Technische
Hochschule
Wildau [FH]
Technical University
of Applied Sciences

WILDAU

Maschinelles Lernen

Univariate Lineare Regression und einfacher Gradientenabstieg

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Supervised Learning

Supervised Learning

1. Aufgabe A

   Vorhersage $\hat{Y} = A(X)$

2. Qualität Q

   Verlustfunktion $\mathrm{L}(\hat{Y}, \mathrm{Y})$

3. Erfahrung E

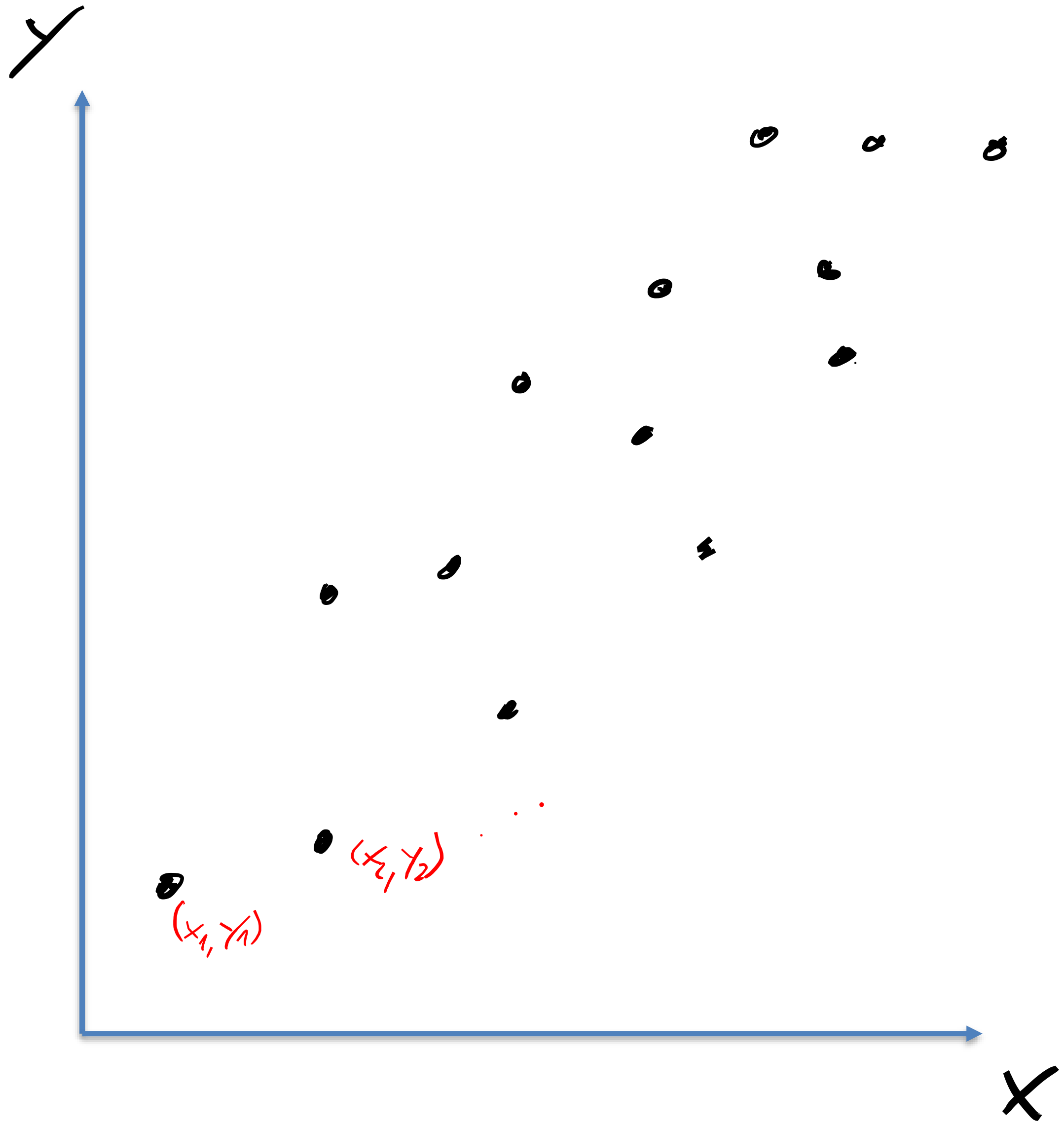
Datensatz
(x_i, y_i) für $i = 1, \cdots, n$

