

Theorie der ARIMA Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Einführung in stochastische Prozesse

- Zeitreihen, Stochastische Prozesse und Modelle
- Beispiel: Weisses Rauschen (White Noise) Prozess
- Beispiel: Irrfahrt (Random Walk)
- Anwendung: Kursverläufe von Aktien
- Anwendung: Kursverläufe von Aktien
- Differenzenprozess und -zeitreihe
- Anwendung: Kursveränderungen von Aktien
- Fazit

- Eine Zeitreihe ist in der Praxis eine Datenreihe von Zahlenwerten mit einem endlichen Zeitindex: x_t mit $t = 1, \dots, T$.
 - Aufeinanderfolgende Beobachtungen x_t und x_{t+1} haben dabei denselben zeitlichen Abstand, z.B. einen Kalendertag, eine Stunde, ...
 - In der Mathematik wird eine Zeitreihe als eine bestimmte Realisierung eines stochastischen Prozesses verstanden.
- Ein stochastischer Prozess ist eine Folge von Zufallsvariablen (X_t) mit einem ganzzahligen Index mit t .
 - Der Prozess ist damit vor einer *Ewigkeit* gestartet und läuft auch bis in *alle Ewigkeit*. Diese Unendlichkeit spielt in der Praxis nur selten Rolle, vereinfacht aber die Mathematik. So gibt es bspw. keine Randwertprobleme bei einem gleitenden Mittelwert.
- Stochastische Prozesse können als Modell für Zeitreihendaten verwendet werden. Man schätzt dafür geeignete Parameter des Prozesses bzw. Modells, die die Zeitreihendaten möglichst gut repräsentieren.

Beispiel: Weisses Rauschen (White Noise) Prozess

Der einfachste stochastische Prozess besteht aus identisch verteilten, voneinander unabhängigen Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz.

Vereinfacht: In jedem Zeitschritt wird mittels desselben Zufallsprinzips ein neuer Wert ermittelt.

Beispiele für Weisses Rauschen und deren Realisierungen:

- *Ewiger Münzwurf:* Werfe in jedem Zeitpunkt eine Münze

```
sample(c("Kopf", "Zahl"), size=10, replace=T)
```

```
## [1] "Kopf" "Kopf" "Zahl" "Zahl" "Zahl" "Kopf" "Zahl" "Zahl" "Kopf" "Kopf"
```

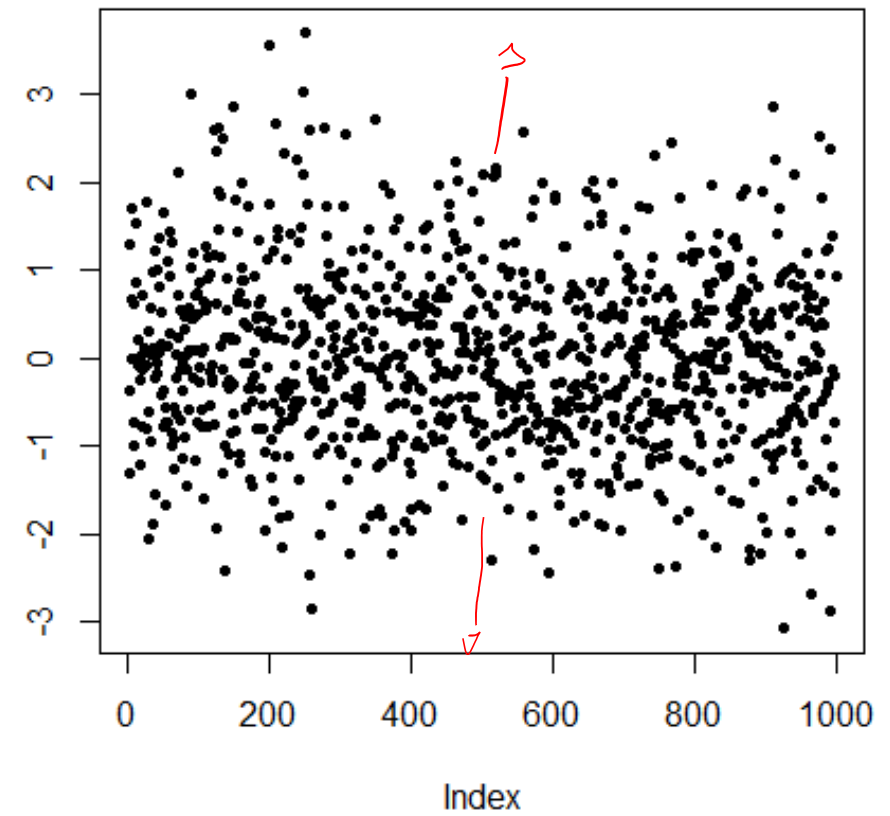
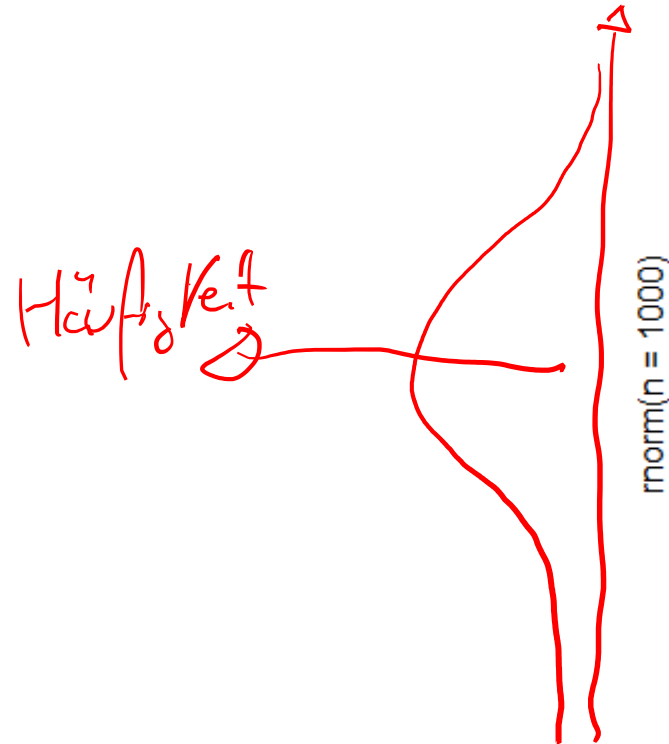
- *Ewiger Würfelwurf:* Werfe zu jedem Zeitpunkt einen Würfel

```
sample(1:6, size=10, replace=T)
```

```
## [1] 3 2 2 2 5 6 6 3 6 2
```

- *Gaussches Weisses Rauschen:* Ziehe zu jedem Zeitpunkt aus einer Normalverteilung. Im folgenden ein Beispiel für ein Gaussches Weisses Rauschen für normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1.

```
plot(rnorm(n=1000),  
     type="p",pch=20)
```



Beispiel: Irrfahrt (Random Walk)

Auch eine Irrfahrt beruht auf identisch verteilten, voneinander unabhängigen Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz. Diese werden allerdings nicht direkt ausgegeben, sondern immer weiter aufsummiert.

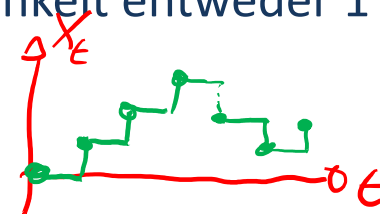
Vereinfacht: In jedem Zeitschritt wird mittels desselben Zufallsprinzips ein neuer Wert ermittelt und zu der bestehenden Summe dazu addiert.

Beispiele für eine Irrfahrt und deren Realisierung

- *Diskrete Irrfahrt*: Füge in jedem Zeitpunkt mit 50% Wahrscheinlichkeit entweder 1 hinzu, oder ziehe mit 50% Wahrscheinlichkeit 1 ab.

