Theorie der GARCH Prozesse

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Technische Hochschule Wildau [FH]
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Table of Contents

- Wiederholung und Motivation stochastische Prozesse
  - Zeitreihen, Stochastische Prozesse und Modelle
  - Anwendung: Kursverläufe von Aktien
  - Anwendung: Kursverläufe von Aktien
  - Differenzenprozess und -zeitreihe
  - Anwendung: Kursveränderungen von Aktien
- Generalised Auto-Regressive Conditional Heteroscedacity (GARCH) Prozesse
  - Motivation
  - Definition ARCH Prozess
  - Beispiel: ARCH(p) Prozesse
  - Definition GARCH Prozess
  - Beispiel: GARCH(p,q) Prozesse
  - Schätzen von Modellparametern eines GARCH Prozesses
  - Notes

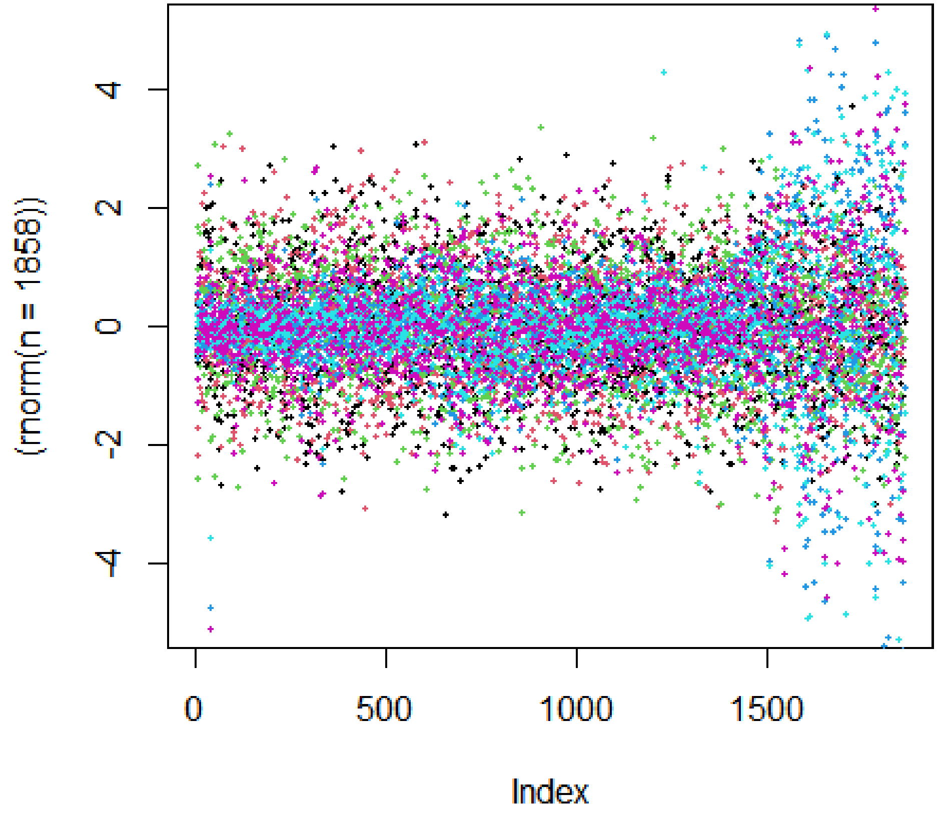
Wiederholung und Motivation stochastische Prozesse

Anwendung: Kursveränderungen von Aktien

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences

```
standardize <- function(invec){
  delta <- diff(invec)
  delta.stand <- (delta-
mean(delta))/sd(delta)
  delta.stand
}

EU.delta.stand <-
apply(EuStockMarkets,2,standardize)[1:185
9,]
plot((rnorm(n=1858)),
     type="p",col=1,ylim=c(-5,5),pch=20)
for(i in 1:2)
points((rnorm(n=1858)),col=i+1,pch=20)
for(i in 1:3)
points(EU.delta.stand[,i],col=i+3,pch=20)
```



