Technische Hochschule Wildau [FH]
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Portfolioanalyse und -optimierung

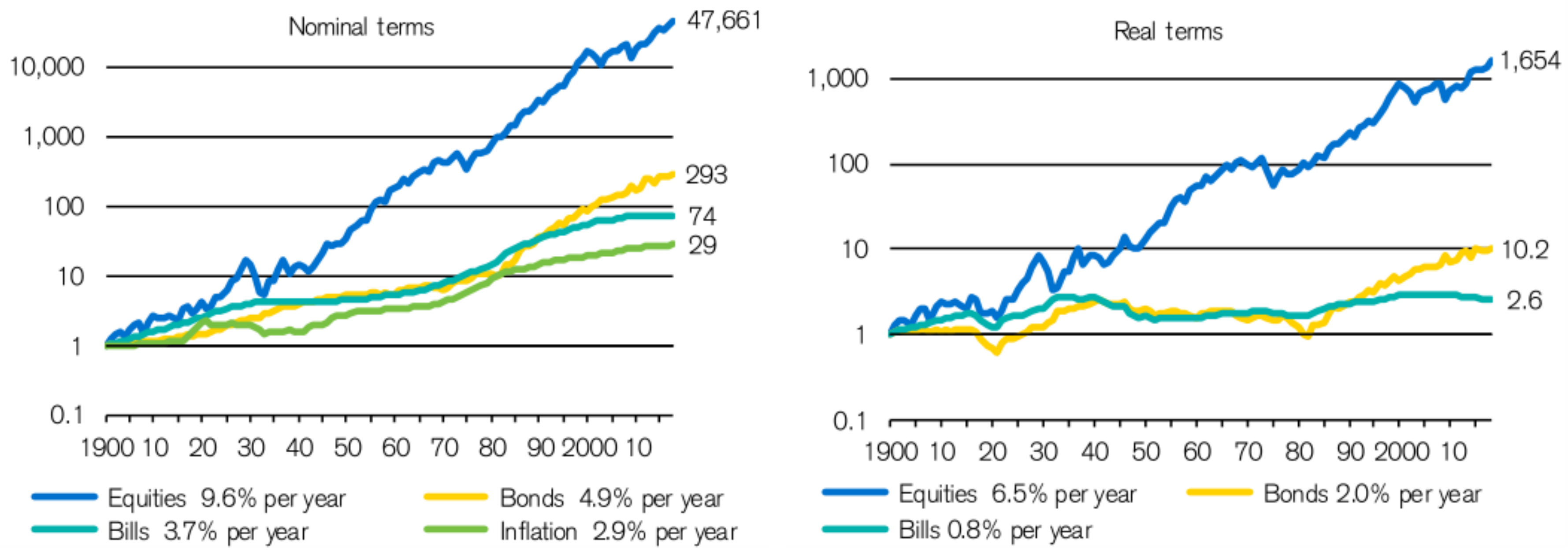
Übersicht

- **Einführung**
  - **Historische Renditen verschiedener Assetklassen**
  - **Rendite und Risiko**
- Portfolios mit zwei Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Portfolios mit n Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Diskussion

Historische Renditen

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences

Cumulative returns on US asset classes in nominal terms (left-hand side) and real terms (right-hand side), 1900–2017



Source: Elroy Dimson, Paul Marsh, and Mike Staunton, Triumph of the Optimists, Princeton University Press, 2002, and subsequent research

Quellen: Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018

Rendite messen

- Realisierte Rendite
  - Rendite = (Ertrag – Aufwand) / Aufwand
  - Rendite = (Verkaufspreis – Einkaufspreis) / Einkaufspreis
  - Rendite von s nach t = (Preis in t – Preis in s) / Preis in s
    = (Preis in t / Preis in s) - 1

Geschäftsvorfall

von s nach t

- Annualisierte Rendite
  - Jahresrendite= (Preis in (t+365) / Preis in t) -1
  - Jahresrendite = $\left(\prod_{s=1}^{364}(Tagesrendite\ in\ (t+s)) + 1\right) - 1$
  - Jahresrendite = $\sqrt[n]{1 + \text{Rendite über } n \text{ Jahre}} - 1$

- Durchschnittliche Rendite
  Jahresrenditen = $(r_{2017}, r_{2016}, r_{2015}, \ldots)$
  - Arithmetischer Mittelwert: $\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_t r_t$
  - Geometrisches Mittel: $\bar{r}_{geom} = \sqrt[T]{\prod_t (r_t + 1)} - 1$

$100 \xrightarrow{+100\%} 200 \xrightarrow{-50\%} 100$

$\bar{r} = \frac{100\% + (-50\%)}{2} = 25\%$

$\bar{r}_{geom} = \sqrt[2]{(100\% + 1) \cdot (-50\% + 1)} - 1$
$= \sqrt[2]{1} - 1 = 0$

Risiko messen

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

- Risikoprämie / Überrendite
  - Risikofreier Zinssatz $\tilde{r}$
  - Risikoprämie $d_{2017} = r_{2017} - \tilde{r}_{2017}$
  - Mittlere Risikoprämie $\bar{d} = \frac{1}{T}\sum_t (r_t - \tilde{r}_t) = \frac{1}{T}\sum_t d_t$

geringes Risiko

- Risiko / Volatilität
  - Standardabweichung der Rendite

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_t (r_t - \bar{r})^2}$$

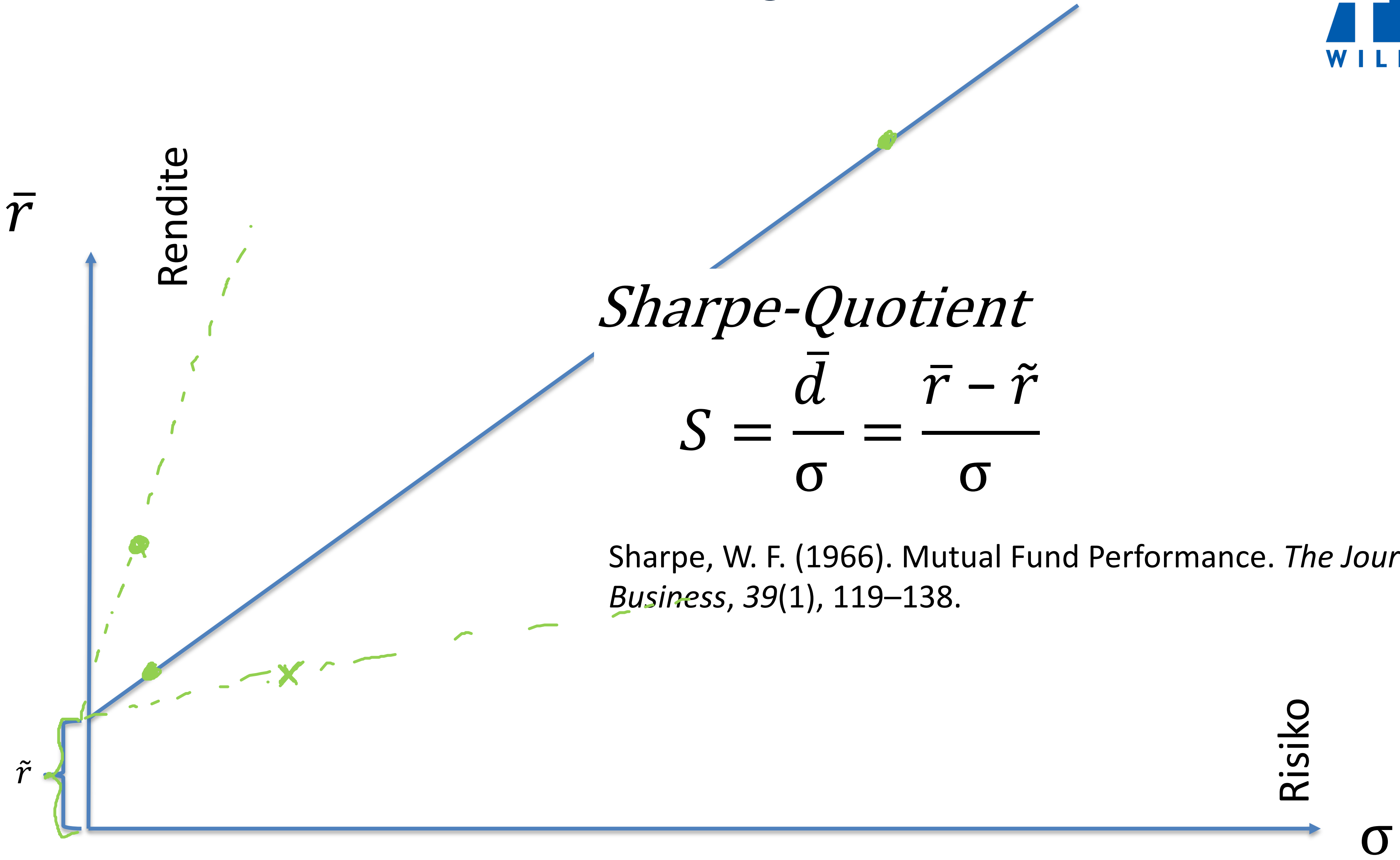
höheres Risiko

  - Standardabweichung der Risikoprämie

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_t (d_t - \bar{d})^2}$$

  - Für einen konstanten risikofreien Zinssatz gilt: $\sigma_r = \sigma_d$

Rendite und Risiko vergleichen



Sharpe-Quotient

$$S = \frac{\bar{d}}{\sigma} = \frac{\bar{r} - \tilde{r}}{\sigma}$$

Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, *39*(1), 119–138.