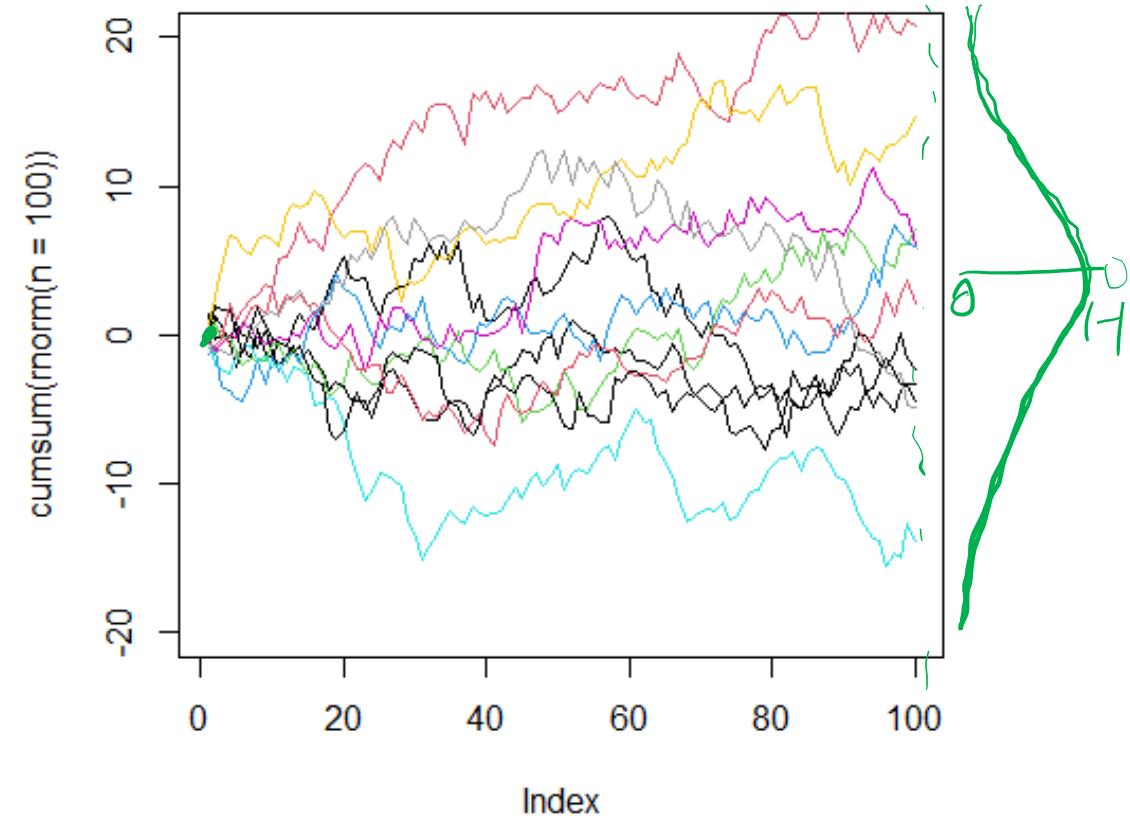
```
einzelsschritt <- sample(c(-1,1),size=10,replace=T)
cumsum(einzelsschritt)
```

```
## [1] 1 2 3 2 1 2 1 2 3 2
```



- *Stetige Irrfahrt (Normalverteilung)*: Füge in jedem Zeitpunkt eine Normalverteilte Zufallsvariable hinzu. Im folgenden ein Beispiel für eine stetige Irrfahrt mit einer normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1.

```
plot(cumsum(rnorm(n=100)),  
     type="l",col=1,ylim=c(-20,20))  
for(i in 1:10){  
  lines(cumsum(rnorm(n=100)),  
        type="l",col=i)  
}
```



Anwendung: Kursverläufe von Aktien

Der Kurs einer Aktie spiegelt die Bewertung eines Unternehmens wieder. Aktien werden an Börsen oder außerbörslich gehandelt, wodurch sich Preise bilden. Die Bewertung des Unternehmens und damit die Preise der Aktien unterliegen in jedem Zeitpunkt zufälligen Einflüssen. Diese können positiv oder negativ auf den Unternehmenswert einwirken und addieren sich in ihrer Auswirkung.

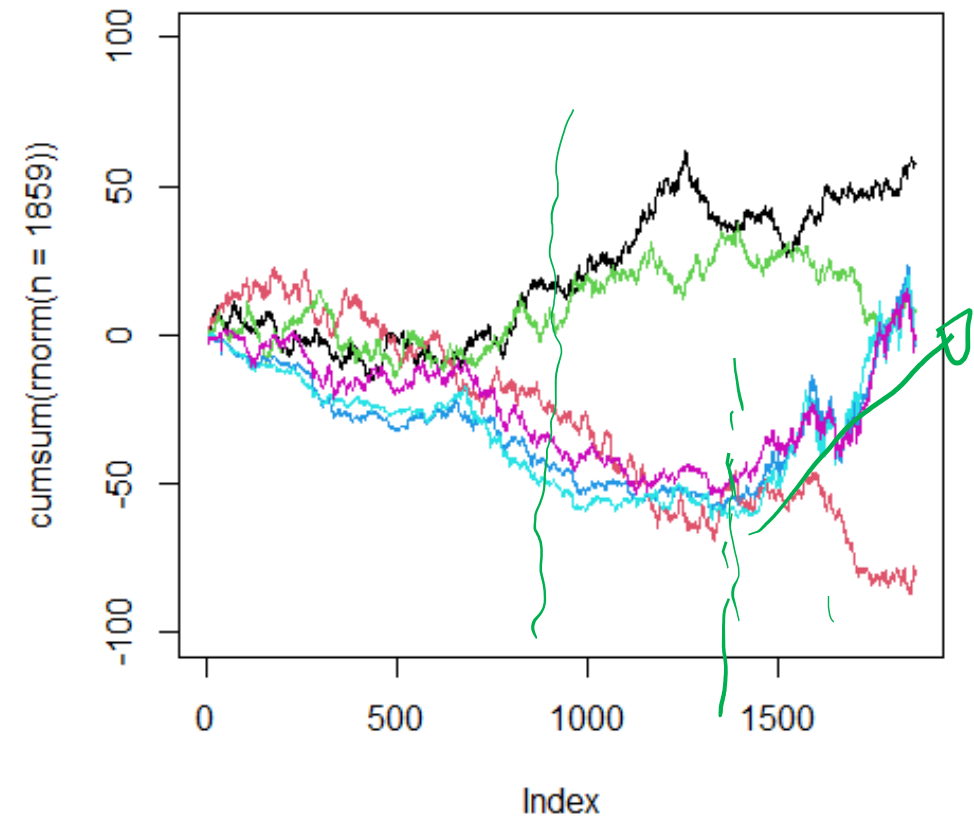


In der Tat sehen Aktienkursverläufe - zumindest kurzfristig - einer stetigen Irrfahrt sehr ähnlich.

Auf der folgenden Folie finden Sie die Plots von drei stetigen Irrfahrten mit normalverteilten Zuwächsen und drei entsprechend standardisierten Tagesschlussständen von europäischen Aktienindices von 1991 bis 1998. Erkennen Sie einen Unterschied?

Anwendung: Kursverläufe von Aktien

```
standardize <- function(invec) {  
  delta <- diff(invec)  
  delta.stand <- (delta -  
mean(delta)) / sd(delta)  
  cumsum(delta.stand)  
}  
  
EU.stand <-  
apply(EuStockMarkets, 2, standardize)[1:185  
9,]  
plot(cumsum(rnorm(n=1859)),  
      type="l", col=1, ylim=c(-100, 100))  
for(i in 1:2)  
  lines(cumsum(rnorm(n=1859)), col=i+1)  
for(i in 1:3) lines(EU.stand[,i], col=i+3)
```



Differenzenprozess und -zeitreihe

Für einen stochastischen Prozess (X_t) nennen wir die Änderungen von einem Zeitschritt auf den nächsten

$$\underline{\Delta X_t = X_t - X_{t-1}}$$

den Differenzenprozess zu (X_t) .