4. Maschine

Eine Maschine ***lernt*** aus Erfahrung E eine Aufgabe A mit der Qualität Q, wenn die Qualität Q beim erfüllen der Aufgabe A mit Erfahrung E steigt (T. Mitchell, MIT, 1988)

Einfache univariate Regression

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU



- **Aufgabe**

  sage anhand von x den Zielwert y vorher

  $$\hat{y}(x) = \hat{y} = f(x)$$

- **Erfahrung**

  Beobachtungen: (x_i, y_i)

- **Qualität**

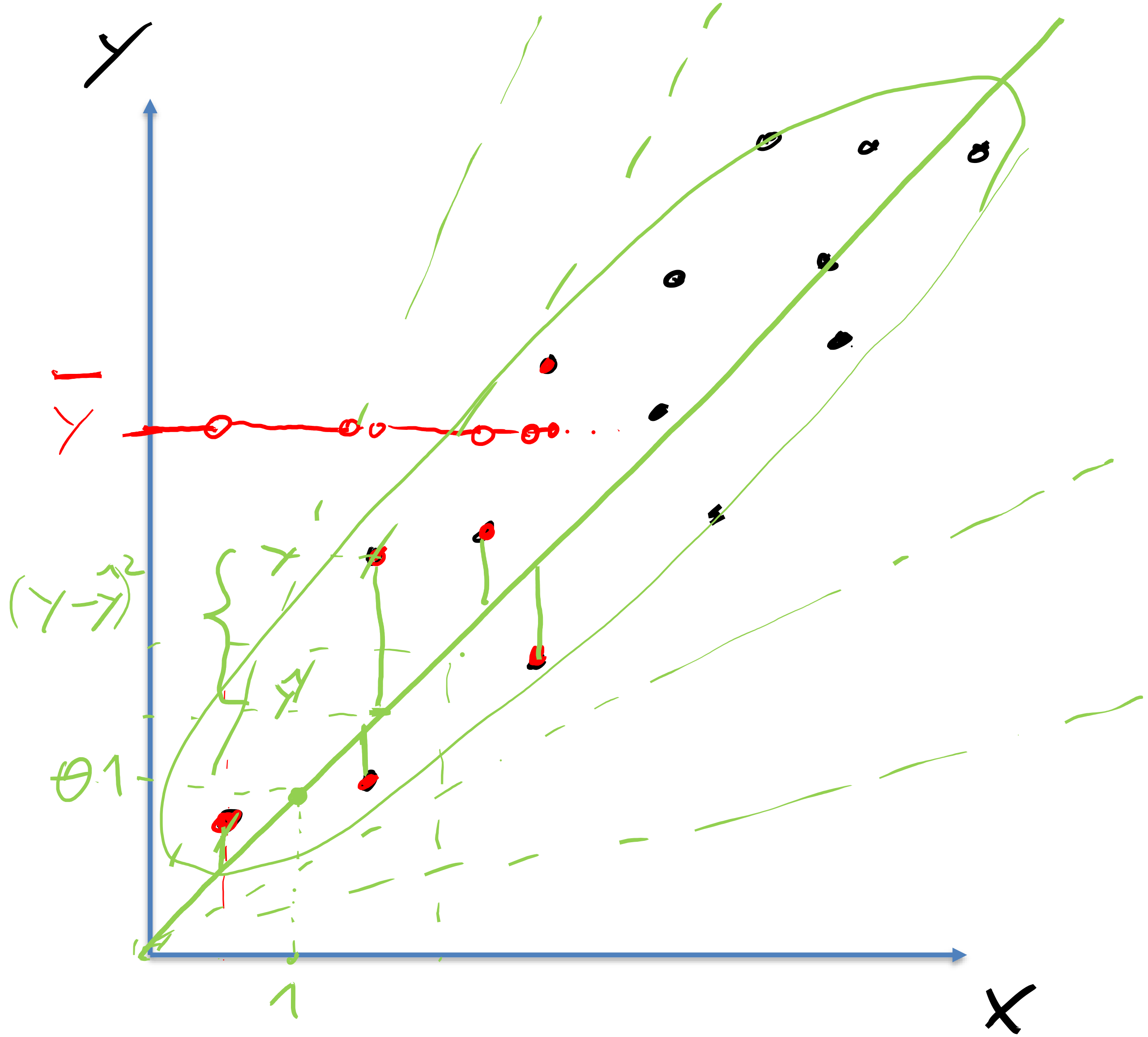
  sage den Zielwert <u>möglichst</u> <u>gut</u> vorher