Motivation

- Stochastische Prozesse sind ein mathematisches Konstrukt
  - Stochastische Prozesse bestehen aus Zufallskomponenten und funktionalen Zusammenhängen
  - Differenzenprozesse bilden die Änderungen zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ab
- Aktienkurse lassen sich als Zeitreihe darstellen
  - Aktienkurse zeigen eine starke Zufallskomponente
    - Aktienkurse gleichen in erster Ordnung einer Irrfahrt
    - Kursänderungen gleichen in erster Ordnung einem Weissen Rauschen
  - Aktienkurse zeigen Phasen schwacher und starker Veränderungen
    - Volatilität ist über den Zeitverlauf nicht konstant
    - damit: Grundannahme bzw. -eigenschaft der ARIMA-Modelle (bedingt konstante Varianz, $Var(X_t|X_{t-1},X_{t-2},\dots) = \sigma^2$ - sog. bedingte *Homoskedastizität*) nicht erfüllt
- Familie stochastischer Prozesse mit fluktuierender Volatilität nötig
  - Volatilitätsprozesse mit zeitabhängiger Varianz $Var(X_t|X_{t-1},X_{t-2},\dots) = \sigma_t$ - sog.bedingte *Heteroskedastizität.*

Generalised Auto-Regressive Conditional Heteroscedacity (GARCH) Prozesse

Definition ARCH Prozess

Ein (linearer) Auto-Regressiver Prozess mit bedingter Heteroskedastizität (Auto-Regressive Conditional Heteroscedaticity - ARCH) von der Ordnung p ergibt sich als Produkt eines Zufallswerts W_t (sog. Innovationsprozess) und einer schrittweise fortgeschriebenen Volatilität σ_t sog. Volatilitätsprozess:

$$X_t = W_t \cdot \sigma_t$$

Dabei sind

- (W_t) (in der Regel) normalverteilte Zuwächse
- σ_t ein stochastischer Prozess mit
- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}$
- mit $\omega > 0$ und $\alpha_t \geq 0$

Damit ergibt sich eine zeitabhängige bedingte Varianz von X_t

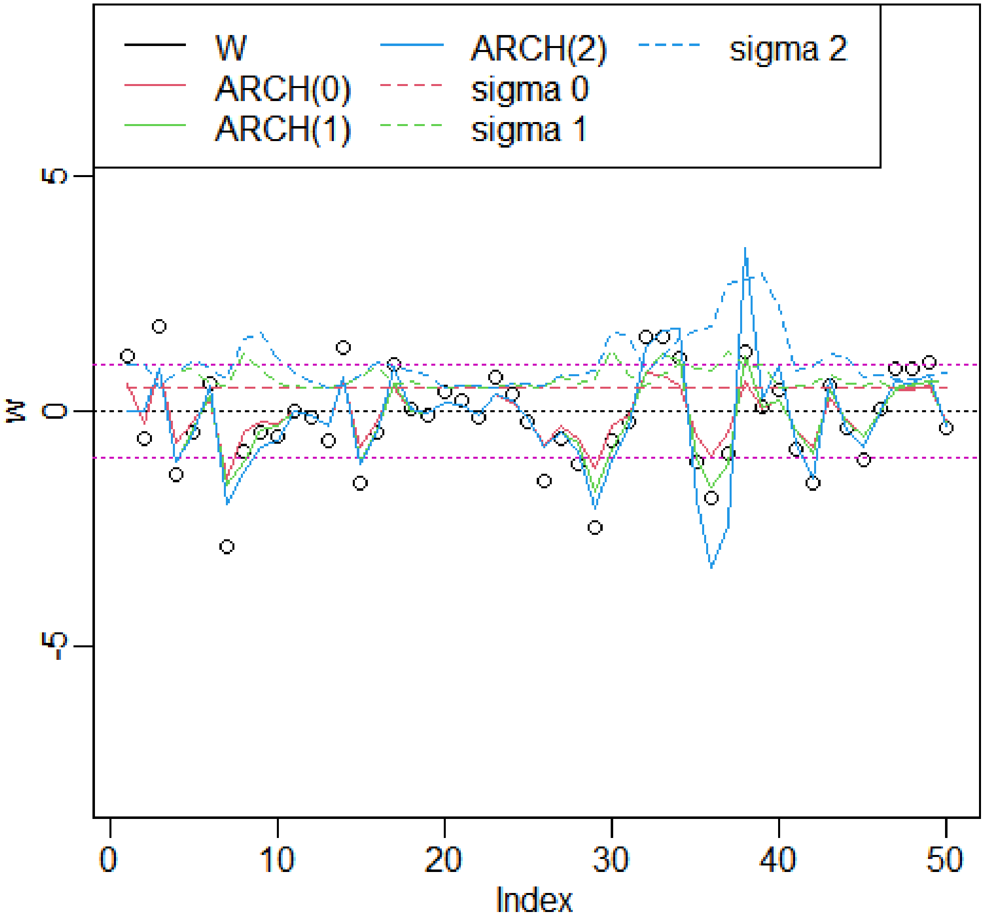
$$Var(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}$$