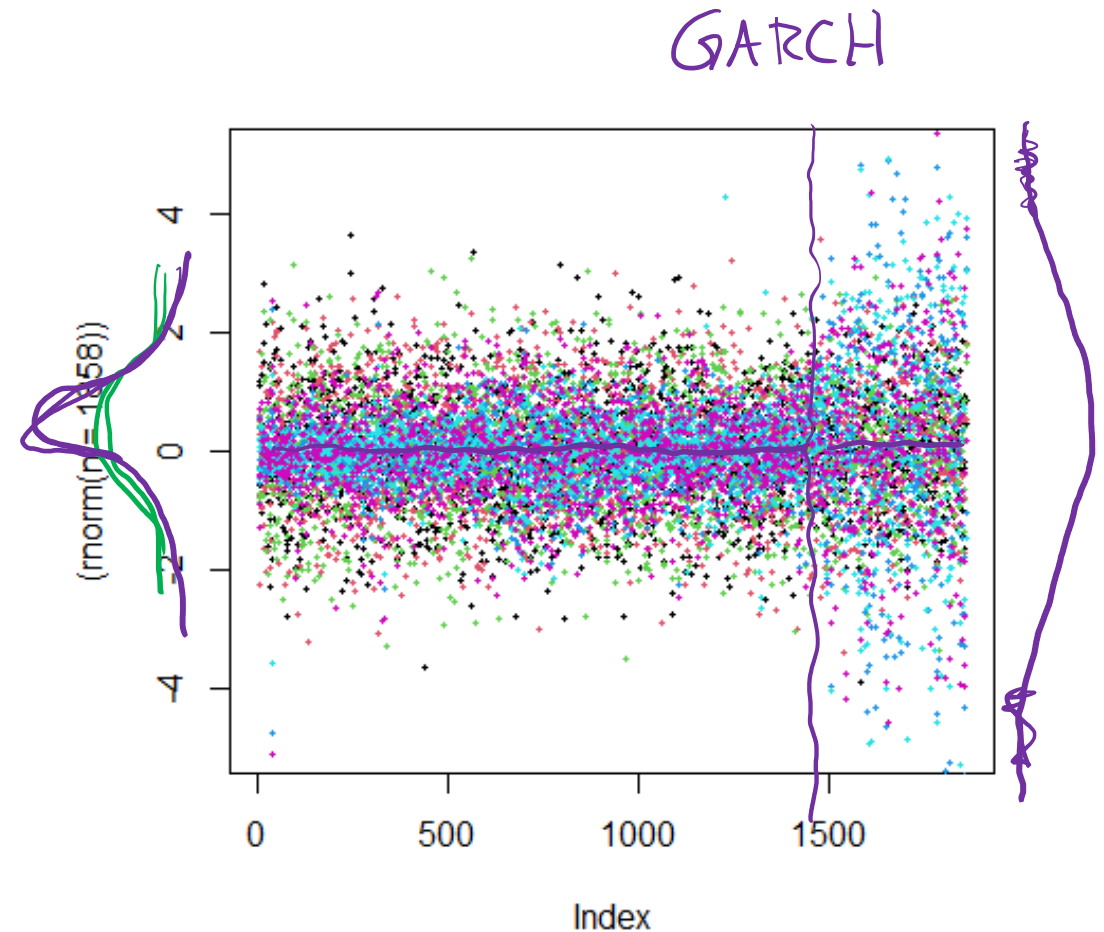
Analoges gilt für eine Zeitreihe x_t und die Differenzzeitreihe Δx_t .

In der Analyse von Aktienkursen betrachtet man häufig nicht den Kurswert selber, sondern die Zuwächse innerhalb eines festen Zeitraums z.B. die täglichen Gewinne und Verluste.

Im folgenden die Plots von dreimal Gaußschem Weissen Rauschen und drei entsprechend standardisierten Veränderungen in den Tagesschlussständen von europäischen Aktienindices von 1991 bis 1998. Erkennen Sie einen Unterschied?

Anwendung: Kursveränderungen von Aktien

```
standardize <- function(invec) {  
  delta <- diff(invec)  
  delta.stand <- (delta -  
mean(delta)) / sd(delta)  
  delta.stand  
}  
  
EU.delta.stand <-  
apply(EuStockMarkets, 2, standardize) [1:185  
9,]  
plot((rnorm(n=1858)),  
      type="p", col=1, ylim=c(-5, 5), pch=20)  
for(i in 1:2)  
  points((rnorm(n=1858)), col=i+1, pch=20)  
for(i in 1:3)  
  points(EU.delta.stand[,i], col=i+3, pch=20)
```



Fazit

- Stochastische Prozesse sind ein mathematisches Konstrukt
 - Stochastische Prozesse bestehen aus Zufallskomponenten und funktionalen Zusammenhängen
 - Weisses Rauschen hat nur eine Zufallskomponente
 - Eine Irrfahrt ist die Summe von Weisssem Rauschen
 - Differenzenprozesse bilden die Änderungen zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ab
- Aktienkurse lassen sich als Zeitreihe darstellen
 - Aktienkurse zeigen eine starke Zufallskomponente
 - Aktienkurse gleichen in erster Ordnung einer Irrfahrt
 - Kursänderungen gleichen in erster Ordnung einem Weissen Rauschen
- Stochastische Prozesse kann man verwenden als Modell
 - zur Repräsentation von Zeitreihendaten oder
 - zur Simulation von Zeitreihendaten.
- Zu besseren Modellierung von Aktienkursen und anderen Finanzzeitreihen sind komplexere Modellfamilien nötig AR | MA

Theorie der ARIMA Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Erweiterte Zeitreihenanalyse

- Lage- und Streuungsparameter von Zeitreihen
- Autokovarianz und Autokorrelation
- Interpretation der Autokorrelationsfunktion
- Anwendung Autokorrelationsfunktion von Aktienkursen
- Interpretation Autokorrelationsfunktion von Aktienkursen
- Fazit

Lage- und Streuungsparameter von Zeitreihen

Eine Zeitreihe x_t mit $t = 1, \dots, T$ kann man mit Hilfe der deskriptiven Statistik beschreiben:

- Mittelwert:

Lage – $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$

- Beschreibt den durchschnittlichen Wert im Zeitablauf.

Erwartungswert $E\{x_t\}$

Zusätzlich zum Mittelwert haben wir auch andere Verfahren der Glättung einer Zeitreihe kennen gelernt, z.B.

- Gleitender Durchschnitt - rückwärtsgerichtet mit Horizont s :

– $\mu_t^s = \frac{1}{s+1} \sum_{i=-s}^0 x_{i+t}$

- Beschreibt den durchschnittlichen Wert über gleitende Zeitfenster

- Exponentielle Glättung 1. Ordnung:

– $n_t = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot n_{t-1}$

- Beschreibt das Niveau einer geglätteten Zeitreihe

Neben den Durchschnittswerten als Lageparameter ist für die Analyse häufig auch die Schwankung der Zeitreihe um den Durchschnittswert interessant. Der einfachste Streuungsparameter ist die Varianz.

- (Stichproben-)Varianz:

Streuung – $\sigma^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2$

- Beschreibt die Schwankungsbreite der Werte im Zeitablauf.

Autokovarianz und Autokorrelation

Zusätzlich zur Varianz lässt sich auch beschreiben, ob ein Zusammenhang zwischen Schwankungen an direkt oder verzögert aufeinanderfolgenden Zeitpunkten besteht.

– empirische Autokovarianzfunktion für eine Verzögerung (*lag*) von h :

$$- \gamma(h) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x}) \cdot (x_{t+h} - \bar{x})$$

$$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$$

– Beschreibt den Zusammenhang zwischen verschiedenen Zeitabständen. Beispielsweise:

- $\gamma(0)$ gleich der Varianz (~~Grundgesamtheit~~)
- $\gamma(1)$ Kovarianz zwischen aufeinanderfolgenden Zeitschritten

– empirische Autokorrelationsfunktion für eine Verzögerung (*lag*) von h :

$$- \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t+h})}{\text{Var}(x_t)}$$

Im Folgenden zeigen wir ein Gauss'sches Weisses Rauschen (siehe unten) mit gleitendem Durchschnitt (rückwärtsgerichtet, Horizont 3 und Gewichte $\frac{1}{3}$) und den daraus abgeleiteten Random Walk sowie darunter die zugehörigen Auto-Korrelationsfunktionen.


```
layout(matrix(1:2,2,1))
```

```
## Prozesse und gl. Durchschnitt
```

```
w <- rnorm(n=100)
```

```
plot(w, type="p", pch=20, ylim=c(-10,10))
```

```
lines(filter(w, rep(1/4,4),
```

```
method="convolution", sides=1), col=1)
```

```
lines(cumsum(w), type="l", col=2)
```

```
abline(h=0, col=3)
```

