Technische
Hochschule
Wildau [FH]
*Technical University
of Applied Sciences*
WILDAU

# Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

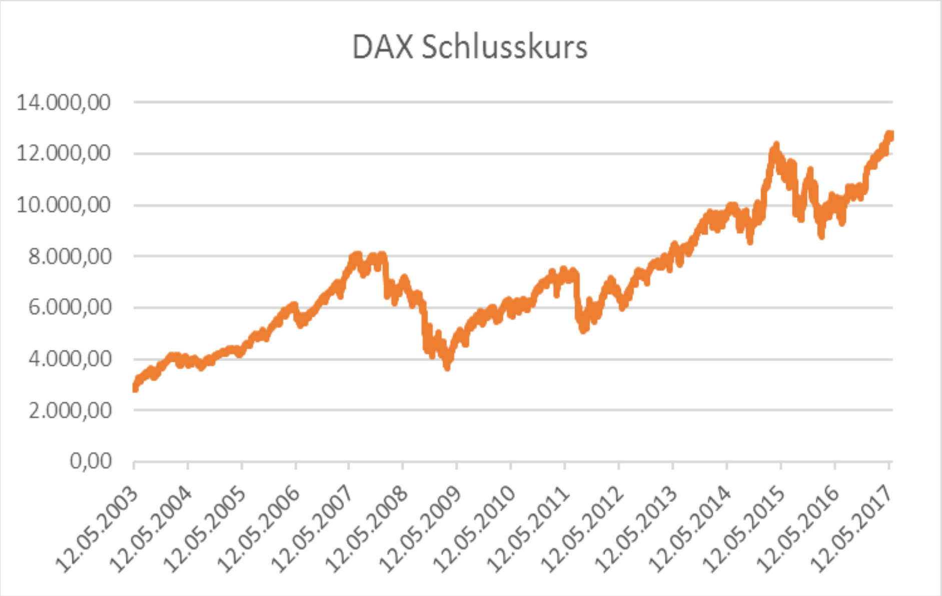
## Zeitreihenanalyse
## Klassische Zeitreihenanalyse
## Komponentenzerlegung

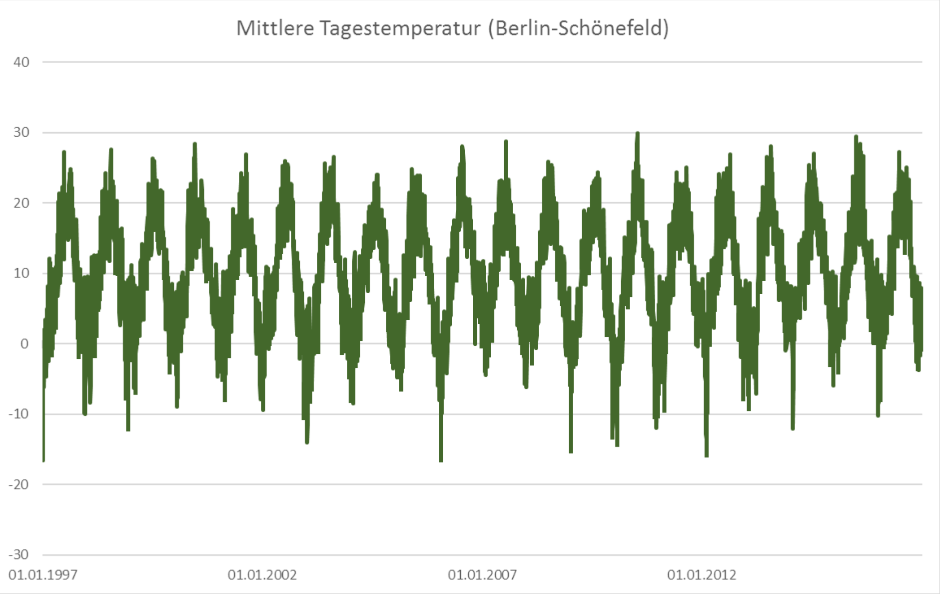
# Übersicht

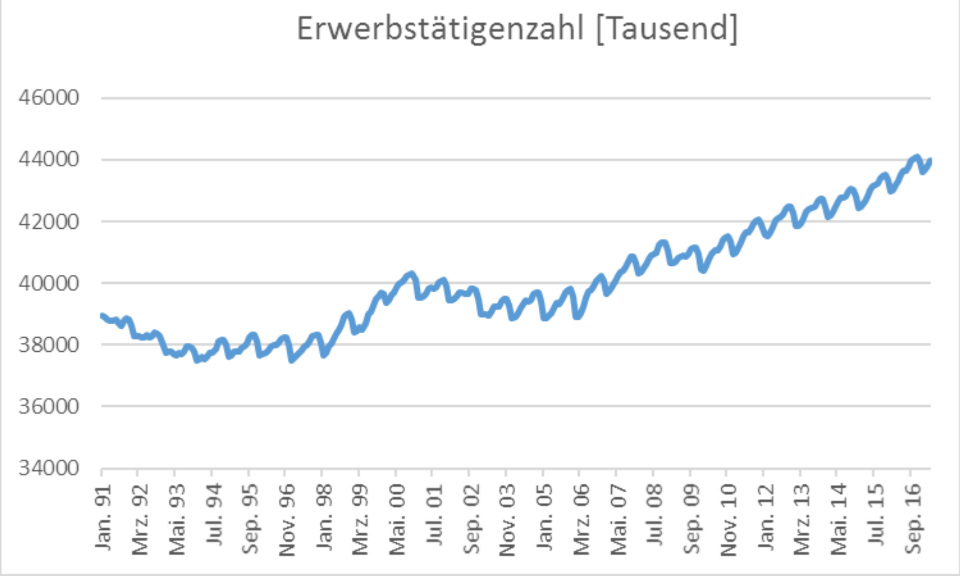
- **Einführung**
  - **Allgemeine Darstellung**
  - **Beispiele**
- **Grundlagen Zeitreihenanalyse**
  - **Grundbegriffe**
  - **Trendbestimmung**
    - **Gleitender Durchschnitt**
    - **Exponentielle Glättung**
    - **Lineare Regression**
- Klassische Komponentenzerlegung
  - Modellbeschreibung: Trend, Saisonkomponente, Rest
  - Schätzen der Parameter
    - Trend mittels linearer Regression
    - Holt-Winters-Verfahren
- Prognose

# Beispiele

- Physikalische Messdaten
- Finanzdaten
- Statistische Daten
- …..



