

Contents

1	La Señal GPS	3
1.1	Señales y Datos	3
1.2	Esquema de la señal GPS	4
1.3	El código C/A	7
1.3.1	Secuencia de Gold	7
1.3.2	Generación de la secuencia de Gold	8
1.3.3	Propiedades de correlación de las secuencias de Gold	14
1.4	Los datos de navegación	14
1.4.1	Objetivo	15
1.4.2	Contenido	15
1.5	Ejercicios	15

Chapter 1

La Señal GPS

Para diseñar una colección de herramientas de software de análisis y simulación de la señal GPS es necesario conocer primero las características de dicha señal. En este primer capítulo vamos a tratar el esquema de generación y las propiedades más importantes de la misma.

1.1 Señales y Datos

Las señales de GPS se han transmitido tradicionalmente en dos frecuencias de radio de la banda UHF, más concretamente de la banda que el IEEE denomina L. Estas dos frecuencias se denominan L1 y L2 ¹ y se derivan de una frecuencia común $f_0 = 10.23$ MHz:

$$\begin{aligned}f_{L1} &= 154f_0 = 1575.42 \text{ MHz} \\f_{L2} &= 120f_0 = 1227.60 \text{ MHz}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Las señales están compuestas de tres partes:

- Portadora: nos hemos centrado en las dos opciones fundamentales actualmente, la L1 y la L2.
- Datos de navegación: contienen información acerca de las órbitas satelitales; esta información se envía a todos los satélites desde las estaciones del segmento de tierra del GPS. La tasa de bits de los datos de navegación es de 50 bps; se darán más detalles posteriormente.
- Secuencia de ensanchado: como ocurre en el caso de las comunicaciones móviles, la señal GPS contiene un código o secuencia que ensancha el espectro más allá de lo que le correspondería de acuerdo a la información que transporta; este código tiene la forma de un pseudoruido, como se describirá más en detalle después, que modula la

¹Las bandas del GPS modernizado son la L3, usada para comunicaciones militares y no para navegación, la L4, como complemento de las L1 y la L2 que permita mejores correcciones ionosféricas, y la L5, que se utilizará como señal de emergencia civil -civilian safety-of-life signal- y que se está probando actualmente (ver noticia en el blog)

portadora de tal forma que aumente el ancho de banda de la transmisión y reduzca la densidad de potencia espectral (es decir, el nivel de potencia en cualquier frecuencia dada); la señal resultante tiene un espectro muy parecido al del ruido ², de tal forma que a todos los radiorreceptores les parecerá ruido menos al que va dirigida la señal; este tipo de modulación se conoce como DS-CDMA (acceso múltiple por división de código en secuencia directa) ³; cada satélite utiliza dos de estos códigos:

1. Código de Adquisición Aproximativa o C/A (course acquisition code) que da lugar al servicio estándar civil SPS (standard positioning service): se trata de una secuencia de 1023 chips (un chip es equivalente al concepto de un bit, pero recibe este nombre porque no pertenece a una palabra o byte de información sino a un código de identificación); este código se repite cada milisegundo, lo que da lugar a una tasa de chipping de 1.023 MHz; este código modula únicamente la señal L1 y es diferente para cada satélite.
2. Código de Precisión (P(Y)), que se encuentra encriptado y permite el servicio para fines militares y de seguridad PSP (precision positioning service); es un código de mayor longitud, de unos $2.35 \cdot 10^{14}$ chips, con una tasa de chips de 10.23 MHz (es decir, los chips son diez veces más cortos que para el C/A); este código, en lugar de repetirse cada milisegundo como el C/A, se repetiría, siguiendo una tasa de 10.23 MHz cada 266.4 días pero se realiza un reset a las cero horas del domingo y cada satélite utiliza un fragmento diferente para que se pueda producir la identificación del mismo a través del código (así podemos llegar a tener 38 satélites en funcionamiento simultaneo ($266.4/7 \simeq 38.06$); el código P(Y) es militar y está encriptado, como hemos dicho, y modula tanto la L1 como la L2.

