



Technische
Hochschule
Wildau [FH]
*Technical University
of Applied Sciences*

Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Zeitreihenanalyse

Klassische Zeitreihenanalyse

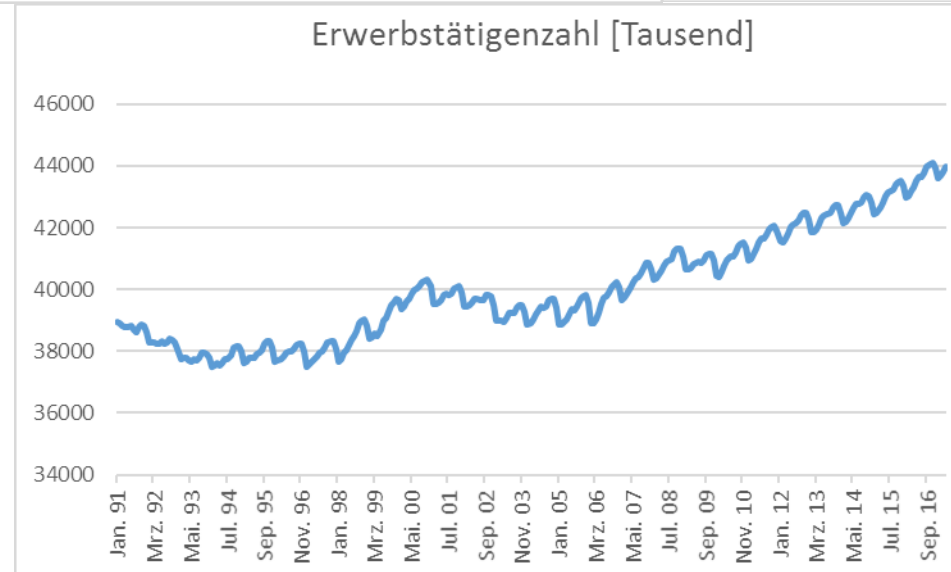
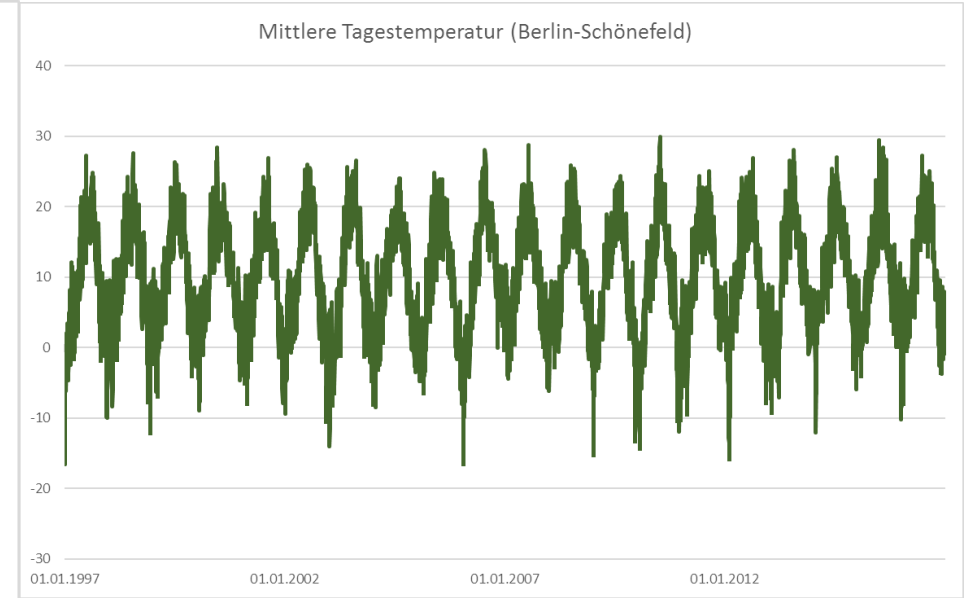
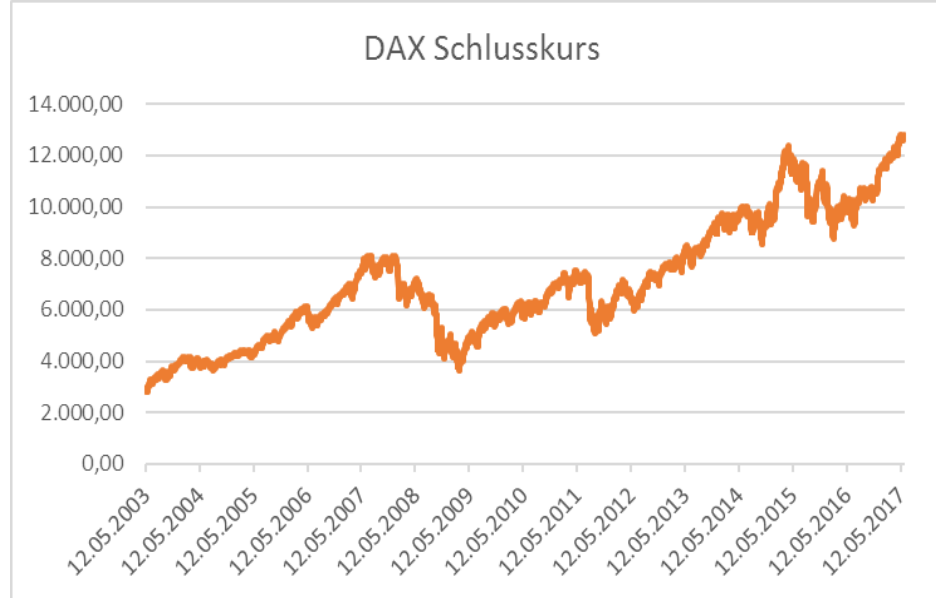
Komponentenzerlegung

Übersicht

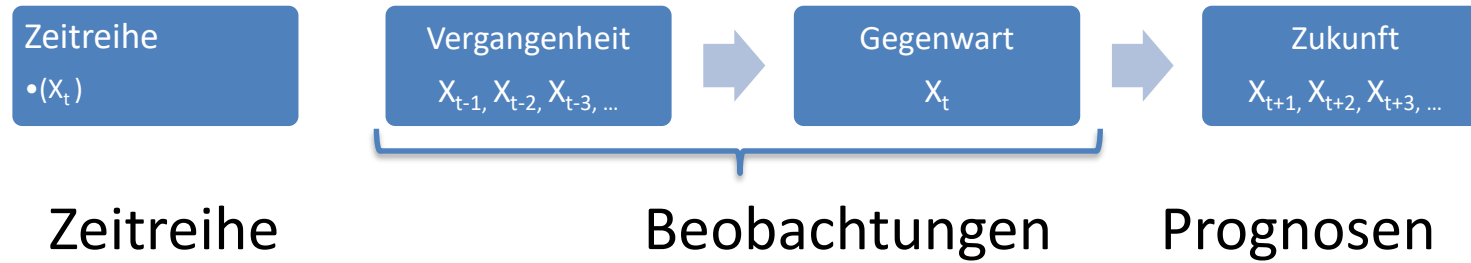
- **Einführung**
 - Allgemeine Darstellung
 - Beispiele
- **Grundlagen Zeitreihenanalyse**
 - Grundbegriffe
 - Trendbestimmung
 - Gleitender Durchschnitt
 - Exponentielle Glättung
 - Lineare Regression
- **Klassische Komponentenzerlegung**
 - Modellbeschreibung: Trend, Saisonkomponente, Rest
 - Schätzen der Parameter
 - Trend mittels linearer Regression
 - Holt-Winters-Verfahren
- **Prognose**