# Grundlagen

| Zeitreihe | Vergangenheit | → | Gegenwart | → | Zukunft |
|---|---|---|---|---|---|
| • $(X_t)$ | $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$ | | $X_t$ | | $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots$ |

Zeitreihe — Beobachtungen — Prognosen

Zeitreihe als mathematisch, abstrakter Begriff

$$X_t$$

Realisierung einer Zeitreihe

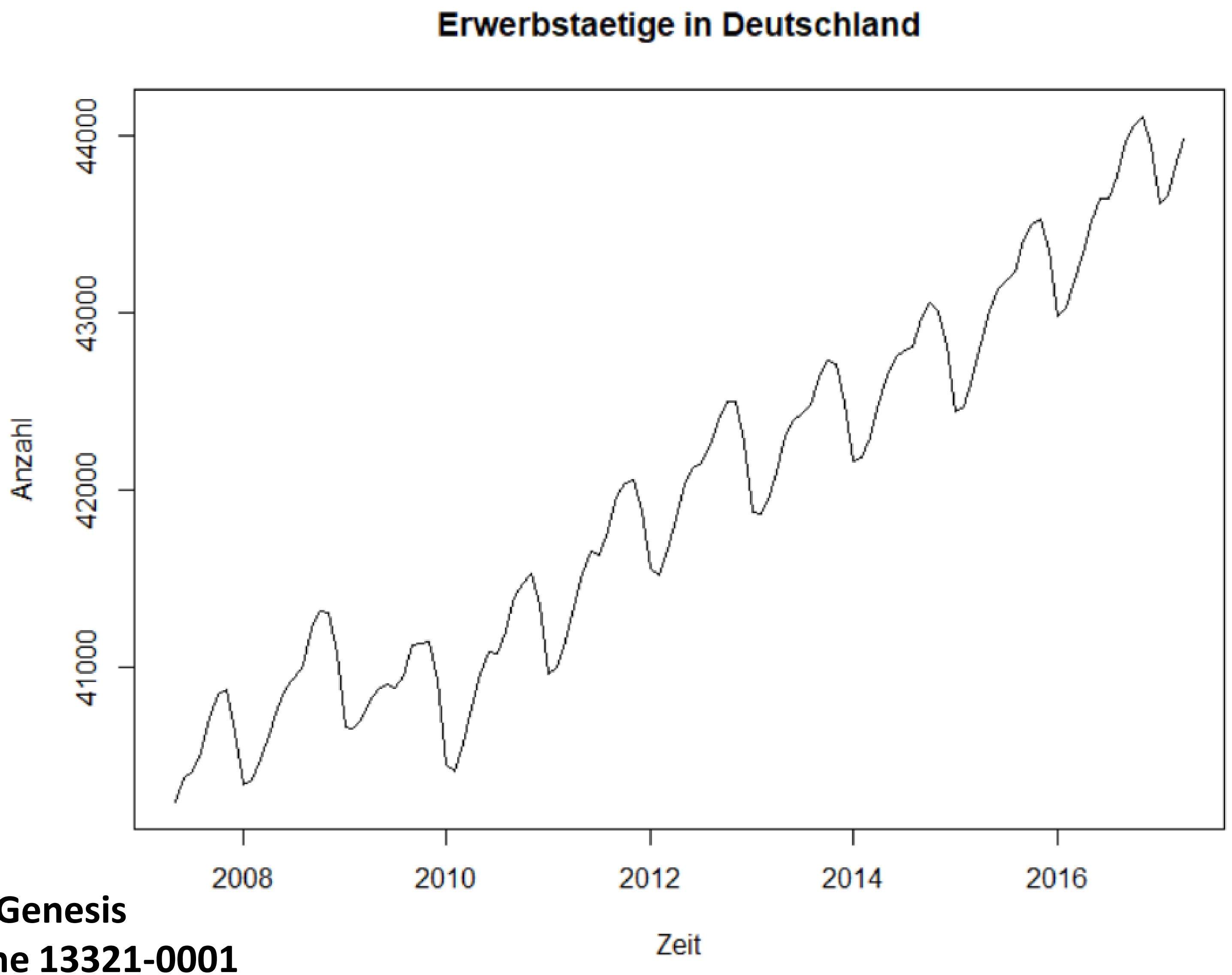
= Konkrete Beobachtung von Messwerten

= Datensatz von Zahlenwerten

$$x_t$$

mit $t$ zwischen Startpunkt $t_0 = 0$ und Endpunkt $T$

# Beispiel Erwerbstätige




**Quelle:**
**Destatis/Genesis**
**Datenreihe 13321-0001**

# Trend: Gleitender Durchschnitt

Technische Hochschule Wildau
*Technical University of Applied Sciences*
WILDAU

| Zeitreihe | Vergangenheit | Gegenwart | Zukunft |
| --- | --- | --- | --- |
| • $(X_t)_{t\geq 0}$ | $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$ | $X_t$ | $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots$ |

Zeitreihe

$$(x_t)_{t=0,\ldots,T}$$

Beobachtungen im Zeitpunkt t

$$(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_0)$$

Gleitender Durchschnitt *(Moving Average)*

$\mu_t^s$ im Zeitpunkt t mit Horizont s

$$\mu_t = \frac{1}{2s+1} \sum_{i=-s}^{s} x_{t+i}$$ zentriert

$$(\mu_t^s)_{t=0,\ldots,T} \text{ ????}$$

$$\mu_t = \frac{1}{s+1} \sum_{i=-s}^{0} x_{t+i}$$ rückwärts

# Trend: Exponentielle Glättung

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

| Zeitreihe | Vergangenheit | Gegenwart | Zukunft |
| --- | --- | --- | --- |
| • $(X_t)_{t\geq 0}$ | $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$ | $X_t$ | $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots$ |

Zeitreihe

$$(x_t)_{t=0,\ldots,T}$$

Beobachtungen

$$(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t0})$$

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α

Niveau

$$(n_t)_{t=0,\ldots,T}$$

$$n_0 = x_0$$

$$n_t = \alpha x_t + (1-\alpha) n_{t-1}$$

# Trend: Exponentielle Glättung mit Wachstum

= Exponentielle Glättung zweiter Ordnung

Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

| Zeitreihe | Vergangenheit | Gegenwart | Zukunft |
|---|---|---|---|
| • $(X_t)_{t\geq 0}$ | $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$ | $X_t$ | $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots$ |