1.2 Esquema de la señal GPS

En la figura 1.2 se ve el diagrama de bloques que describe la generación de una señal GPS que contiene las portadoras L1 y L2. La frecuencia base del reloj del sistema es de 10.23 MHz como ya dijimos antes. Más exactamente la frecuencia es de 10.22999999543 MHz ya que la relatividad especial de Einstein juega un papel en esta cifra. Estamos más habituados a oír hablar de la relatividad especial, que describe fenómenos sin aceleraciones, a velocidades constantes. la relatividad especial, que Einstein desarrolló diez años después de la especial equipara aceleraciones y fuerzas gravitatorias por un lado y prevé, por

²Este espectro se llama a veces DSSS (direct sequence spread spectrum)

³El multiplexado de una señal se puede realizar alternativamente con otros métodos, como habréis visto en otras asignaturas. Así pues, existen el FDMA (frequency division multiple access) o FDM (frequency division multiplexing) donde el transmisor emite diferentes frecuencias -recuérdese el caso del sistema DECCA en nuestra asignatura- o el TDMA (time division multiple access) o TDM (time division multiplexing) donde se utilizan diferentes segmentos de tiempo -el sistema Omega era una manera primitiva de hacer esto.

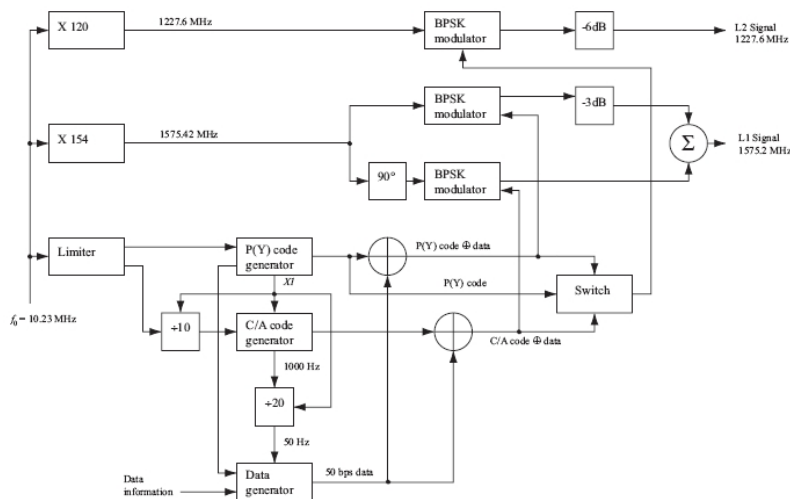


Figure 1.1: Generación de la señal GPS en los satélites transmisores

otro, que el transcurso del tiempo para un reloj A situado en un lugar de inferior fuerza gravitatoria a donde está colocado otro reloj B se observa más rápidamente que en este segundo reloj; por tanto, ya que los satélites de GPS están sometidos a menos gravedad los relojes de los transmisores parecen más rápidos que los que tenemos sobre la Tierra, lo que nos obliga a bajar la frecuencia del reloj para que la veamos a 10.23 MHz. Por este mismo argumento, si una nave espacial pasa muy cerca de un agujero negro pero no rebasa el llamado horizonte de la singularidad o frontera de no retorno (no podría volver a salir fuera de esa zona de no retorno), el tiempo transcurre mucho más lentamente para los tripulantes de la nave que para los habitantes de la Tierra, por ejemplo, y si aquellos miden un tiempo de viaje de unos meses, en la Tierra habrían pasado siglos. Este hecho es menos conocido que el otro, semejante y debido a la relatividad especial y no a la general, por el cual un viaje estelar hecho a una velocidad cercana a la de la luz hace que el reloj del viajero también transcurra más lentamente. Sin embargo en nuestro ejemplo “gravitacional”, la nave puede ir muy despacio en comparación con la velocidad de la luz pero experimentará las mismas consecuencias, esta vez debido a la exposición a grandes campos gravitatorios.