Beispiele

- Physikalische Messdaten
- Finanzdaten
- Statistische Daten
-



Grundlagen



Zeitreihe als mathematisch, abstrakter Begriff

$$X_t$$

Realisierung einer Zeitreihe

= Konkrete Beobachtung von Messwerten

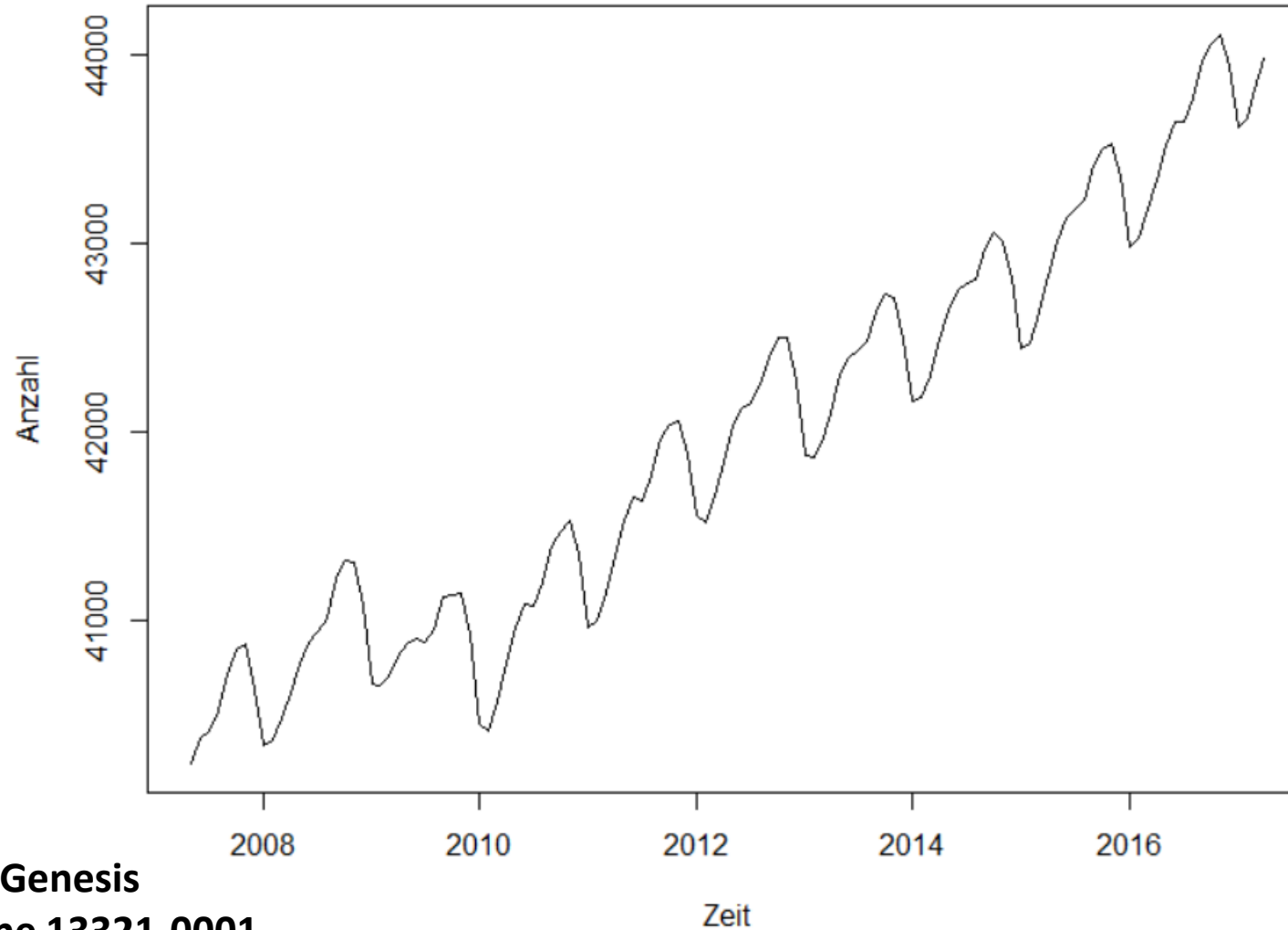
= Datensatz von Zahlenwerten

$$x_t$$

mit t zwischen Startpunkt $t_0 = 0$ und Endpunkt T

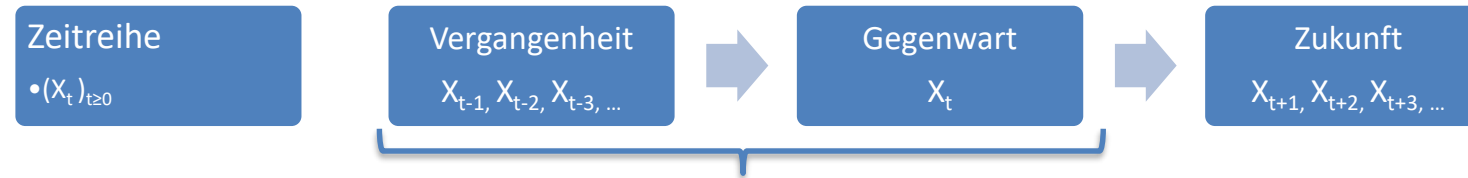
Beispiel Erwerbstätige

Erwerbstätige in Deutschland



Quelle:
Destatis/Genesis
Datenreihe 13321-0001

Trend: Gleitender Durchschnitt



Zeitreihe

$(x_t)_{t=0, \dots, T}$

Beobachtungen im Zeitpunkt t

$(x_t, x_{t-1}, \dots, x_0)$

Gleitender Durchschnitt (*Moving Average*)

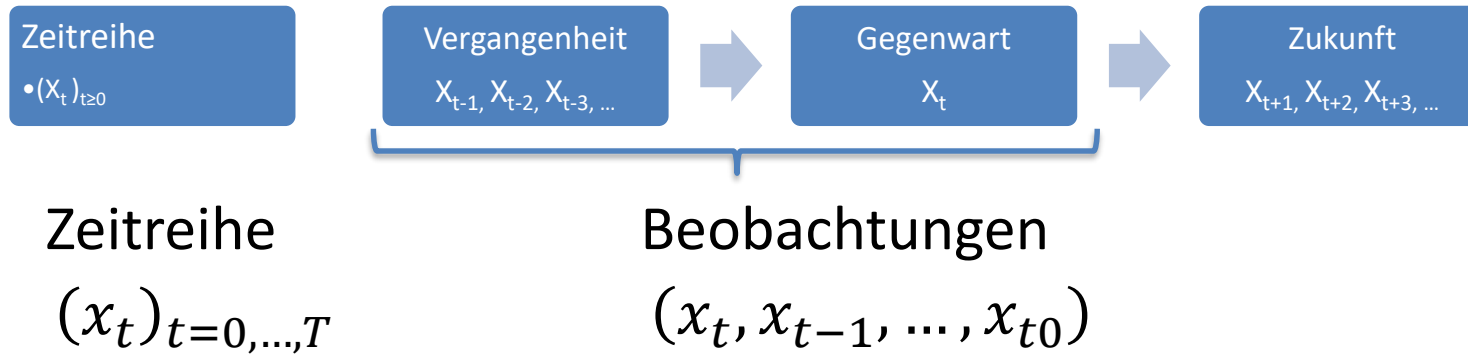
μ_t^s im Zeitpunkt t mit Horizont s

$$\mu_t = \frac{1}{2s+1} \sum_{i=-s}^s x_{t+i} \quad \text{zentriert}$$

$(\mu_t^s)_{t=0, \dots, T}$????