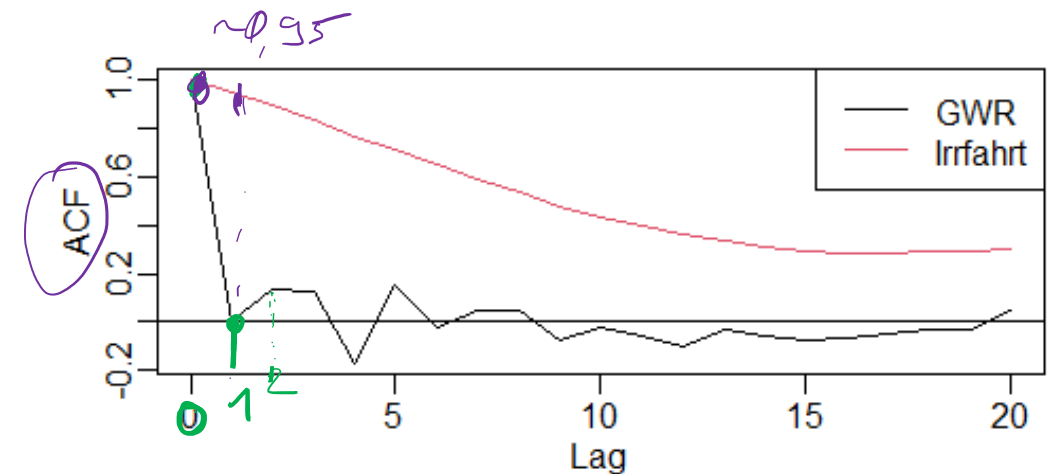
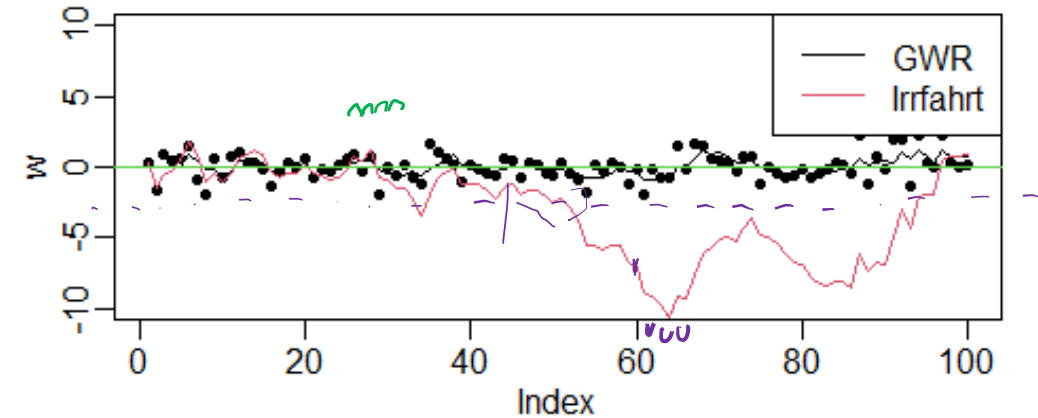
```
legend("topright", c("GWR", "Irrfahrt"), col  
=1:2, lty=1)
```

```
## Autokorrelationsfunktionen
```

```
plot(acf(w, lag.max=20, plot=F), type="l", ci  
=0, main="")
```

```
lines(0:20, acf(cumsum(w), lag.max=20, plot=  
F)$acf, col=2)
```

```
legend("topright", c("GWR", "Irrfahrt"), col  
=1:2, lty=1)
```



Interpretation der Autokorrelationsfunktion

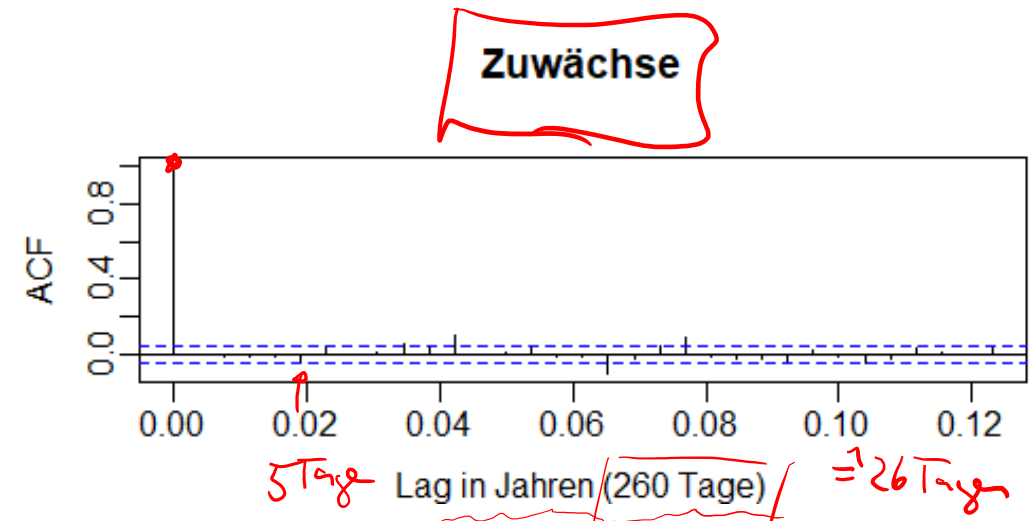
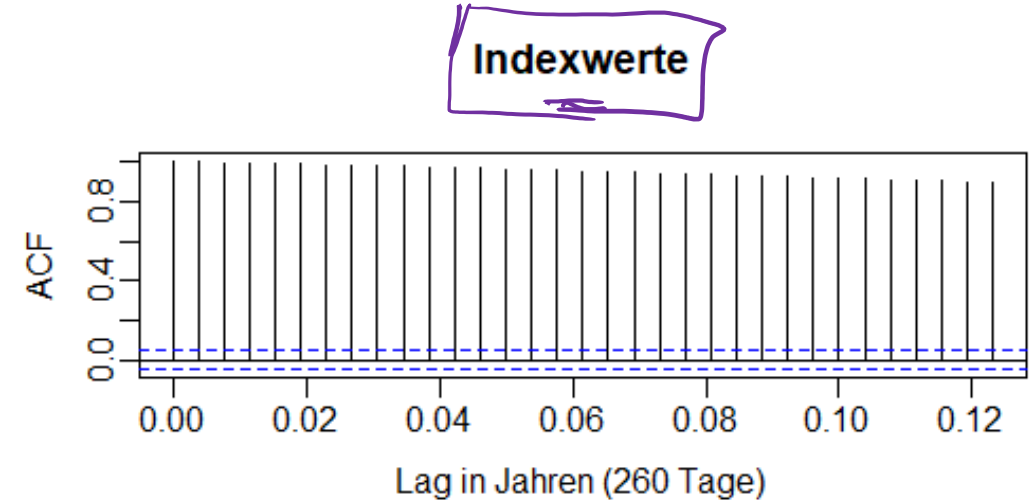
Die Autokorrelationsfunktion zeigt den Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten mit festem Abstand (Verzögerung) an.

- Die Autokovarianz bzw. -korrelation mit Verzögerung 0 entspricht der Varianz der Zeitreihe bzw. ist immer gleich 1.
- Die Autokovarianz bzw. -korrelation mit Verzögerung 1 zeigt den Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten an:
 - Gilt $\gamma(1) > 0$ bzw. $\rho(1) > 0$ so folgt auf einen überdurchschnittlichen Wert ebenso ein überdurchschnittlicher Wert
 - Gilt $\gamma(1) < 0$ bzw. $\rho(1) < 0$ so folgt auf einen überdurchschnittlichen Wert ebenso ein entgegengesetzt unterdurchschnittlicher Wert (analog unterdurchschnittlich gefolgt von überdurchschnittlich)
- Autokovarianzen bzw. -korrelationen mit Verzögerungen größer 1 sind vor allem bei periodischen Zeitreihen relevant (vgl. klassische Zeitreihenanalyse mit saisonalen Komponenten)
 - Ist die Verzögerung genau gleich der Länge einer Periode, so ist die Autokovarianz bzw. -korrelation in der Regel größer 0.
 - Bei monatlichen Daten zeigen $\gamma(12)$ bzw. $\rho(12)$ den Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Jahreswerten desselben Monats an.

Im folgenden die Autokorrelationsfunktion der DAX Zeitreihe zwischen 1991 und 1998.

