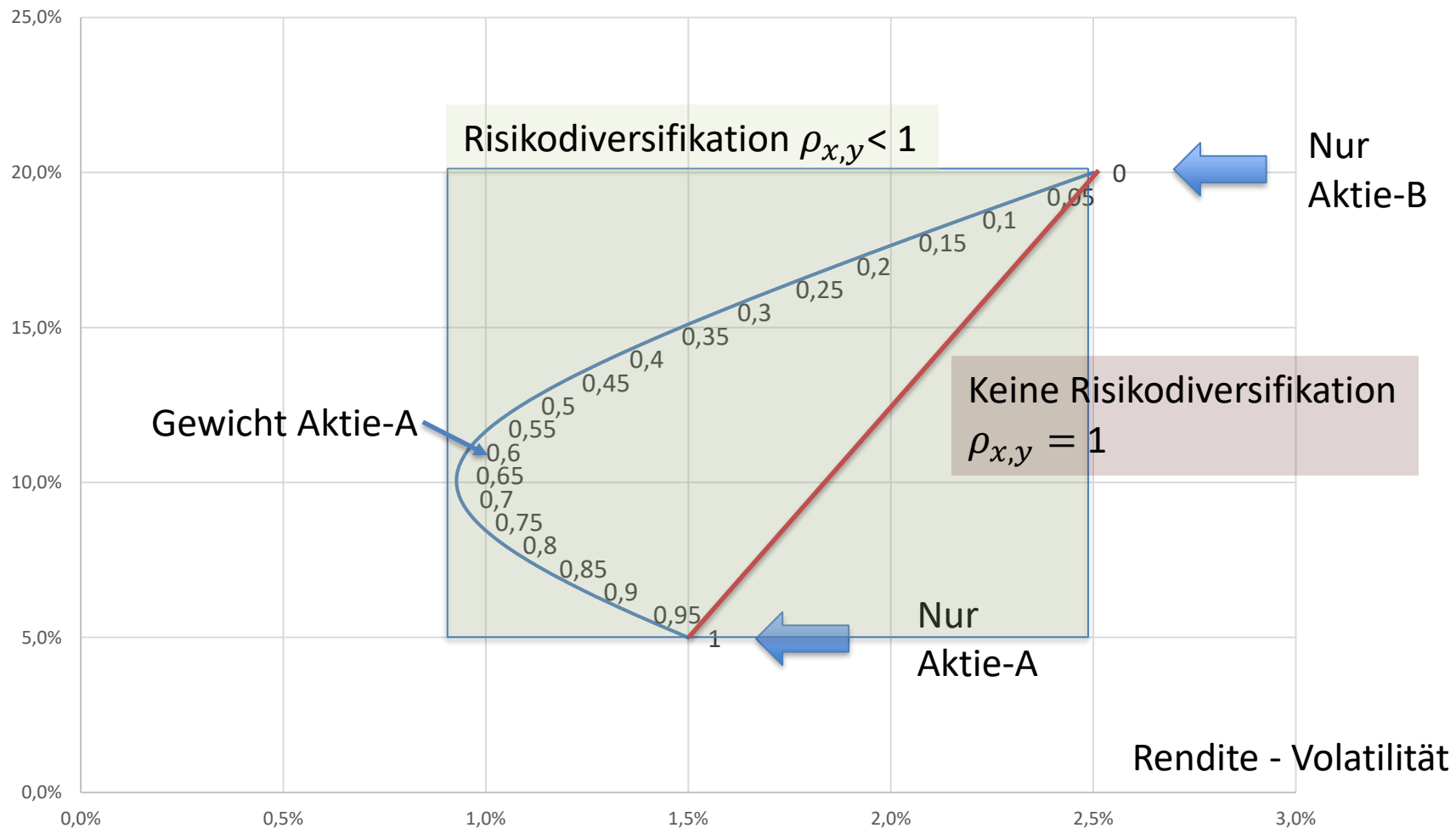
wobei  $\rho_{x,y}$  die Korrelation der Renditen ist

# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW

Rendite-MW

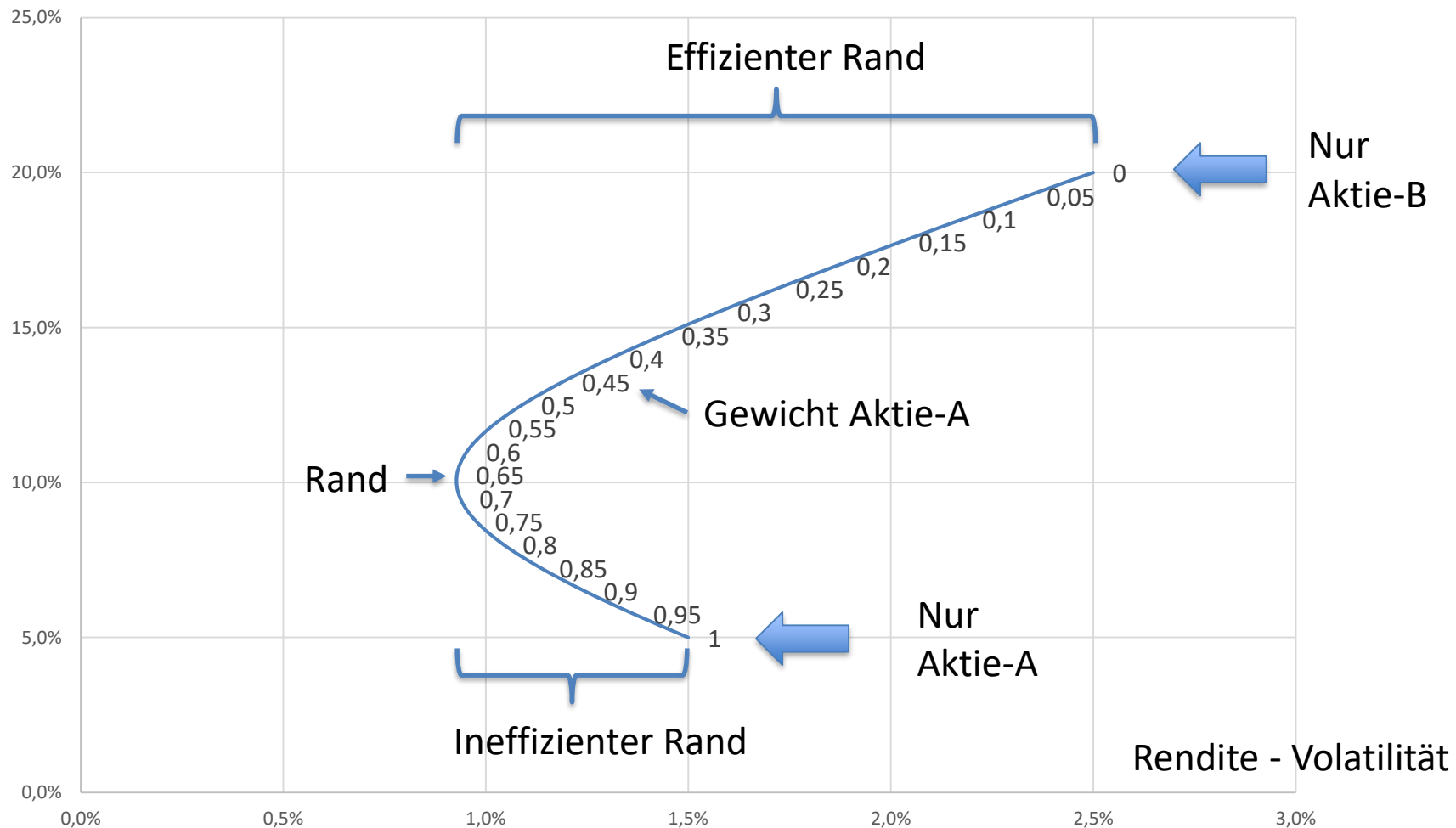


# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW

Rendite-MW



# Portfoliotheorie – zwei Assets - Optimum

- Für zwei verschiedenen Wertpapiere  $x$  und  $y$  mit

- Erwarteter Rendite  $r_x$ , bzw.  $r_y$  und
- Volatilität / Standardabweichung der Rendite  $\sigma_x$ , bzw.  $\sigma_y$   
wobei  $r_x > r_y$  und  $\sigma_x > \sigma_y$