Volviendo al asunto del GPS, vemos en la figura 1.2 que esta frecuencia se ve multiplicada por 154 y 120 para generar la L1 y la L2, respectivamente, por la parte alta del gráfico. Por otro lado, este mismo reloj alimenta la parte baja, que describe cómo se generan los códigos de ensanchado C/A y P(Y), según las tasas de chip ya indicadas antes, y el mensaje de navegación, que va veinte veces más lento que la frecuencia de repetición del C/A (por cada bit de navegación tenemos 20 códigos C/A completos). El generador de código P(Y) es el encargado, a través de la señal que en el diagrama denotamos como X1 de que haya perfecta sincronización entre las tasas de las secuencias de ensanchado y el mensaje de navegación.

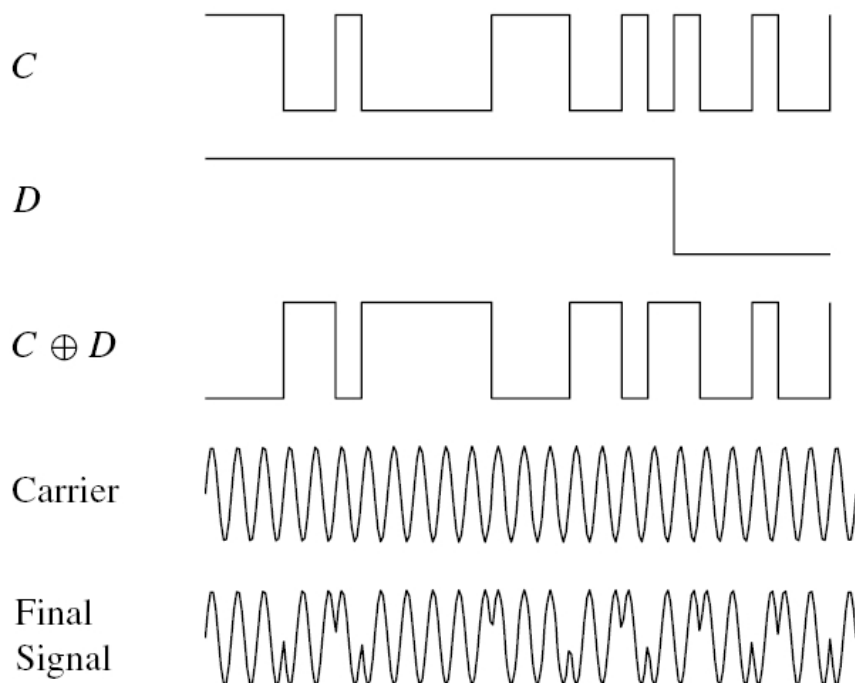


Figure 1.2: Componentes de la señal GPS

Los códigos se suman según una adición de módulo 2 ($x \oplus y = \text{último dígito de la suma binaria de } x \text{ e } y$, p. ej. $1 \oplus 1 = 0$ ya que $1+1=10$ en binario) con el mensaje de navegación, como luego veremos más en detalle, operación equivalente a la de XOR lógica o al producto algebraico al que estamos acostumbrados si sustituimos el 1 lógico por un -1 aritmético y el 0 lógico por un 1 aritmético (ver figura 1.2). El resultado de esta suma se combina con las portadora analógica de L1 y L2 por el mecanismo denominado modulación por desplazamiento de fase binaria o BPSK (Binary Phase Shift Keying): la portadora cambia de fase en 180 grados cuando el resultado de la suma en módulo 2 del código de ensanchado y el mensaje de navegación cambia su valor (ver figura 1.2). Los dos códigos se modulan uno en cuadratura y otro en fase en L1. La L2 lleva solamente la modulación de P(Y). Antiguamente, antes de la eliminación de la llamada SA (selective availability), hecho que ocurrió el 1 de mayo de 2000, se añadía un error tanto a los datos del código, a través de su fase (se desplazaba la secuencia de ensanchado circularmente de una manera encriptada), como a los datos de efemérides (=datos orbitales precisos del propio satélite) y de almanaque (=datos de estado de funcionamiento del satélite y datos aproximados de las órbitas de los restantes satélites).