Übersicht

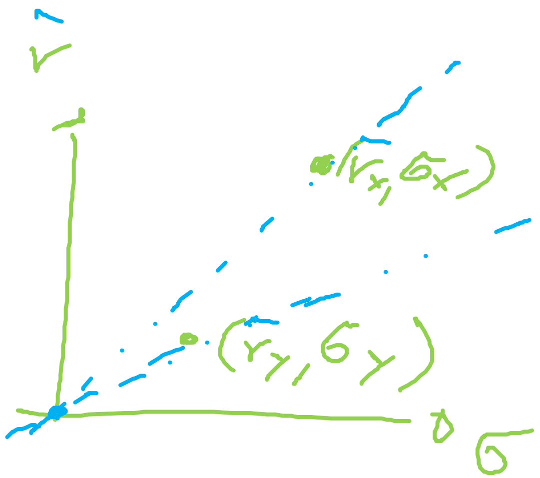
Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences

- Einführung
  - Historische Renditen verschiedener Assetklassen
  - Rendite und Risiko
- **Portfolios mit zwei Assets**
  - **Rendite und Risiko des Portfolios**
  - **Optimales Portfolio, Effizienter Rand**
- Portfolios mit n Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- Diskussion

Portfoliotheorie – zwei Assets

- Für zwei verschiedenen Wertpapiere $x\ und\ y$
  z.B. Aktien von Infineon und Unilever
  mit
  - Erwarteter Rendite $r_x, bzw. r_y$ und
  - Volatilität / Standardabweichung der Rendite $\sigma_x, bzw. \sigma_y$

  wobei $r_x > r_y$ und $\sigma_x > \sigma_y$



- Bilde ein Portfolio w $= (w_x, w_y)$ mit $w_x + w_y = 1$ und
  - w_x der Anteil des Wertpapiers x sowie
  - w_y der Anteil des Wertpapiers y

- Dann gilt für das Portfolio
  - Erwartete Rendite:

$$\boxed{r_w = w_x \cdot r_x + w_y \cdot r_y}$$

$\cancel{\sigma_w = w_x \sigma_x + w_y \sigma_y}$

  - Volatilität / Standardabweichung der Rendite bzw. Überrendite:

$$\sigma_w = \sqrt{(w_x \cdot \sigma_x)^2 + (w_y \cdot \sigma_y)^2 + 2 \cdot w_x \cdot \sigma_x \cdot w_y \cdot \sigma_y \cdot \rho_{x,y}}$$

$\sqrt{(w_x \cdot \sigma_x + w_y \cdot \sigma_y)^2}$

$\rho_{x,y} = 1$

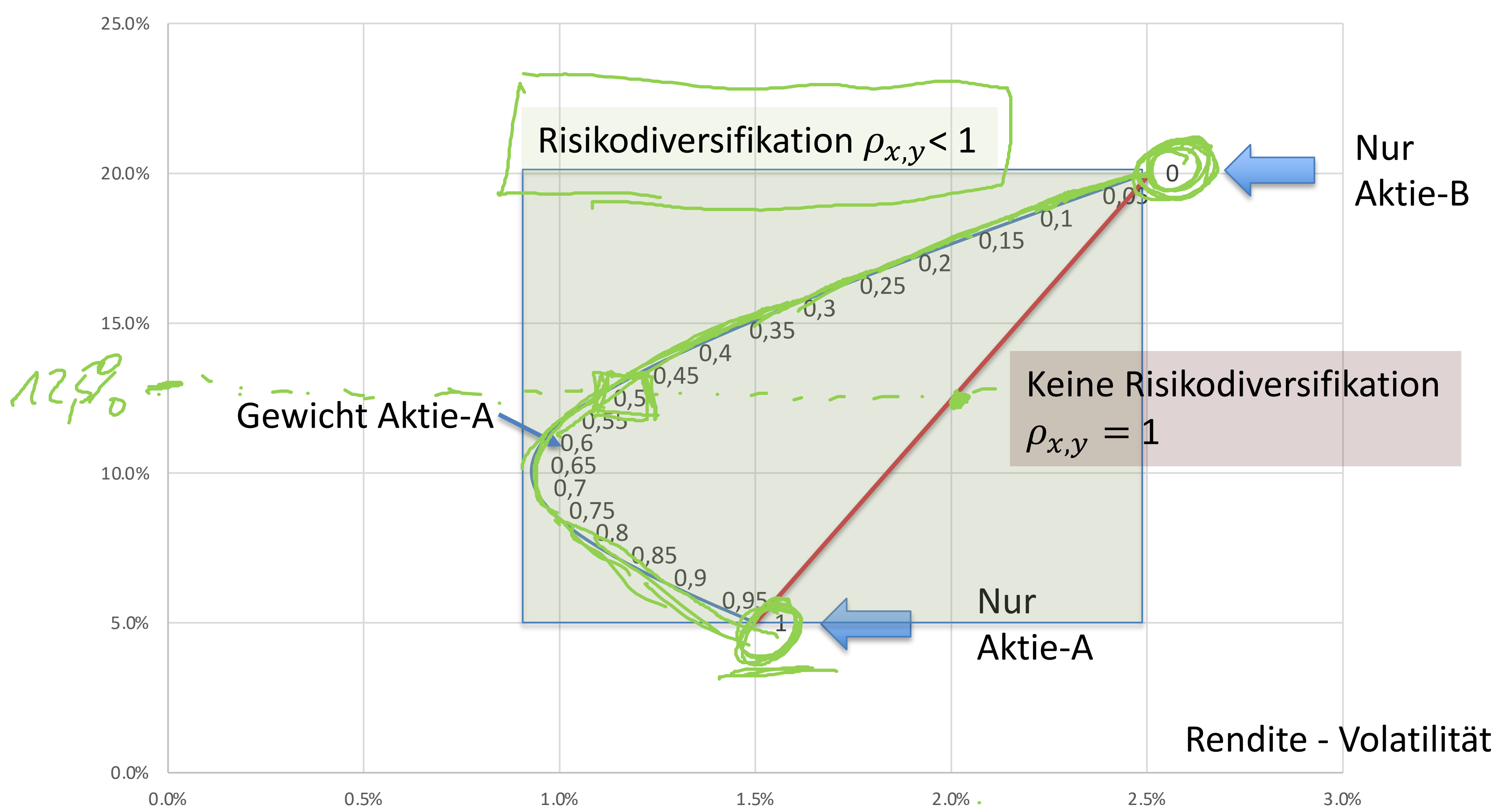
wobei $\rho_{x,y}$ die Korrelation der Renditen ist

Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

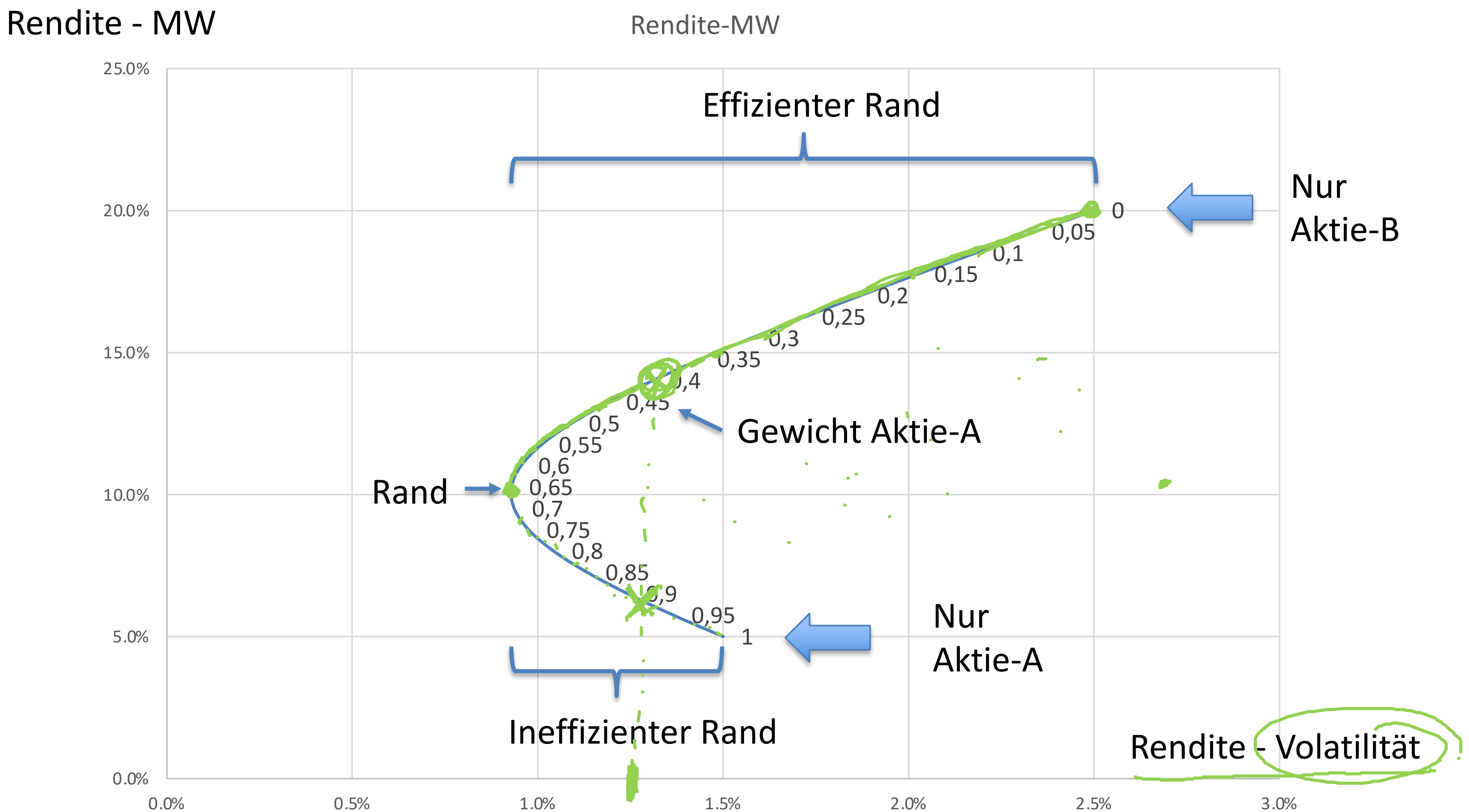
	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%		
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5