Anwendung Autokorrelationsfunktion von Aktienkursen

```
DAX <- EuStockMarkets[, "DAX"]  
layout(matrix(1:2, 2, 1))  
# Autokorrelation der Indexwerte  
acf(DAX, main="Indexwerte",  
    xlab="Lag in Jahren (260 Tage)")  
  
# Autokorrelation der Zuwächse  
acf(diff(DAX), main="Zuwächse",  
    xlab="Lag in Jahren (260 Tage)")
```



Interpretation Autokorrelationsfunktion von Aktienkursen

- Aktienkurse weisen in der Regel eine hohe Autokorrelation auf
 - Aktienkurse stehen für eine Unternehmensbewertung
 - Unternehmensbewertungen verändern sich zwischen aufeinanderfolgenden Tagen wenig
 - auf eine hohe Bewertung folgt in der Regel weiterhin eine hohe Bewertung
- Veränderungen von Aktienkursen weisen in der Regel geringe Autokorrelationen auf (für Verzögerungen größer 0)
 - Veränderungen von Aktienkursen entsprechen einer Änderung in der Unternehmensbewertung durch neue Informationen
 - Veränderungen folgen in der Regel keinem regelmäßigen, wiederkehrenden Muster
 - Insbesondere besteht in der Regel kein Zusammenhang zwischen den Veränderungen eines Tages und denen der darauf folgenden Tage

Fazit

- Mit der Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion lassen sich Zusammenhänge zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten feststellen
 - bei einer Verzögerung von Null entspricht die Autokovarianz der Varianz
 - bei einer Verzögerung von 1 erhält man Zusammenhänge zwischen aufeinanderfolgenden Tagen
 - bei einer Verzögerung von 2 erhält man den Zusammenhang zwischen einem Tag und dem übernächsten Tag, u.s.w.
- Autokovarianz- und Autokorrelation lassen sich auf Zeitreihen und Differenzzeitreihen anwenden
- Autokovarianz- und Autokorrelation geben einen Aufschluss über Regelmäßigkeiten in der Zeitreihe z.B.
 - stetiges Wachstum von Aktienkursen
 - periodische Zusammenhänge
- Modelle für Aktienkurse sollten Zusammenhänge darstellen können

AR

MA

Theorie der ARIMA Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Moving Average (MA) Prozesse

- Definition Moving Average Prozesse
- Vergleich: Moving Average Prozess und gleitender Durchschnitt
- Moving Average Prozesse - Beispiel

Definition Moving Average Prozesse

Ein Moving Average (Gleitende Durchschnitt) Prozess ergibt sich als gleitender, rückwärtsgerichteter Durchschnittswert einer stetigen Irrfahrt mit normalverteilten Zuwächsen (W_t): $\theta_0 = 1$

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q} = W_t + \sum_{k=1}^q \theta_k W_{t-k}$$

Handwritten annotations: Green arrows point to W_t , W_{t-1} , and W_{t-q} . Red arrows point to W_t , W_{t-1} , and W_{t-q} . The q in the summation is circled in red.

Dabei sind

- q der Horizont des Prozesses
- θ_i die Gewichtungsfaktoren für die zurückliegenden Zeitschritte
- W_t normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert bzw. Mittelwert Null und Varianz σ^2

Häufig nennt man einen Moving Average Prozess mit Zeithorizont q auch einen MA(q) Prozess.

Vergleich: Moving Average Prozess und gleitender Durchschnitt

– Berechnungsformel MA und gleitender Durchschnitt vergleichbar

– $X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q}$

- rückwärtsgerichteter Horizont q
- Unterschiede in der Gewichtung des aktuellen Wertes
 - bei Moving Average i.d.R. fest mit Wert 1
 - bei gleitendem Durchschnitt frei wählbar

$$\mu_t^s = \frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^s \theta_i \cdot X_{t-i}$$

– Unterschied in der Sichtweise

- Moving Average Prozess
 - mathematisches Objekt
 - erlaubt analytische Untersuchung
 - definiert einen stochastischen Prozess
 - Modell zur Simulation von Zeitreihendaten
- Gleitender Durchschnitt
 - Methode der deskriptiven Statistik
 - entfernt zufällige Schwankungen aus beobachteten Werten einer Zeitreihe
 - glättet die Zeitreihenkurve
 - zur vereinfachten Darstellung von Zeitreihendaten

Moving Average Prozesse - Beispiel

Im folgenden die Realisierung einer stetigen Irrfahrt und zweier darauf aufbauender MA-Prozesse.

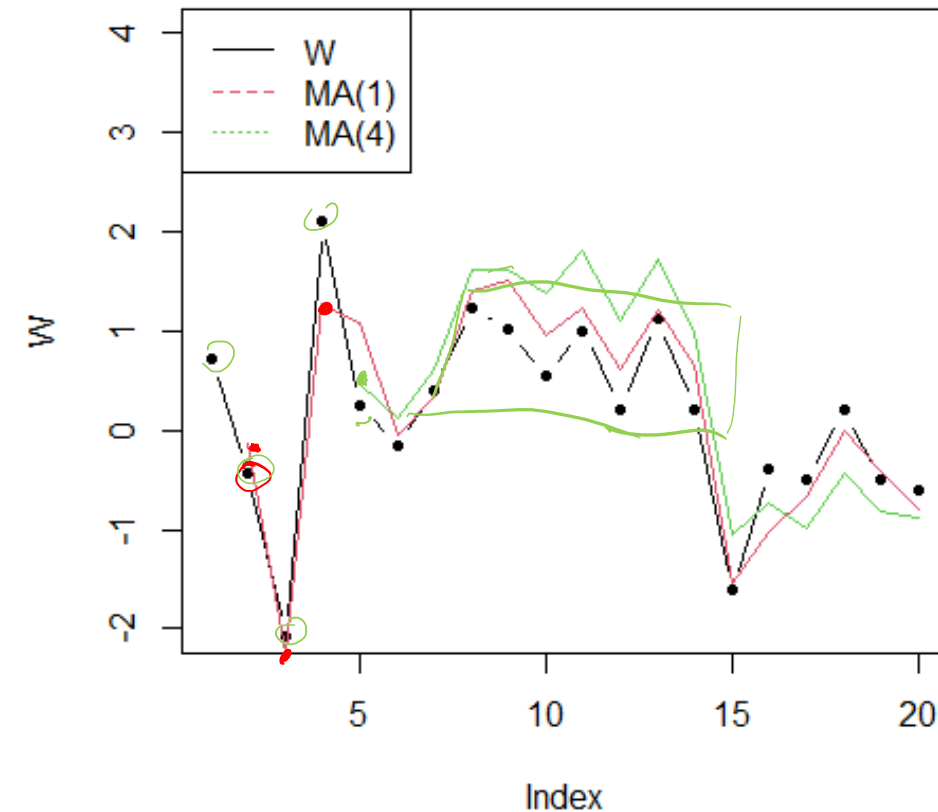
```
W <- rnorm(n=20)
theta1 <- c(1, .4)

X1 <- filter(x=W, filter=theta1,

method="convolution", sides=1)
theta2 <- c(1, .4, .3, .2, .1)
X2 <- filter(x=W, filter=theta2,

method="convolution", sides=1)

plot(W, ylim=c(-2, 4), pch=20, type="b")
lines(X1, col=2, type="l")
lines(X2, col=3, type="l")
legend("topleft", c("W", "MA(1)", "MA(4)"),
      col=1:3, lty=1:3)
```



Theorie der ARIMA Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Auto-Regressive (AR) Prozesse

- Definition Auto-Regressive Prozesse
- Vergleich: AR-Prozess und exponentielle Glättung
- Autokovarianz und -korrelation Auto-Regressive Prozesse
- Beispiel für einen AR-Prozess mit Zeithorizont 1
- Auto-Regressive Prozesse mit Zeithorizont p - AR(p) Prozess
- Beispiel für einen AR(2)-Prozess
- Partielle Autokorrelation

Definition Auto-Regressive Prozesse

Ein (linearer) Auto-Regressiver (AR) Prozess ergibt sich als schrittweise Fortschreibung aus der Summe seiner bisherigen Werte und eines neu hinzugekommenen Zufallswerts. Ein AR Prozess mit Zeithorizont 1 ist definiert durch:

$$\underline{X_t} = \phi \cdot \underline{X_{t-1}} + W_t$$

Dabei sind

- (W_t) normalverteilte Zuwächse
- ϕ der Gewichtungsfaktor für den zurückliegenden Zeitschritt mit $|\phi| < 1$
- W_t normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert bzw. Mittelwert Null und Varianz σ^2

Wendet man die obige Formel iterativ wieder auf X_{t-1} , dann auf X_{t-2} usw. an, ergibt sich eine neue Darstellung nur anhand der Zuwächse als

$$X_t = \phi \cdot X_{t-1} + W_t = \phi \cdot (\phi \cdot X_{t-2} + W_{t-1}) + W_t = \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (\phi)^i \cdot W_{t-i}$$