Output of the exclusive OR operation

Input	Input	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Output of ordinary multiplication

Input	Input	Output
-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
1	1	1

Figure 1.3: Suma en módulo 2 (\equiv operador lógico XOR) y el producto aritmético convencional entre -1 y 1

Así, la señal transmitida por el satélite k se describe matemáticamente con la fórmula

$$\begin{aligned}
 s^k(t) = & \sqrt{2P_{C/A}} \left(C^k \oplus D^k(t) \right) \cos(2\pi f_{L1}t) \\
 & + \sqrt{2P_{PL1}} \left(P^k \oplus D^k(t) \right) \sin(2\pi f_{L1}t) \\
 & + \sqrt{2P_{PL2}} \left(P^k \oplus D^k(t) \right) \sin(2\pi f_{L2}t)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $P_{C/A}$, P_{PL1} y P_{PL2} son las potencias de las señales con C/A y P(Y), esta última en ambas portadoras. Como se ve en la figura 1.2 la potencia de la P(Y) está atenuada 3 y 8 dB con respecto a la de C/A, en las portadoras L1 y L2 respectivamente. En concreto, los valores son $P_{C/A} = 14.25$ dBW, $P_{PL1} = 11.25$ dBW y $P_{PL2} = 6.35$ dBW. La potencia recibida sobre el suelo para estos valores es de $P_{C/A}^{\text{rec}} = -154.5$ dBW, $P_{PL1}^{\text{rec}} = -157.5$ dBW y $P_{PL2}^{\text{rec}} = -160.5$ dBW ya que la atenuación por propagación es superior para L1 que para L2. La razón por la que la señal L1 es más intensa que la L2 es porque la L1 está diseñada para poder ayudar a adquirir y enganchar la L2 y por tanto ha de ser de mayor potencia. Una vez enganchada la L2, su mayor ancho de banda compensa la inferior densidad energética espectral.

1.3 El código C/A

Nos vamos a centrar en el código C/A, ya que es el de uso civil. Al final haremos una mención de cómo funciona el P(Y). Ambos pertenecen a una clase de secuencias llamadas de Gold (por Robert Gold, quien las introdujo en 1967) o de pseudoruido (PRN por pseudorandom noise).

1.3.1 Secuencia de Gold

Las secuencias PRN son secuencias deterministas con características semejantes a las del ruido en lo que se refiere a sus propiedades de correlación con ellas mismas y con otras del mismo tipo, como luego veremos.

Cada código C/A es generado por registros de desplazamiento con retroalimentación lineal o LFSR (linear feedback shift register), que luego explicaremos. Adelantamos ahora, que un LFSR es un registro que contiene un cierto número de bits, que da como output un bit y que tiene por input un bit que es una combinación lineal de los contenidos en el registro en un estado anterior. Un LFSR de n bits acaba repitiendo su secuencia de output después de un cierto número de pasos, que es como máximo $N = 2^n - 1$ si el LFSR está optimizado a tal fin -veremos enseguida como conseguir esa optimización- por lo que este número se denomina la longitud máxima de la secuencia.

Un código de Gold se genera sumando el output de dos LFSR's en paralelo. El código C/A utiliza dos LFSR's de 10 bits cada uno, por lo que la máxima longitud de la secuencia es de 1023 bits o, mejor, chips, como decíamos antes. Ya que cada secuencia se repite cada milisegundo, la longitud del chip es de $1ms/1023 = 977.5ns \simeq 1\mu s$, lo que significa que cada secuencia ocupa 300 m en el espacio. Las secuencias generadas tienen 512 unos y 511 ceros, con apariencia de estar distribuidos aleatoriamente, pero la secuencia es pseudoaleatoria, no aleatoria.

1.3.2 Generación de la secuencia de Gold

El LFSR funciona como sigue:

1. El LFSR comienza con unos valores de arranque (“semilla”)
2. Se realizan dos operaciones lineales simultáneas sobre un cierto número de bits del registro:
 - (a) la primera involucra un subconjunto de los bits del registro y su resultado o output sustituirá el primer bit del registro; para ocuparlo todos los bits se desplazan una posición hacia la derecha y el último se pierde para el siguiente paso o “tick” del reloj;
 - (b) la segunda involucra otro subconjunto en general distinto del primero y su resultado se convierte en el output del LFSR;

En el caso de la generación del C/A tenemos como decíamos antes, dos registros, cada uno con una semilla consistente en todos los bits iguales a 1.