Zeitreihe

$$(x_t)_{t=0,\ldots,T}$$

Beobachtungen

$$(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t0})$$

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α und Wachstumsrate β

Niveau

$$(n_t)_{t=0,\ldots,T}$$

Wachstum

$$(m_t)_{t=0,\ldots,T}$$

$$n_0 = x_0$$

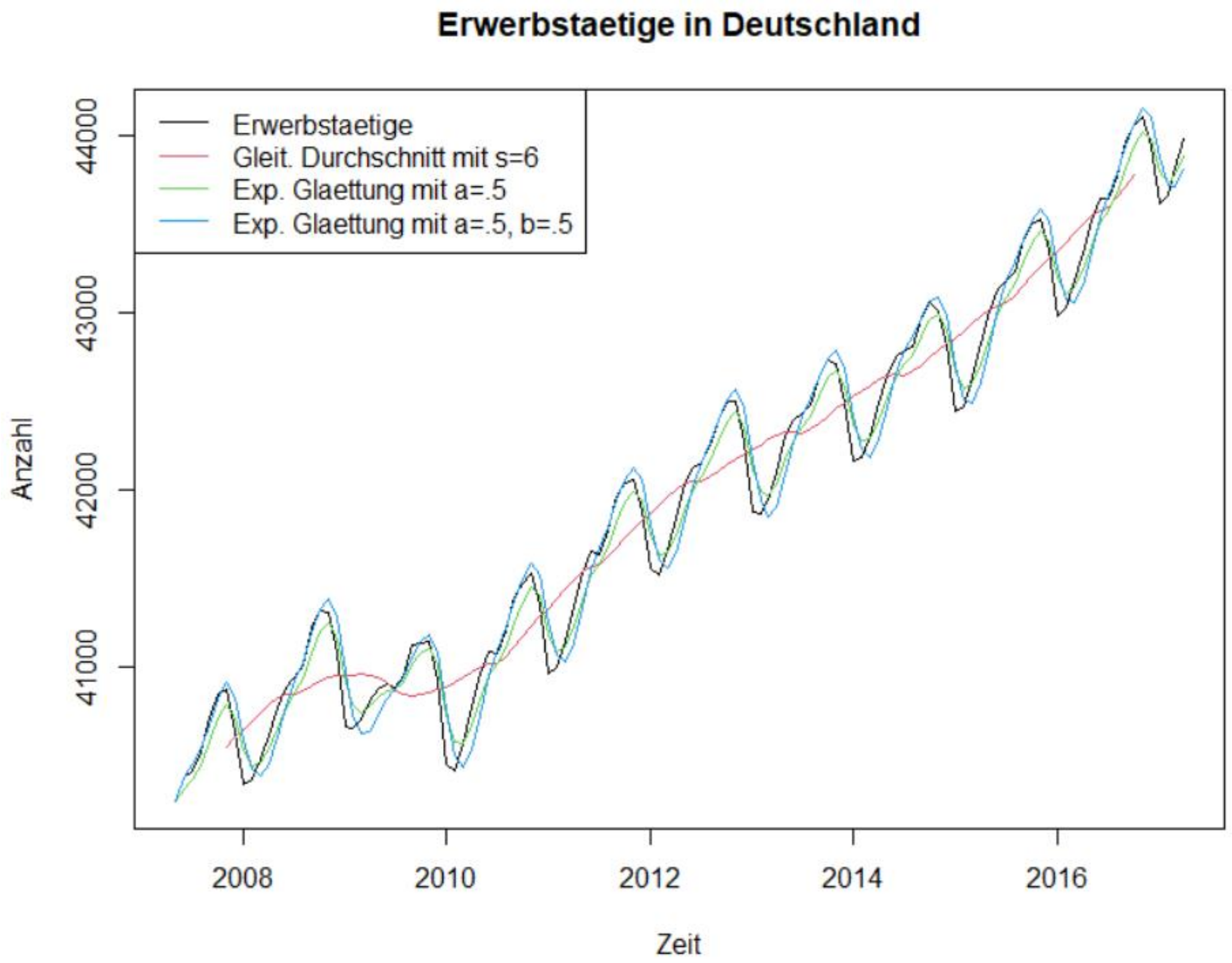
$$m_0 = x_1 - x_0$$

$$n_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

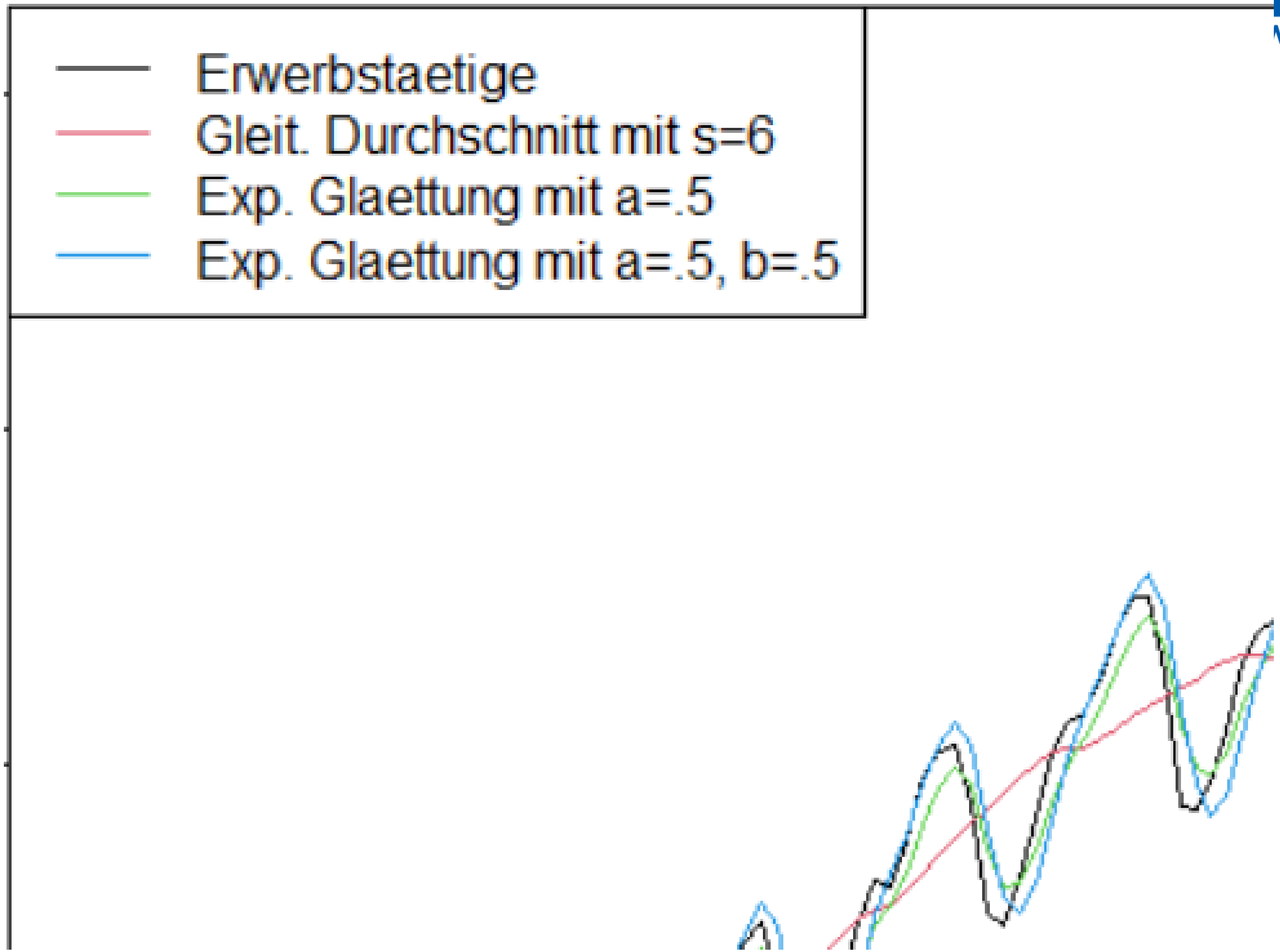
$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1-\beta)m_{t-1}$$

$$\boldsymbol{n_1, m_1 = ????}$$

# Beispiel Erwerbstätige



# Beispiel Erwerbstätige



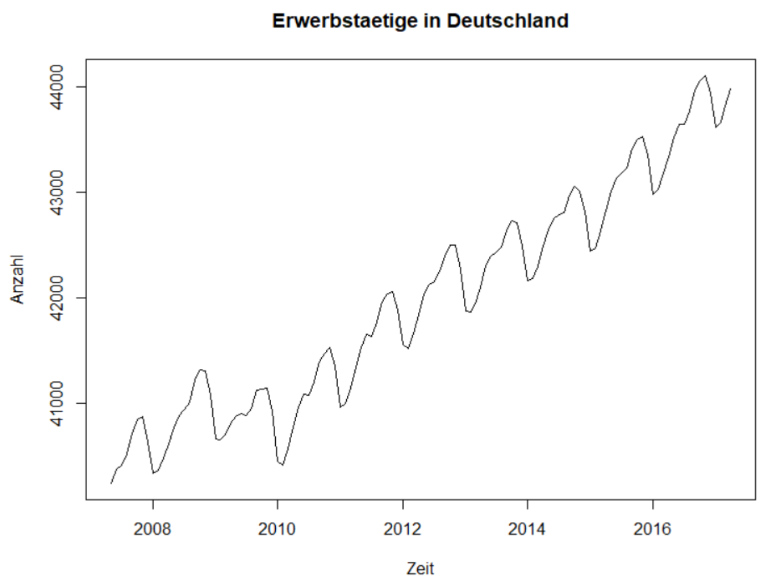
# Trend: Lineare Regression

- Lineare Regression liefert Prognose
  - der (unbeobachteten) abhängigen Variable y
  - anhand (beobachtbarer) unabhängiger Variable x

$$\hat{y} = \hat{y}(x) = a\,x + b$$

- Lineare Regression in der Zeitreihenanalyse
  - der zukünftigen Entwicklung einer Variablen x
  - anhand des bekannten Zeitpunktes t

$$\widehat{x_t} = \hat{x}(t) = a\,t + b$$



Technische
Hochschule
Wildau [FH]
Technical University
of Applied Sciences
WILDAU

# Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

## Zeitreihenanalyse
## Klassische Zeitreihenanalyse
## Komponentenzerlegung

# Übersicht

- Einführung
  - Allgemeine Darstellung
  - Beispiele
- Grundlagen Zeitreihenanalyse
  - Grundbegriffe
  - Trendbestimmung
    - Gleitender Durchschnitt
    - Exponentielle Glättung
    - Lineare Regression
- **Klassische Komponentenzerlegung**
  - **Modellbeschreibung: Trend, Saisonkomponente, Rest**
  - **Schätzen der Parameter**
    - **Trend mittels linearer Regression**
    - **Holt-Winters-Verfahren**
- **Prognose**

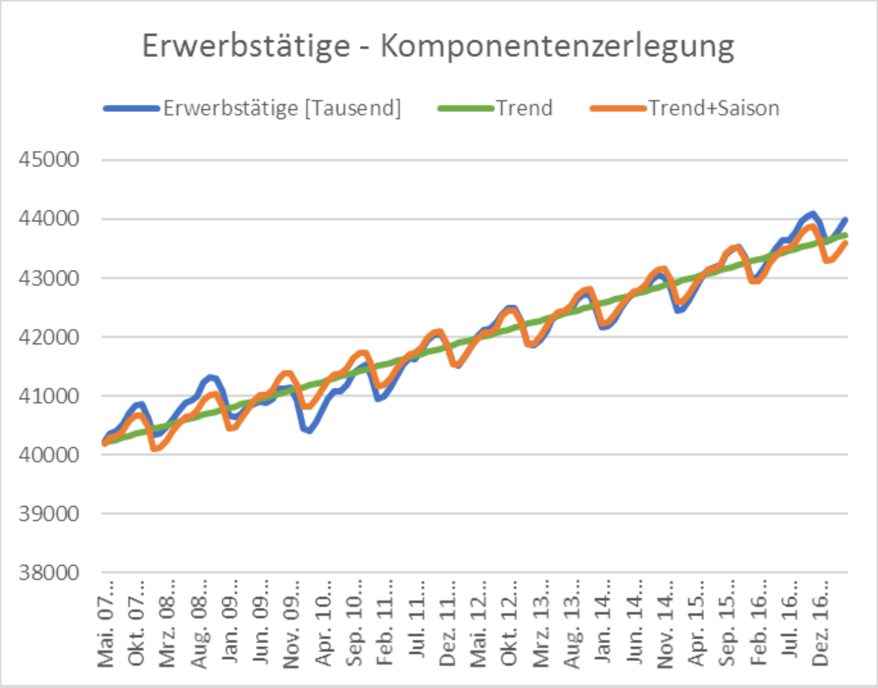
# Klassische Komponentenzerlegung (KK)

- Die Entwicklung der Werte $x_t$ einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
  - **Trendkomponente $m_t$**
    beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
  - (konjunkturelle Komponente $k_t$)
    beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
  - **saisonale Komponente $s_t$**
    erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
  - **Restkomponente $r_t$**
    Nicht vorhersagbare Einflüsse

- Die Zerlegung erfolgt
  - **Additiv**
    $x_t = m_t + s_t + r_t$
  - (Multiplikativ)

$$x_t = m_t * s_t * r_t$$

$$\ln(x_t) = \ln(m_t) + \ln(s_t) + \ln(r_t)$$



# KK mit linearer Regression

- Die Entwicklung der Werte $x_t$ einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
  - **Trendkomponente $m_t$**
    beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
  - (konjunkturelle Komponente $k_t$)
    beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
  - **saisonale Komponente $s_t$**
    erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
  - **Restkomponente $r_t$**
    Nicht vorhersagbare Einflüsse

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente $m_t$**
   **durch lineare Regression**
   $$m_t = a \cdot t + b$$
   *($\mu_t$ mit gleitendem Durchschnitt)*
   *($n_t$ mit exponentieller Glättung)*
2. **saisonale Komponente $s_k$ durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**
   $$s_k = \sum_n x_{k+n\cdot K} - m_{k+n\cdot K}$$
   **wobei $k = t \bmod K$ die Saison im Zeitpunkt t**
3. **Restkomponente $r_t$**
   **als Rest**
   $$r_t = x_t - (m_t + s_k)$$

# KK mit linearer Regression

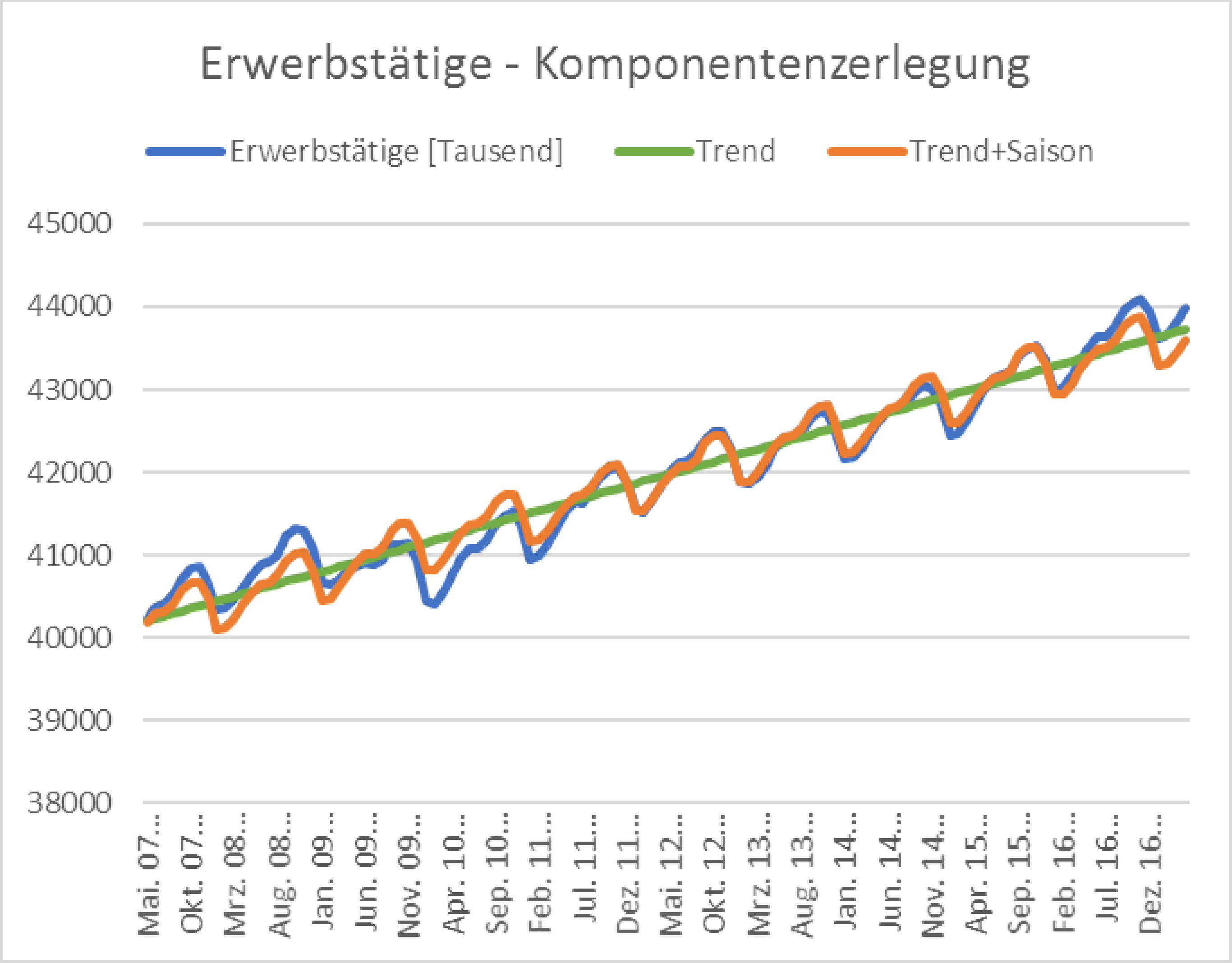
Technische Hochschule Wildau
Technical University of Applied Sciences
WILDAU