- Und Portfolio  $w = (w_x, w_y)$  mit

- Erwartete Rendite:

$$r_w = w_x \cdot r_x + w_y \cdot r_y$$

- Volatilität / Standardabweichung  $\sigma_w$  der Überrendite mit:

$$\sigma_w^2 = (w_x \cdot \sigma_x)^2 + (w_y \cdot \sigma_y)^2 + 2 \cdot w_x \cdot \sigma_x \cdot w_y \cdot \sigma_y \cdot \rho_{x,y}$$

wobei  $\rho_{x,y}$  die Korrelation der Überrenditen ist

- Wähle ein optimales Portfolio  $w = (w_x, w_y)$  so, dass

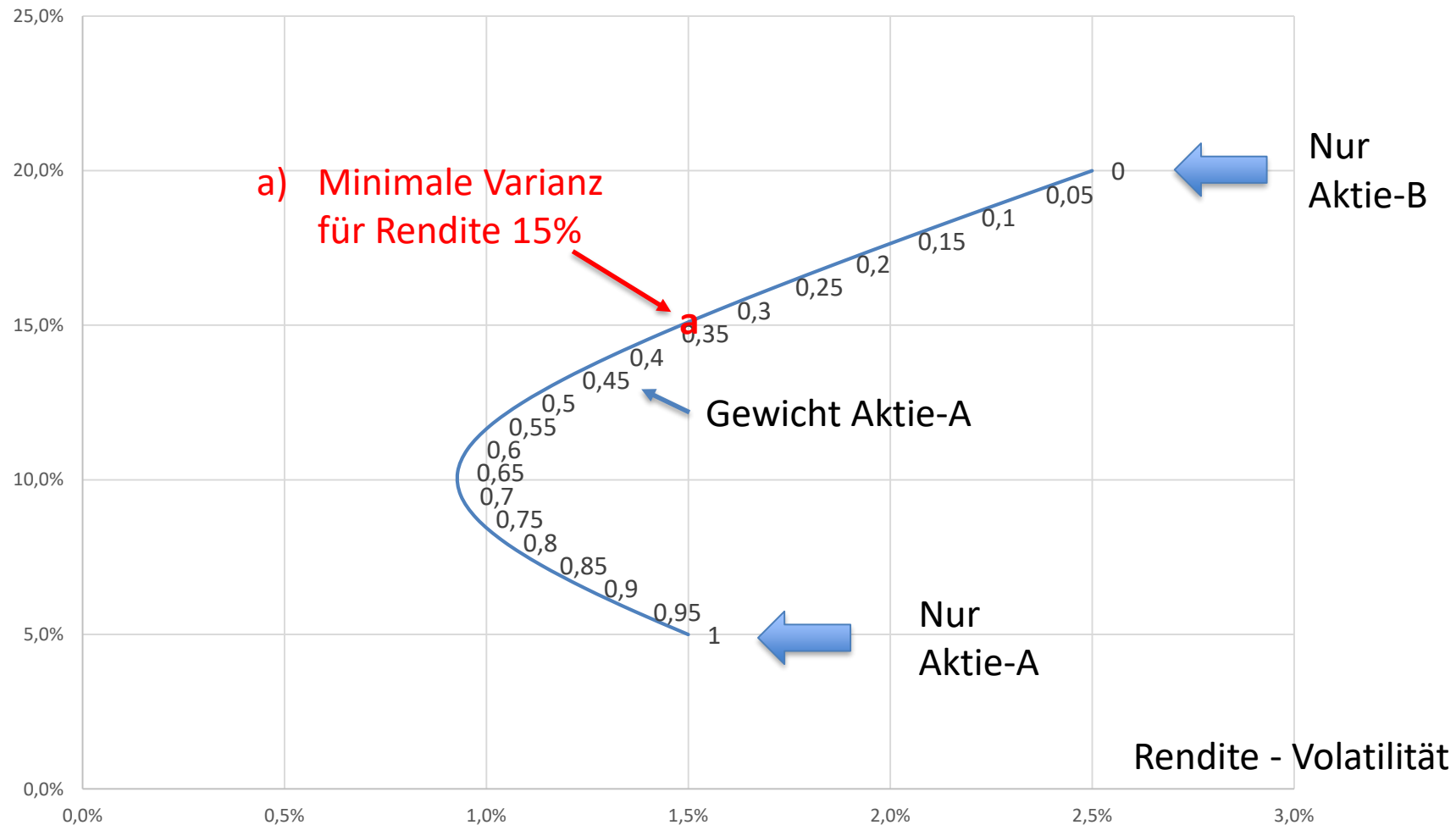
- a) für gegebene Rendite  $r_w$  des Portfolios die Volatilität  $\sigma_w^2$  (bzw. das Risiko) minimal ist oder
- b) die Volatilität  $\sigma_w^2$  (bzw. Risiko) global minimal ist oder
- c) der Sharpe-Quotient, d.h. das Verhältnis von Überrendite zu Risiko maximal ist

# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW

Rendite-MW

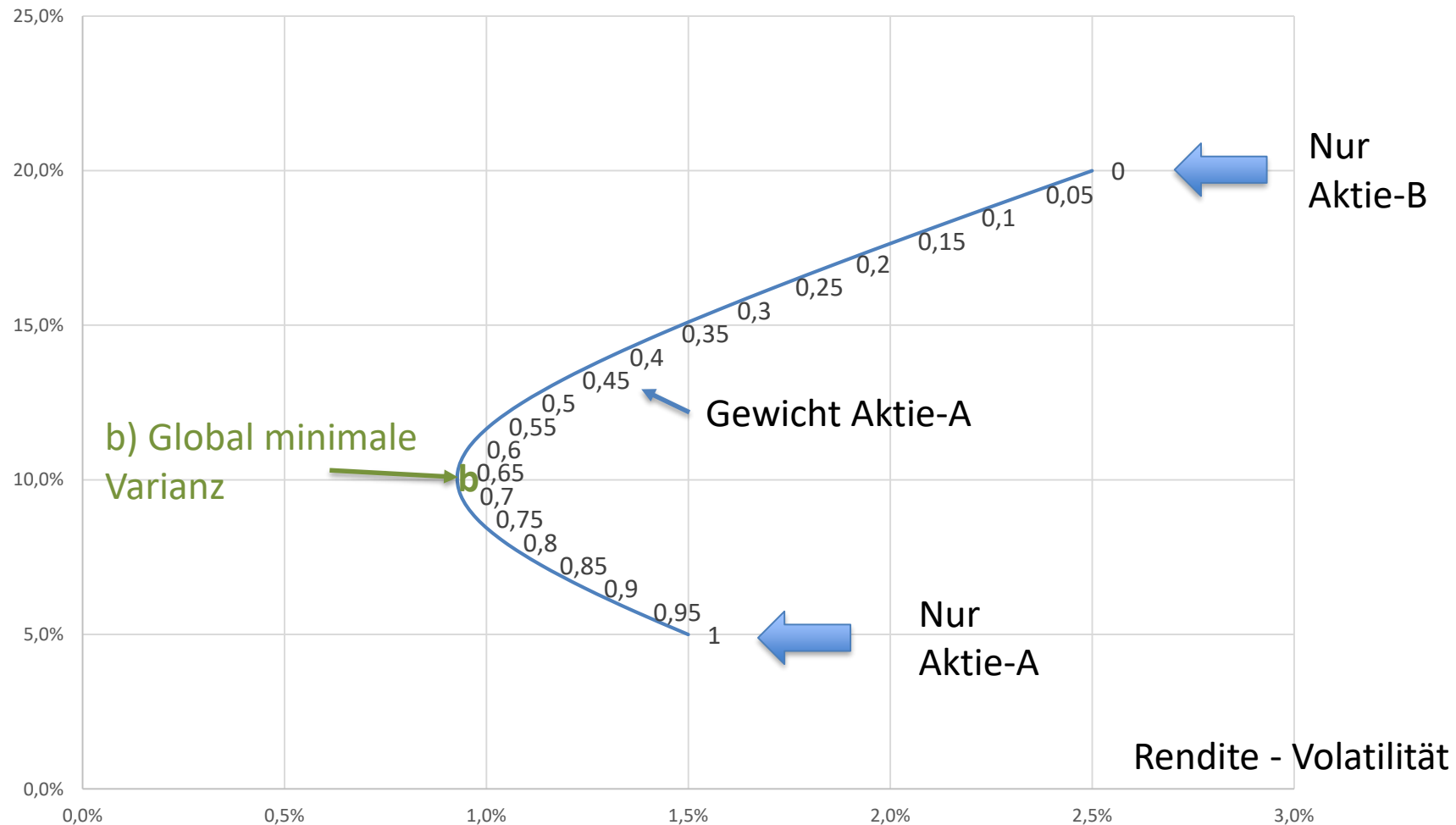


# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW

Rendite-MW

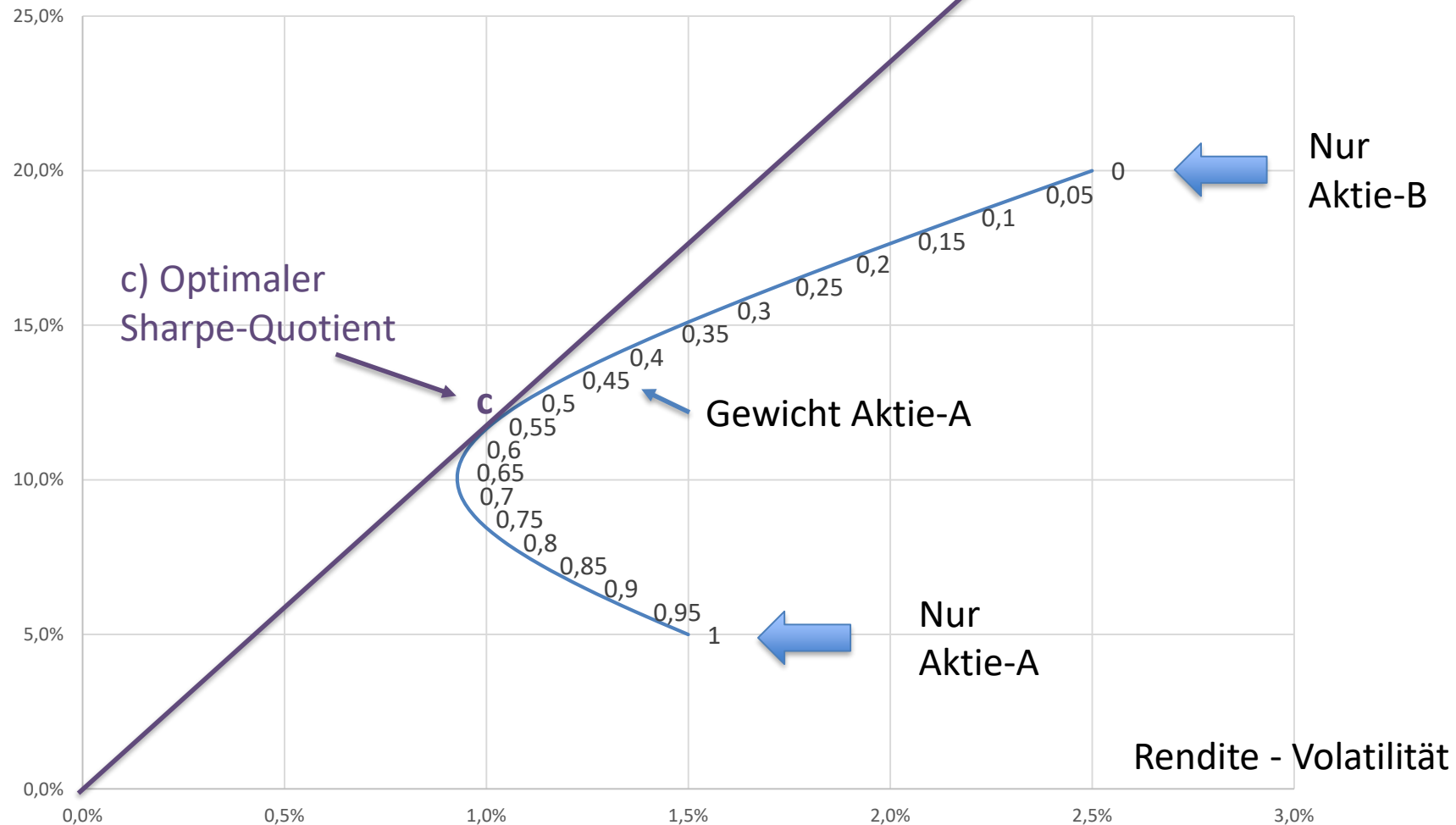


# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW

Rendite-MW

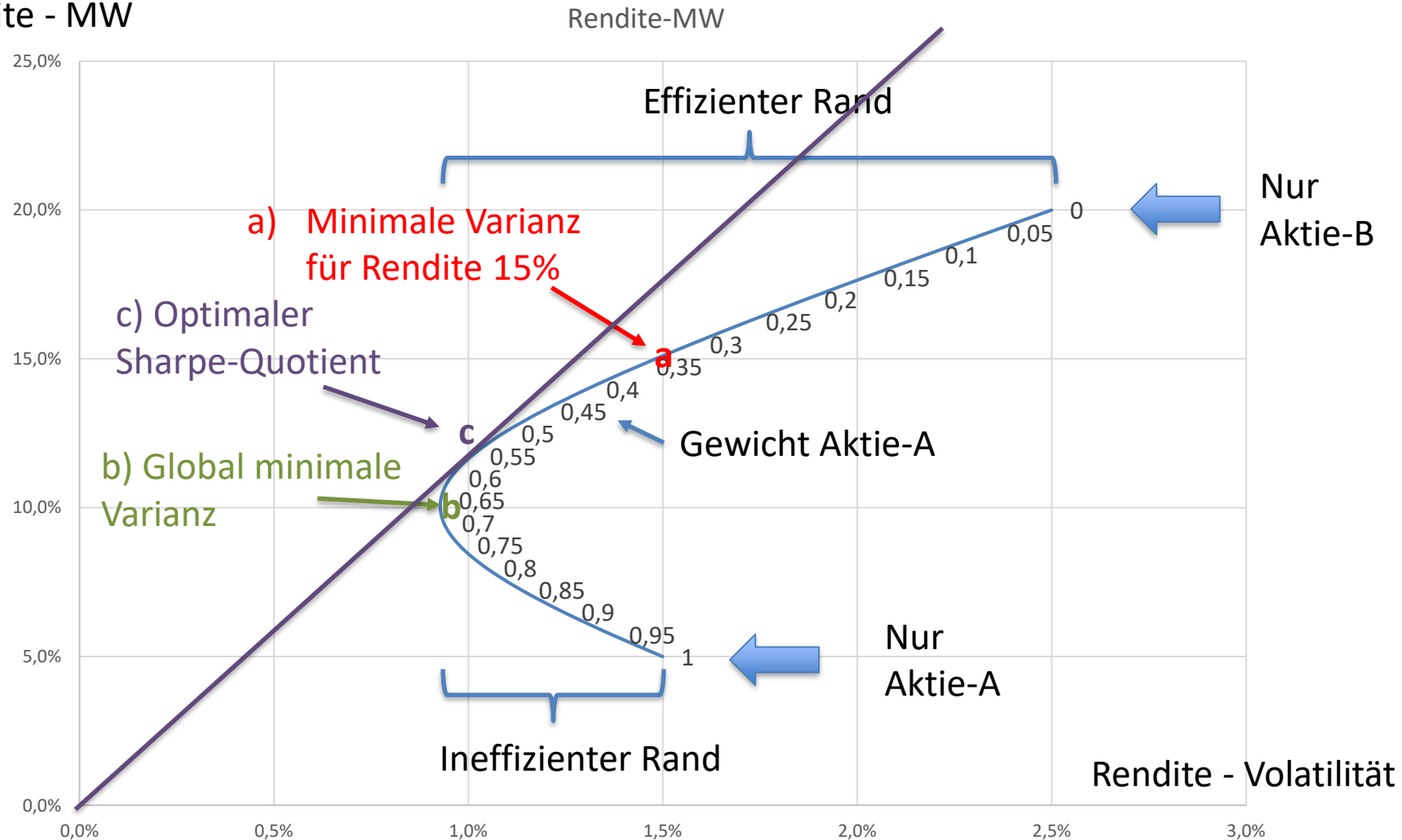




# Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW



# Übersicht

- Einführung
  - Historische Renditen verschiedener Assetklassen
  - Rendite und Risiko
- Portfolios mit zwei Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- **Portfolios mit n Assets**