El primer LFSR realiza las dos operaciones recién mencionadas como sigue: i) los bits de las celdas 3 y 10 se suman en módulo 2 y su resultado sustituye al bit de la celda número 1; ii) el bit de la celda 10 sirve de output del LFSR (es, por tanto, una operación extremadamente simple en este caso)(ver figura 2. Así, la secuencia que se genera es la siguiente

[illegible][illegible]

es decir, que la secuencia de output es la correspondiente a la décima columna: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 Esta no es aún la secuencia del C/A, sino el output del primer LFSR, que se ha de combinar, de nuevo mediante una suma de módulo 2, con el output del segundo LFSR para producir dicha secuencia. El uso de la suma en módulo dos si pensamos en binario o XOR si pensamos en registro lógico, tiende a producir igual número de 0's que de 1's.

El segundo LFSR funciona básicamente según el mismo procedimiento, pero: i) la primera operación, la que reemplaza con su output el primer bit (o chip), involucra a las celdas 2,3,6,8,9 y 10 (estas celdas, como en el caso de las 3 y 10 del otro LFSR, se denominan *taps*); ii) el output del LFSR resulta, no de copiar la última celda, sino de sumar en módulo dos un par de celdas que depende de la secuencia que queramos generar y que es diferente según el satélite, de ahí que podamos distinguir el mensaje que nos llega de un satélite o de otro. Curiosamente, la secuencia que obtenemos de este segundo LFSR es siempre la misma, considerada circularmente, es decir, si la colocamos formando una circunferencia en lugar de un segmento lineal, independientemente de qué dos celdas tomemos para formar el output del LFSR. Por ello es equivalente definir la secuencia lineal (tipo segmento) mediante este par a hacerlo mediante el número de desplazamientos circulares que debemos hacer a partir de una secuencia básica -la que resultaría de imitar el método del primer LFSR y obtener el output del chip de la celda 10 del LFSR. Por ello vemos en la tabla 1.3.2 que, por ejemplo, combinar las celdas 2 y 6 es equivalente a “retrasar” o mover circularmente la secuencia base 5 posiciones que resulta de sacar el output de la última celda.

Es común representar a un cierto LFSR a través de un polinomio $1 + \sum a_k x^k$ que tiene como coeficientes a_k un uno si corresponde a un x^k tal que k es un tap del LFSR y un cero si no es así. Estos polinomios se denominan de módulo 2 ya que sus coeficientes solamente pueden ser 0s y 1s. Por ejemplo, nuestro primer LFSR se representa como $1 + x^3 + x^{10}$. Esta representación no es mnemotécnica sino que está vinculada profundamente a la matemática de este tipo de polinomios. Por ejemplo, podríamos hacernos la pregunta de si todo LFSR de n celdas produce una secuencia de máxima longitud, que hemos dicho arriba que es de $2^n - 1$. Bien, no es así, de hecho las condiciones para que se obtenga esta secuencia de máxima longitud se pueden expresar en función de cómo es su polinomio asociado. En efecto, para que el LFSR sea de máxima longitud, el polinomio ha de ser primitivo o irreducible, es decir, que no se puede poner como producto de dos polinomios de módulo 1. Para ello se han de cumplir las siguientes condiciones necesarias pero no suficientes: i) el número de taps ha de ser par, ii) los exponentes de este polinomio, o índices de los taps, han de ser coprimos (=no tienen ningún divisor común que sea primo). Puede haber más de una secuencia tap que haga máximo al LFSR para esa longitud determinada. Vemos, pues, el sorprendente vínculo de este conjunto de polinomios con las propiedades de los LFSRs. Pongamos un ejemplo: el polinomio $1 + x + x^2$ es primitivo mientras que $1 + x^2$ no lo es. En efecto, $(1 + x^2) = (1 + x)(1 + x)(mod 2)$ ya que el término $2x$ en el álgebra convencional se convierte en $0x$ en la de módulo 2 ($2 \bmod 2 = 0$)⁴. Estos polinomios se utilizan también para la generación de CRCs (cyclic redundancy checks) en la transmisión de información,