- Die Entwicklung der Werte $x_t$ einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
  - **Trendkomponente $m_t$**
    beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
  - (konjunkturelle Komponente $k_t$)
    beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
  - **saisonale Komponente $s_t$**
    erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
  - **Restkomponente $r_t$**
    Nicht vorhersagbare Einflüsse

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente $m_t$**
   **durch lineare Regression**
   $$m_t = a \cdot t + b$$
2. **saisonale Komponente $s_k$ durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**
   $$s_k = \sum_n x_{k+n\cdot K} - m_{k+n\cdot K}$$
   **wobei $k = t \bmod K$ die Saison im Zeitpunkt t**
3. **Restkomponente $r_t$**
   **als Rest**
   $$r_t = x_t - (m_t + s_k)$$

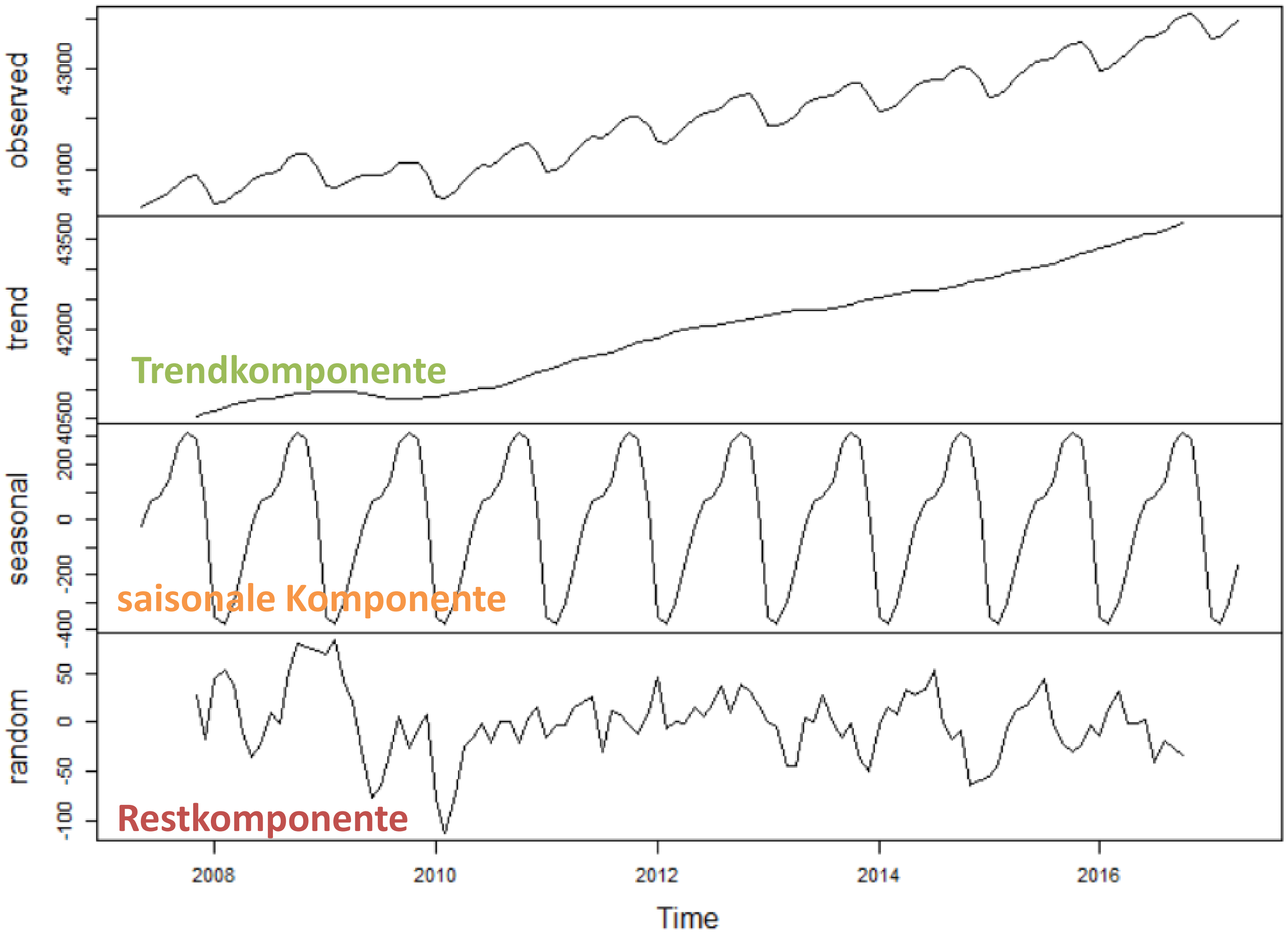
# KK mit linearer Regression



# KK mit gleitendem Durchschnitt

(hier: zentriert mit Horizont s = 6)





# KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α
und Wachstumsrate β
und Saisonkomponenten $s_t$ mit Periode p

$$\hat{x}_{t+h} = n_t + h * m_t + s_{t-p+1+(h-1)\,mod\,p}$$

Niveau
$(n_t)_{t=0,\dots,T}$

$$n_t = \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1-\alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