Für die Einführung der ARCH Prozesse in (Engle, 1982)[1] erhielt Robert F. Engle in 2003 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Beispiel: ARCH(p) Prozesse

```
## Prozessparameter
n <- 50
omega <- .25
alpha <- c(0.5,0.4)
##Zufallsprozess
set.seed(20)
w <- rnorm(n=n)
## Verschiedene ARCH-Prozesse
x <- matrix(0,3,n)
sigma <- matrix(1,3,n)
sigma[1,] <- rep(sqrt(omega),n)
x[1,] <- w*sigma[1,] #WR
for(t in 3:length(w)){
  sigma[2,t] <- sqrt(omega+alpha[1]*x[2,t-1]^2)
  x[2,t] <- w[t]*sigma[2,t] #ARCH(1)
  sigma[3,t] <- sqrt(omega+alpha[1]*x[3,t-
1]^2+alpha[2]*x[3,t-2]^2)
  x[3,t] <- w[t]*sigma[3,t] #ARCH(2)
}

# Prozess
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))
plot(w, type="p",ylim=c(-8,8))
abline(h=0,col=1,lty=3)
abline(h=1,col=6,lty=3)
abline(h=-1,col=6,lty=3)
for(p in 0:2){lines(x[p+1,],col=p+2)}
for(p in 0:2){lines(sigma[p+1,],col=p+2,lty=2)}
legend("topleft",c("W","ARCH(0)","ARCH(1)","ARCH(2)",
      paste("sigma",0:2)),
       col=c(1:4,2:4),lty=c(rep(1,4),rep(2,3)),ncol = 3)
```



Definition GARCH Prozess

Ein generalisierter Auto-Regressiver Prozess mit bedingter Heteroskedastizität (Auto-Regressive Conditional Heteroscedaticity - GARCH) von der Ordnung (p, q) ergibt sich als Produkt eines Zufallswerts W_t (sog. Innovationsprozess) und einer schrittweise fortgeschriebenen Volatilität σ_t sog. Volatilitätsprozess:

$$X_t = W_t \cdot \sigma_t$$

Dabei sind

- (W_t) (in der Regel) normalverteilte Zuwächse
- σ_t ein stochastischer Prozess mit
- $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q}$
- mit $\omega > 0, \alpha_t, \beta_t \geq 0$

Siehe (Bollerslev,1986)[2]