Rendite - MW



Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation	
Rendite - MW	5,0%	20,0%			
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5	



Portfoliotheorie – zwei Assets - Optimum

- Für zwei verschiedenen Wertpapiere $x\ und\ y$

  mit
  - Erwarteter Rendite $r_x, bzw. r_y$ und
  - Volatilität / Standardabweichung der Rendite $\sigma_x, bzw. \sigma_y$

  wobei $r_x > r_y$ und $\sigma_x > \sigma_y$
- Und Portfolio $\mathrm{w} = (w_x, w_y)$ mit
  - Erwartete Rendite:

$$r_w = w_x \cdot r_x + w_y \cdot r_y$$

  - Volatilität / Standardabweichung σ_w der Überrendite mit:

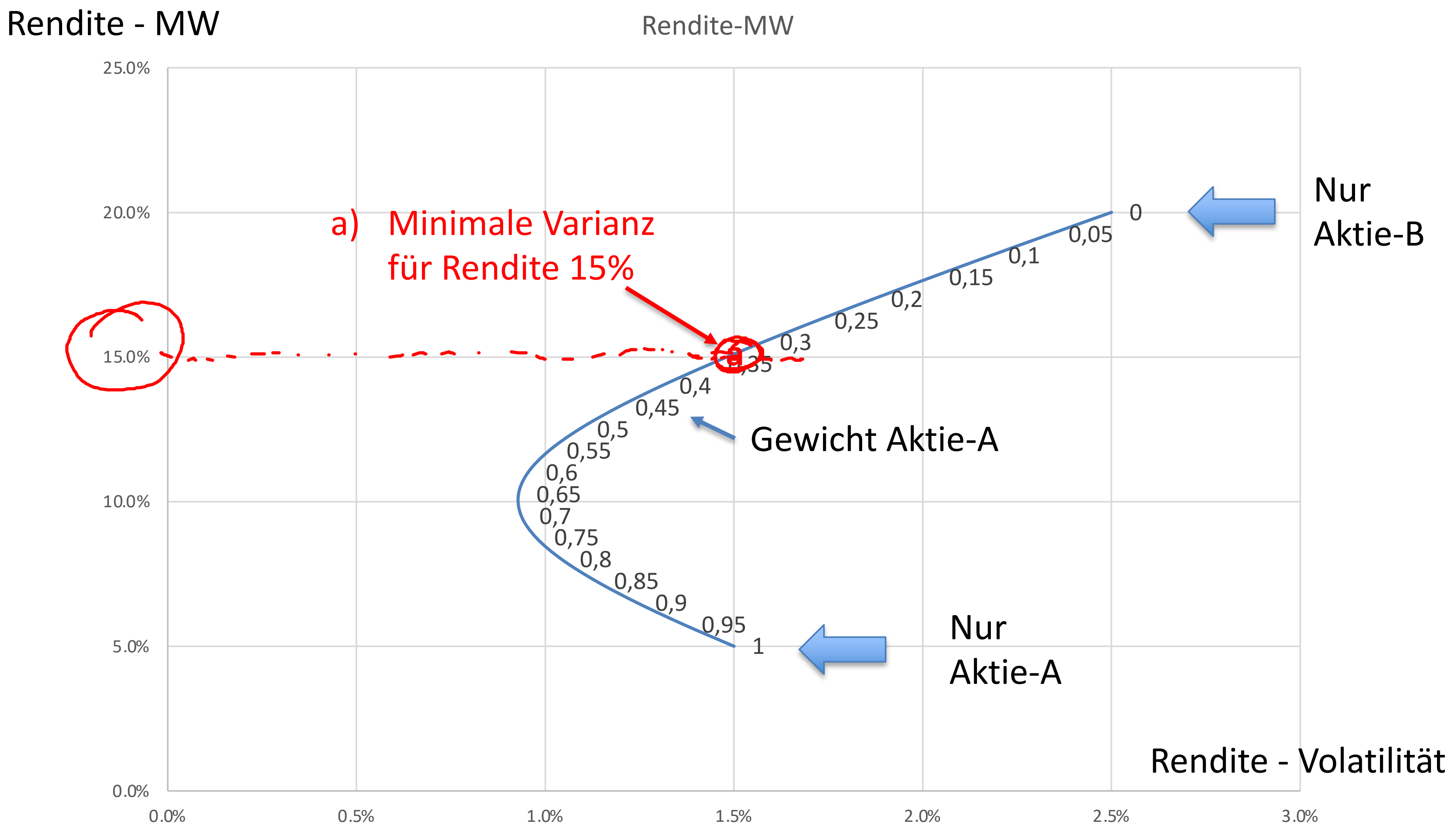
$${\sigma_w}^2 = (w_x \cdot \sigma_x)^2 + (w_y \cdot \sigma_y)^2 + 2 \cdot w_x \cdot \sigma_x \cdot w_y \cdot \sigma_y \cdot \rho_{x,y}$$

  wobei $\rho_{x,y}$ die Korrelation der Überrenditen ist
- Wähle ein optimales Portfolio $\mathrm{w} = (w_x, w_y)$ so, dass
  a) für gegebene Rendite r_w des Portfolios die Volatilität ${\sigma_w}^2$ (bzw. das Risiko) minimal ist oder
  b) die Volatilität ${\sigma_w}^2$ (bzw. Risiko) global minimal ist oder
  c) der Sharpe-Quotient, d.h. das Verhältnis von Überrendite zu Risiko maximal ist

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77–91. https://doi.org/10.2307/2975974

Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

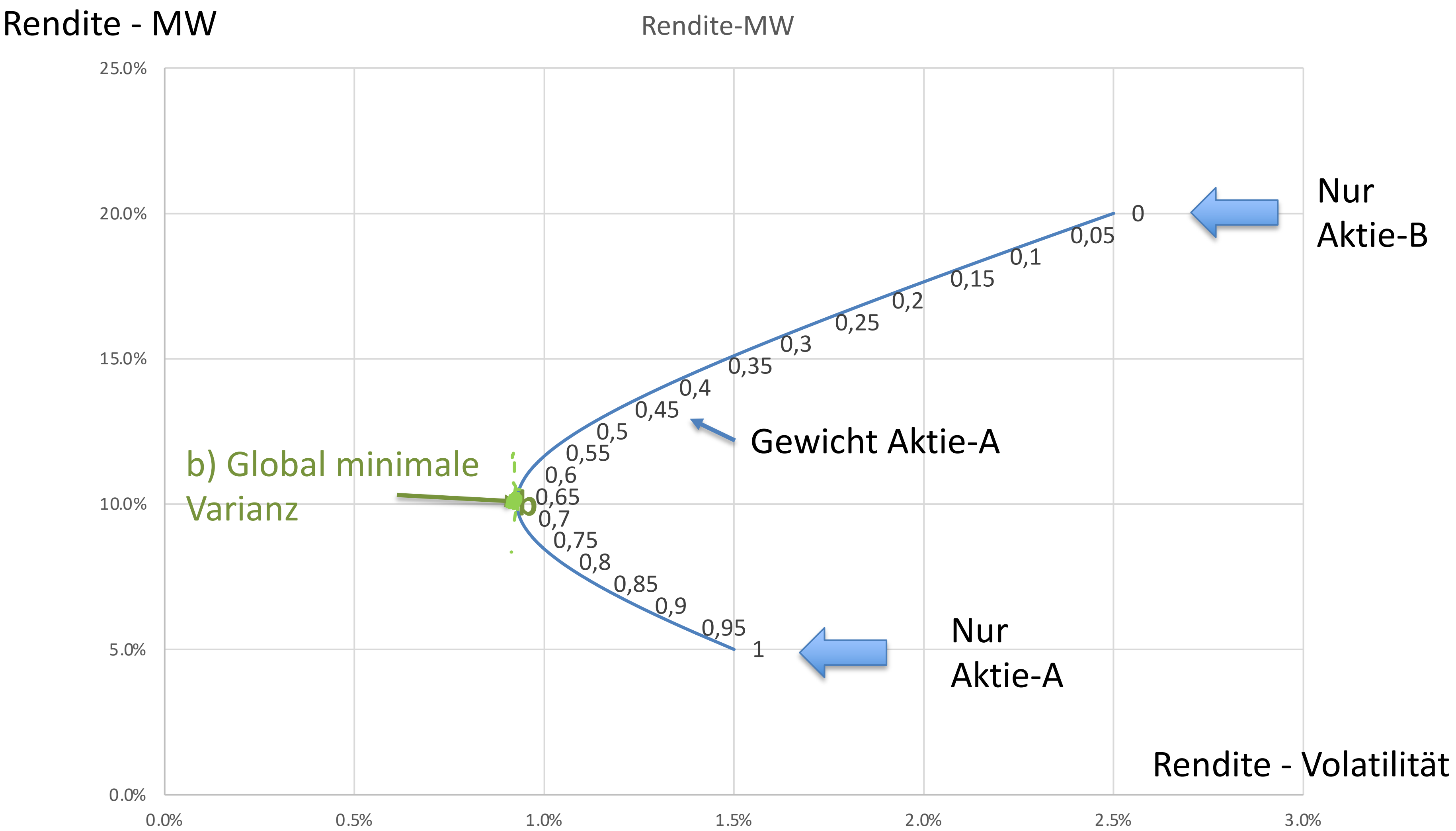
	Aktie-A	Aktie-B	Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%	
Rendite - Volat	1,5%	2,5%	-0,5



Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

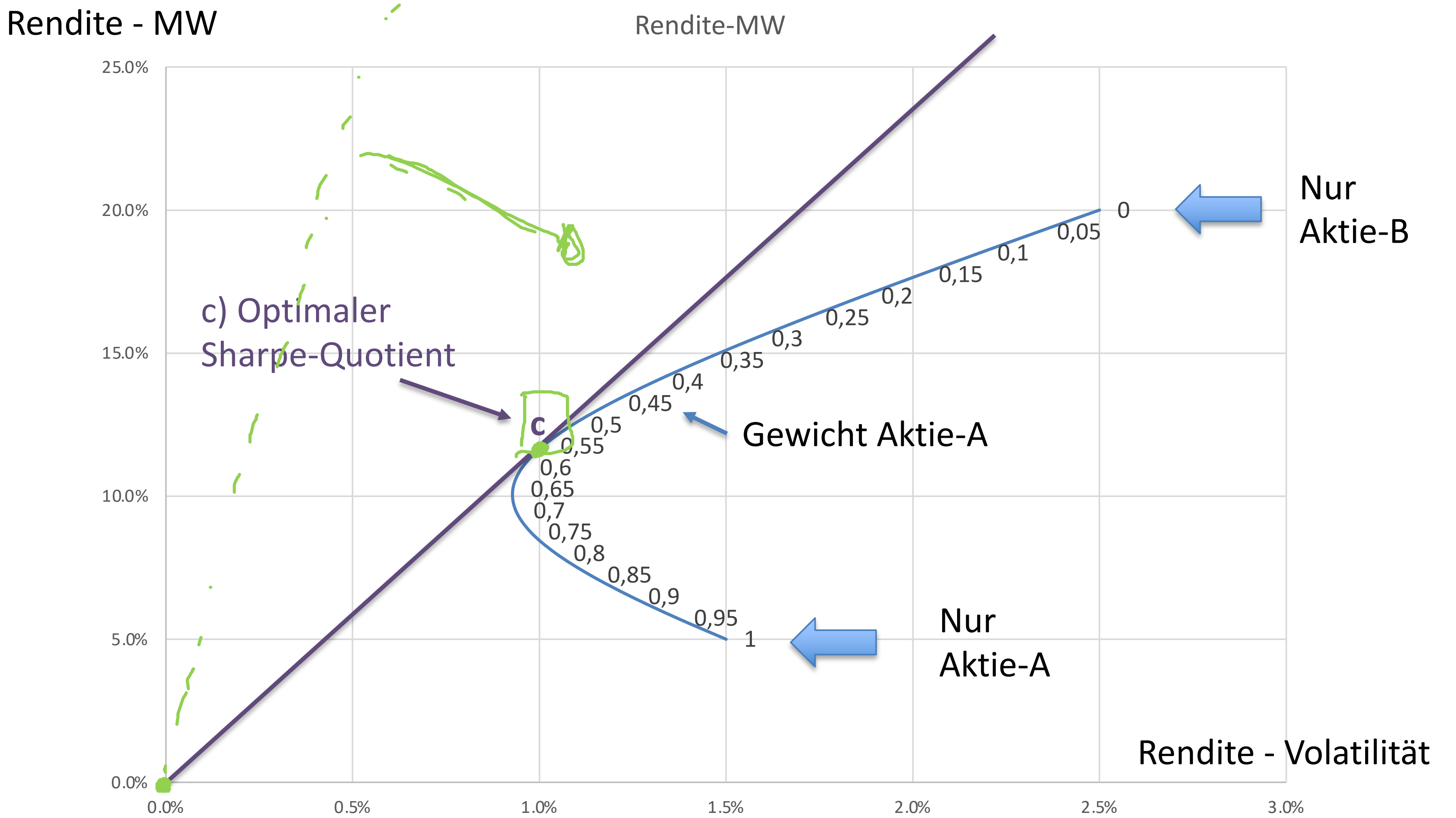
Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation	
Rendite - MW	5,0%	20,0%			
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5	



Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

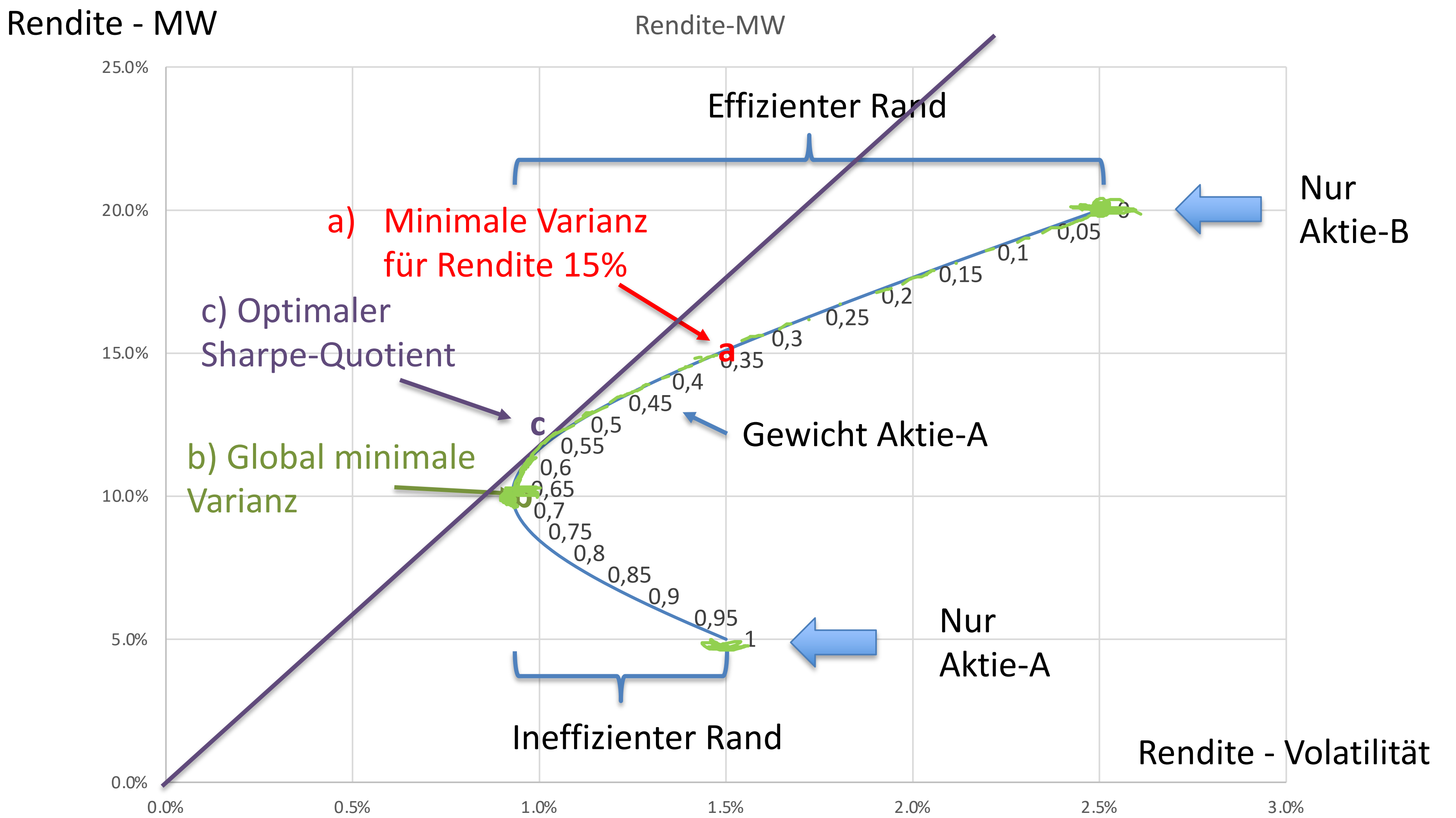
	Aktie-A	Aktie-B	Korrelation
Rendite - MW	5,0%	20,0%	
Rendite - Volat	1,5%	2,5%	-0,5



Portfoliotheorie – zwei Assets - Beispiel

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

	Aktie-A	Aktie-B		Korrelation	
Rendite - MW	5,0%	20,0%			
Rendite - Volat	1,5%	2,5%		-0,5	