$$\mu_t = \frac{1}{s+1} \sum_{i=-s}^0 x_{t+i} \quad \text{rückwärts}$$

Trend: Exponentielle Glättung



Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α

Niveau

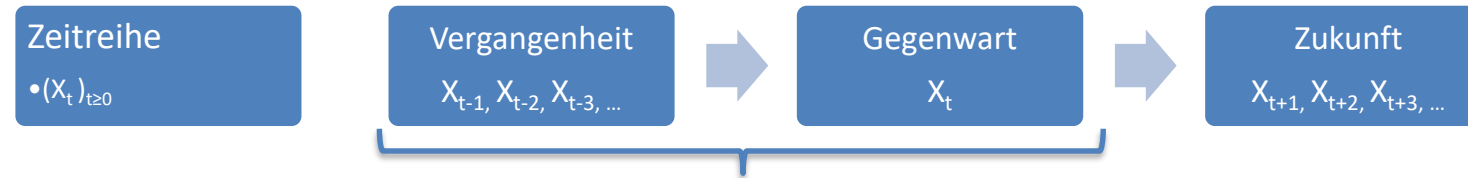
$$(n_t)_{t=0, \dots, T}$$

$$n_0 = x_0$$

$$n_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)n_{t-1}$$

Trend: Exponentielle Glättung mit Wachstum

= Exponentielle Glättung zweiter Ordnung



Zeitreihe

$$(x_t)_{t=0, \dots, T}$$

Beobachtungen

$$(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t_0})$$

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α
und Wachstumsrate β

Niveau

$$(n_t)_{t=0, \dots, T}$$

$$n_0 = x_0$$

$$m_0 = x_1 - x_0$$

$$n_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

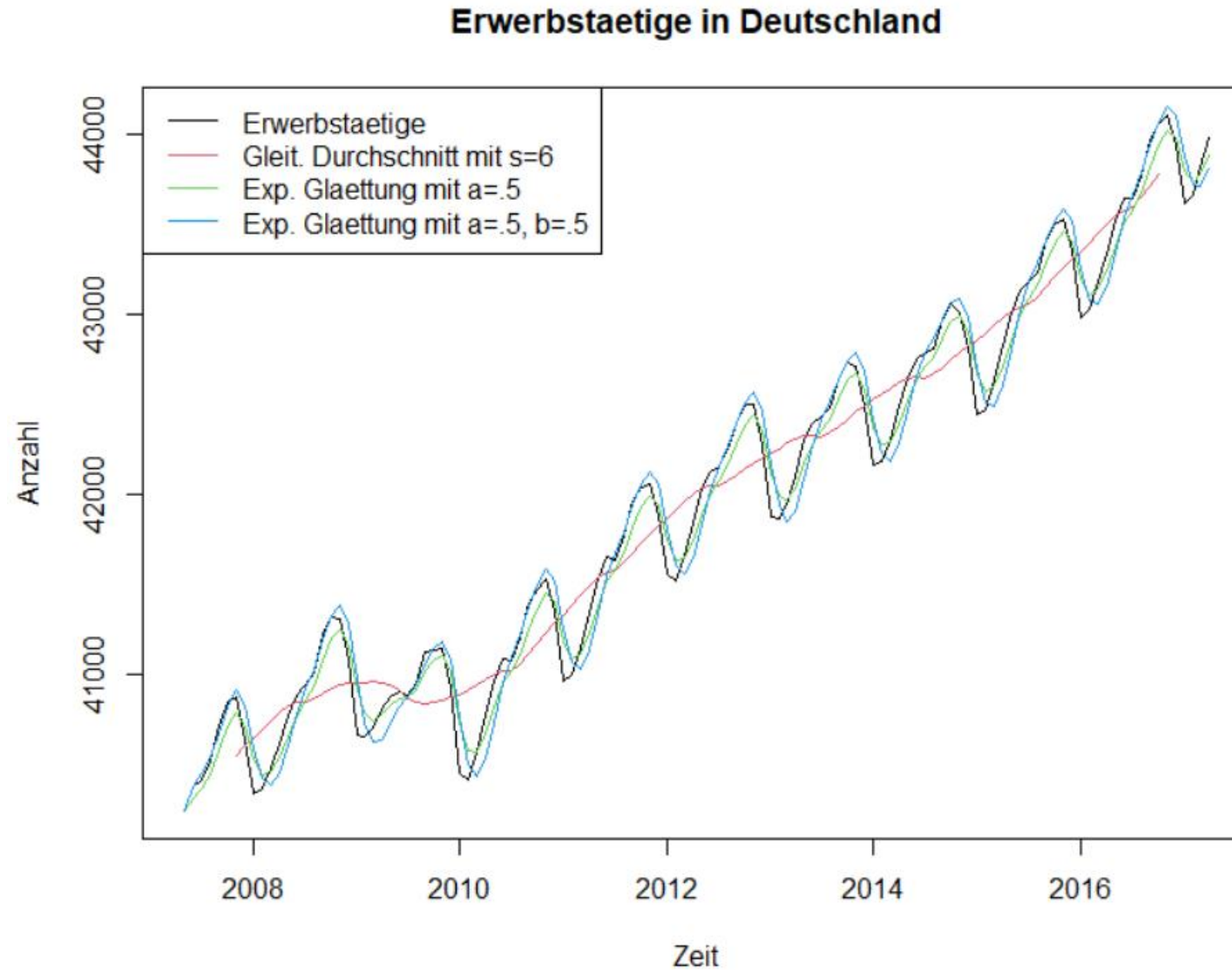
$$n_1, m_1 = \text{????}$$

Wachstum

$$(m_t)_{t=0, \dots, T}$$

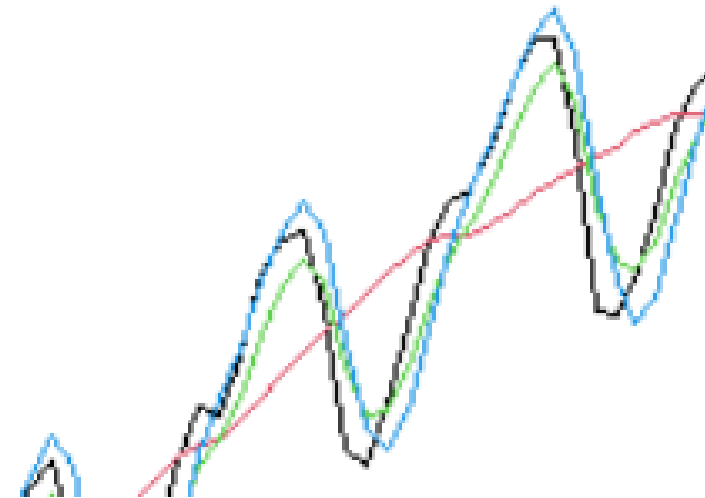
$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1 - \beta)m_{t-1}$$

Beispiel Erwerbstätige



Beispiel Erwerbstätige

- Erwerbstätige
- Gleit. Durchschnitt mit $s=6$
- Exp. Glättung mit $a=.5$
- Exp. Glättung mit $a=.5, b=.5$



Trend: Lineare Regression

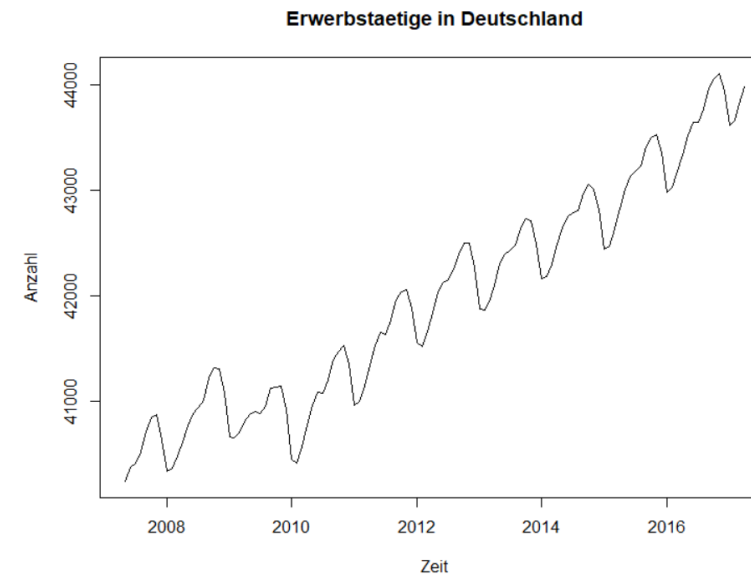
- Lineare Regression liefert Prognose
 - der (unbeobachteten) abhängigen Variable y
 - anhand (beobachtbarer) unabhängiger Variable x

$$\hat{y} = \hat{y}(x) = a x + b$$

- Lineare Regression in der Zeitreihenanalyse
 - der zukünftigen Entwicklung einer Variablen x