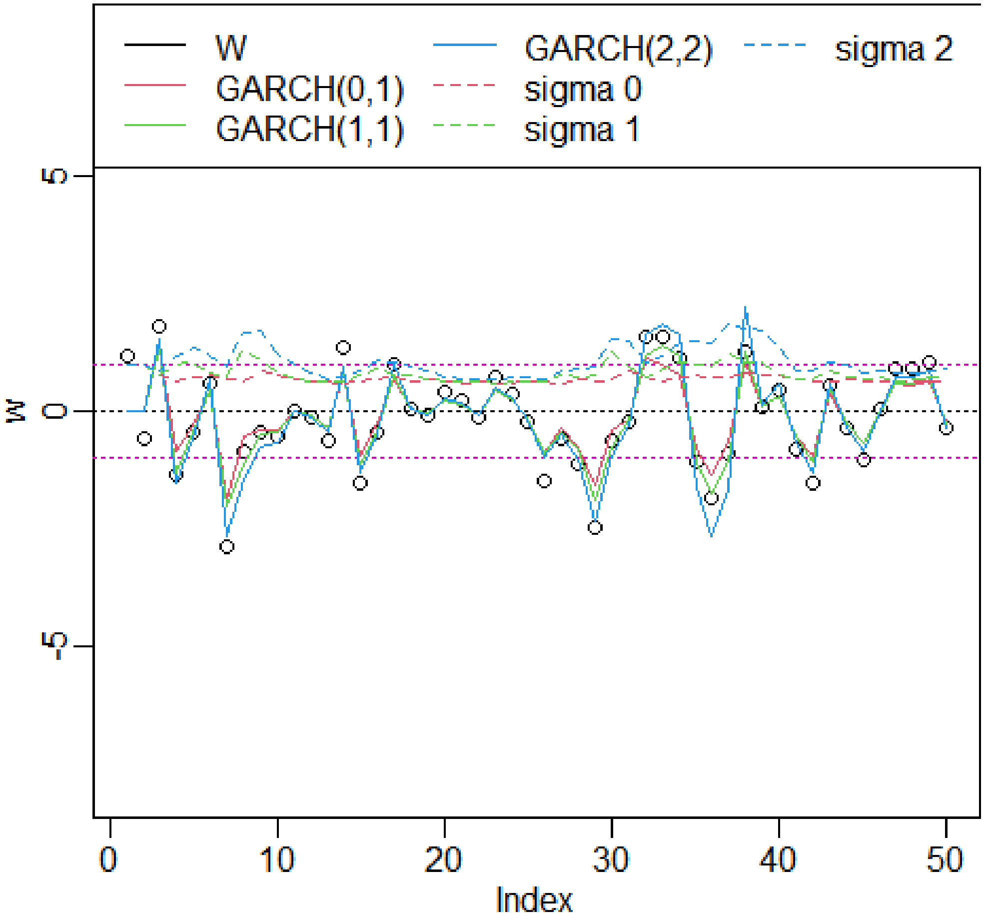
Beispiel: GARCH(p,q) Prozesse

```r
## Prozessparameter
n <- 50
omega <- .25
alpha <- c(0.3,0.2)
beta <- c(0.3,0.2)

##Zufallsprozess
set.seed(20)
w <- rnorm(n=n)
## Verschiedene GARCH-Prozesse
x <- matrix(0,3,n)
sigma <- matrix(1,3,n)
for(t in 3:length(w)){
  sigma[1,t] <- sqrt(omega+beta[1]*sigma[2,t-1]^2)
  x[1,t] <- w[t]*sigma[1,t] #GARCH(0,1)
  sigma[2,t] <- sqrt(omega+alpha[1]*x[2,t-1]^2+beta[1]*sigma[2,t-
1]^2)
  x[2,t] <- w[t]*sigma[2,t] #GARCH(1,1)
  sigma[3,t] <- sqrt(omega+alpha[1]*x[3,t-1]^2+alpha[2]*x[3,t-
2]^2+beta[1]*sigma[2,t-1]^2+beta[2]*sigma[2,t-2]^2)
  x[3,t] <- w[t]*sigma[3,t] #GARCH(2,2)
}

# Prozess
par(mar=c(3,3,2,.2),mgp=c(1.5,.5,0))
plot(w, type="p",ylim=c(-8,8))
abline(h=0,col=1,lty=3)
abline(h=1,col=6,lty=3)
abline(h=-1,col=6,lty=3)
for(q in 0:2){lines(x[q+1,],col=q+2)}
for(q in 0:2){lines(sigma[q+1,],col=q+2,lty=2)}

legend("topleft",c("W","GARCH(0,1)","GARCH(1,1)","GARCH(2,2)",past
e("sigma",0:2)),col=c(1:4,2:4),lty=c(rep(1,4),rep(2,3)),ncol = 3)
```



Schätzen von Modellparametern eines GARCH Prozesses

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Um die Metaparameter p, q und möglichst gute Modellparameter ω, α, β zu bestimmen, wird in der Regel eine **Maximum-Likelihood-Estimation** (MLE) durchgeführt. Diese wählt die Parameter, bei denen die beobachteten Zeitreihendaten dem Modell nach eine möglichst große Wahrscheinlichkeit aufweisen.

Die Likelihood lässt sich für die ersten Beobachtungen nur schwer direkt bestimmen. Daher beschränkt man sich auf eine einfachere Form, die sogenannte Quasi-Likelihood für Beobachtungen $t \geq q$. Diese wird häufig mit Hilfe eines angepassten Akaike Informations Kriteriums (AIC) optimiert, welches die Anforderung an eine möglichst geringe Zahl an Parametern integriert.

Notes

1. Robert F. Engle: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK. Inflation. In: Econometrica. Vol.: 50, pp. 987–1008, 1982

2. T. Bollerslev: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. In: Journal of Econometrics. Vol. 31, No. 3, 1986, S. 307–327