  Gleichheit: $\hat{y} == y$ Verlust 0 sonst 1

  Abstand: $(\hat{y} - y)^2$

Einfache univariate Regression

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences



- **Aufgabe**

  sage anhand von x den Zielwert y vorher

  $$\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$$

- **Erfahrung**

  Beobachtungen: (x_i, y_i)

- **Qualität**

  sage den Zielwert möglichst gut vorher

  Gleichheit: $\hat{y} == y$

  Abstand: $(\hat{y} - y)^2$

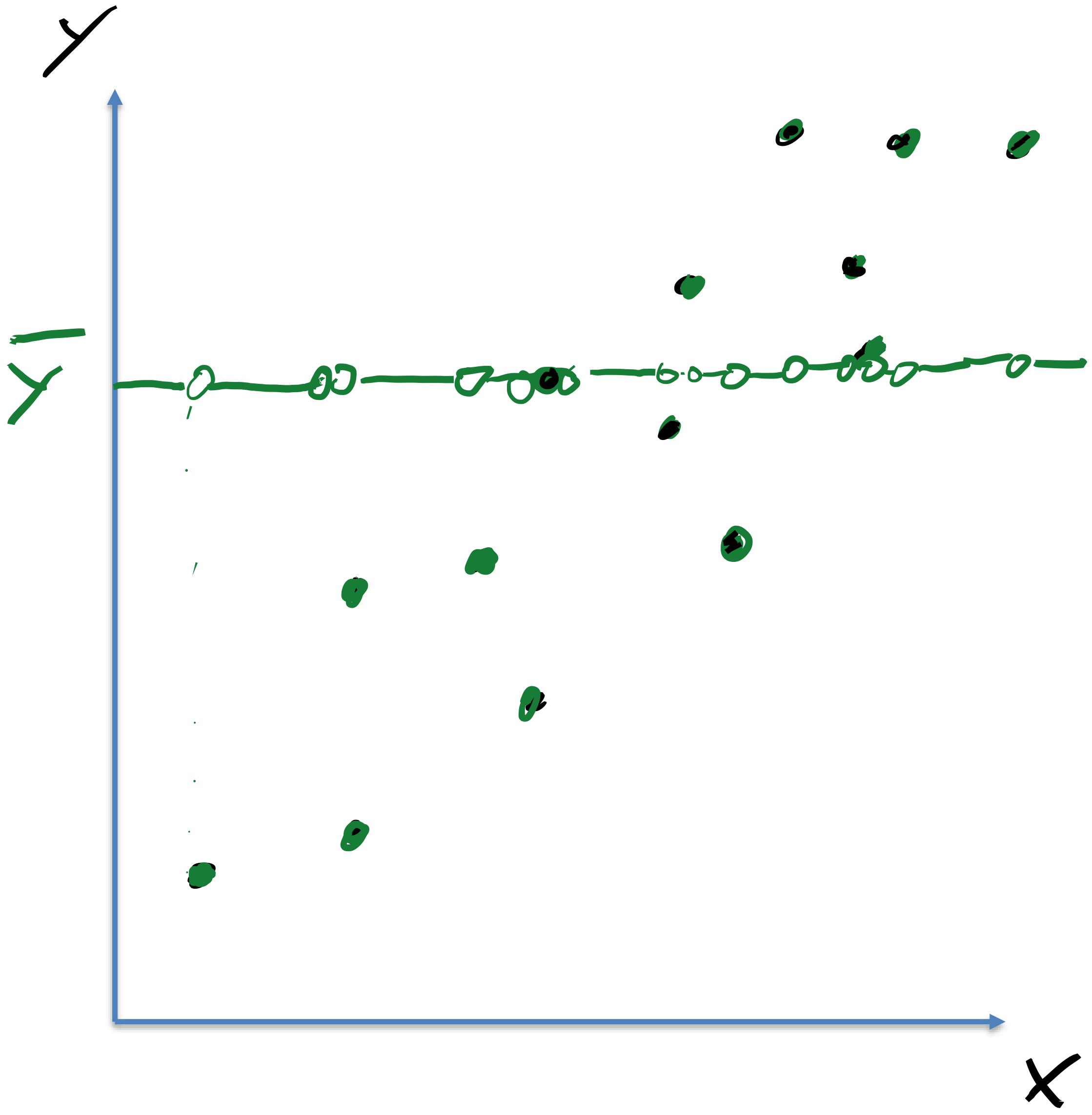
- Maschine bzw. Modell

  Look-up-table: $\hat{y}(x) = y_i$ für $x = x_i$, $\bar{y}$ sonst

  Lineares Modell: $\hat{y} = \theta \cdot x$

  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$

Einfache univariate Regression



- **Aufgabe**

  sage anhand von x den Zielwert y vorher

  $$\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$$

- **Erfahrung**

  Beobachtungen: (x_i, y_i)