- anhand des bekannten Zeitpunktes t

$$\hat{x}_t = \hat{x}(t) = a t + b$$



Quantitative Methoden

Prof. Dr. Rainer Stollhoff

Zeitreihenanalyse

Klassische Zeitreihenanalyse

Komponentenzerlegung

Übersicht

- Einführung
 - Allgemeine Darstellung
 - Beispiele
- Grundlagen Zeitreihenanalyse
 - Grundbegriffe
 - Trendbestimmung
 - Gleitender Durchschnitt
 - Exponentielle Glättung
 - Lineare Regression
- **Klassische Komponentenzerlegung**
 - **Modellbeschreibung: Trend, Saisonkomponente, Rest**
 - **Schätzen der Parameter**
 - Trend mittels linearer Regression
 - Holt-Winters-Verfahren
- **Prognose**

Klassische Komponentenzerlegung (KK)

- Die Entwicklung der Werte x_t einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
 - **Trendkomponente m_t**
beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
 - (konjunkturelle Komponente k_t)
beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
 - **saisonale Komponente s_t**
erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
 - **Restkomponente r_t**
Nicht vorhersagbare Einflüsse

- Die Zerlegung erfolgt

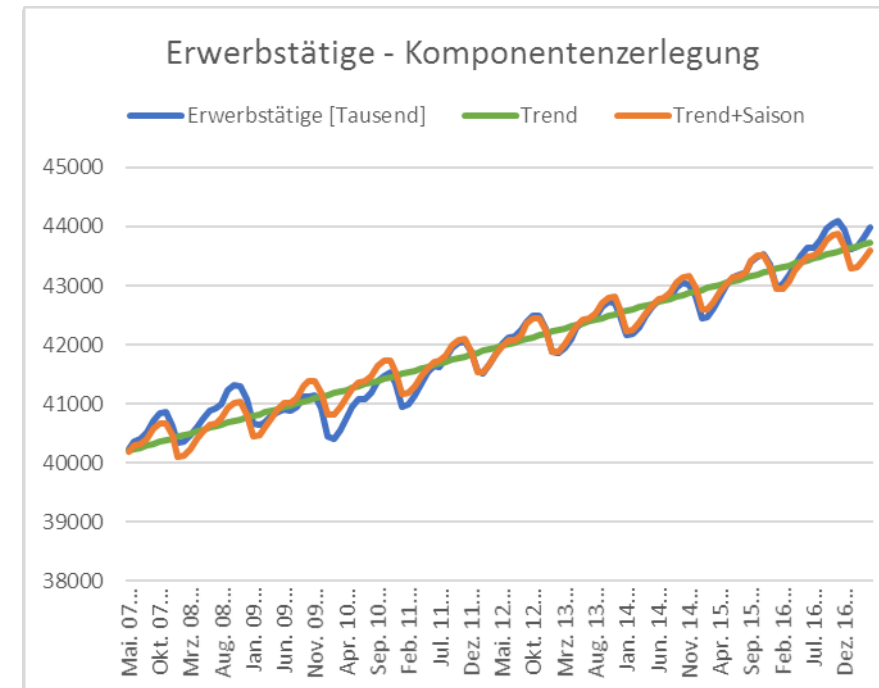
- **Additiv**

$$x_t = m_t + s_t + r_t$$

- (Multiplikativ)

$$x_t = m_t * s_t * r_t$$

$$\ln(x_t) = \ln(m_t) + \ln(s_t) + \ln(r_t)$$



KK mit linearer Regression

- Die Entwicklung der Werte x_t einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
 - **Trendkomponente m_t**
beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
 - (konjunktuelle Komponente k_t)
beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
 - **saisonale Komponente s_t**
erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
 - **Restkomponente r_t**
Nicht vorhersagbare Einflüsse

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente m_t durch lineare Regression**

$$m_t = a \cdot t + b$$

(μ_t mit *gleitendem Durchschnitt*)

(n_t mit *exponentieller Glättung*)

2. **saisonale Komponente s_k durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**

$$s_k = \sum_n x_{k+n \cdot K} - m_{k+n \cdot K}$$

wobei $k = t \bmod K$ die Saison im Zeitpunkt t

3. **Restkomponente r_t als Rest**

$$r_t = x_t - (m_t + s_k)$$

KK mit linearer Regression

- Die Entwicklung der Werte x_t einer **Zeitreihe** kann man zerlegen in
 - **Trendkomponente m_t**
beschreibt die langfristige mittlere Entwicklung
 - (konjunktuelle Komponente k_t)
beschreibt Schwankungen über einen mehrjährigen Horizont
 - **saisonale Komponente s_t**
erfasst regelmäßige (z.B. jahreszeitliche) Schwankungen
 - **Restkomponente r_t**
Nicht vorhersagbare Einflüsse

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente m_t**
durch lineare Regression

$$m_t = a \cdot t + b$$

2. **saisonale Komponente s_k** durch saisonale (Rest-)Mittelwerte

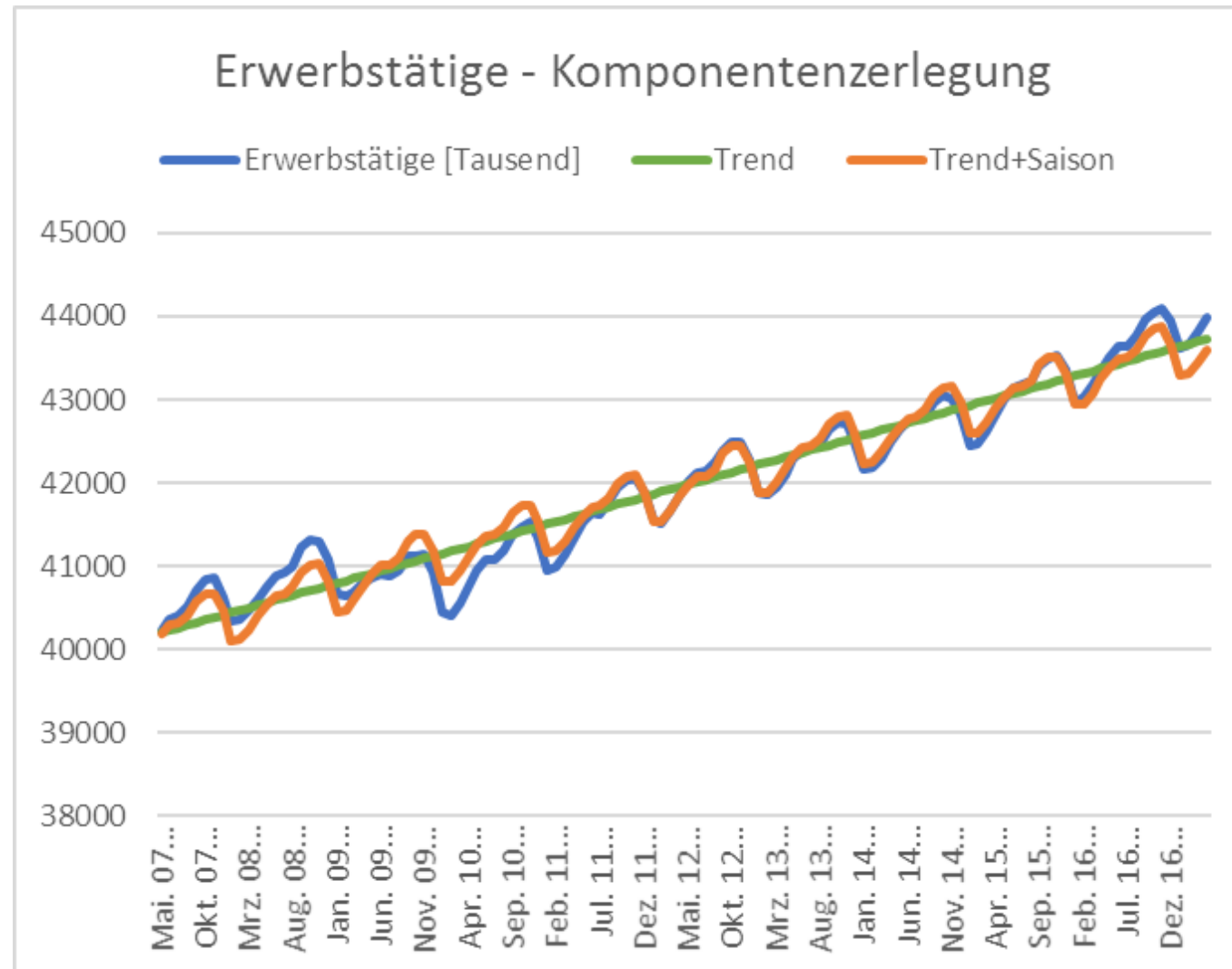
$$s_k = \sum_n x_{k+n \cdot K} - m_{k+n \cdot K}$$

