实变函数

Contents

Part I

笔记

Chapter 1

集合与点集

1. 集合与子集合
2. 集合的运算
3. 映射与基数
4. $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 • 点集的极限点
5. $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集：闭集 • 开集 • Borel 集 • Cantor 集
6. 点集间的距离

1.1 集合与子集合

1.2 集合的运算

- 极限集

定义 1.2.1. 递减集合列的交集和递增集合列的并集称为集合列的**极限集**. 对一般的集合列，我们可以仿照数列的上、下极限来定义集合列的**上、下极限集**

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$$

并且和数列类似地，若上、下极限集相等，我们得到极限集存在，且等于上、下极限集.

换一种角度，我们可以如下理解上、下极限集对其中元素挑选的原则

定理 1.2.1 (上、下极限集性质)**.** 对集合列 $\{A_k\}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, \exists\, k \geq j, x \in A_k\}$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x : \exists\, j_0 \in \mathbb{N}, x \in A_k, \forall k \geq j_0\}$$

即上限集由属于 $\{A_k\}$ 中无穷多个集合的元素构成，下限集由只不属于 $\{A_k\}$ 中有限多个集合的元素构成. 从而立刻看出**上限集包含下限集**，这个结论和数列的上下极限是类似的.

1.3 映射与基数

- 对等与 Cantor-Bernstein 定理
- 基数/势
- 可列集
- 不可数集

1.3.1 对等与 Cantor-Bernstein 定理

定义 1.3.1 (对等). 若存在 $A \to B$ 的一一映射，称 A, B **对等**，记为 $A \sim B$.

证明集合对等有下述定理

引理 1.3.1 (集合在映射下的分解). 对 $f: X \to Y, g: Y \to X$ ，则存在分解

$$X = A \cup A^- \quad Y = B \cup B^-$$

其中 $f(A) = B, g(B^-) = A^-, A \cap A^- = \emptyset, B \cap B^- = \emptyset$.

证明 考察分解的情况，即存在一个 X 的子集 A 使得

$$g(Y \backslash f(A)) \cap A = \emptyset \quad A \cup g(Y \backslash f(A)) = X$$

考虑前面的形式，我们定义满足下列条件的 X 的子集 E 为 X 分离集

$$E \cap g(Y \backslash f(E)) = \emptyset$$

将 X 中全体分离集记为 Γ ，并作它们的并集

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E$$

则容易得到 $A \in \Gamma$ ，因此 A 是包含任意分离集的一个分离集.

下面我们证明这样的 A 就是满足条件的分解，令 $f(A) = B, Y \backslash B = B^-, g(B^-) = A^-$ ，则 $Y = B \cup B^-$ 且 $B \cap B^- = \emptyset$ ，因为 A 是分离集，因此 $A \cap A^- = \emptyset$. 下证 $A \cup A^- = X$.

否则，假设存在 $x_0 \in X, x_0 \notin A \cup A^-$ ，令 $A' = A \cup \{x_0\}$ ，则

$$B = f(A) \subset f(A_0) \quad B^- \supset Y \backslash f(A_0)$$

从而 $A^- \supset g(Y \backslash f(A_0))$ ，即 $A \cap g(Y \backslash f(A_0)) = \emptyset$ ，于是

$$A_0 \cap g(Y \backslash f(A_0)) = \emptyset$$

则 A_0 是真包含 A 的一个分离集，矛盾.

定理 1.3.1 (Cantor-Bernstein 定理)**.** 若集合 X 与 Y 的某个真子集对等，Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X \sim Y$.

证明 由题设，存在两个单射 $f : X \to Y, g : Y \to X$ ，则由映射分解定理，存在满足下列要求的分解：

$$X = A \cup A^- \quad Y = B \cup B^- \quad f(A) = B \quad g(B^-) = A^-$$

因为 f 是单射，且 $f : A \to B = f(A)$ 是满射，于是 $f : A \to B$ 是一一映射，同理，$g^{-1} : A^- \to B^-$ 是一一映射，于是可以作出 $X \to Y$ 的一一映射

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g^{-1}(x) & x \in A^- \end{cases}$$

因此 $X \sim Y$.

虽然证明复杂，但是某种意义上，可以这样理解上述定理

$$A \geq B, B \geq A \implies A = B$$

在下面介绍了基数之后更容易理解.