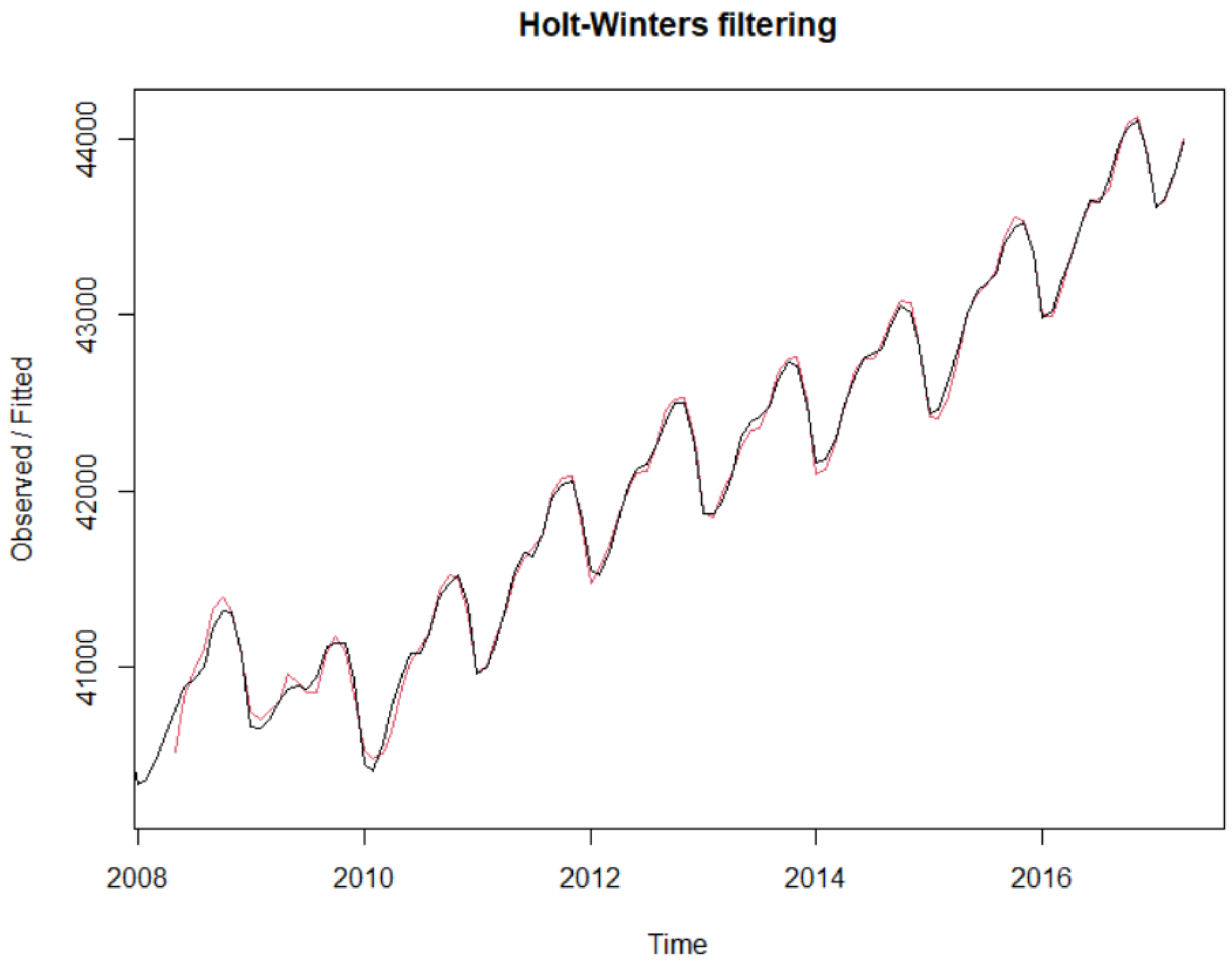
Wachstum
$(m_t)_{t=0,\dots,T}$

$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1-\beta)m_{t-1}$$

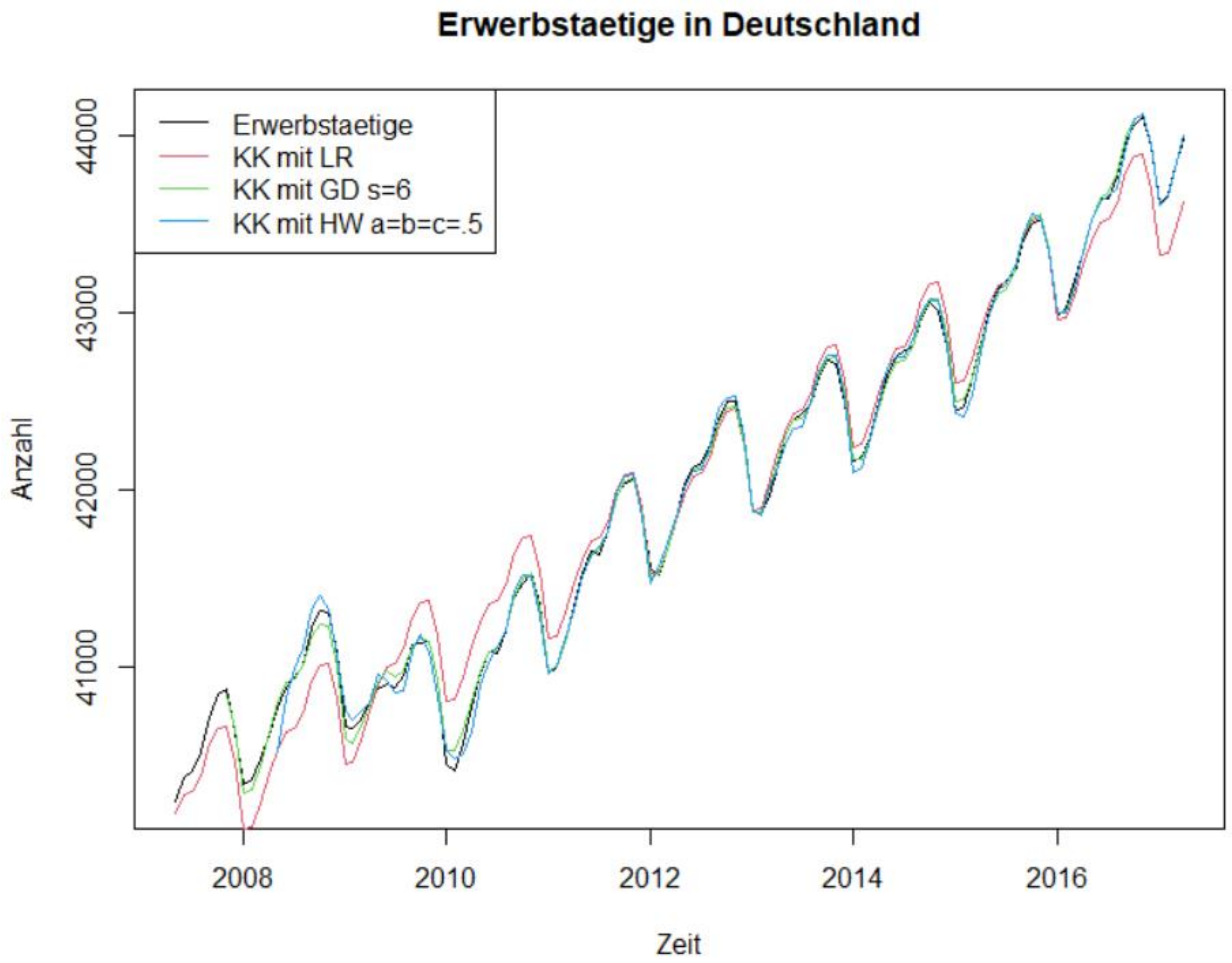
Saisonkomponente
$(s_t)_{t=0,\dots,T}$

$$s_t = \gamma(x_t - n_t) + (1-\gamma)s_{t-p}$$

# KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren



# KK – Vergleich der Verfahren



# Zeitreihenanalyse - Prognose

- Mit einer Zeitreihenanalyse kann eine Prognose erstellt werden
  - der zukünftigen Entwicklung einer Variablen x
  - anhand der beobachteten Gegenwart und Vergangenheit von x