wobei $k = t \bmod K$ die Saison im Zeitpunkt t

3. **Restkomponente r_t**
als Rest

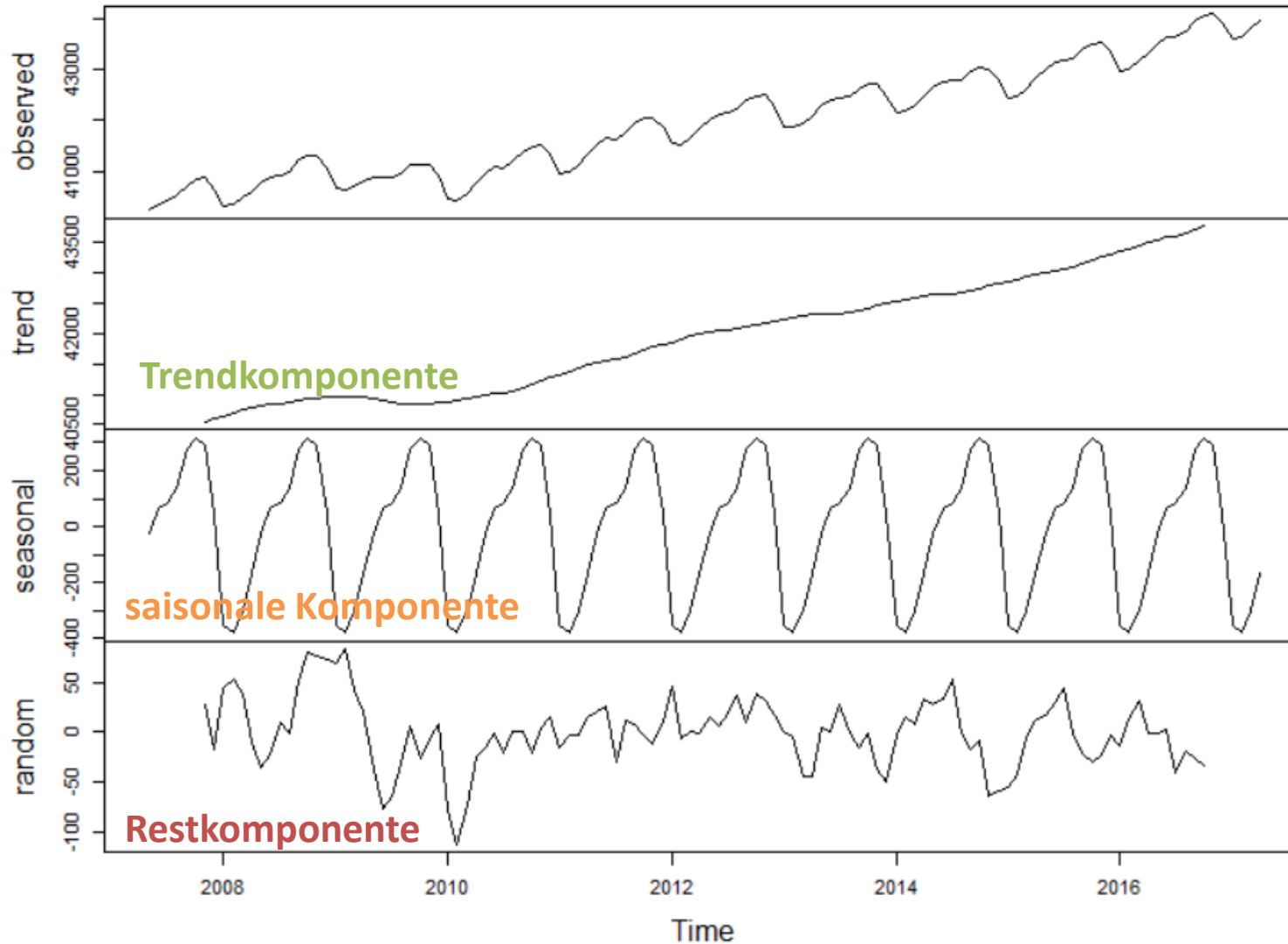
$$r_t = x_t - (m_t + s_k)$$

KK mit linearer Regression



KK mit gleitendem Durchschnitt

(hier: zentriert mit Horizont $s = 6$)



KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α
und Wachstumsrate β
und Saisonkomponenten s_t mit Periode p

$$\hat{x}_{t+h} = n_t + h * m_t + s_{t-p+1+(h-1) \bmod p}$$

Niveau

$$(n_t)_{t=0,\dots,T}$$

$$n_t = \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1 - \alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