Vergleich: AR-Prozess und exponentielle Glättung

– Berechnungsformel AR und dem Niveau in der exponentiellen Glättung erster Ordnung vergleichbar

$$\boxed{X_t} = \phi \cdot X_{t-1} + W_t \text{ und } n_t = (1 - \alpha) \cdot n_{t-1} + \alpha \cdot x_t$$

Geht

- Rollen vertauscht

- Prozess X und Niveau n bzw.
- Zufallsterm W und Zeitreihenwert x

– Unterschied in der Sichtweise

- AR-Prozess

- mathematisches Objekt
- erlaubt analytische Untersuchung
- definiert einen stochastischen Prozess
- Modell zur Simulation von Zeitreihendaten

- Exponentielle Glättung

- Methode der deskriptiven Statistik
- entfernt zufällige Schwankungen aus beobachteten Werten einer Zeitreihe
- glättet die Zeitreihenkurve zur Niveaukurve
- zur vereinfachten Darstellung von Zeitreihendaten

Autokovarianz und -korrelation Auto-Regressive Prozesse

Für einen Auto-Regressiven (AR) Prozess gilt

– für die analytische Autokovarianz

$$\sigma^2 = \text{Var}(V_\epsilon)$$

– $\gamma(h) = \text{Cov}(x_{t+h}, X_t) = \frac{\phi^h \sigma^2}{1 - \phi^2}$

– Die Herleitung basiert auf der Darstellung anhand der Zuwächse und erfordert ein paar Rechenschritte.

– für die analytische Autokorrelation

– $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h$

Da $|\phi| < 1$ sinkt der Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Abschnitten also exponentiell mit dem Zeitabstand.

Beispiel für einen AR-Prozess mit Zeithorizont 1

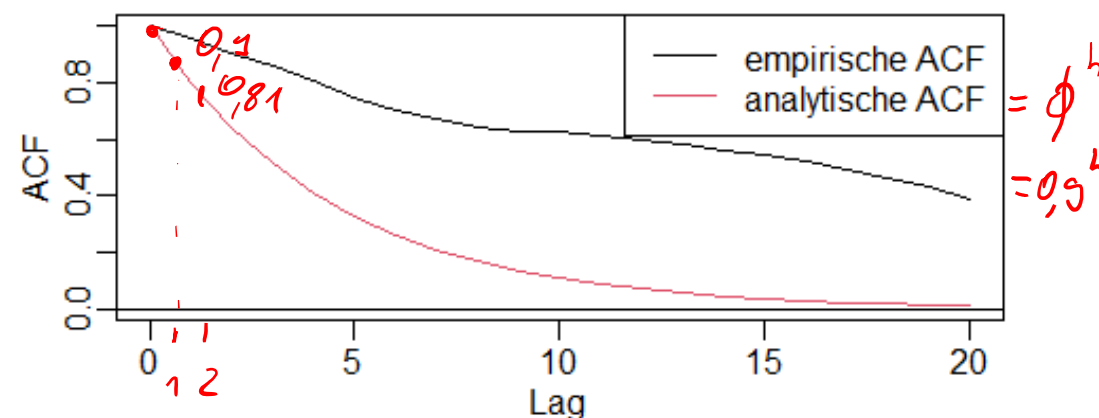
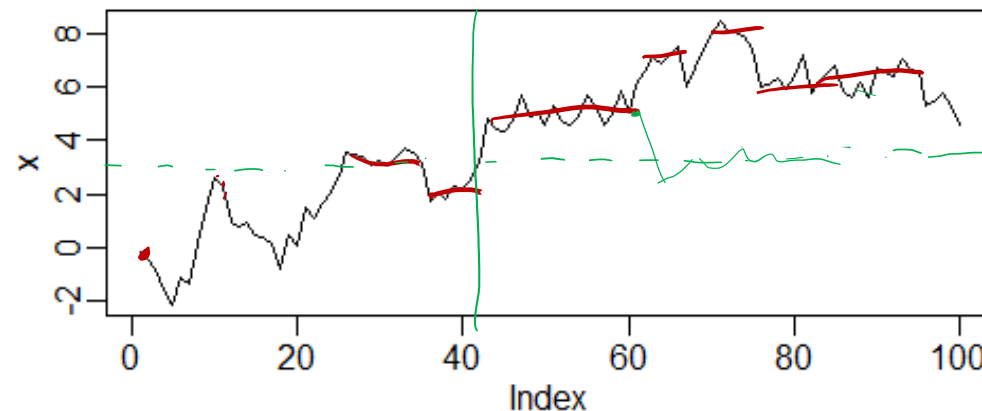
Im folgenden ein Beispiel für eine Realisierung eines AR-Prozesses mit Zeithorizont 1, $\phi = 0.9$ und Startwert 0 sowie dessen empirische und analytische Autokorrelationsfunktion.

```
layout(matrix(1:2,2,1))
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))

## Prozess mit Zuwachsdarstellung
phi <- 0.8
w <- rnorm(n=1000)
x <- w
for(i in 2:length(w)) x[i] <- phi*x[i-1]+
w[i]

# Prozess
plot(x, type="l")

## Autokorrelationsfunktionen
plot(acf(x, lag.max=20, plot=F), type="l", ci=0,
main="", ylim=c(0,1))
lines(0:20, phi^(0:20), col=2)
legend("topright", c("empirische
ACF", "analytische ACF"), col=1:2, lty=1)
```



Auto-Regressive Prozesse mit Zeithorizont p - AR(p) Prozess

Ein (linearer) Auto-Regressiver (AR) Prozess mit Zeithorizont p basiert auf den vorangehenden p Zeitschritten und ist definiert durch:

$$X_t = \underbrace{\phi_1 \cdot X_{t-1}} + \overbrace{\phi_2 \cdot X_{t-2}} + \dots + \underbrace{\phi_p \cdot X_{t-p}} + \underbrace{W_t} = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + W_t$$

Dabei sind

- (W_t) normalverteilte Zuwächse mit Erwartungswert bzw. Mittelwert Null und Varianz σ^2
- ϕ_i die Gewichtungsfaktoren für die zurückliegenden Zeitschritte

Die mathematische Analyse eines AR(p) Prozesses wie z.B. die Ermittlung der analytische Autokorrelationsfunktion ist deutlich komplexer als die eines einfachen AR(1) Prozesses und unterbleibt hier.

Beispiel für einen AR(2)-Prozess

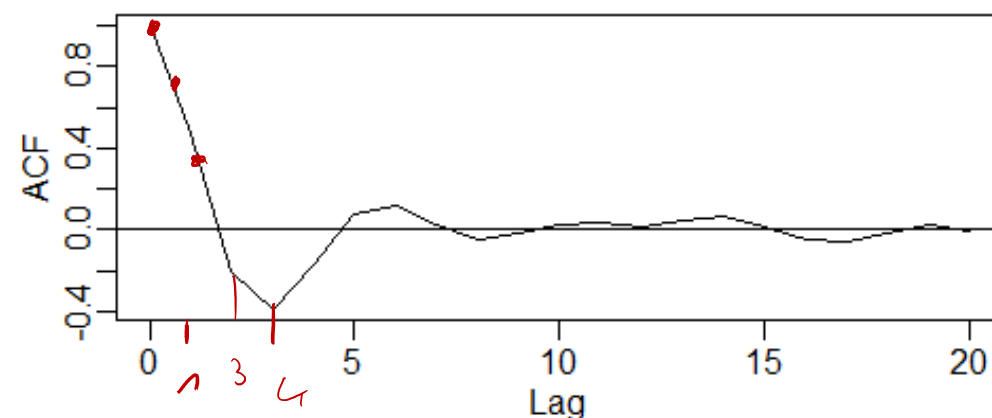
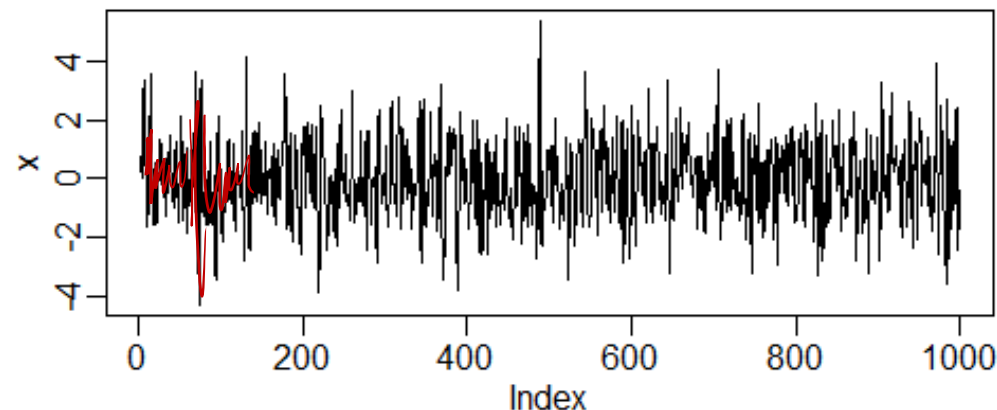
Im folgenden ein Beispiel für eine Realisierung eines AR(2)-Prozesses mit $\phi_1 = 0,9$, $\phi_2 = -0,5$ und Startwert 0 sowie dessen empirische Autokorrelationsfunktion.

```
layout(matrix(1:2,2,1))
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))

## Prozess mit Zuwachsdarstellung
phi <- c(0.7,-0.5)
w <- rnorm(n=1000)
x <- w
x[2] <- phi[1]*x[1]+w[2]
for(i in 3:length(w)) x[i] <- phi[1]*x[i-1]+phi[2]*x[i-2]+ w[i]

# Prozess
plot(x, type="l")

## Autokorrelationsfunktionen
plot(acf(x,lag.max=20,plot=F),type="l",ci=0,main="")
```