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - **Optimales Portfolio, Effizienter Rand**
- Diskussion

# Portfoliotheorie – n Assets - Optimum

- Für n verschiedene Wertpapiere  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  mit
  - erwarteten Überrenditen  $d_i = E[r_i - r_0]$  und
  - Volatilitäten / Standardabweichungen der Überrenditen  $\sigma_i$
- und ein Portfolio mit  $w = (w_1, \dots, w_n)$  mit  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  gilt
  - Erwartete Überrendite:

$$d_w = w_1 \cdot d_1 + \dots + w_n \cdot d_n$$

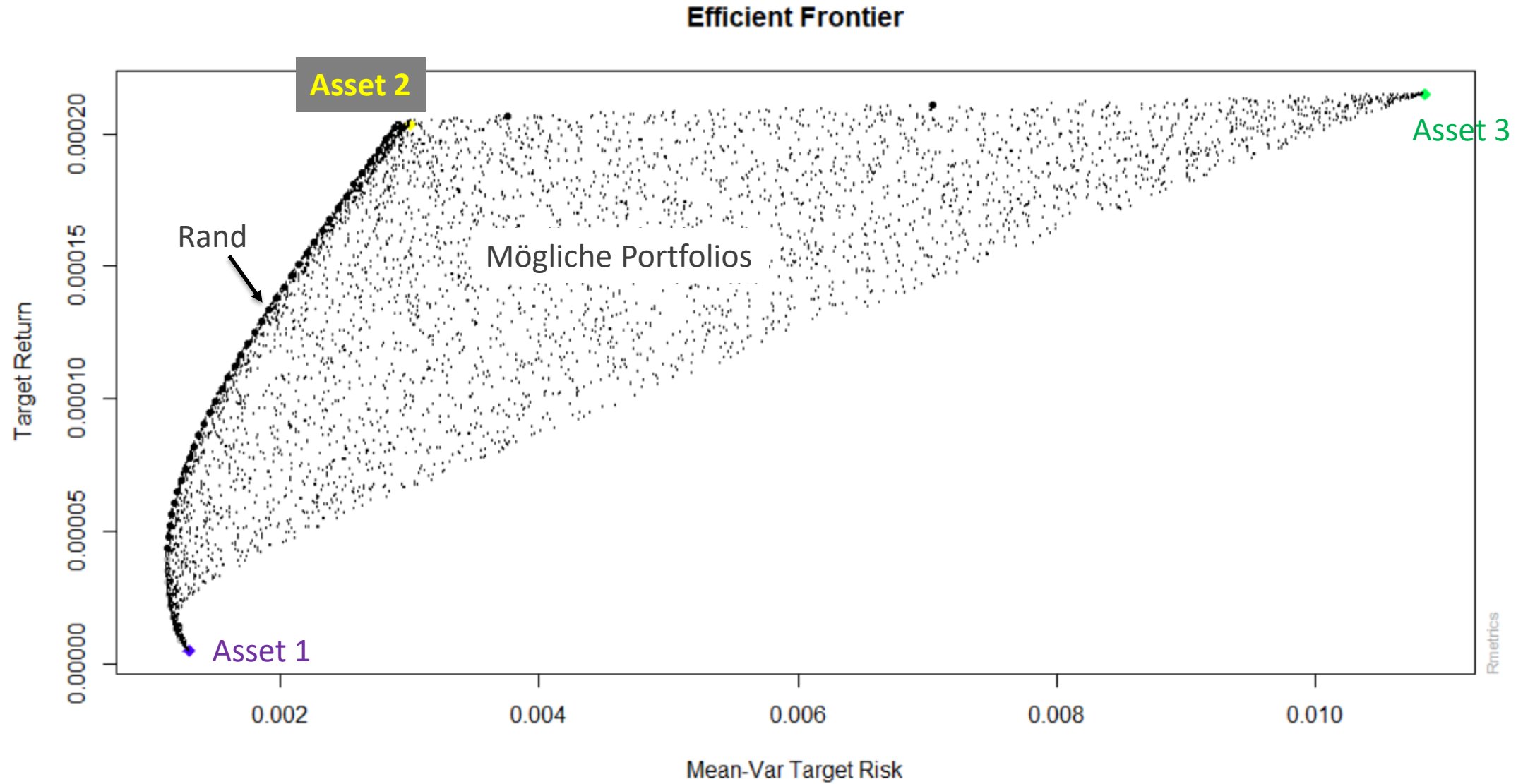
- Volatilität / Standardabweichung  $\sigma_w$  der Überrendite mit:

$$\sigma_w^2 = \sum_{i,j=1,\dots,n} w_i \cdot w_j \cdot Cov(d_i, d_j)$$

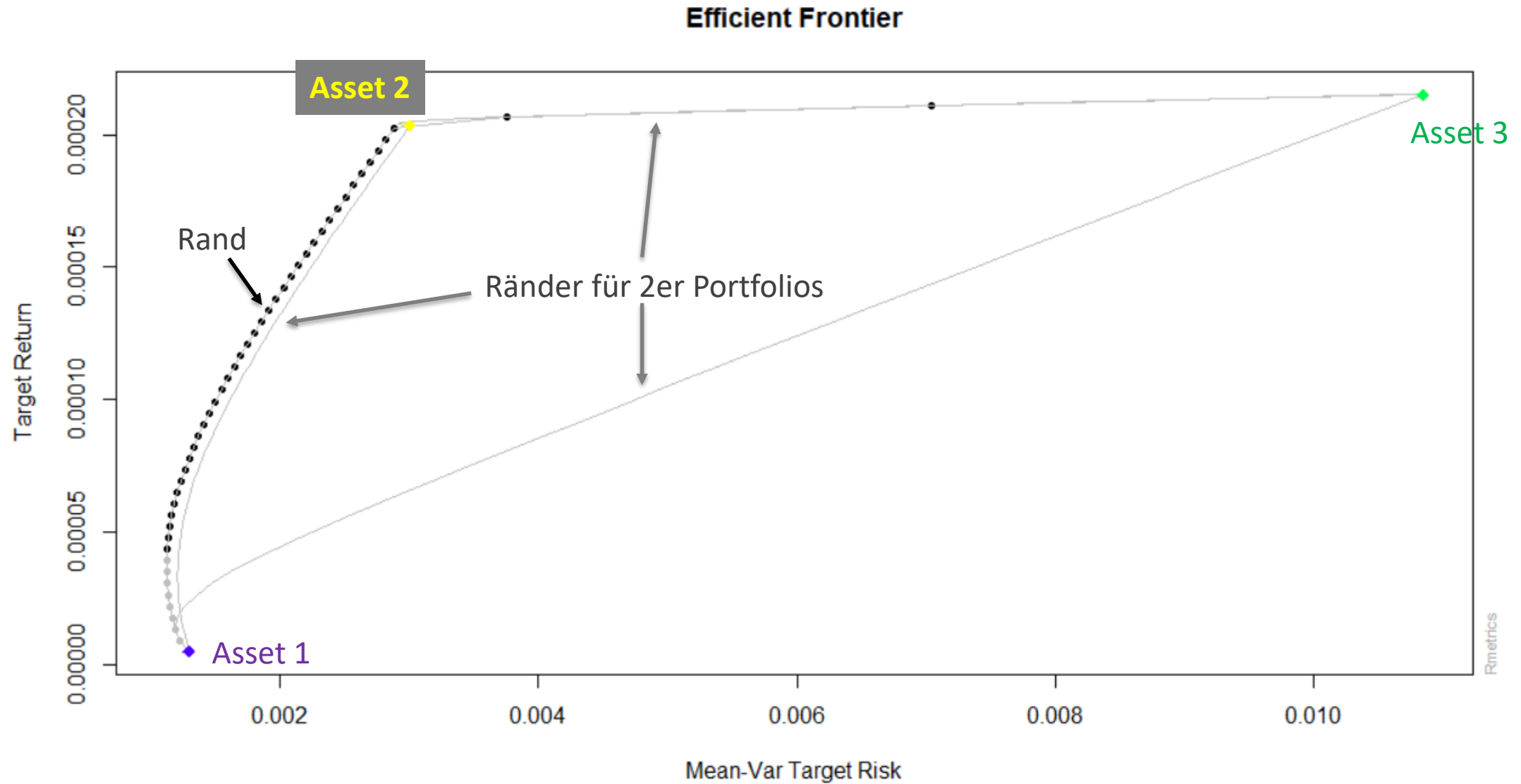
wobei  $Cov(d_i, d_j)$  die Kovarianz der Überrenditen ist

- Wähle ein optimales Portfolio  $w = (w_1, \dots, w_n)$  so, dass
  - a) für gegebene Rendite  $r_w$  des Portfolios die Volatilität  $\sigma_w^2$  (bzw. das Risiko) minimal ist oder
  - b) die Volatilität  $\sigma_w^2$  (bzw. Risiko) global minimal ist oder
  - c) der Sharpe-Quotient, d.h. das Verhältnis von Überrendite zu Risiko maximal ist

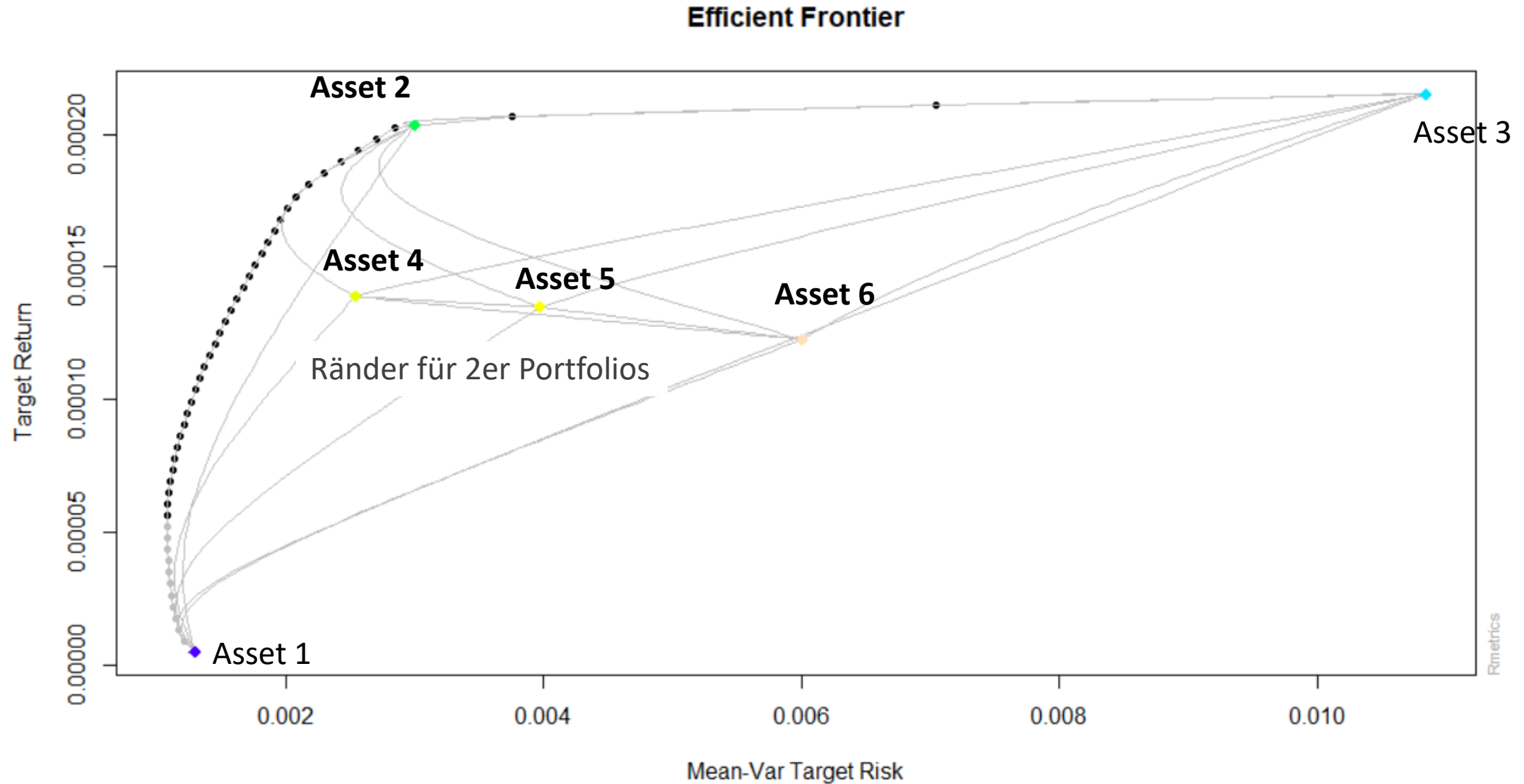
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