- **Qualität**

  sage den Zielwert <u>möglichst</u> <u>gut</u> vorher

  Gleichheit: $\hat{y} == y$

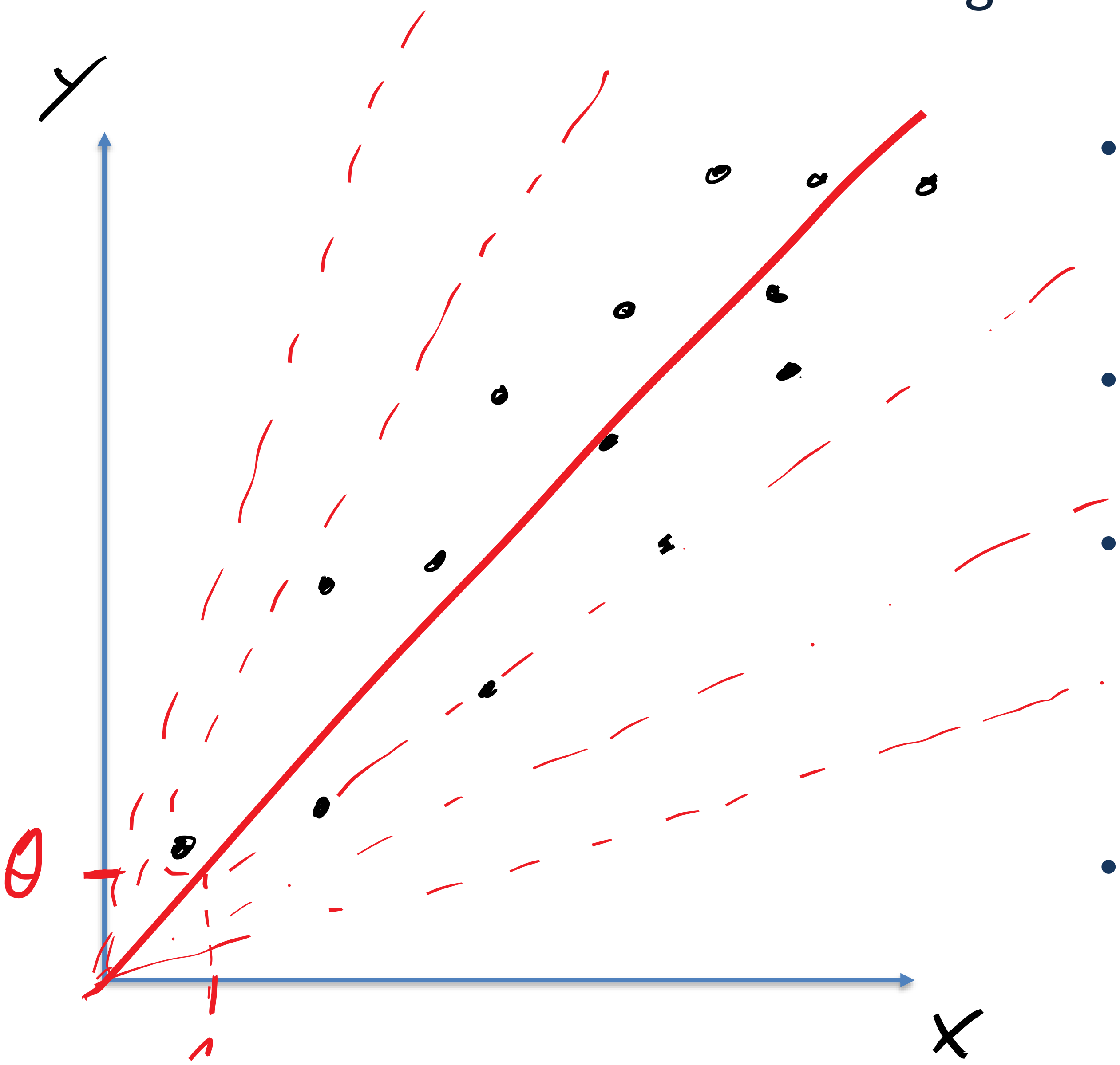
  Abstand: $(\hat{y} - y)^2$

- Maschine bzw. Modell

  Look-up-table: $\hat{y}(x) = y_i$ für $\mathrm{x} = x_i, \bar{y}$ sonst

  Lineares Modell: $\hat{y} = \theta \cdot x$

Einfache univariate Regression



- **Aufgabe**

  sage anhand von x den Zielwert y vorher

  $$\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$$

- **Erfahrung**

  Beobachtungen: (x_i, y_i)

- **Qualität**

  sage den Zielwert möglichst gut vorher

  Gleichheit: $\hat{y} == y$

  Abstand: $(\hat{y} - y)^2$

- Maschine bzw. Modell

  Look-up-table: $\hat{y}(x) = y_i$ für x $= x_i, \bar{y}$ sonst

  Lineares Modell: $\hat{y} = \theta \cdot x$

Einfache univariate Regression – analytische Lösung

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Aufgabe: Regression, d.h. Vorhersage $\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$

Erfahrung: Datensatz $(x_i, y_i)_{i=1}^{n}$

Qualität: Quadratische Verlustfunktion

$$L(y, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i; \theta))^2 = L(\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta \cdot x_i)^2$$

Unbekannte

Maschine: vereinfachte lineare Regression mit

$$f(x; \theta) = \theta \cdot x$$

Lernen: Finde einen Wert für θ , der die quadratische Verlustfunktion minimiert

Analytisch über die Nullstelle der ersten Ableitung

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i; \theta))^2 = \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i \cdot \theta)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} \cdot (y_i - x_i \cdot \theta) \cdot (-x_i) = 0$$

$$\theta_{opt} = {\sum_{i=1}^{n} y_i x_i} \Big/ {\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = {Cov(x, y)} \Big/ {Var(x)}$$

Einfache univariate Regression – Gradientenabstieg

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Aufgabe: Regression, d.h. Vorhersage $\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$