Wachstum

$$(m_t)_{t=0,\dots,T}$$

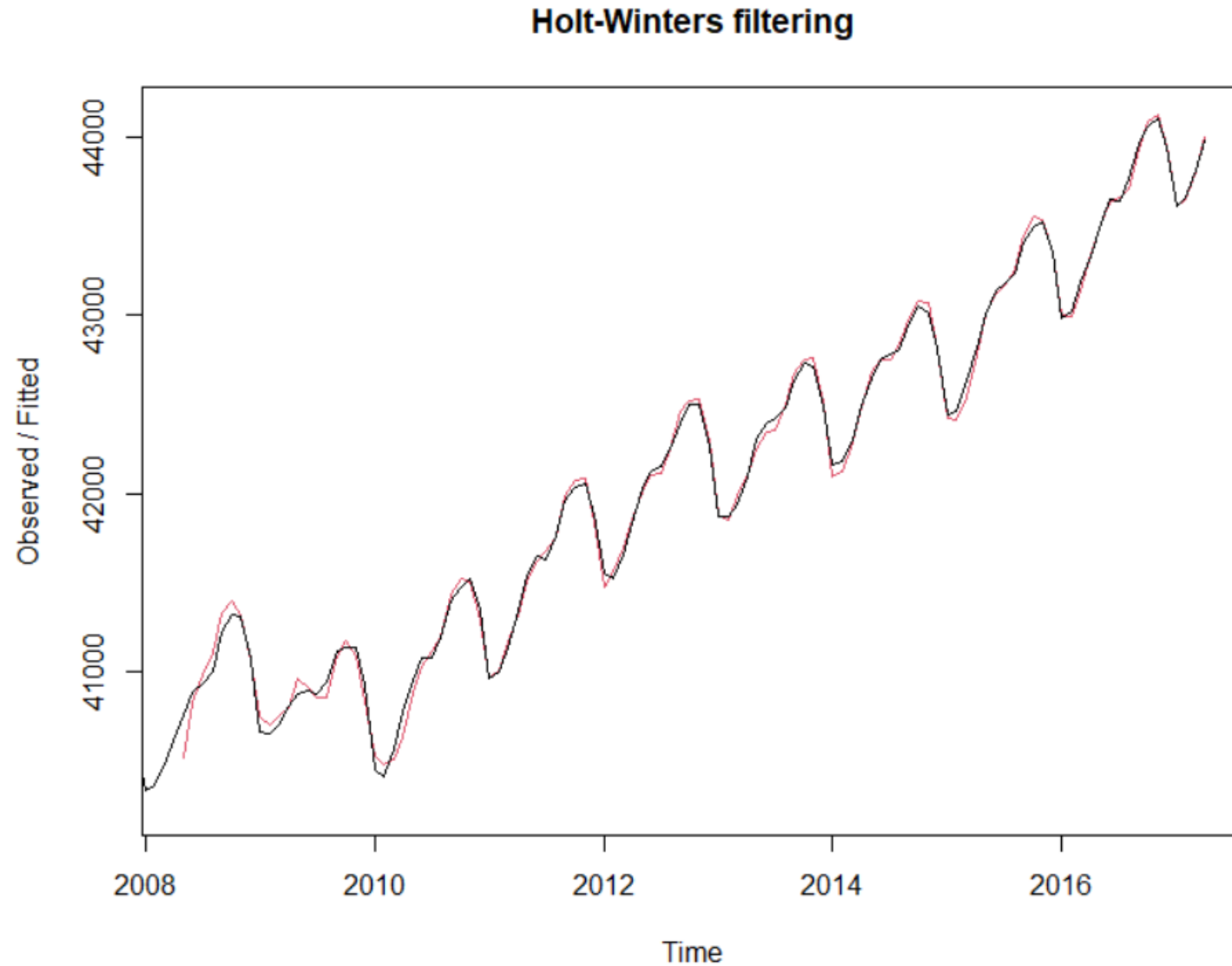
$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1 - \beta)m_{t-1}$$

Saisonkomponente

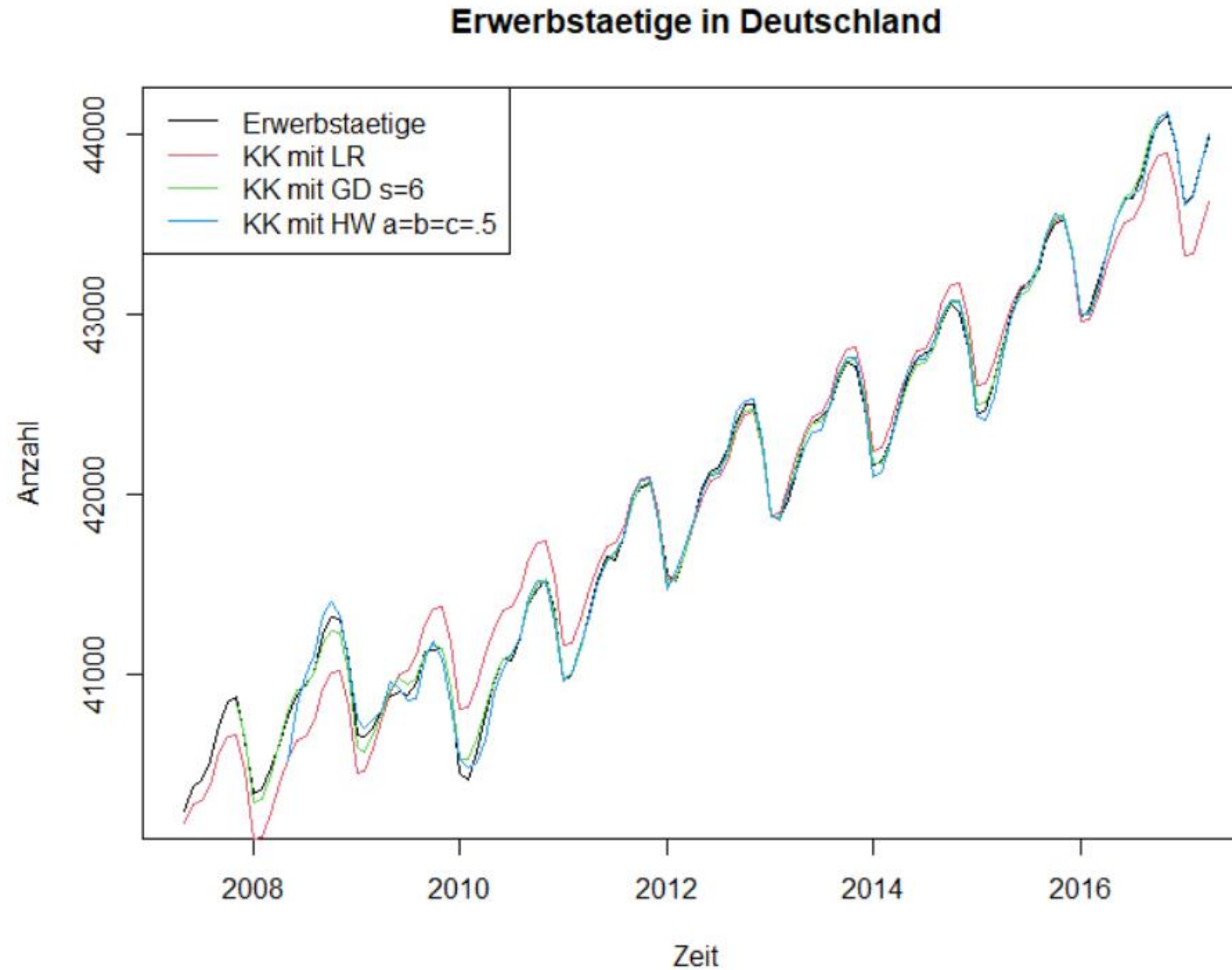
$$(s_t)_{t=0,\dots,T}$$

$$s_t = \gamma(x_t - n_t) + (1 - \gamma)s_{t-p}$$

KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren

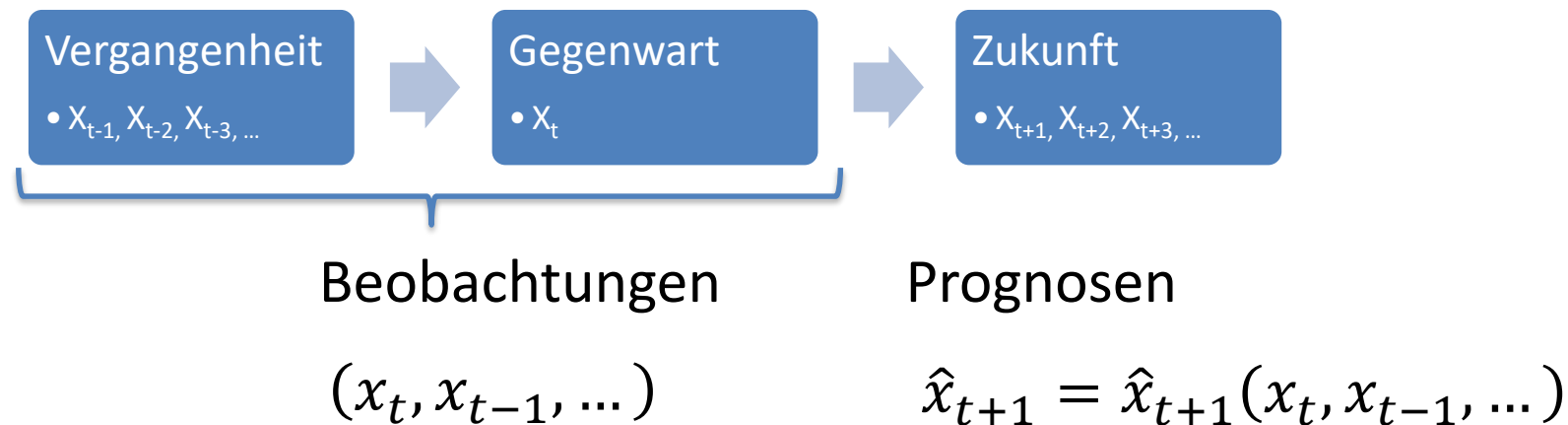


KK – Vergleich der Verfahren



Zeitreihenanalyse - Prognose

- Mit einer Zeitreihenanalyse kann eine Prognose erstellt werden
 - der zukünftigen Entwicklung einer Variablen x
 - anhand der beobachteten Gegenwart und Vergangenheit von x