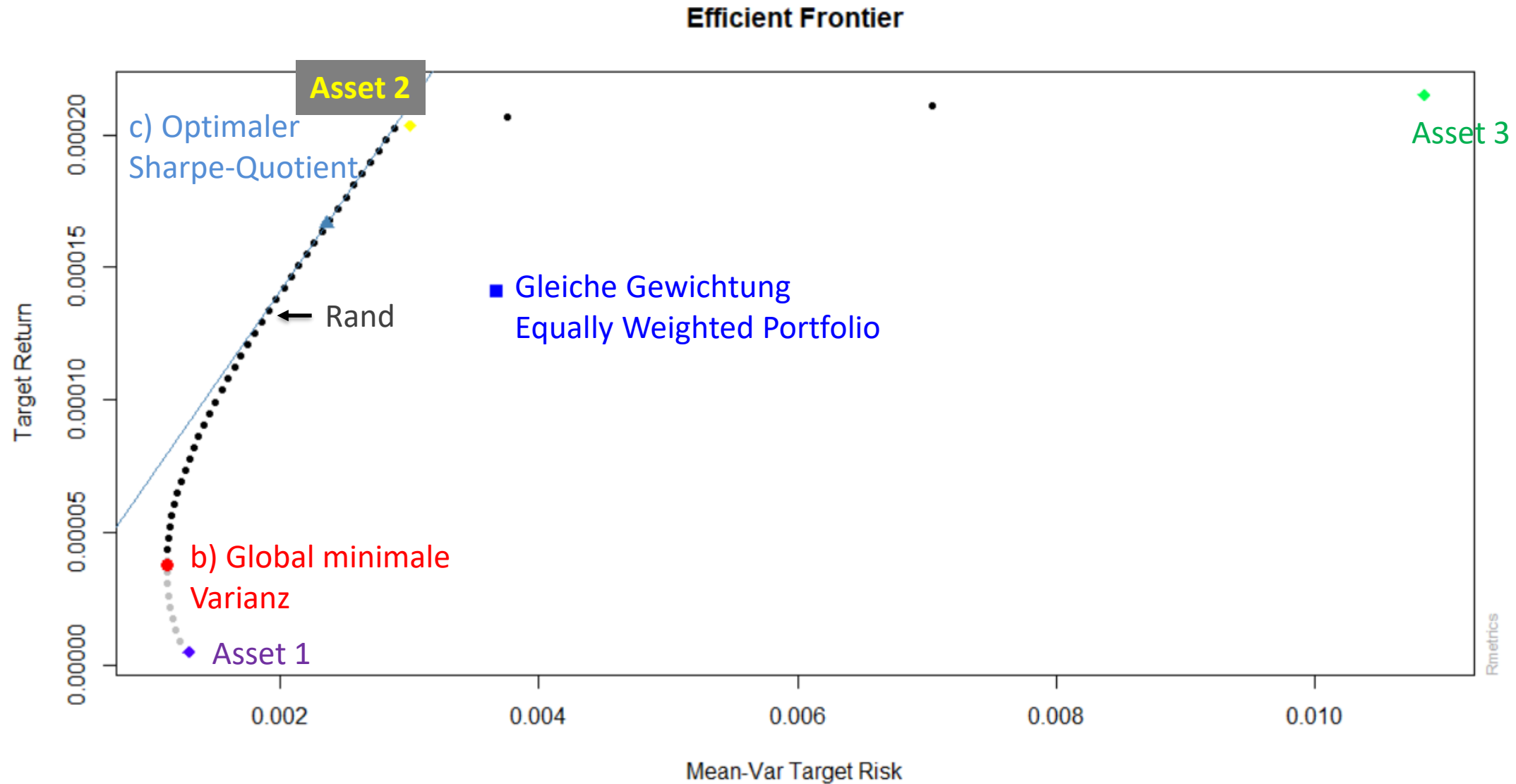
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



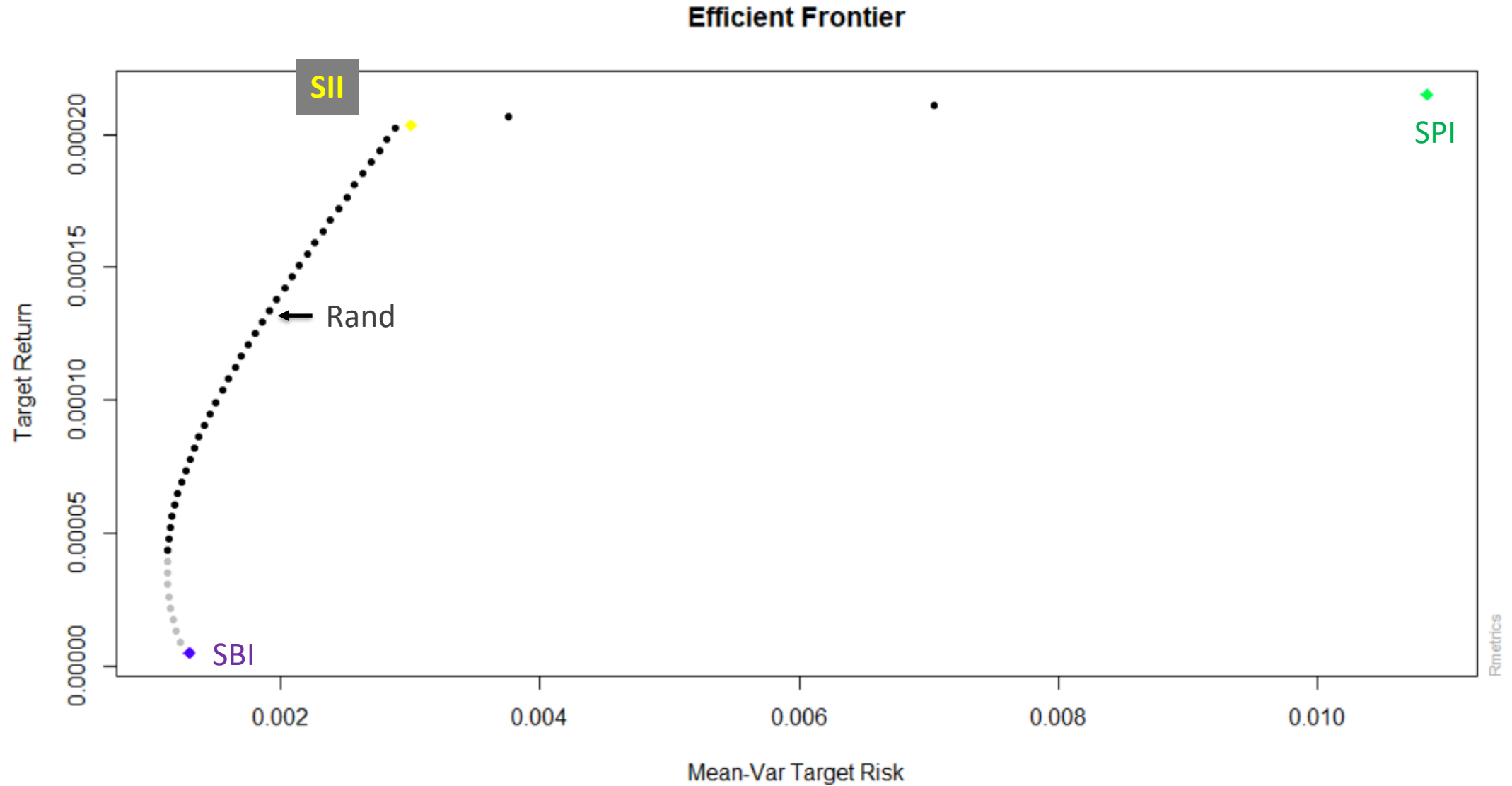
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