⁴A mod B=resto que resulta de dividir A entre B

Satellite ID number	GPS PRN signal number	Code phase selection G_2	Code delay chips	First 10 chips octal
1	1	$2 \oplus 6$	5	1440
2	2	$3 \oplus 7$	6	1620
3	3	$4 \oplus 8$	7	1710
4	4	$5 \oplus 9$	8	1744
5	5	$1 \oplus 9$	17	1133
6	6	$2 \oplus 10$	18	1455
7	7	$1 \oplus 8$	139	1131
8	8	$2 \oplus 9$	140	1454
9	9	$3 \oplus 10$	141	1626
10	10	$2 \oplus 3$	251	1504
11	11	$3 \oplus 4$	252	1642
12	12	$5 \oplus 6$	254	1750
13	13	$6 \oplus 7$	255	1764
14	14	$7 \oplus 8$	256	1772
15	15	$8 \oplus 9$	257	1775
16	16	$9 \oplus 10$	258	1776
17	17	$1 \oplus 4$	469	1156
18	18	$2 \oplus 5$	470	1467
19	19	$3 \oplus 6$	471	1633
20	20	$4 \oplus 7$	472	1715
21	21	$5 \oplus 8$	473	1746
22	22	$6 \oplus 9$	474	1763
23	23	$1 \oplus 3$	509	1063
24	24	$4 \oplus 6$	512	1706
25	25	$5 \oplus 7$	513	1743
26	26	$6 \oplus 8$	514	1761
27	27	$7 \oplus 9$	515	1770
28	28	$8 \oplus 10$	516	1774
29	29	$1 \oplus 6$	859	1127
30	30	$2 \oplus 7$	860	1453
31	31	$3 \oplus 8$	861	1625
32	32	$4 \oplus 9$	862	1712
—	33	$5 \oplus 10$	863	1745
—	34	$4 \oplus 10$	950	1713
—	35	$1 \oplus 7$	947	1134
—	36	$2 \oplus 8$	948	1456
—	37	$4 \oplus 10$	950	1713

Table 1.1: Esquema de generación del código C/A

que, de manera nada sorprendente según lo que estamos diciendo, se implementan a través de LFSRs. Pero eso es otra aplicación. Además de ayudarnos a saber si nuestro LFSR es de máxima longitud y a describirlo notacionalmente, estos polinomios nos permiten generar matemáticamente la secuencia resultante: primero multiplicamos el estado de los registros pasados a polinomios (p. ej., $P(x) = 1 + x + \dots + x^9$) por x y dividimos, módulo 2, por x^n donde n es el número de chips (en nuestro ejemplo 10) y nos quedamos con el resto (de manera que obtenemos $P'(x) = x + x^2 + \dots + x^9$ en el citado ejemplo); ya solamente falta tomar el polinomio $P(x)$ de nuevo, sumarle el polinomio generador $G(x)$ (por ejemplo, $G(x) = 1 + x^3 + x^{10}$), y luego sumarle al resultado $P(x)$ otra vez y tomar $P(1)$, que se añade al resultado anterior $P'(x)$ con lo que obtenemos el nuevo estado del LFSR.

Dejando ahora de lado el comentario lateral sobre la interpretación polinómica de los LFSRs, se puede ver que utilizando diferentes combinaciones de celdas en el segundo registro se pueden generar 36 secuencias C/A diferentes. De estos, 32 satélites se reservan para los satélites mientras que los otros códigos se utilizan para mensajes emitidos por estaciones terrestres (llamadas a veces psudosatélites o pseudolites).

La generación del código P(Y) es semejante en los principios, pero más compleja en la forma, que la del C/A, como se ve en la figura 1.3.2. Funciona con cuatro LFSRs en lugar de con dos y cada uno contiene 12 celdas en lugar de 10.