1.3.2 基数/势

定义 1.3.2. 若 $A \sim B$ ，称 A, B 的**基数**或**势**是向同级，记为 $\|A\| = \|B\|$ ，

1.3.3 可列集

定义 1.3.3. 记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$ ，若集合 A 的基数为 $\aleph_0$ ，称为**可列集**.

定理 1.3.2. 任意无限集必包含一个可列集.

该定理主要是说明 $\aleph_0$ 是无限集基数中的最小值.

定理 1.3.3. 若 A_n 为可列集，则 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可列集.

证明 只需要考虑 $A_i\cap A_j=\emptyset$ 的情况，此时把 $\{A_n\}$ 排列之后对角线顺序列出即可.

命题 1.3.1. 有理数 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明 只需要证明正有理数集 $\mathbb{Q}_+$ 是可列集即可，而其元素可以看成有序对 (p,q) . 由上面的定理，结论显然成立.

说 $\mathbb{Q}$ 是可列集，指的是全体有理数可以按照某种方式排列，但并不是说有理数可以按照随意的要求排列起来，如 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 就不能按数值大小次序排列.

有限集和可列集统称为**可数集**或**至多可数集**，因此可列集也称为**可数无限集**.

命题 1.3.2. 从 $\mathbb{Q}$ 可数容易得到，$\mathbb{R}$ 中互不相交的开区间是可数集，进而，$\mathbb{R}$ 上单调函数的不连续点为可数集. 这是因为若 x_0 为 $f(x)$ 不连续点，则

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)$$

于是一个不连续点对应这样一个开区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$，所有连续点对应的开区间不相交.

定理 1.3.4. A 是无限集且 $\|A\|=\alpha$ ，B 是至多可列集，则 $\|A\cup B\|=\alpha$.

证明 即证明 $A\sim A\cup B$ ，考虑建立一个一一映射.

考虑从 A 中划分一个可列集出来，令

$$A=A_1\cup A_2\quad A_1=\{a_1,a_2,\cdots\}$$

建立映射

$$f(x)=\begin{cases}a_{2i} & x=a_i\\ a_{2i-1} & x=b_i\\ x & x\in A_2\end{cases}$$

容易看出 f 是一一映射.

定理 1.3.5 (无限集的充要条件)**.** 集合 A 是无限集的充要条件是 A 与其某真子集对等.

证明

1. 充分性：反证法显然，有限集的任意真子集都和该集合不对等.

2. 必要性：取非空有限子集 $B\subset A$ ，则 $A\backslash B$ 依然是无限集，由上一个定理得到

$$A\sim(A\backslash B)$$

证毕.

1.3.4 不可数集

在一一映射 $f(x)=\dfrac{x+1}{2}$ 下 $[-1,1]$ 和 $[0,1]$ 对等，因此要研究 $\mathbb{R}$ 的基数，只需要讨论 $[0,1]$ 的基数即可.

定理 1.3.6. $[0,1]$ 不可数

证明 只需讨论 $(0,1]$ ，采用二进制小数表示法

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}\quad a_n=0,1$$

显然全体二进制小数和 $(0,1]$ 一一对应，把表达式中 $a_n=0$ 的项舍去，得到

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}$$

其中 $\{n_i\}$ 是严格上升的自然数数论，则令

$$k_1=n_1,k_i=n_i-n_{i-1},\forall n\geq 2$$

得到 $\{k_i\}$ 是自然数数列，记全体自然数数列为 $\mathscr{H}$ ，则 $[0,1]$ 和 $\mathscr{H}$ 一一对应，假设 $\mathscr{H}$ 是可数的，将其全体排列，现在列出满足如下要求的一个自然数数列：它的第 i 个数字等于 $\mathscr{H}$ 中第 i 个数列的第 i 个数字 $+1$ ，则显然新的这个自然数数列不属于 $\mathscr{H}$ ，矛盾.

定义 1.3.4 (连续基数)**.** 称 $\|[0,1]\|$ 的基数为**连续基数**，记为 c 或 $\aleph_1$ ，则 $\|\mathbb{R}\|=c$.

定理 1.3.7. 集合列 $\{A_k\}$ 中集合的基数都是连续基数，则 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 的基数是连续基数.