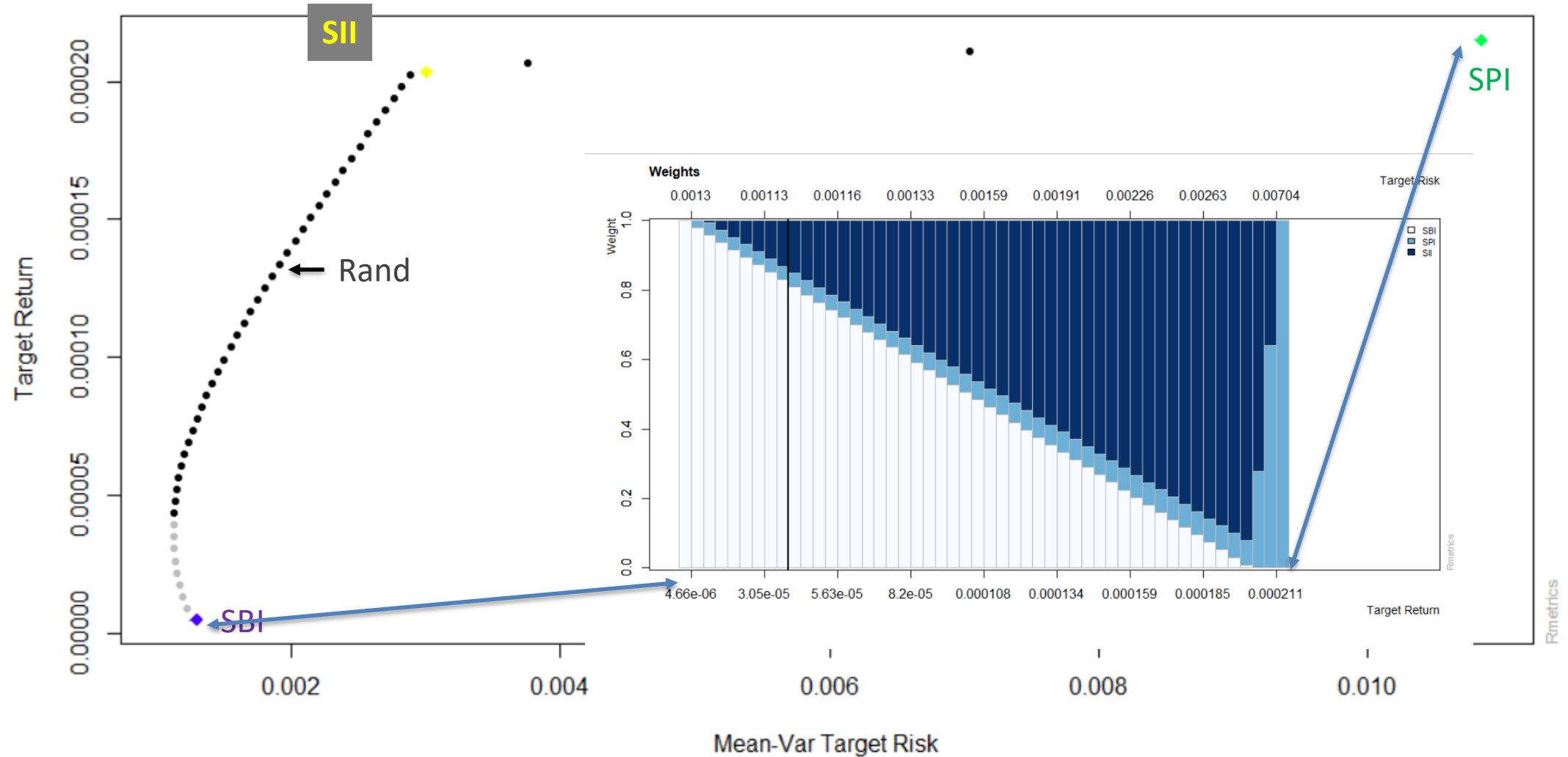
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel





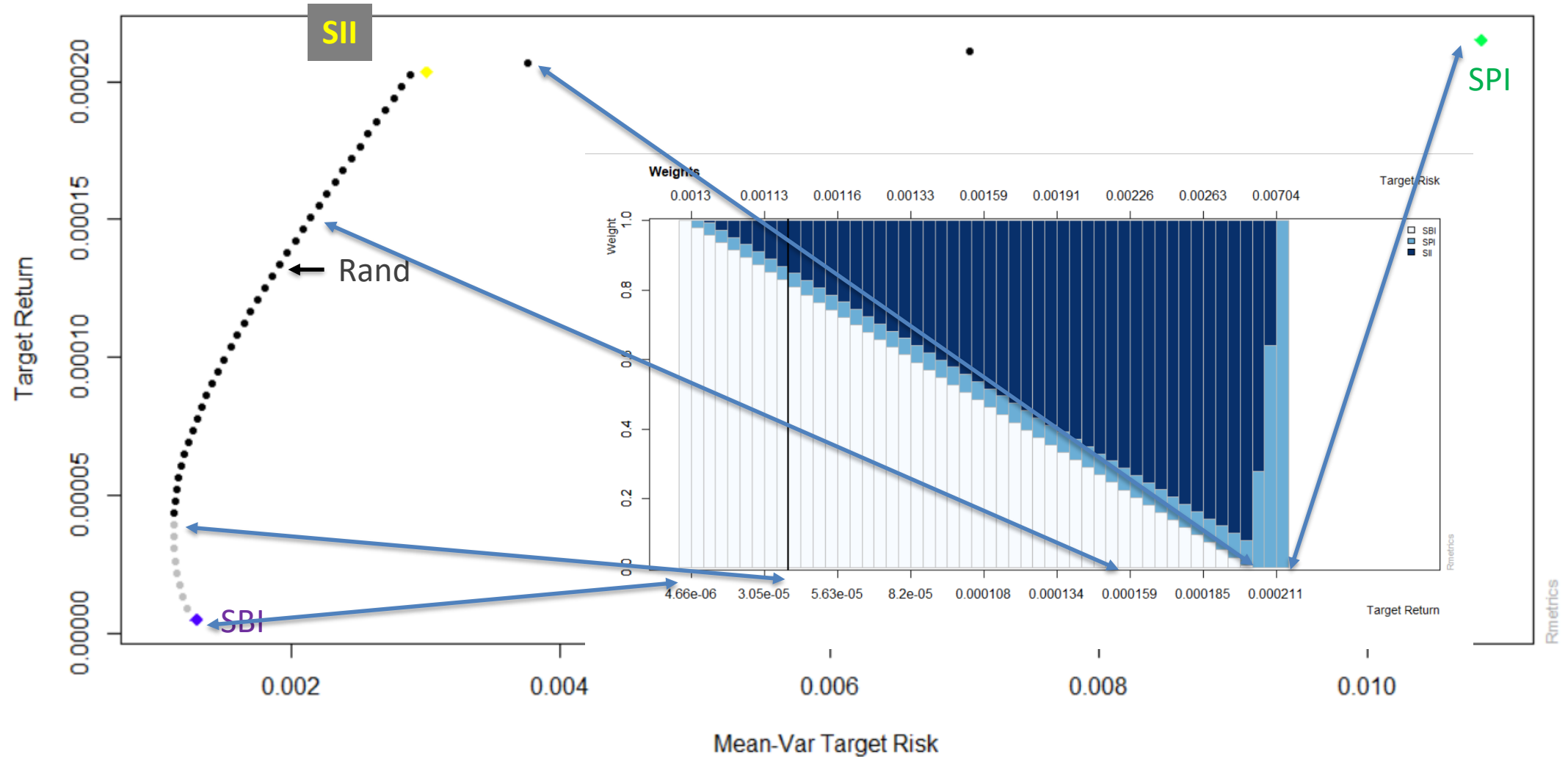
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