**Vergangenheit**
- $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$

**Gegenwart**
- $X_t$

**Zukunft**
- $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots$

Beobachtungen

$$(x_t, x_{t-1}, \ldots)$$

Prognosen

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_{t+1}(x_t, x_{t-1}, \ldots)$$

# KK mit linearer Regression – Prognose

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente $m_t$ durch lineare Regression**

   $$m_t = a \cdot t + b$$

2. **saisonale Komponente $s_t$ durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**

   $$s_{t+k} = \sum_n x_{t+n\cdot k} - m_{t+n\cdot k}$$

3. **Restkomponente $r_t$ als Rest**

   $$r_t = x_t - (m_t + s_t)$$

Über die Komponenten kann eine einfache Prognose abgegeben werden

$$x_{t+1} = m_{t+1} + s_{t+1} + r_{t+1}$$

1. **Trendkomponente $m_t$ durch lineare Regression**

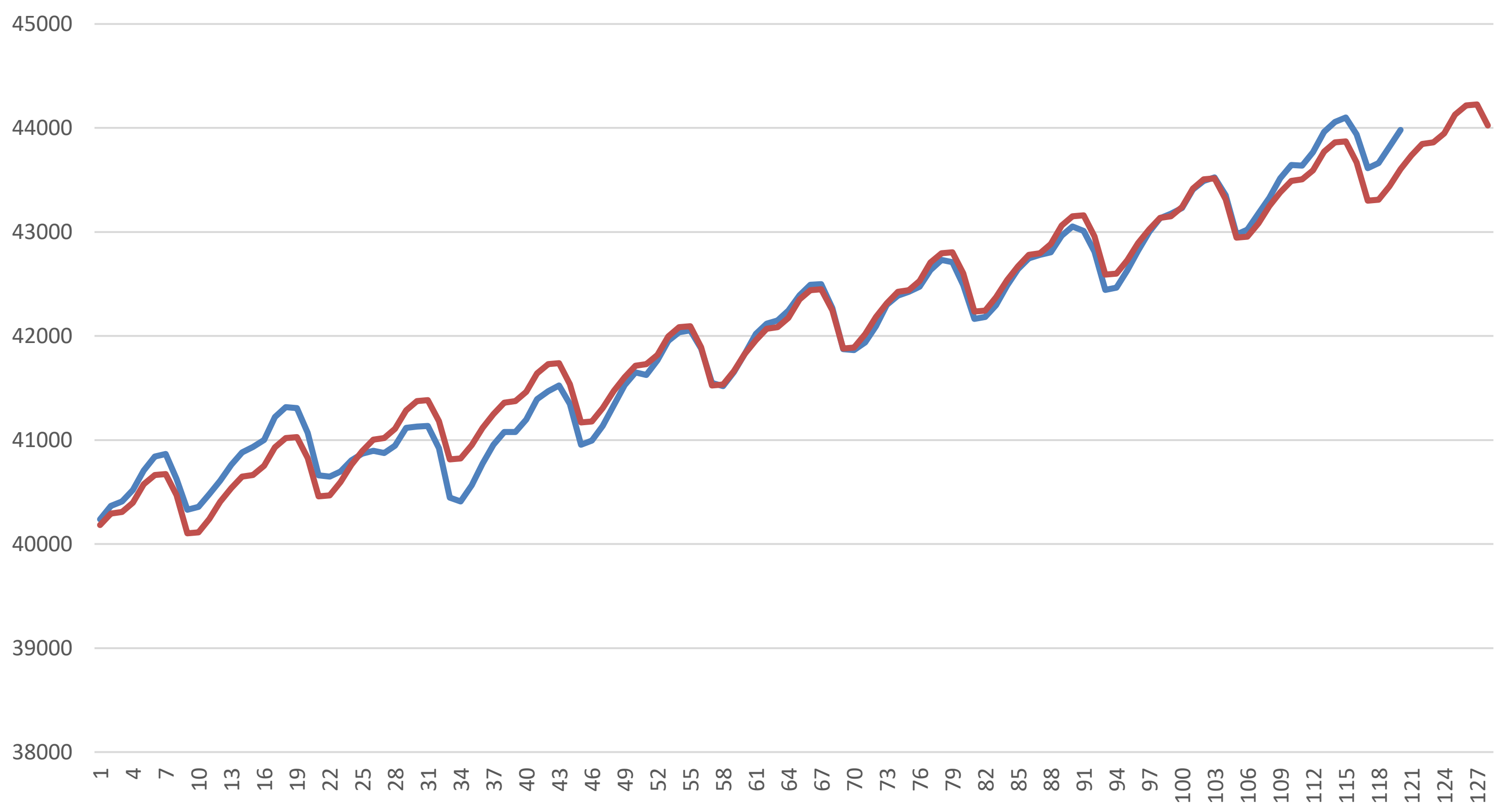
   $$m_t = a \cdot (t+1) + b$$

2. **saisonale Komponente $s_t$ durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**

   $$s_{(t+1 \bmod K)}$$

3. **Restkomponente $r_{t+1}=0$**

# KK mit linearer Regression – Prognose



# KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α
und Wachstumsrate β
und Saisonkomponenten $s_t$ mit Periode p

Niveau $(n_t)_{t=0,\dots,T}$

$$n_t = \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1-\alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