证明 利用前面的对等，不妨设 $A_i\cap A_j=\emptyset$ ，且 $A_k\sim[k,k+1)$ ，则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\sim[1,+\infty)\sim\mathbb{R}$$

现在提出两个问题：

1. 在 $\aleph_0, \aleph_1$ 之间，是否存在其它基数？

2. 是否存在最大基数？

命题 1.3.3 (连续统假设)**.** 在目前的 Z – F 集合论公里中，连续统假设是相容（不能证明不真）且独立（不能被其它公理证明）的.

定理 1.3.8 (无最大基数定理)**.** 若 $A \neq \emptyset$ ，则 $A \not\sim \mathscr{P}(A)$.

证明 假设存在一一映射 $f : A \to \mathscr{P}(A)$ ，令

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

则存在 $y \in A$ 使得 $f(y) = B \in \mathscr{P}(A)$.

1. 若 $y \in B$ ，则由 B 的定义，$y \notin f(y) = B$ ；

2. 若 $y \notin B$ ，则由 B 的定义 $y \in f(y) = B$.

上述证明原理类似罗素的理发师悖论.

1.4 点与点之间的距离 · 点集的极限点

- 点集拓扑与相关结论

1.4.1 点集拓扑与相关结论

该节关于欧氏空间的基本定理（闭集套、有限覆盖) 的具体证明见数学分析 (III) 的相关章节.

命题 1.4.1 (聚点和聚点集的性质)**.** $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ ，则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$.

定理 1.4.1 (Bolzano-Weierstrass 定理)**.** $\mathbb{R}^n$ 中任意有界无穷点集 E 至少有一个极限点.

证明 任取互异点列 $\{x_k\}$ ，对每个分量使用 $\mathbb{R}$ 上的 Bolzano-Weierstrass 定理，证毕.

命题 1.4.2 (闭集的两个定义)**.** 闭集的两个定义等价：

1. 包含自身一切极限点的集合.

2. 补集是开集的集合.

命题 1.4.3 (闭集运算性质)**.** 有限多个闭集的并集是闭集；任意多个闭集的交集是闭集.

注意：无穷多个闭集的并集不一定是闭集，例如

$$F_j=\left[\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}\right]\quad \bigcup_{j=1}^{\infty}F_j=(0,1]$$

定理 1.4.2 (Cantor 闭集套定理)**.** $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空有界递减闭集列，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k=\{x_0\}$.

命题 1.4.4 (闭包的性质)**.** 集合 E 的闭包 $\overline{E}=E\cup E'$ 是包含 E 的最小闭集.

证明 假设存在 $\overline{E}$ 的聚点 x 使得 $x\notin\overline{E}$ ，则 $x\notin E,x\notin E'$ ，于是 x 不是 E 的聚点，且 $x\notin E$ ，与 x 是 $\overline{E}$ 的聚点矛盾，因此 $\overline{E}$ 是闭集.

设 F 是包含 E 的闭集，则 $E'\subset F'\subset F$ ，因此 $F\supset E\cup E'=\overline{E}$.

命题 1.4.5 (开集的两个定义)**.** 开集的两个定义等价：

1. 一切点都是内点的集合.

2. 补集是闭集的集合.

命题 1.4.6 (开集的运算性质)**.** 有限多个开集的交集是开集；任意多个开集的并集是开集.

定理 1.4.3 (开集的分解)**.** 1. $\mathbb{R}$ 中的非空开集是可数个互不相交的开区间的并集（包括 $(-\infty,a),(b,+\infty),(-\infty,+\infty)$ ）.

2. $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 是可列个互不相交的半开闭方体的并集.

证明

1. 先把所有点扩充到“不能再扩充”，得到的区间，证明它们重合或者不交.

   设 $G\subset\mathbb{R}$ 是开集，则对 $\forall a\in G$ ，存在 $\delta>0$ 使得 $U(a,\delta)\subset G$ ，令

   $$a'=\inf\{x:(x,a)\subset G\}\quad a''=\sup\{x:(a,x)\subset G\}$$

   这里 a' 可以是 $-\infty$ ，a'' 可以是 $+\infty$. 则显然 $(a',a'')\subset G$. 记 $I_a=(a',a'')$.