Erfahrung: Datensatz $(x_i, y_i)_{i=1}^{n}$

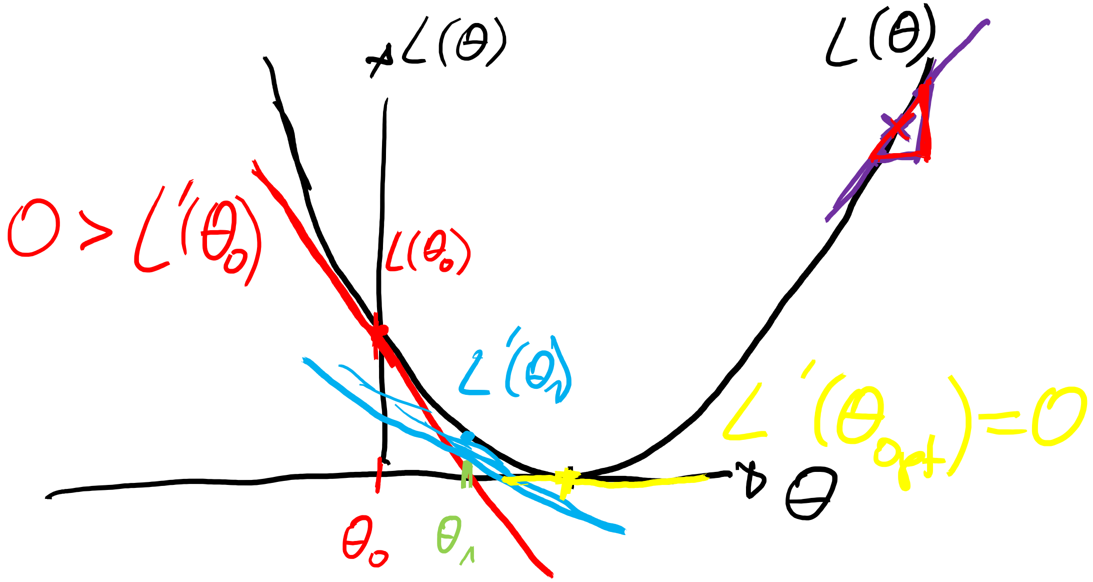
Qualität: Quadratische Verlustfunktion

$$L(y, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i;\theta))^2 = L(\theta)$$

Maschine: vereinfachte lineare Regression mit

$$\mathrm{f}(x;\theta) = \theta \cdot x$$

Lernen: Finde einen Wert für θ , der die quadratische Verlustfunktion minimiert



$\theta_0 = 0$ $\quad L(\theta_0)$ $\quad L'(\theta_0)$

$\theta_1 = \theta_0 + \alpha \cdot L'(\theta_0)$ $\quad \alpha = -1$

"steilste Abstieg"

$\theta_2 = \theta_1 + \alpha \cdot L'(\theta_1)$

$\theta_{opt} = \theta_{opt} + \alpha \cdot 0$

Einfache univariate Regression – analytische Lösung

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

Aufgabe: Regression, d.h. Vorhersage $\hat{y} = \hat{y}(x) = f(x)$

Erfahrung: Datensatz $(x_i, y_i)_{i=1}^n$

Qualität: Quadratische Verlustfunktion

$$L(y, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i;\theta))^2 = L(\theta)$$

Maschine: vereinfachte lineare Regression mit

$$\mathrm{f}(x;\theta) = \theta \cdot x$$

Lernen: Finde einen Wert für θ , der die quadratische Verlustfunktion minimiert

Durch geeignete Wahl von θ in einem iterativen Prozess (Gradientenabstiegsverfahren):

1. Wähle Startwert z.B. $\theta^0 = 0$
2. Berechne Ableitung $\frac{d}{d\theta} L(\theta) = \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i;\theta))^2 = \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i \cdot \theta)^2$
   $$= \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - x_i \cdot \theta) \cdot (-x_i)$$
3. Update $\theta^{t+1} = \theta^t + \alpha \cdot \frac{d}{d\theta} L(\theta^t) = \theta^t - \alpha \cdot 2 \sum_{i=1}^n (y_i - x_i \cdot \theta^t) \cdot x_i = \theta^t + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - x_i \cdot \theta^t) \cdot x_i$

mit $\alpha = -1$ (steilster Abstieg)