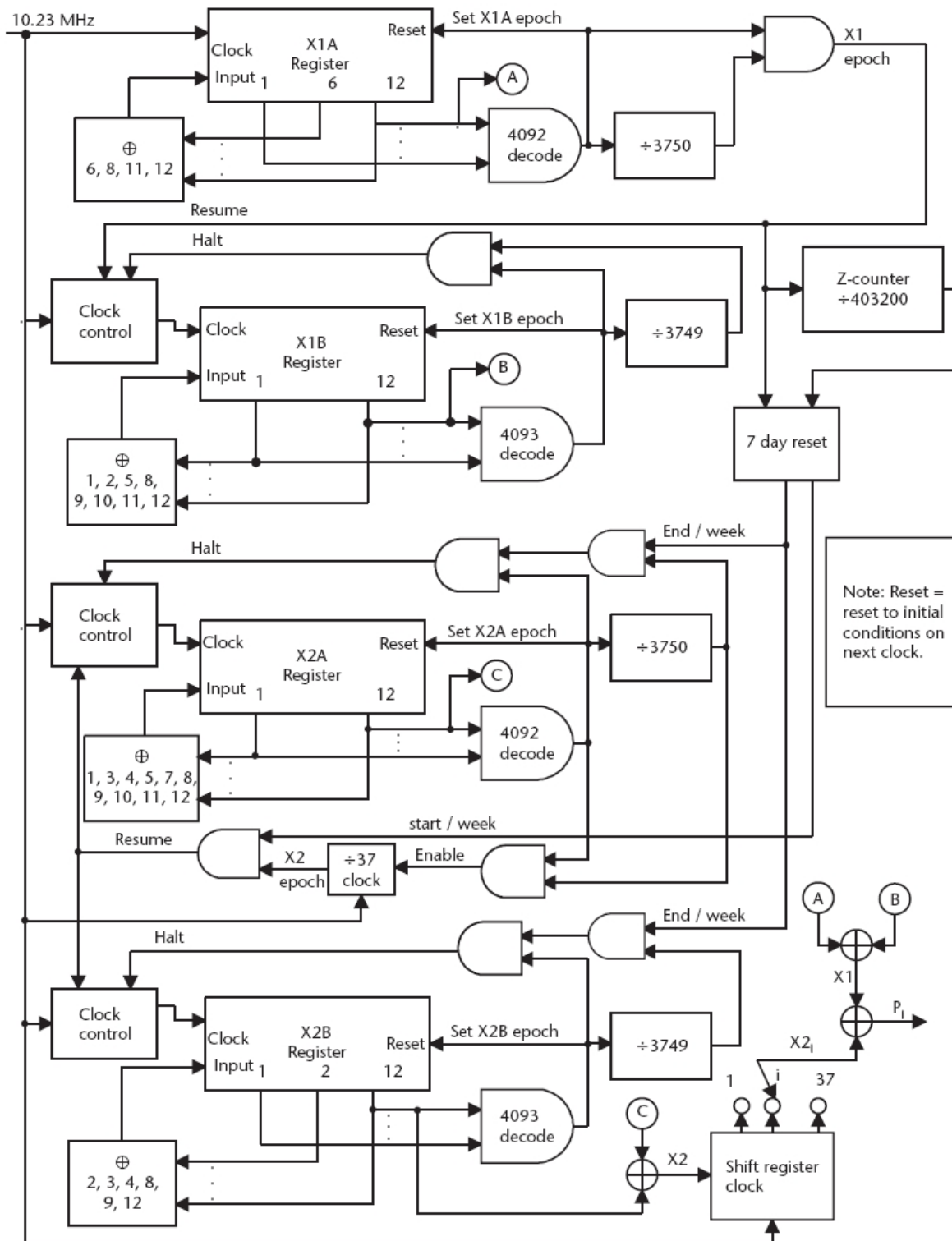


Figure 1.5: Esquema de generación del código P(Y)