   对 $I_a=(a',a''),I_b=(b',b'')$ ，不妨设 $a<b$ ，假设

   $$I_a\cap I_b\neq\emptyset$$

则 $b' < a''$ ，令 $c = \min\{a', b'\}, c = \max\{a'', b''\}$ ，则 $(c, d) = I_a \cup I_b$ ，取 $x \in I_a \cap I_b$ ，则 $I_x = (c, d)$ ，且

$$(c, d) = (a', a'') = (b', b'')$$

最后，$\mathbb{R}$ 中互不相交的区间族可数.

定理 1.4.4 (Heine-Borel 有限子覆盖定理)**.** $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的任意开覆盖均含有一个有限子覆盖.

定理 1.4.5 (有界闭集和紧集的等价)**.** 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则 E 是有界闭集.

1.5 基本点集：闭集 · 开集 · Borel 集 · Cantor 集

- Borel 集
- Cantor 集

⊛ 点集拓扑的相关结论都移到 1.4.1，这里仅介绍 Borel 集和 Cantor 集。

1.5.1 Borel 集

定义 1.5.1. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并集，称为 F_σ 型集；若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交集，称为 G_δ 型集。

显然二者互为补集。

例 1.5.1 (函数连续点的结构)**.** $f(x)$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 集。

证明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续 $\iff$ $\omega_f(x_0) = 0$ ，于是连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}$$

因为 $\left\{ x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k} \right\}$ 是开集，证毕。

定义 1.5.2. Γ 是集合 X 的一些子集构成的集合族且满足下述条件

1. $\emptyset \in \Gamma$

2. 若 $A \in \Gamma$ ，则 $A^c \in \Gamma$

3. 若 $A_n \in \Gamma$ ，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$

这时称 Γ 是一个 $\sigma-$ **代数**。

由定义立刻得到

1. 若 $A_n \in \Gamma$ ，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$
2. 若 $A_n \in \Gamma$ ，则
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma$$
3. 若 $A, B \in \Gamma$ ，则 $A \backslash B \in \Gamma$
4. $X \in \Gamma$

定义 1.5.3 (生成)**.** $\sum$ 是集合 X 的一些子集构成的集合族，考虑包含 $\sum$ 的 $\sigma-$ 代数 Γ（即若 $A \in \sum$ ，必有 $A \in \Gamma$ ，这样的 Γ 存在，如 $\mathscr{P}(X)$ ）记包含 $\sum$ 的最小 $\sigma-$ 代数为 $\Gamma(\sum)$ ，称 $\Gamma(\sum)$ 为**由 $\sum$ 生成的 $\sigma-$ 代数**。

定义 1.5.4 (Borel 集)**.** 由 $\mathbb{R}^n$ 中一切开集构成的开集族生成的 $\sigma-$ 代数称为 Borel $\sigma-$ 代数，记为 $\mathscr{B}$ ，其中的元称为 Borel 集。

显然 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集、开集、F_σ 集和 G_δ 集都是 Borel 集；任一 Borel 集的补集是 Borel 集；Borel 集的并、交、上下限集都是 Borel 集。

定理 1.5.1 (Baire 定理)**.** $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 F_σ 集，即 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ ，其中 F_k 为闭集。若每个 F_k 皆无内点，则 E 也无内点。

证明 设 $x_0 \in E$ 为内点，即存在 $\overline{B}(x_0, \delta_0) \subset E$ 。因为 F_1 没有内点，因此存在 $x_1 \in B(x_0, \delta_0)$ 使得 $x_1 \notin F_1$ 。又因为 F_1 是闭集，所以可以取到 $\delta_1 \in (0, 1)$ 使得

$$\overline{B}(x_1, \delta_1) \cap F_1 = \emptyset \quad \overline{B}(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$$

从 $\overline{B}(x_1, \delta_1)$ 出发类似得到

$$\overline{B}(x_2, \delta_2) \cap F_2 = \emptyset \quad \overline{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, \delta_1) \quad \delta_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

继续这一过程得到

$$\overline{B}(x_k, \delta_k) \subset B(x_{k-1}, \delta_{k-1}) \quad \overline{B}(x_k, \delta_k) \cap F_k = \emptyset \quad \delta_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$$

当 $l > k$ 时，有

$$x_l \in B(x_k, \delta_k) \implies |x_l - x_k| < \delta_k < \frac{1}{k} \implies \lim_{k\to\infty} |x_k - x| = 0$$