Partielle Autokorrelation

Die Autokorrelationsfunktion aggregiert alle Zusammenhänge zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. Sie berücksichtigt damit auch indirekte Zusammenhänge. So beinhaltet die Autokorrelationsfunktion mit lag 2 nicht nur den direkten Zusammenhang zwischen X_t und X_{t+2} , sondern auch den indirekten Zusammenhang von X_t über X_{t+1} zu X_{t+2} .

Diese indirekten Zusammenhänge führen auch bei einem AR-Prozess mit Verzögerung 1 dazu, dass die Autokorrelation auch für Verzögerungen größer 1 nicht null ist. Aufgrund der Konstruktionsweise kann man aber einen direkten Zusammenhang zwischen X_t und X_{t+2} ausschließen (ebenso X_{t+3} , X_{t+4} , ...).

Um den direkten Zusammenhang zu analysieren betrachtet man daher stattdessen die partielle Autokorrelation, als die verbleibende Korrelation zwischen zwei Zeitpunkten, wenn alle Korrelationen der dazwischen liegenden Zeitpunkte entfernt wurden.

Für den Fall eines AR-Prozesses entspricht die partielle Autokorrelation zur Verzögerung h genau dem Koeffizienten ϕ_h .

Eine allgemeine, formale Definition der partiellen Autokorrelation benötigt ein etwas erweitertes Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und unterbleibt hier daher.

Im Folgenden zeigen wir einen AR(2) Prozess sowie darunter die zugehörige Auto-Korrelationsfunktion und partielle Autokorrelationsfunktion.

```

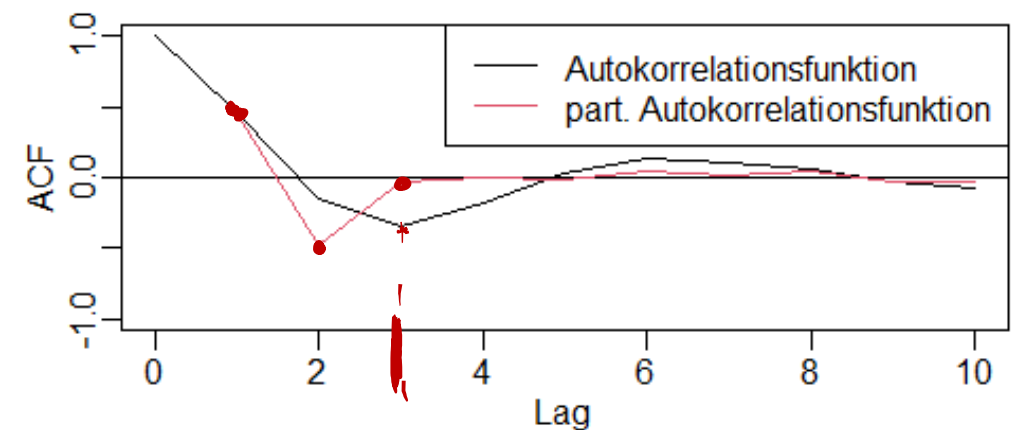
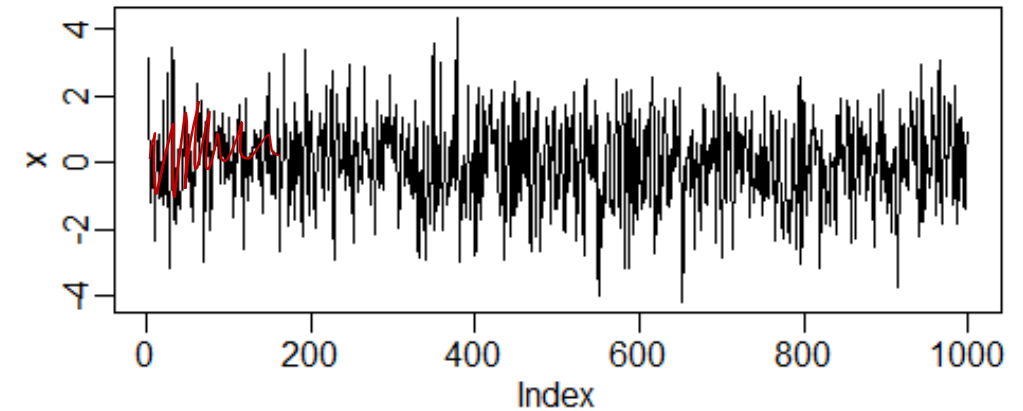
layout(matrix(1:2,2,1))
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))

## Prozess mit Zuwachsdarstellung
phi <- c(0.7, -.5)
w <- rnorm(n=1000)
x <- w
x[2] <- phi[1]*x[1]+w[2]
for(i in 3:length(w)) x[i] <- phi[1]*x[i-1]+phi[2]*x[i-2]+ w[i]

# Prozess
plot(x, type="l")

## Autokorrelationsfunktionen
plot(acf(x, lag.max=10, plot=F), type="l", ci=0,
     main="", ylim=c(-1,1))
lines(pacf(x, lag.max=10, plot=F)$acf, col=2)
legend("topright", c("Autokorrelationsfunktion", "part.
Autokorrelationsfunktion"), lty=1, col=1:2)

```



Theorie der ARIMA Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

(Integrierte) Auto-Regressive Moving Average Prozesse (ARIMA)

- Definition ARMA Prozess
- Definition ARIMA Prozess
- Beispiel: ARIMA(p,d,q) Prozesse
- Schätzen von Modellparametern eines ARIMA Prozesses
- Heuristiken für die Metaparameter p,d,q
- ARMA-Parameter

Definition ARMA Prozess

Autoregressive Prozesse und Moving Average Prozesse lassen sich kombinieren. Dabei werden mittels des autoregressiven Anteils die Werte vorangehender Zeitschritte summiert und mittels des Moving Average Anteils ein gleitender Durchschnitt aus den Zufallswerten vorangehender Zeitschritte hinzugefügt.

Die Zeithorizonte für den autoregressiven Anteil (p) und den Moving Average Anteil (q) können unabhängig voneinander gewählt werden.

Es ergibt sich ein ARMA(p,q)-Prozess

$$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + W_t + \sum_{k=1}^q \theta_k W_{t-k}$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Dabei sind

- ϕ_k die Gewichtungsfaktor für die zurückliegenden Zeitschritte im autoregressiven Anteil
- (W_t) normalverteilte Zufallswerte mit Erwartungswert bzw. Mittelwert Null und Varianz σ^2
- θ_k die Gewichtungsfaktor für die zurückliegenden Zeitschritte im Moving Average Anteil

Definition ARIMA Prozess

Wird mit dem ARMA(p,q) Modell nicht der Prozess selber beschrieben, sondern stattdessen der Differenzenprozess $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, so spricht man von einem integrierten ARMA-Prozess, kurz ARIMA(p,1,q)-Prozess.

Wiederholt man die Differenzbildung d mal - man betrachtet also die Änderung der Änderung der ... Änderung (d -mal) - so spricht man von einem ARIMA(p,d,q) Prozess.