Wachstum $(m_t)_{t=0,\dots,T}$

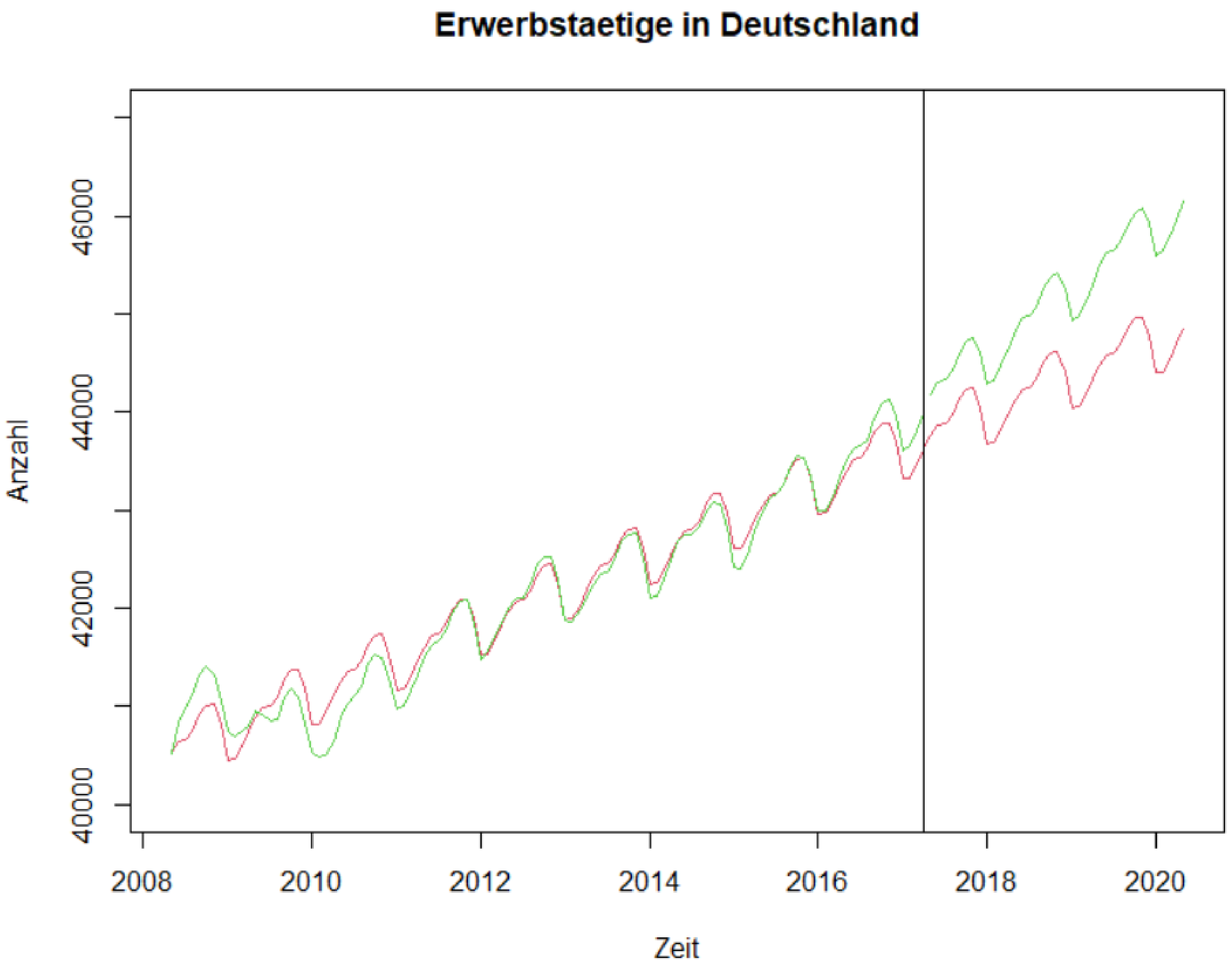
$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1-\beta)m_{t-1}$$

Saisonkomponente $(s_t)_{t=0,\dots,T}$

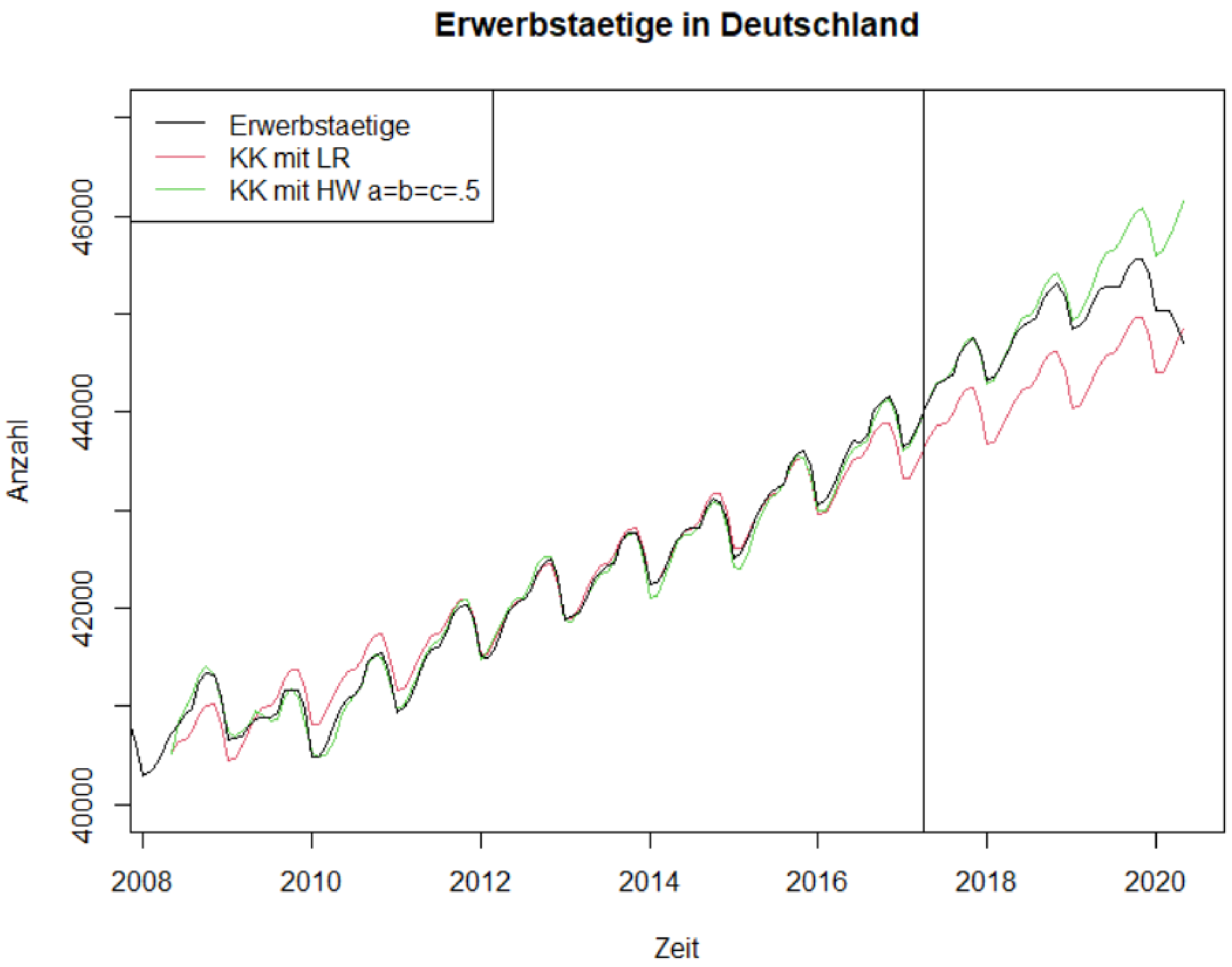
$$s_t = \gamma(x - n_t) + (1-\gamma)s_{t-p}$$

$$\hat{x}_{t+h} = n_t + h * m_t + s_{t-p+1+(h-1)\ mod\ p}$$

# KK Prognose - Vergleich der Verfahren



# KK Prognose - Vergleich der Verfahren



# Zusammenfassung

- Unter Zeitreihen versteht man wiederholte Beobachtungen einer Messgröße im Zeitverlauf.
- Man unterscheidet zwischen der abstrakten mathematischen Verwendung (Zeitreihe als Modell) und einer konkreten Realisierung (Zeitreihe als Datensatz).
- Bei der klassischen Komponentenzerlegung einer Zeitreihe unterscheidet man Trend, Saisonale Komponente und Rest.
- Die Komponenten des Modells lassen sich mit unterschiedlichen Verfahren schätzen u.a.:
  - Gleitender Durchschnitt
  - Exponentielle Glättung / Holt-Winters
  - Lineare Regression
- Zeitreihenmodelle erlauben eine Prognose für in der Zukunft liegende Zeitpunkte
  - Die Prognose schreibt Trends und wiederkehrende saisonale Muster aus der Vergangenheit in die Zukunft fort
  - Die Prognose berücksichtigt keine neuartigen Entwicklungen (Schocks, Strukturwandel,…)