KK mit linearer Regression – Prognose

Die einzelnen Komponenten werden nacheinander geschätzt

1. **Trendkomponente m_t**
durch lineare Regression

$$m_t = a \cdot t + b$$

2. **saisonale Komponente s_t durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**

$$s_{t+k} = \sum_n x_{t+n \cdot k} - m_{t+n \cdot k}$$

3. **Restkomponente r_t als Rest**

$$r_t = x_t - (m_t + s_t)$$

Über die Komponenten kann eine einfache Prognose abgegeben werden

$$x_{t+1} = m_{t+1} + s_{t+1} + r_{t+1}$$

1. **Trendkomponente m_t**
durch lineare Regression

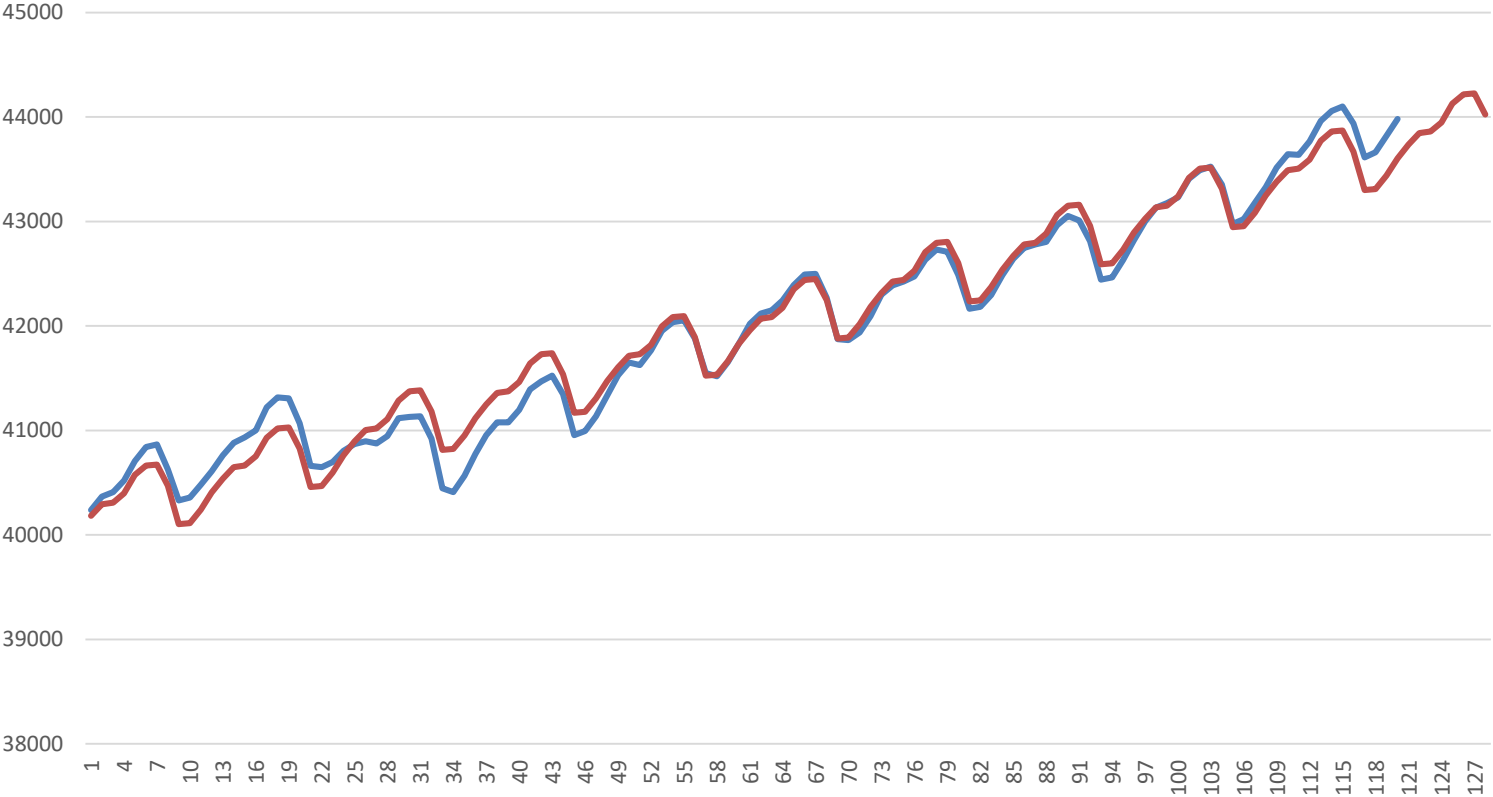
$$m_t = a \cdot (t + 1) + b$$

2. **saisonale Komponente s_t durch saisonale (Rest-)Mittelwerte**

$$s_{(t+1 \bmod K)}$$

3. **Restkomponente $r_{t+1}=0$**

KK mit linearer Regression – Prognose



KK mit exponentieller Glättung mit Wachstum = Holt-Winters-Verfahren

Exponentielle Glättung mit Glättungsparameter α
und Wachstumsrate β
und Saisonkomponenten s_t mit Periode p

Niveau

$(n_t)_{t=0,\dots,T}$

$$n_t = \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1 - \alpha)(n_{t-1} + m_{t-1})$$