Übersicht

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences

- Einführung
  - Historische Renditen verschiedener Assetklassen
  - Rendite und Risiko
- Portfolios mit zwei Assets
  - Rendite und Risiko des Portfolios
  - Optimales Portfolio, Effizienter Rand
- **Portfolios mit n Assets**
  - **Rendite und Risiko des Portfolios**
  - **Optimales Portfolio, Effizienter Rand**
- Diskussion

Portfoliotheorie – n Assets - Optimum

- Für n verschiedene Wertpapiere $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ mit
  - erwarteten Überrenditen $d_i = E[r_i - r_0]$und
  - Volatilitäten / Standardabweichungen der Überrenditen σ_i
- und ein Portfolio mit w = $(w_1, \dots, w_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ gilt
  - Erwartete Überrendite:

$$d_w = w_1 \cdot d_1 + \cdots + w_n \cdot d_n$$

  - Volatilität / Standardabweichung σ_w der Überrendite mit:

$$\sigma_w{}^2 = \sum_{i,j=1,\dots,n} w_i \cdot w_j \cdot Cov(d_i, d_j) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \varrho_{ij}$$

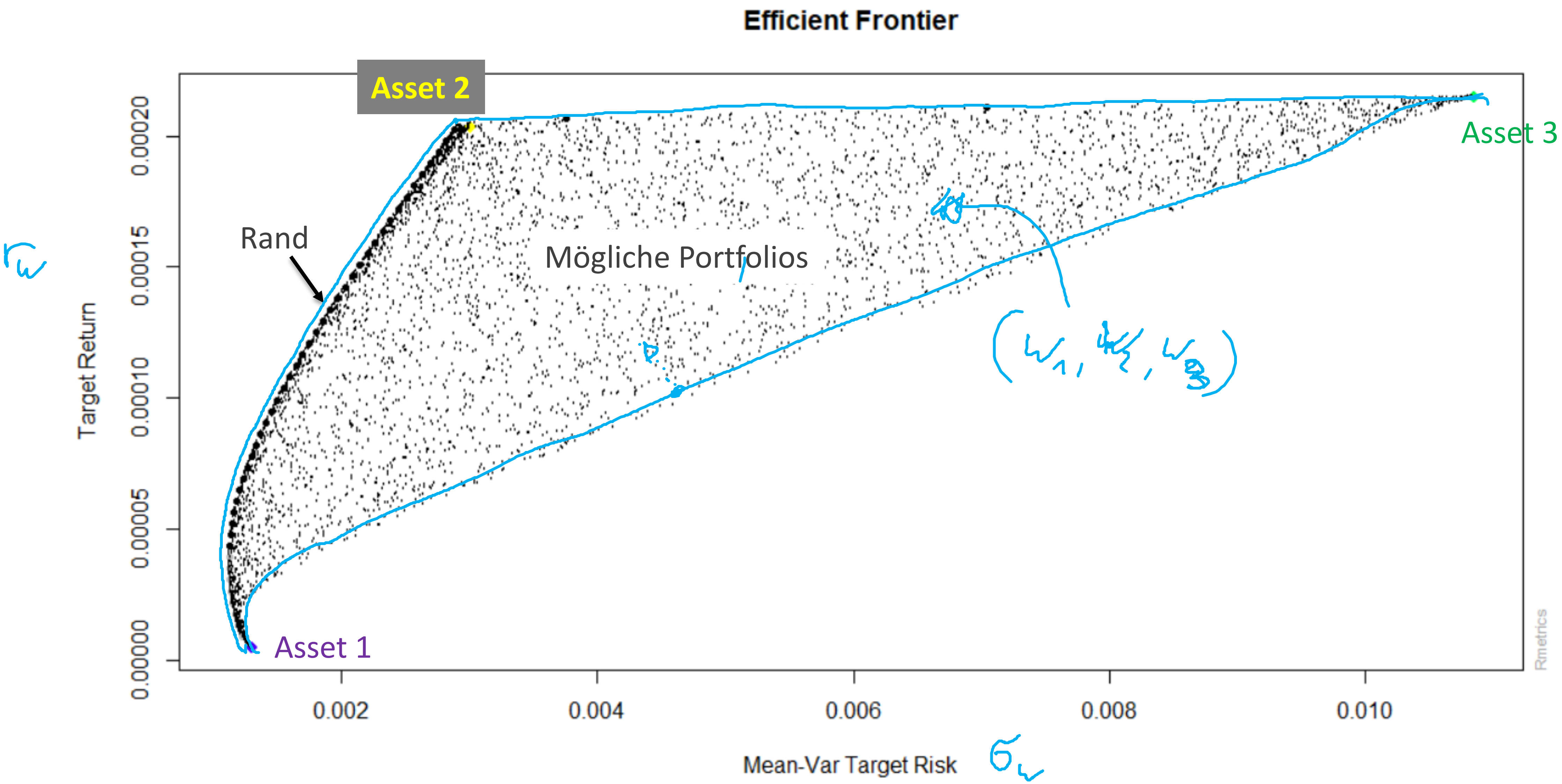
  wobei $Cov(d_i, d_j)$die Kovarianz der Überrenditen ist

- Wähle ein optimales Portfolio w = $(w_1, \dots, w_n)$ so, dass
  a) für gegebene Rendite r_w des Portfolios die Volatilität $\sigma_w{}^2$ (bzw. das Risiko) minimal ist oder
  b) die Volatilität $\sigma_w{}^2$ (bzw. Risiko) global minimal ist oder
  c) der Sharpe-Quotient, d.h. das Verhältnis von Überrendite zu Risiko maximal ist

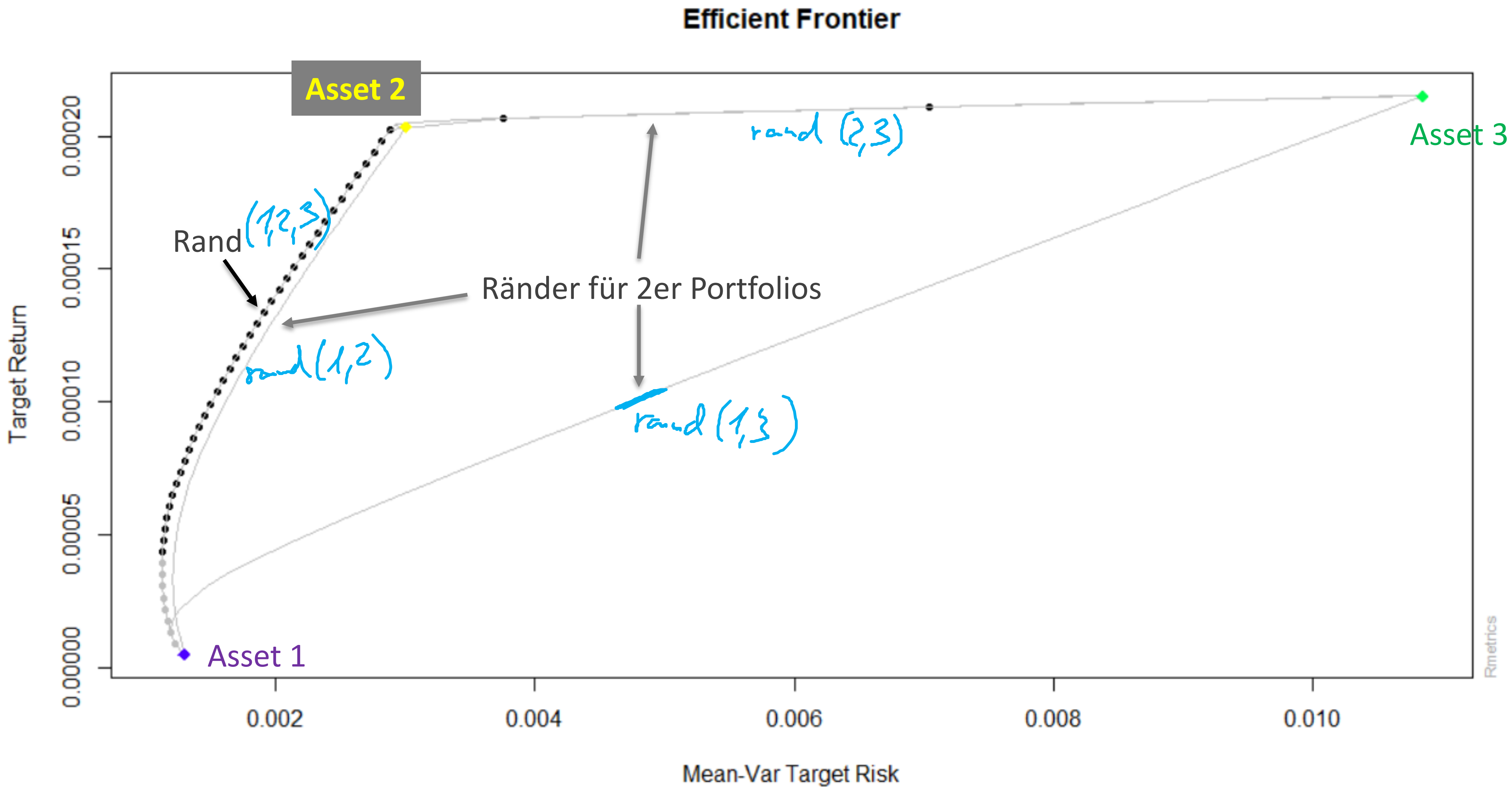
Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77–91. https://doi.org/10.2307/2975974

Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

$n=3$

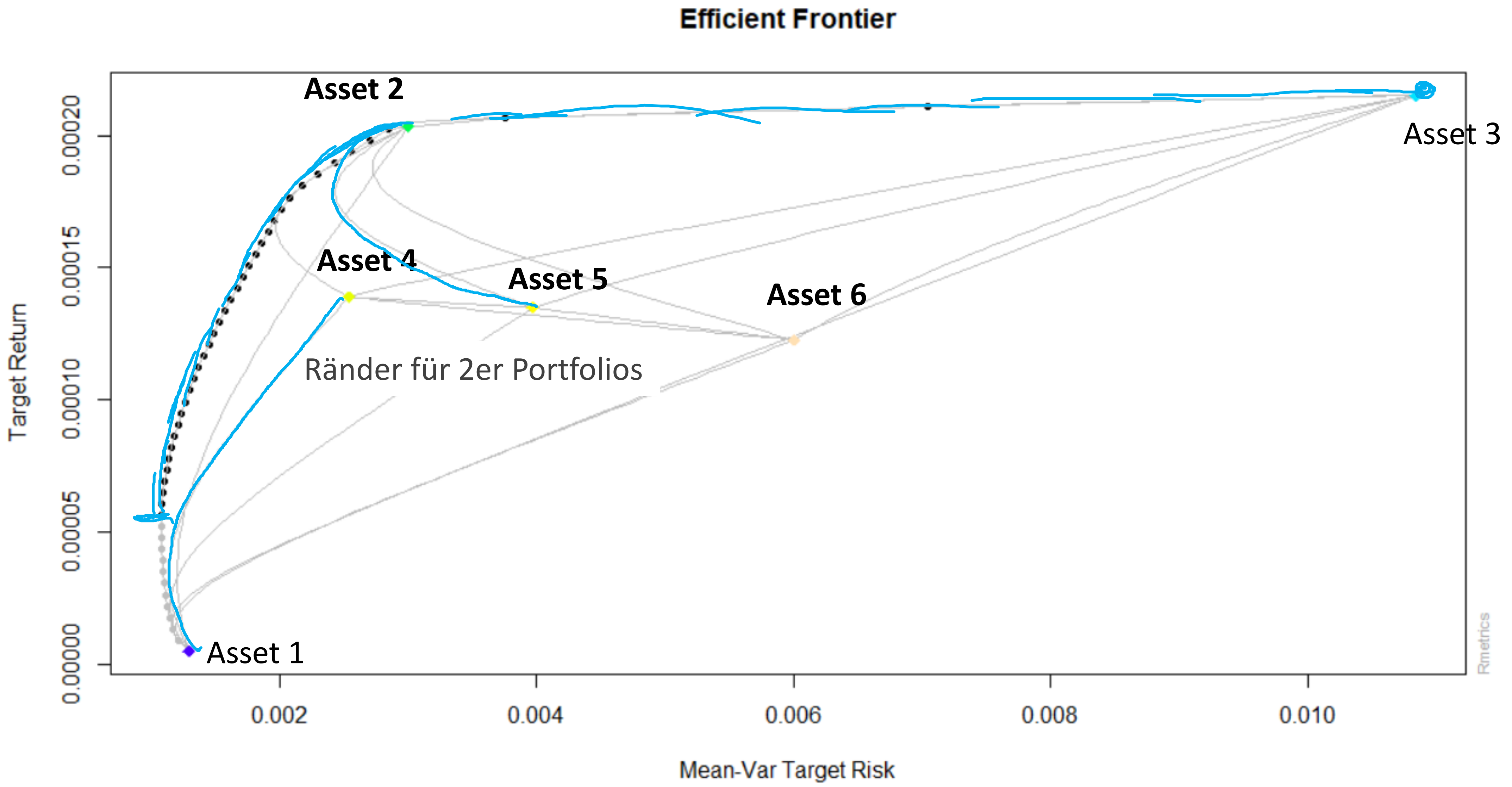


Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

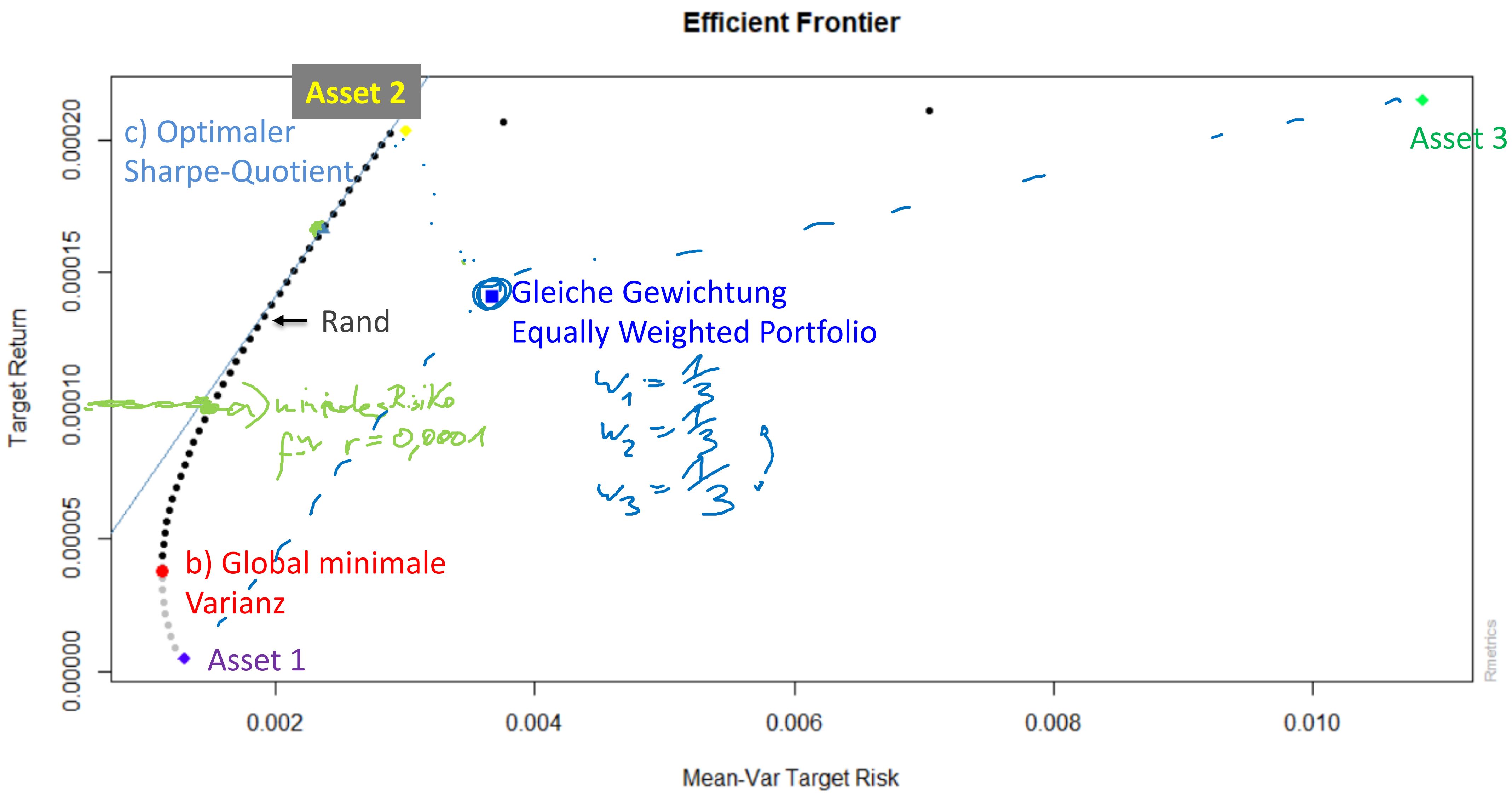


Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

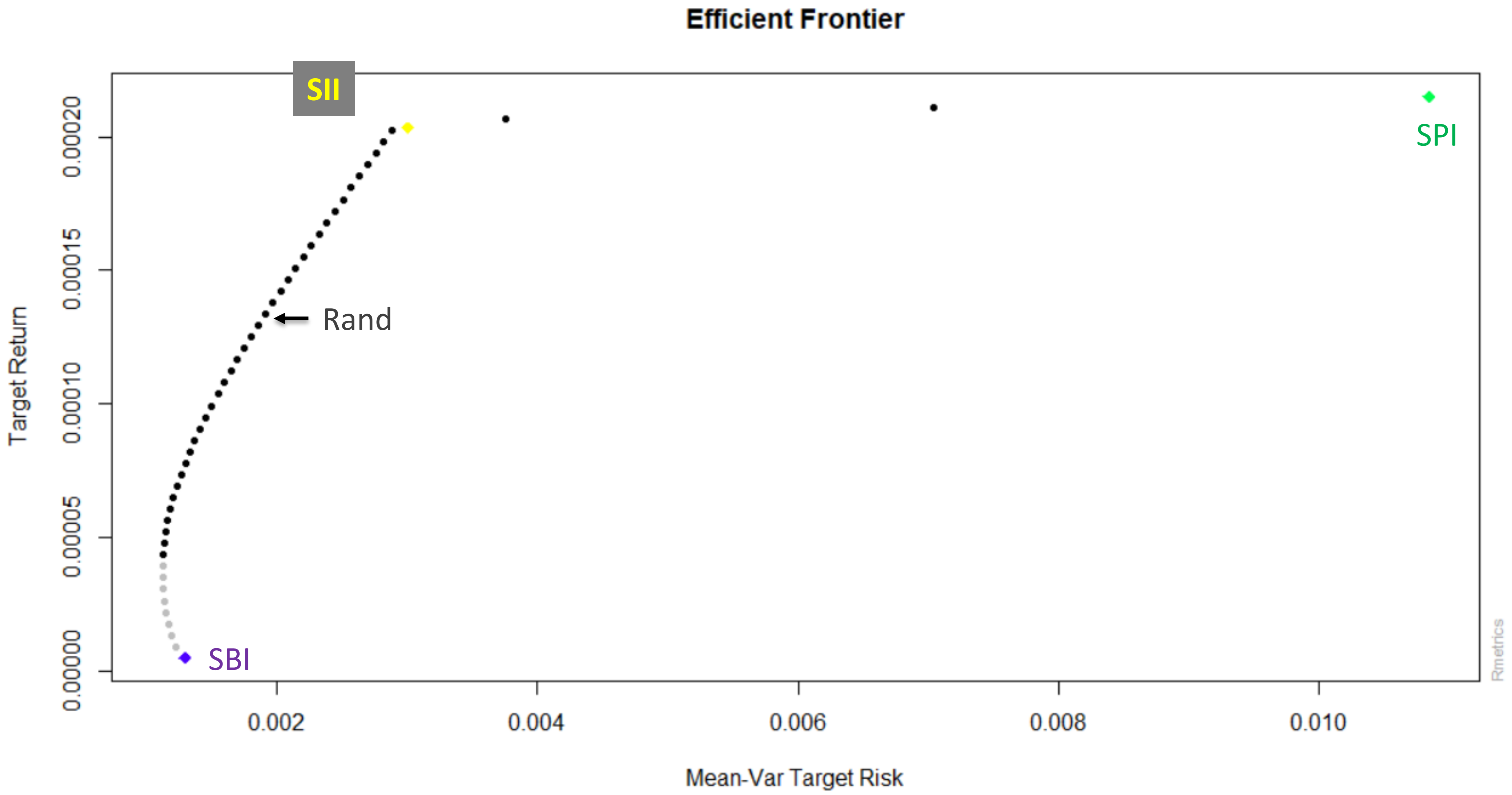
n= 6



Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

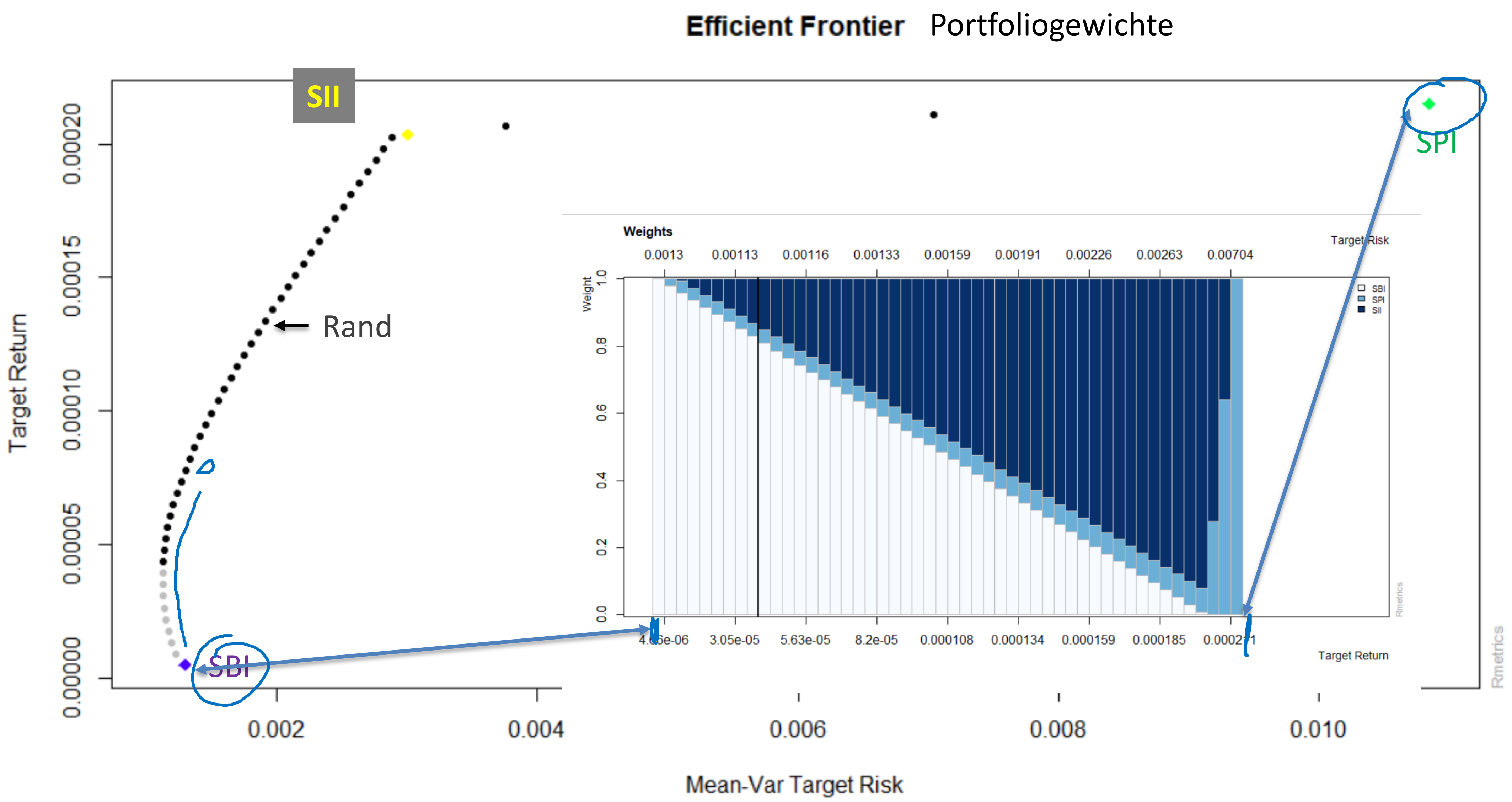


Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

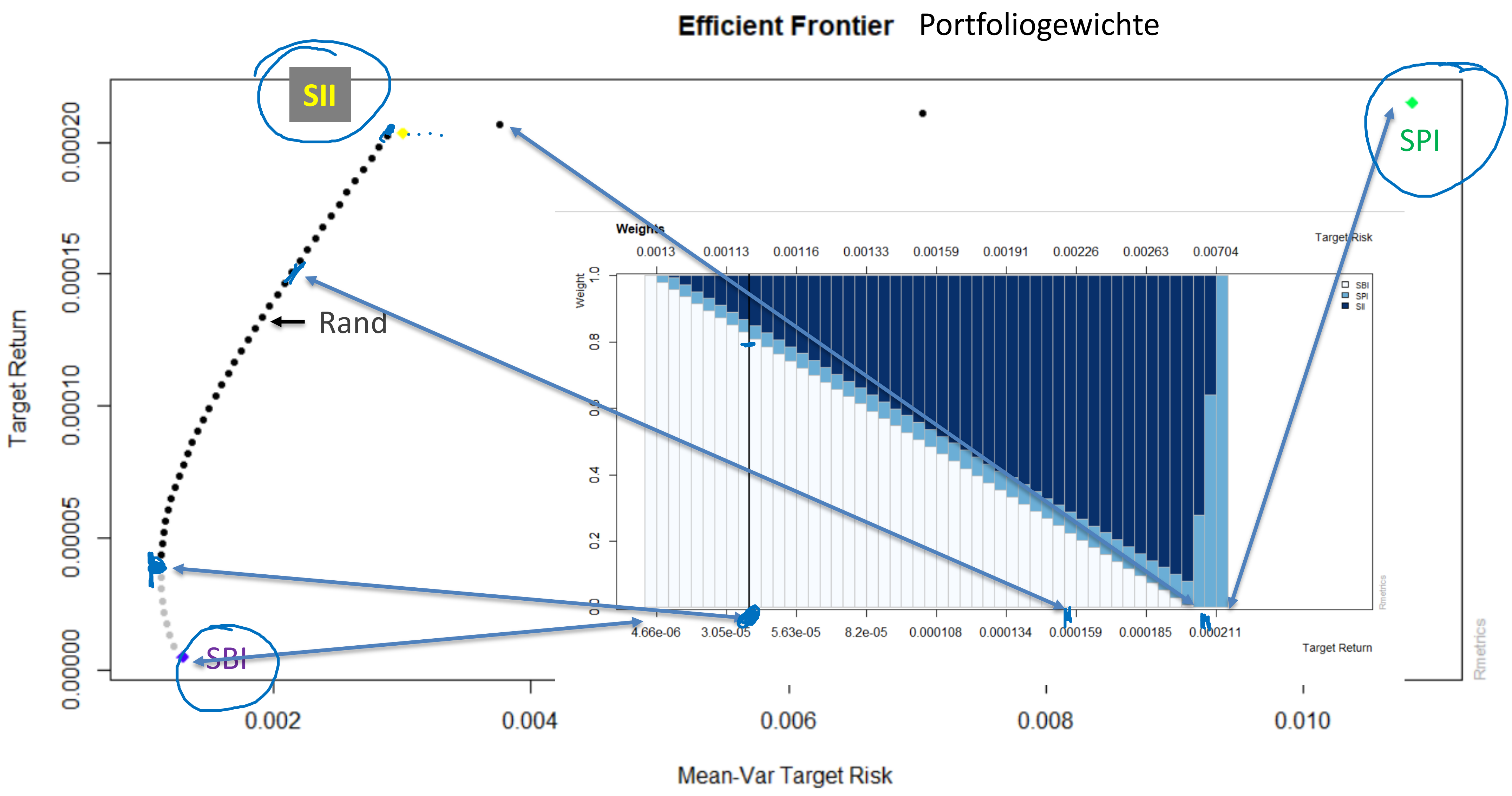


Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU



Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel

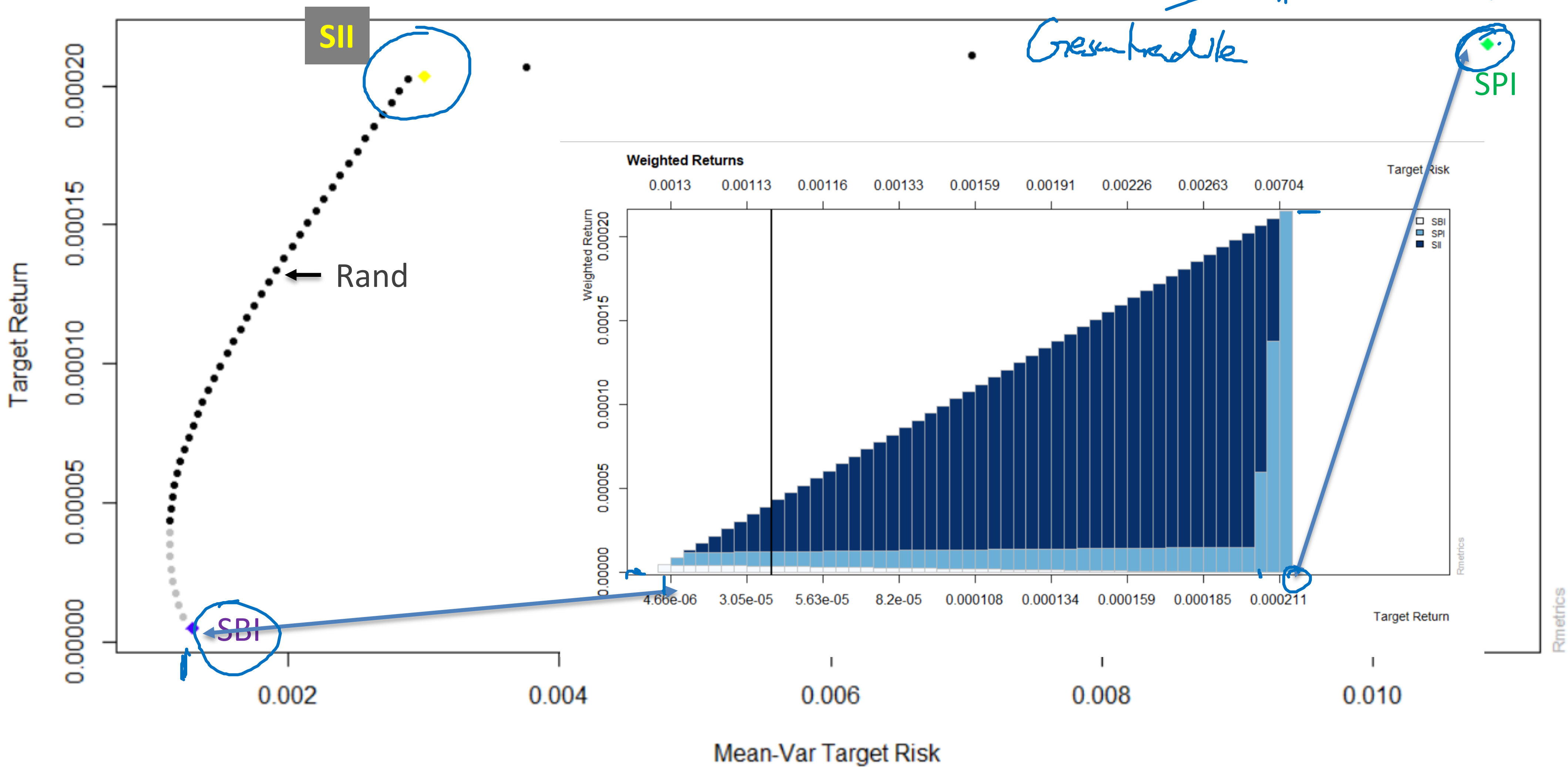
Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences

Beitrag Asset 1

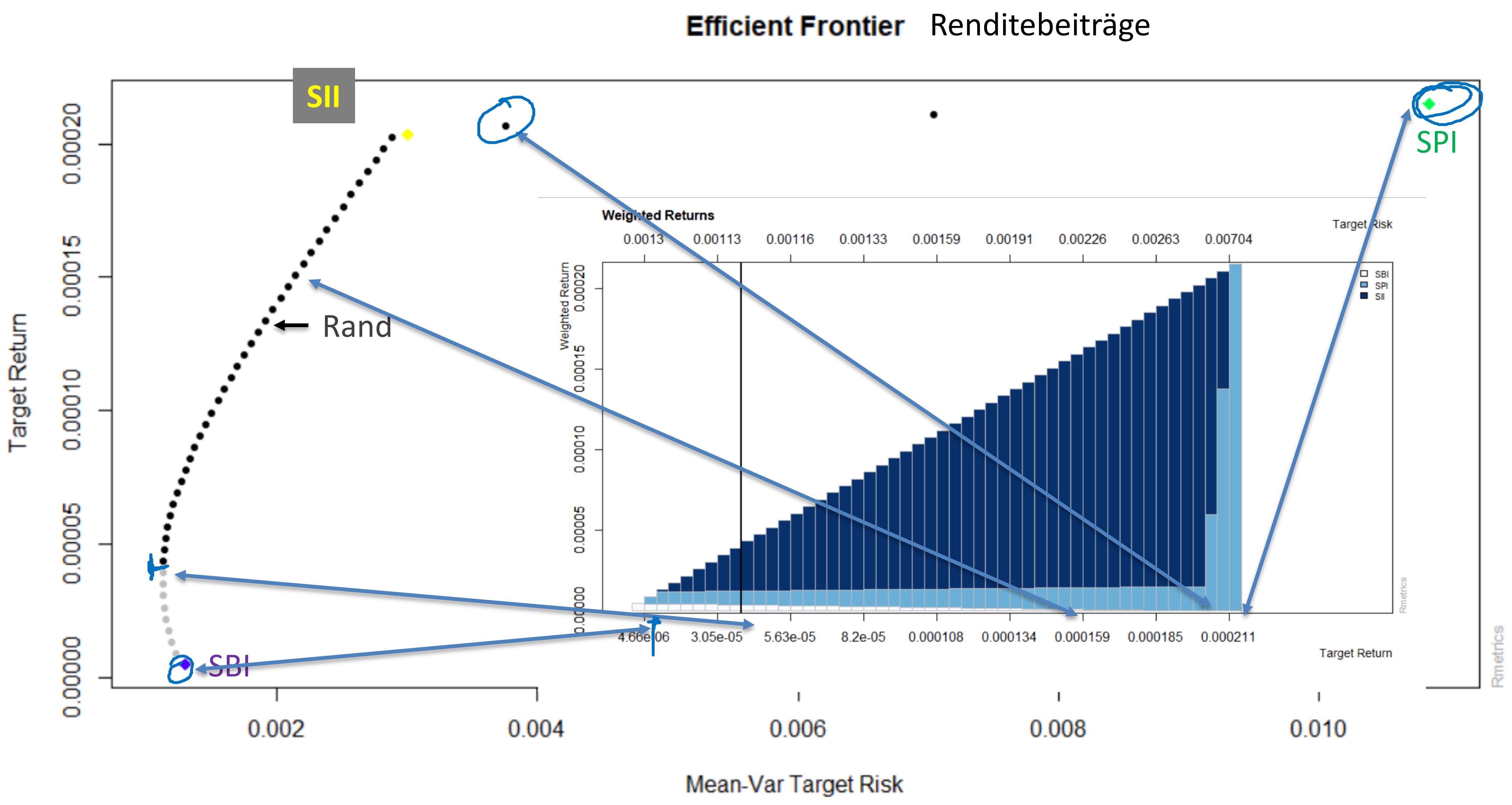
$$\frac{w_1 \cdot r_1}{w_1 \cdot \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + w_3 \bar{r}_3}$$

Gesamtrendite

Efficient Frontier Renditebeiträge



Portfoliotheorie – n Assets - Beispiel



Diskussion

Statistische Bestimmung optimaler Portfolios hat zwei Schwächen:

1. Aus Daten in der Vergangenheit wird auf die zukünftige Entwicklung geschlossen.
2. Die Vorhersagen von Finanzmarktdaten betreffen ein soziales, reflexives System.

Zusammen genommen führen die beiden Schwächen dazu, dass die optimalen Portfolios in der Regel nicht so gut abschneiden, wie dies theoretisch (mathematisch-statistisch) zu erwarten wäre.

Entsprechend werden

- am Markt in der Regel robustere Portfolioansätze verfolgt z.B. eine Gleichgewichtung
- in der Wissenschaft Portfoliomodelle weiterentwickelt, z.B. im CAPM - Capital Asset Pricing Model
  Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*. *The Journal of Finance*, *19*(3)
  wobei auch diese Modelle weiterhin fehlerbehaftet sind
  Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, *18*(3), 25–46.