Im folgenden sind Realisierungen verschiedener ARIMA(p,d,q) Prozesse dargestellt. Der zugrundeliegende Zufallsprozess bleibt dabei stets derselbe.

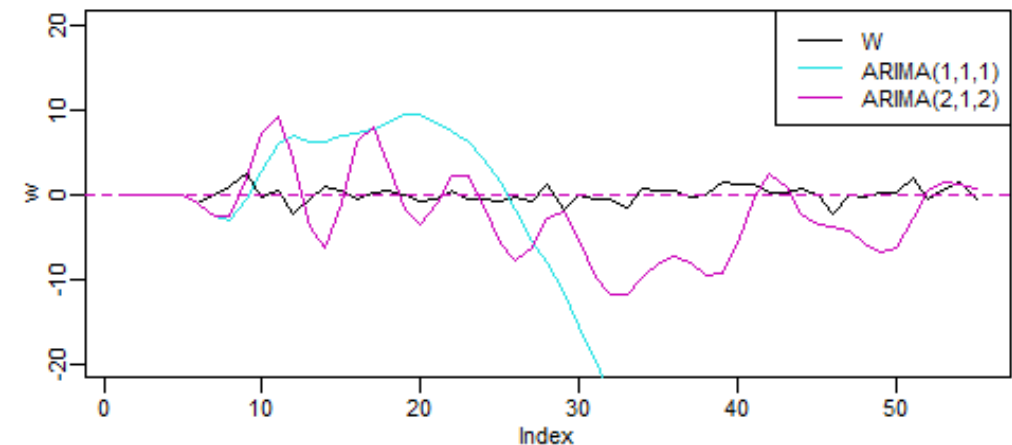
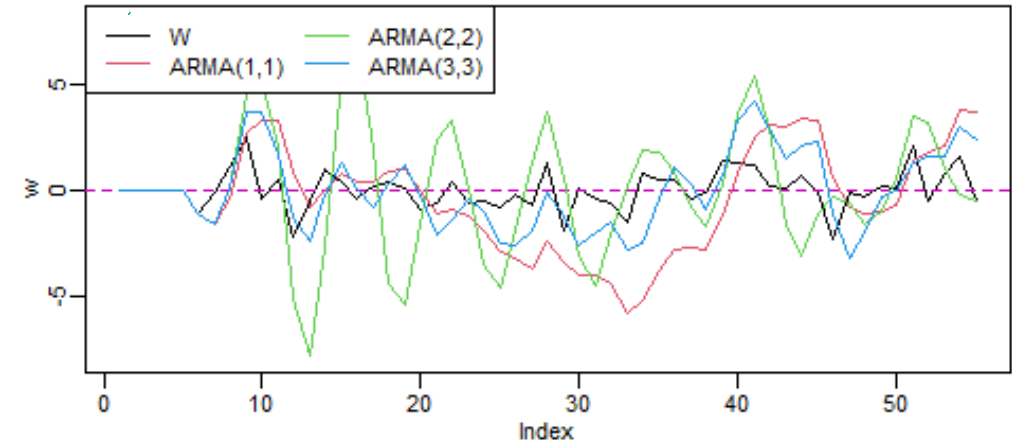
Beispiel: ARIMA(p,d,q) Prozesse

```
## Prozessparameter
phi <- c(0.9,-0.9,0.5)
theta <- c(.5,.4,.3)
## Zufallsprozess
w <- c(rep(0,5),rnorm(n=50))
## Verschiedene ARMA-Prozesse
x1 <- x2 <- x3 <- y1 <- y2 <- w
for(t in 3:length(w)){
  x1[t] <- sum(phi[1]*x1[t-1])+w[t]+sum(theta[1]*w[t-1])
  #ARMA(1,1)
  x2[t] <- sum(phi[1:2]*x2[t-
(1:2)])+w[t]+sum(theta[1:2]*w[t-(1:2)]) #ARMA(2,2)
  x3[t] <- sum(phi[1:3]*x3[t-
(1:3)])+w[t]+sum(theta[1:3]*w[t-(1:3)]) #ARMA(3,3)
}
y1 <- cumsum(x1) #ARIMA(1,1,1)
y2 <- cumsum(x2) #ARIMA(2,1,2)

# Prozess
layout(matrix(1:2,2,1))
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))

plot(w, type="l",ylim=c(-8,8))
abline(h=0,col=6,lty=2)
lines(x1,col=2); lines(x2,col=3); lines(x3,col=4)
legend("topleft",c("W","ARMA(1,1)","ARMA(2,2)","ARMA(3,3)"),
,col=1:4,lty=1,ncol = 2)

plot(w, type="l",ylim=c(-20,20))
abline(h=0,col=6,lty=2)
lines(y1,col=5); lines(y2,col=6)
legend("topleft",c("W","ARIMA(1,1,1)","ARIMA(2,1,2)"),col=c
(1,5:6),lty=1)
```



Schätzen von Modellparametern eines ARIMA Prozesses

Heuristiken für die Metaparameter p, d, q



– Differenzenparameter d :

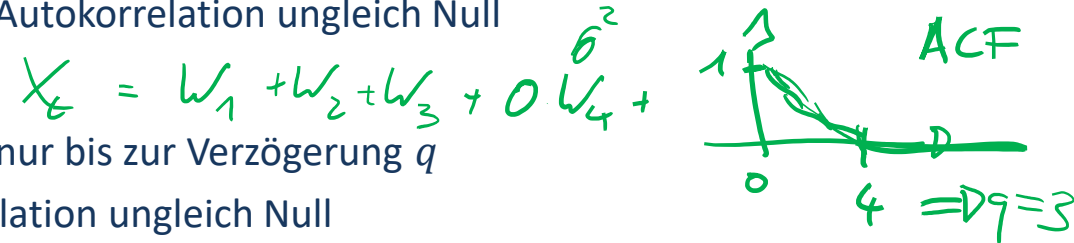
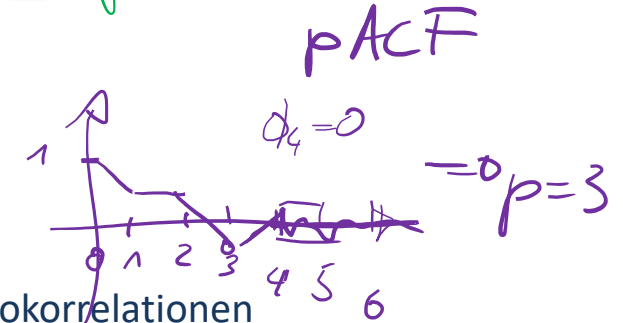
- ARMA-Modelle haben keinen Trend
- Bilde solange Differenzen, solange die Zeitreihe noch einen Trend hat

– AR-Parameter p :

- für einen $AR(p)$ -Prozess entsprechen die Modellparameter ϕ_k analytisch den partiellen Autokorrelationen
- wähle daher p als größte Verzögerung mit empirischer partieller Autokorrelation ungleich Null

– MA-Parameter q :

- für einen $MA(q)$ -Prozess besteht analytisch eine Autokorrelation nur bis zur Verzögerung q
- wähle daher q als größte Verzögerung mit empirischer Autokorrelation ungleich Null



Die oben dargestellte Heuristik für die Auswahl der Parameter p und q wird auch Box-Jenkins-Methode genannt. Sie liefert gute Ergebnisse für kleine p und q ($p + q \leq 2$).

1,1 0,2 2,0

Um für feste p, d, q möglichst gute Modellparameter ϕ, θ, σ zu bestimmen, gibt es verschiedene Herangehensweisen:

- **Maximum-Likelihood-Estimation:** wählt die Parameter, bei denen die beobachteten Zeitreihendaten dem Modell nach eine möglichst große Wahrscheinlichkeit aufweisen
- **Quadratische Fehlersumme:** wählt die Parameter, bei denen die Summe der quadrierten Abstände zwischen beobachteten Zeitreihendaten und 1-Zeitschritt-Modellvorhersage möglichst klein ist
- **Yule-Walker:** wählt die Parameter durch Lösen der sogenannten Yule-Walker-Gleichungen (u.a. Invertieren der empirischen Autokorrelationsmatrix)

Alternativ lassen sich Meta-Parameter und ARMA-Parameter integriert mit Hilfe des Akaike Informations Kriteriums (AIC) bestimmen, welches eine Maximum-Likelihood-Estimation mit der Anforderung an eine möglichst geringe Zahl an Parametern kombiniert.