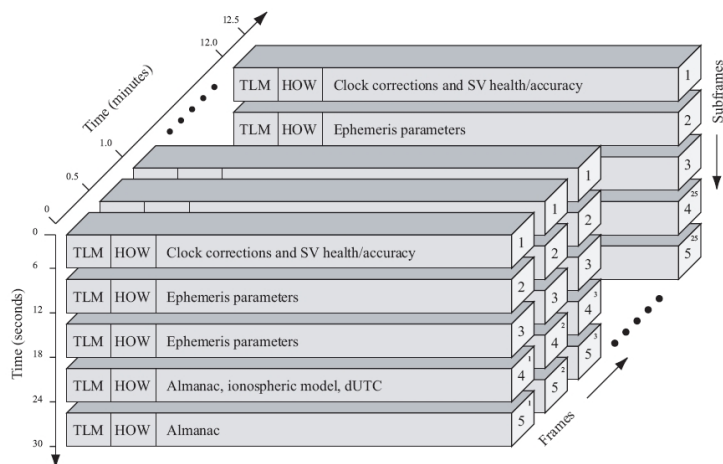


Figure 1.6: Estructura de datos del mensaje de navegación GPS

1.3.3 Propiedades de correlación de las secuencias de Gold

Una característica fundamental de las secuencias de Gold es que se correlan muy mal unas con otras y consigo mismas cuando están desplazadas o rotadas de manera circular. Esto es lo que hace que estas secuencias tengan un comportamiento espectral de tipo blanco. La correlación lejos del pico de coincidencia de la secuencia consigo misma es de $-1/N$, donde $N = 2^n - 1$.

1.4 Los datos de navegación

Los datos de navegación se transmiten tanto en la L1 como en la L2, como vimos, con una tasa de bits de 50 bps, lo que significaba 20 códigos C/A por bit. La figura 1.4 muestra la estructura del mensaje de navegación completo.

Su formato básico es el de un frame de 1500 bits dividido en 5 subframes, cada uno con 300 bits. Cada subframe contiene 10 palabras de 10 bits cada una. Los subframes 1, 2 y 3 se repiten en cada frame mientras que los subframes 4 y 5 tienen 25 versiones diferentes (misma estructura pero diferentes datos), que se denominan páginas (tenemos pues 25 páginas en el mensaje). Con una tasa de bits de 50 bps, la transmisión de un subframe dura 6 s, la de un frame 30 s y el mensaje completo, con sus 25 páginas, 12.5 minutos.

Ya veremos en un capítulo posterior y en detalle como está construido el mensaje de navegación. Aquí simplemente indicamos su objetivo y su contenido básico.

1.4.1 Objetivo

Dado que el sistema de georeferenciación del GPS consiste en calcular las distancias a los satélites y de hacerlo sabiendo exactamente dónde estaban cuando enviaron su señal y cuánto tiempo ha tardado esa señal en llegarnos, el mensaje de navegación nos da los datos básicos a partir de los cuales podemos hacer esos cálculos, es decir, la hora a la que se envía la señal y la posición del satélite. Luego nosotros medimos el tiempo que tarda en llegar midiendo los desfases de la señal a través de correlaciones de la señal recibida con réplicas de la señal de cada satélite generadas internamente.

1.4.2 Contenido

Cada subframe comienza con dos palabras especiales, denominadas TLM (telemetry) y HOW (handover word). La TLM se utiliza para la sincronización de los subframes. La palabra HOW contiene una versión truncada de la hora de la semana o TOW (time of the week) y un indicador o ID que nos dice en qué subframe estamos.

Después de estas dos palabras, cada subframe contiene 8 palabras que recogen la siguiente información, descrita a grandes rasgos:

1. Subframe 1: Información del reloj del satélite y de los llamados datos de salud (health data), que nos indican si el satélite está suministrando información fiable en esos momentos.
2. Subframes 2 y 3: Datos de efemérides del satélite, es decir, de su órbita, que permiten calcular su posición.
3. Subframes 4 y 5: Datos de almanaque, que son los datos de reloj y de efemérides con precisión reducida, para él pero también para los demás satélites.

1.5 Ejercicios

1. Escribase una clase *señal* en Matlab que genere el código C/A utilizando la suma binaria módulo 2 y no el concepto del bit saliente de la posición décima con un cierto retardo (5,6,7,8,17,etc). Explíquese en la memoria en qué consiste esto del retardo del output del segundo LFSR.
2. Analícese la forma espectral de la componente C/A de dicha señal.
3. Calcúlense las propiedades de correlación de los diferentes códigos C/A con otros y con ellos mismos.