此外

$$|x - x_k| \le |x - x_l| + |x_k - x_l| < |x - x_l| + \delta_k$$

令 $l \to \infty$ 得到 $|x - x_k| \le \delta_k$ ，因此 $x \in \overline{B}(x_k, \delta_k)$ ，即

$$x \notin F_k \quad \forall k \implies x \notin E$$

矛盾。

定义 1.5.5. $E \subset \mathbb{R}^n$ ，若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$ ，则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**稠密集**；若 $\overline{E}^\circ = \emptyset$ ，则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的**无处稠密集**；可数个无处稠密集的并集称为**贫集**或**第一纲集**；不是第一纲集称为**第二纲集**。

1.5.2 Cantor 集

定义 1.5.6. 将 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 三等分，移去中央三分开区间，记留存部分为

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{1,1} \cup F_{1,2}$$

继续重复三等分每一个闭区间并移去中央三分三区间，得到 $\{F_n\}$ ，其中

$$F_n = F_{n,1} \cup F_{n,2} \cup \cdots \cup F_{n,2^n}$$

作点集

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} F_n$$

称为 **Cantor 三分集**。

命题 1.5.1. Cantor 集有下列性质

1. 非空有界闭集

2. $C = C'$ （这样的集合称为完全集）

3. C 没有内点（总是会被移去）

4. 基数为 c

将 $[0,1]$ 的实数按三进位小数展开，则 Cantor 集的点 x 和下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\quad a_i=0,2$$

一一对应，因此 $C\cong(0,1]$

定义 1.5.7 (Cantor 函数). 用三进位小数表示 C 中的点

$$x=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\quad a_i=0,1$$

1. 作定义在 C 上的函数 $\varphi(x)$ ，对 $x\in C$ ，定义

$$\varphi(x)=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$$

显然 $\varphi(C)=[0,1]$ 。

下证 φ 在 C 递增：若

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}<2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{3^i}$$

记 $k=\min\{i:a_i\neq b_i\}$ ，则显然有 $a_k=0,b_k=1$ ，从而得到

$$\begin{aligned}\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{a_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\\&\le\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{2^i}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{2^i}+\frac{1}{2^k}\\&\le\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{2^i}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{b_i}{2^i}=\varphi\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{3^i}\right)\end{aligned}$$

证毕

2. 作定义在 $[0,1]$ 上的 $\Phi(x)$ ，对 $x\in[0,1]$

$$\Phi(x)=\sup\{\varphi(y):y\in C,y\le x\}$$

则显然 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 递增，且 $\Phi([0,1])=[0,1]$ ，因此 $\Phi\in C[0,1]$ 。此外，在构造 Cantor 集的过程中移去的中央三分开区间上 $\Phi(x)$ 都是常数，称 $\Phi(x)$ 为 **Cantor 函数**

1.6 点集间的距离

•

定义 1.6.1. 定义点和点集、点集和点集之间的距离为

$$d(x,E)=\inf\{|x-y|:y\in E\}\quad d(E_1,E_2)=\inf\{|x-y|:x\in E_1,y\in E_2\}$$

定理 1.6.1. $E\subset\mathbb{R}^n$ 非空，则 $d(x,E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 一致连续。

证明 考虑 $x,y\in\mathbb{R}^n$ ，则对 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 $z\in E$ 使得 $|y-z|<d(y,E)+\varepsilon$ ，从而

$$d(x,E)\le|x-z|\le|x-y|+|y-z|<|x-y|+d(y,E)+\varepsilon$$

于是

$$d(x,E)-d(y,E)\le|x-y|$$

同理 $d(y,E)-d(x,E)\le|x-y|$ ，这说明

$$|d(x,E)-d(y,E)|\le|x-y|$$

推论 1.6.1. F_1,F_2 是两个非空闭集，且其中至少一个有界，则存在 $x_1\in F_1,x_2\in F_2$ 使得

$$|x_1-x_2|=d(F_1,F_2)$$

定理 1.6.2 (连续延拓定理)**.** F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$f(x)$ 是 F 上的有界连续函数，$|f(x)|\le M$ ，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数满足

$$g(x)=f(x),\forall x\in F\quad |g(x)|\le M,\forall x\in\mathbb{R}^n$$

证明 设 $|f(x)|\le M,x\in F$ 把 F 分为三个集合

$$A=\left\{x\in F:\frac{M}{3}\le f(x)\le M\right\}$$
$$B=\left\{x\in F:-M\le f(x)\le-\frac{M}{3}\right\}$$
$$C=\left\{x\in F:-\frac{M}{3}Mf(x)<\frac{M}{3}\right\}$$