## Efficient Frontier Portfoliogewichte



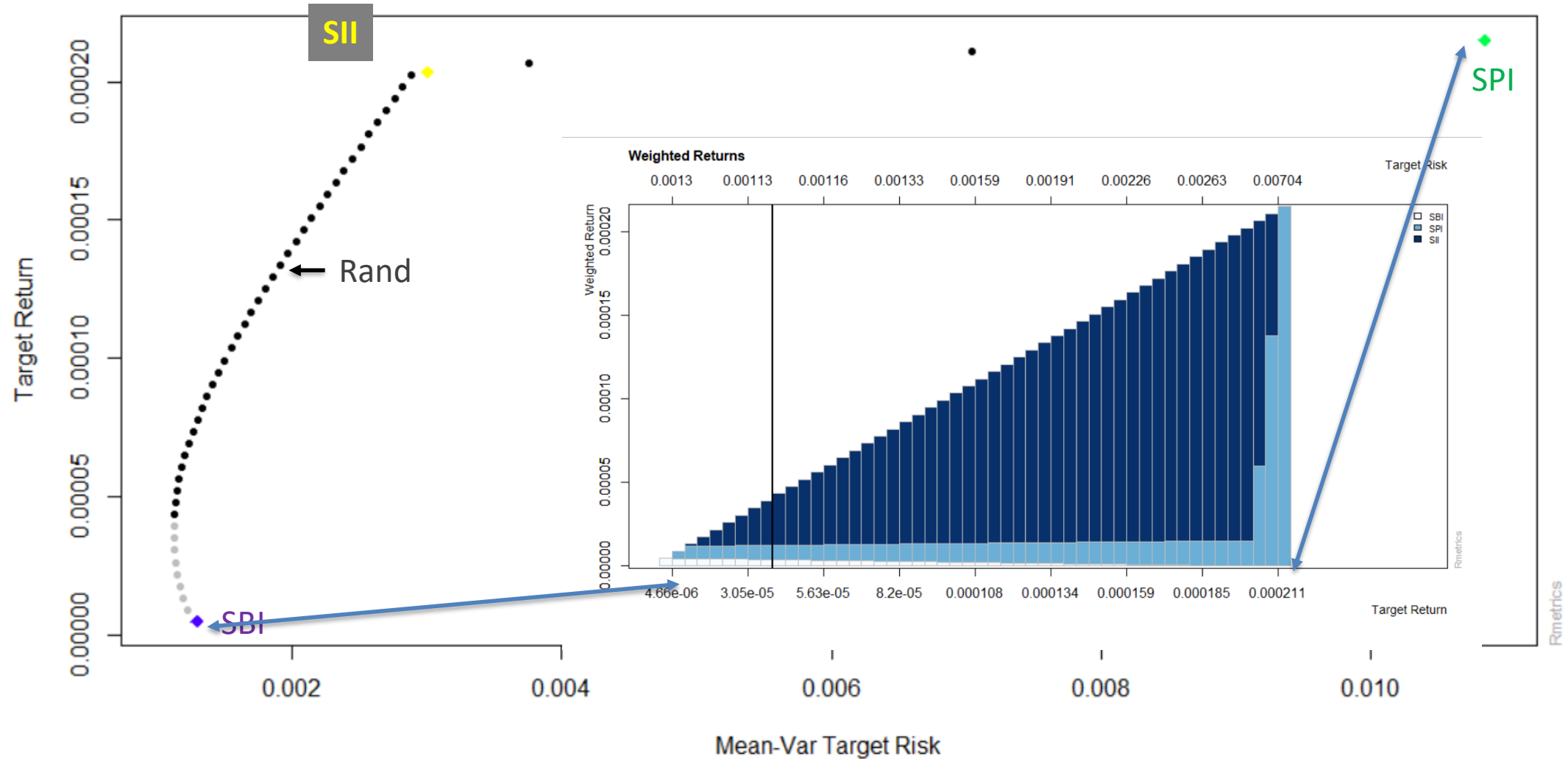
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

## Efficient Frontier Portfoliogewichte



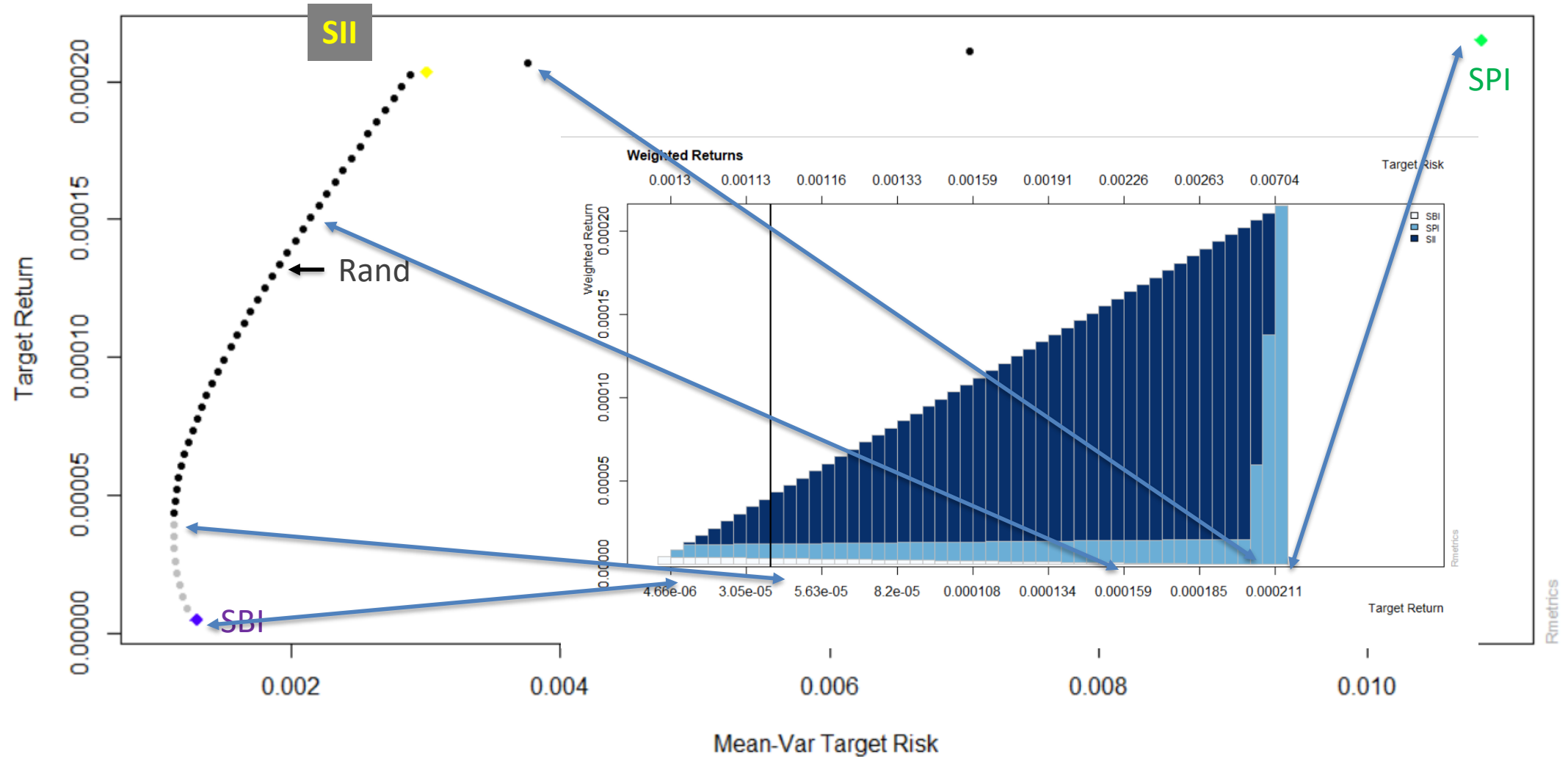
# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

## Efficient Frontier Renditebeiträge



# Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

## Efficient Frontier Renditebeiträge



Statistische Bestimmung optimaler Portfolios hat zwei Schwächen:

1. Aus Daten in der Vergangenheit wird auf die zukünftige Entwicklung geschlossen.
2. Die Vorhersagen von Finanzmarktdaten betreffen ein soziales, reflexives System.

Zusammen genommen führen die beiden Schwächen dazu, dass die optimalen Portfolios in der Regel nicht so gut abschneiden, wie dies theoretisch (mathematisch-statistisch) zu erwarten wäre.

Entsprechend werden

- am Markt in der Regel robustere Portfolioansätze verfolgt z.B. eine Gleichgewichtung
- in der Wissenschaft Portfoliomodelle weiterentwickelt, z.B. im CAPM - Capital Asset Pricing Model

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk\*. *The Journal of Finance*, 19(3)

wobei auch diese Modelle weiterhin fehlerbehaftet sind

Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25–46.