高等数学在经济学中的应用

孙宁

1 问题引入

假设一位投资者A，其初始财富为 $w = 10$ 万元。他面临一个投资机会：投资一个风险项目，该项目有50%的概率盈利 $h = 2$ 万元，50%的概率亏损 $h = 2$ 万元。这是一个“公平游戏”（期望收益为0）。投资者是否愿意投资？如果不愿意，需要额外给他多少确定的补偿（风险溢价）他才愿意接受？

假设另一位投资者B，其初始财富为 $w = 1000$ 万元。他面临相同的投资机会呢？

为了解决以上问题，我们将从生活中的例子入手，解释**边际效益**，**风险厌恶**等概念，进而从相对风险厌恶和绝对风险厌恶两个角度探讨以上两个问题。其中，将会用到**求导**，**一阶导数及二阶导数的几何意义**，**泰勒展开式**，**洛必达法则**等高等数学知识，可见高等数学的应用。

2 效用与边际效用

2.1 效用

衡量满足感或幸福程度的抽象指标。

在经济学中，我们用效用函数 $U(x)$ 来表示消费数量 x 带来的总效用。

2.2 边际效用

消费者每增加（或减少）一单位某种商品或服务的消费，所带来总效用的变化量。

如果效用函数是 $U(x)$，那么边际效用是其一阶导数 $MU = U'(x)$。

总效用和边际效用的关系：效用是总量，边际效用是“增量”。边际效用是动态变化的，它取决于你已经消费了多少（即存量）。总效用是所有边际效用的累加和。

2.3 边际效用递减

每增加一单位财富所带来的效用增量是逐渐减少的。

边际效用递减描述了一个普遍的心理规律：当你连续消费或拥有某一物品时，每新增一单位该物品所带来的额外满足感（即“边际效用”）是逐渐减少的。简单来说，越多，越不稀罕。

边际效用递减意味着 $U(x)$的二阶导数小于零，即： $U''(x) < 0$

这描述的是一个凹函数[1]。这个数学性质，直接推导出了**风险厌恶**。

例子

假设你的效用函数是 $U(W) = \sqrt{W}$。

当前财富 100 元：效用 $U(100) = 10$。假设进行一次赌博后，有50%的概率获利20 元，50%的概率亏损20元。

则期望收益（赌博带来的收益的数学期望值）：

$$E[R] = 0.5 \times 20 + 0.5 \times (-20) = 0$$

若财富增加 20 元，变成 120 元：效用 $U(120) \approx 10.95$。边际效用增益 $= 10.95 - 10 = 0.95$。

若财富减少 20 元，变成 80 元：效用 $U(80) \approx 8.94$。边际效用损失 $= 10 - 8.94 = 1.06$。

$1.06 > 0.95$!

结论：损失20元带来的痛苦大于等额收益20元带来的快乐。

则期望效用（赌博后效用的数学期望值）

$$E[U] \approx 0.5 \times 10.95 + 0.5 \times 8.94 = 9.94$$

$E[U] \approx 9.949 < 10 = U(100)$，即期望效用小于初始的效用值。

一个具有凹效用函数（边际效用递减）的风险厌恶者，会拒绝一个“公平”的赌博。因为虽然期望收益为0，但期望效用会下降。这种对公平风险的回避，就是风险厌恶。

3 风险厌恶

指在期望收益相同的情况下，决策者宁愿选择确定的结果，也不愿选择有风险的结果的一种心理偏好。

[1]本文中记二阶导小于零的函数为凹函数，与教材略有不同。

人对风险的厌恶程度决定了人面对风险时的行为，从而影响到资产的价格。我们用绝对风险厌恶系数和相对风险厌恶系数来衡量对风险厌恶的程度。

3.1 绝对风险厌恶系数

对一个拥有财富水平y的投资者提供一项投资。这项投资以π的概率赢得数额为h的货币，或者以$1-\pi$的概率输掉数额为h的货币。假设h是一个很小的数。显然，投资者是否会参与这项投资，与π的大小密切相关。π越大，愿意参与这项投资的投资者会越多。特别地，当$\pi=1$的时候，可以确定性地赢得h，所有人都会参与这项投资。

很容易想到，风险厌恶度越高的投资者，越是需要更高的赢钱概率π来吸引他加入这项投资。我们定义π^*为使得投资者在参与和不参与投资之间完全无差异的临界值。π^*就可以被视为对投资者风险厌恶度的一个度量。下面，我们把π^*表示为投资者偏好的函数。

按照π^*的定义，我们有

$$u(y)=\pi^* u(y+h)+(1-\pi^*)\,u(y-h)$$

将$u(y+h)$与$u(y-h)$在y处做**泰勒展开**，得

$$u(y+h)=u(y)+hu'(y)+\frac{h^2}{2}u''(y)+o_1(h^2)$$

$$u(y-h)=u(y)-hu'(y)+\frac{h^2}{2}u''(y)+o_2(h^2)$$

其中的$o_1(h^2)$和$o_2(h^2)$为高阶余项，在h很小的情况下可以被略去。

那么，我们有

$$u(y)=\pi^*\left[u(y)+hu'(y)+\frac{h^2}{2}u''(y)\right]+(1-\pi^*)\left[u(y)-hu'(y)+\frac{h^2}{2}u''(y)\right]$$