Wachstum

$(m_t)_{t=0,\dots,T}$

$$m_t = \beta(n_t - n_{t-1}) + (1 - \beta)m_{t-1}$$

Saisonkomponente

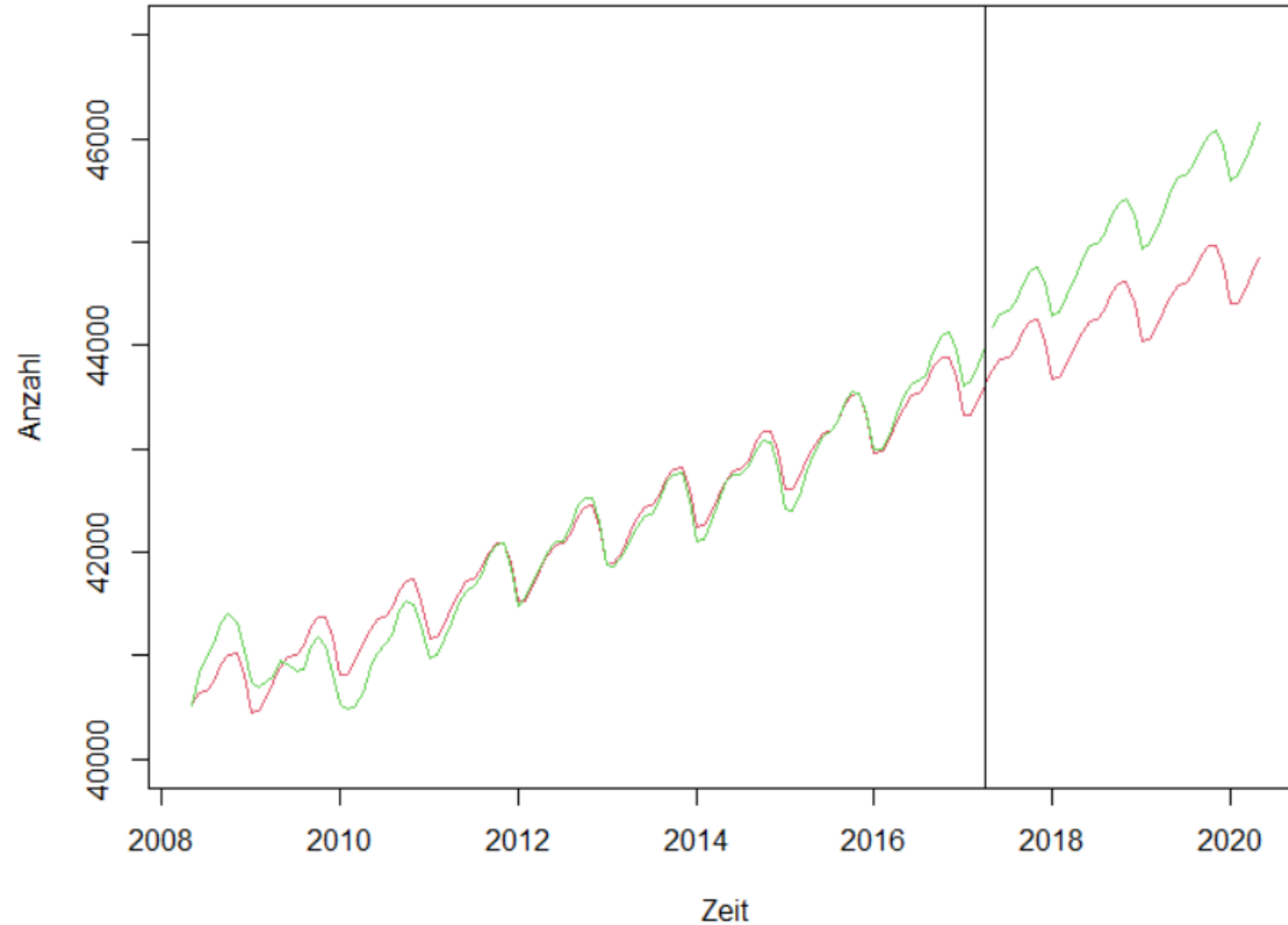
$(s_t)_{t=0,\dots,T}$

$$s_t = \gamma(x - n_t) + (1 - \gamma)s_{t-p}$$

$$\hat{x}_{t+h} = n_t + h * m_t + s_{t-p+1+(h-1) \bmod p}$$

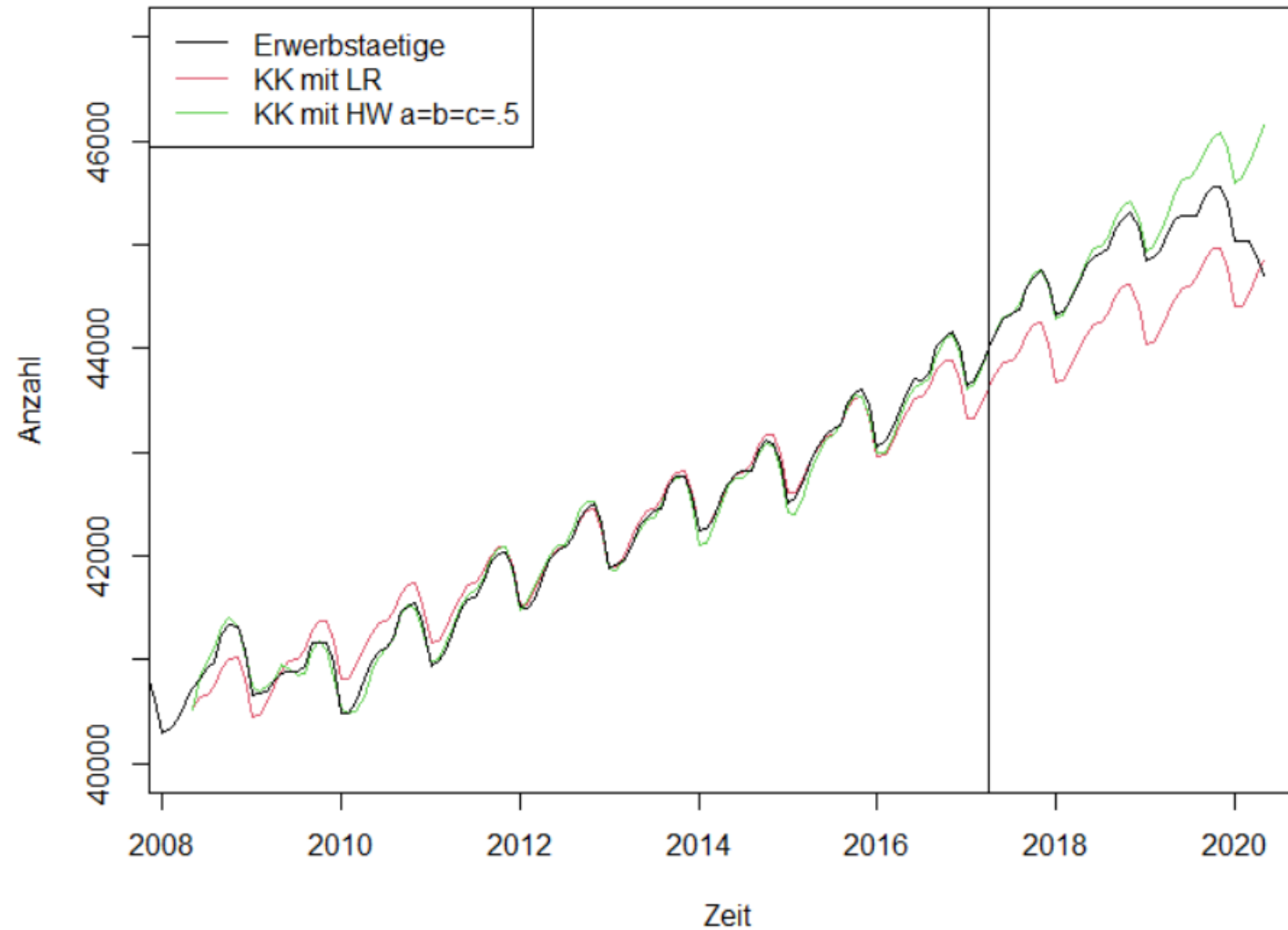
KK Prognose - Vergleich der Verfahren

Erwerbstätige in Deutschland



KK Prognose - Vergleich der Verfahren

Erwerbstätige in Deutschland



Zusammenfassung

- Unter Zeitreihen versteht man wiederholte Beobachtungen einer Messgröße im Zeitverlauf.
- Man unterscheidet zwischen der abstrakten mathematischen Verwendung (Zeitreihe als Modell) und einer konkreten Realisierung (Zeitreihe als Datensatz).
- Bei der klassischen Komponentenzerlegung einer Zeitreihe unterscheidet man Trend, Saisonale Komponente und Rest.
- Die Komponenten des Modells lassen sich mit unterschiedlichen Verfahren schätzen u.a.:
 - Gleitender Durchschnitt
 - Exponentielle Glättung / Holt-Winters
 - Lineare Regression
- Zeitreihenmodelle erlauben eine Prognose für in der Zukunft liegende Zeitpunkte
 - Die Prognose schreibt Trends und wiederkehrende saisonale Muster aus der Vergangenheit in die Zukunft fort
 - Die Prognose berücksichtigt keine neuartigen Entwicklungen (Schocks, Strukturwandel,...)