则有

$$0=(2\pi^*-1)hu'(y)+\frac{h^2}{2}u''(y)$$

解得

$$\pi^*=\frac{1}{2}+\frac{h}{4}\left[-\frac{u''(y)}{u'(y)}\right]$$

定义

$$R_A(y)=-\frac{u''(y)}{u'(y)}$$

$R_A(y)$就是绝对风险厌恶系数(简称ARA)。绝对风险厌恶系数$R_A(y)$越大，为了吸引投资者参与投资，就需要更高的获胜概率。

3.2 相对风险厌恶系数

在前面推导绝对风险厌恶系数的时候，假设输赢的数量与投资者的财富规模无关。现在，我们假设输赢的量是投资者财富的一个固定比例。我们对一个拥有财富水平y的投资者提供一项投资。这项投资以π的概率赢得数额为θy的货币，或者以$1-\pi$的概率输掉数额为θy的货币。换句话说，现在投资者面对的投资项目规模与其初始财富成正比（比例因子为θ）。我们仍然假设θy是一个很小的数。类似之前，我们通过以下式子来定义π^*为使得投资者在参与和不参与投资之间完全无差异的临界值。

$$u(y) = \pi^* u(y+\theta y) + (1-\pi^*)u(y-\theta y)$$

将$u(y+\theta y)$与$u(y-\theta y)$在y处做**泰勒展开**并略去二阶以上的高阶余项，可得

$$u(y+\theta y) = u(y) + \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y)$$

$$u(y-\theta y) = u(y) - \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y)$$

那么，我们有

$$u(y) = \pi^* \left[u(y) + \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y)\right] + (1-\pi^*) \left[u(y) - \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y)\right]$$

则有

$$0 = (2\pi^* - 1)\theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y)$$

解得

$$\pi^* = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}\left[-\frac{y u''(y)}{u'(y)}\right]$$

定义

$$R_R(y) = -\frac{y u''(y)}{u'(y)}$$

$R_R(y)$即为相对风险厌恶系数。（简称RRA）。

4 常见效用函数

4.1 CARA：常绝对风险厌恶型效用函数

效用函数为

$$u(c) = -e^{-\alpha c}, \quad \alpha > 0.$$

相应的绝对风险厌恶系数为

$$R_A(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\frac{-\alpha^2 e^{-\alpha c}}{\alpha e^{-\alpha c}} = \alpha.$$

4.2 CRRA：常相对风险厌恶型效用函数

效用函数通常写作

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0,\ \gamma \neq 1.$$

相应的相对风险厌恶系数为

$$R_R(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)} = -\frac{c \cdot (-\gamma) c^{-\gamma-1}}{c^{-\gamma}} = \gamma.$$

当 $\gamma = 1$ 时，CRRA 函数退化为对数效用函数 $u(c) = \ln c$。这可由**洛必达法则**得到：

$$\lim_{\gamma \to 1} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \lim_{\gamma \to 1} \frac{-c^{1-\gamma} \ln c}{-1} = \ln c.$$

另外，我们经常把 CRRA 效用函数简写为

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

4.3 线性效用函数（风险中性）

$$u(c) = \alpha c, \quad \alpha > 0.$$

由于 $u'(c) = \alpha$，$u''(c) = 0$，故其绝对风险厌恶系数和相对风险厌恶系数均为 0：

$$R_A(c) = 0, \qquad R_R(c) = 0.$$

5　回到问题

考虑两位投资者：

- 投资者A：初始财富 $w_A = 10$ 万元
- 投资者B：初始财富 $w_B = 1000$ 万元

他们面临相同的投资机会：以50%的概率盈利 $h = 2$ 万元，以50%的概率亏损 $h = 2$ 万元。这看似是一个"公平游戏"，其期望收益为0，方差为 $Var(x) = h^2 = 4$。

5.1　情况一：常数绝对风险厌恶（CARA）

假设投资者具有指数效用函数，即常数绝对风险厌恶（CARA）：

$$u(w) = -e^{-aw}, \quad a > 0$$

此时 $A(w) = a$ 为常数。

对于风险厌恶者，有：

$$u(w) > E[u(w + x)]$$

因此两位投资者都不会自愿参与这个公平赌博。

风险溢价计算

取典型值 $a = 0.1$（单位：1/万元），则近似风险溢价为：

$$\pi \approx 2a = 2 \times 0.1 = 0.2\Upsilon C = 2000C$$

结论：在CARA假设下，无论财富多少，两位投资者要求的风险溢价相同（约2000元）。

5.2　情况二：常数相对风险厌恶（CRRA）

假设投资者具有对数效用函数，即常数相对风险厌恶（CRRA，$\gamma = 1$）：

$$u(w) = \ln w$$

此时 $R(w) = 1$，$A(w) = 1/w$。

由于 $u(w) > E[u(w + x)]$，两位投资者都不会自愿参与这个公平赌博。

风险溢价计算

近似风险溢价为：

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{1}{w} = \frac{2}{w}\Phi\Upsilon C\Psi$$

投资者A（$w = 10$ 万元）：

- 近似：$\pi \approx 2/10 = 0.2$ 万元 = 2000 元

投资者B（$w = 1000$ 万元）：

- 近似：$\pi \approx 2/1000 = 0.002$ 万元 = 20 元

结论：在CRRA假设下，财富较少的投资者A要求的风险溢价（约2000元）远高于财富较多的投资者B（约20元）。

总结

1. 两位投资者均不愿参与公平赌博，因为他们是风险厌恶的。
2. 在常数绝对风险厌恶（CARA）假设下，投资者要求的风险溢价与财富无关，大致相同。
3. 在常数相对风险厌恶（CRRA）假设下，财富越少，绝对风险厌恶越大，要求的风险溢价越高。这反映了财富较低者更不愿意承受绝对金额相同的风险。

参考文献

《金融经济学二十五讲》. 徐高. 中国人民大学出版社. 2018-7