并作函数

$$g_1(x)=\frac{M}{3}\cdot\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)}\quad x\in\mathbb{R}^n$$

因为 A, B 是不交的闭集，因此 $g_1(x)$ 处处有定义且处处连续，此外

$$|g_1(x)| \leq \frac{M}{3} \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2M}{3} \quad x \in F$$

此时把 $f(x) - g_1(x)$ 看作 $f(x)$ 进行类似的操作，得到 $g_2(x)$

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3} \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3} \quad x \in F$$

继续得到 $\{g_k(x)\}$ 使得

$$|g_k(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k} M \quad x \in F$$

第一式表明 $\sum\limits_{i=1}^{k} g_k(x)$ 一致收敛，记和函数 $g(x)$ ，则 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数；第二式表明

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_k(x) = f(x) \quad x \in F$$

最后，对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ，有

$$|g(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \frac{M}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) \leq M$$

证毕。

该定理在 $f(x)$ 无界也成立，只需考虑 $\arctan f(x)$

Chapter 2

Lebesgue 测度

Riemann 积分的定义建立在“面积”的基础上，为了建立能够应用于更大函数类的积分理论，我们希望把原有的面积概念加以推广，使得更多点集能够具有类似面积性质的新的度量。

要对一般 $\mathbb{R}^n$ 中点集给予一种度量，记为 $m(E)$ ，称为 E 的测度，以 $\mathbb{R}$ 为例，测度需要满足

1. $m(E) \geq 0$
2. 可合同的点集具有相同的测度
3. 令 $I = (a, b)$ ，则 $m(I) = b - a$
4. **可数可加性**：若 $E_1, \cdots, E_k, \cdots$ 是不相交的点集，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

2.1 点集的 Lebesgue 外测度

古典理论的面积采用内部所含的小矩形的面积出发逐步计算。对于不存在内点的点集，我们考虑用矩形去覆盖点集，取覆盖求出的矩形面积总和的下确界来代表某种度量。目前采用的覆盖允许矩形的个数为可数个（若只允许有限个，即 Jordan 容度）

定义 2.1.1 (外测度). $E \subset \mathbb{R}^n$ ，$\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可数个凯矩体，且

$$E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k$$

称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个 $L-$ **覆盖**，称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k\geq 1}|I_k|:E\subset\bigcup_{k\geq 1}I_k\right\}$$

为点集 E 的 **Lebesgue 外测度**，简称**外测度**，这里 $|I_k|$ 是 I_k 的体积。

命题 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ 中点集外测度的性质：

1. $m^*(E)\geq 0, m^*(\emptyset)=0$
2. $E_1\subset E_2 \implies m^*(E_1)\leq m^*(E_2)$
3. **次可加性**：$m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$
4. **平移不变性：**，记 $E+\{x_0\}=\{x+x_0,x\in E\}$ ，则
$$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E)$$
5. **数乘**：$E\subset\mathbb{R},\lambda\in\mathbb{R}$ ，记 $\lambda E=\{\lambda x:x\in E\}$ ，则
$$m^*(\lambda E)=|\lambda|m^*(E)$$

推论 2.1.1. 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为可数点集，则 $m^*(E)=0$.

例 2.1.1. 外测度为零的点集不一定是可列集，如 Cantor 集。

命题 2.1.2. 对 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$ ，若 $d(E_1,E_2)>0$ ，则

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$$

证明

引理 2.1.1. $E\subset\mathbb{R}^n,\delta>0$ ，令

$$m_\delta^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\bigcup_{k=1}^{\infty}\supset E,\ L(I_k)<\delta\right\}$$

则 $m_\delta^*(E)=m^*(E)$ ，这里 $L(I_k)$ 是开矩体的边长。

证明 显然 $m_\delta^*(E)\geq m^*(E)$ ，下证反向不等式也成立。不妨设 $m^*(E)<+\infty$ ，对 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 E 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq m^*(E)+\varepsilon$$

对每个 k ，把 I_k 分割为 $l(k)$ 个开矩体 $I_{k,1}, I_{k,2}, \cdots, I_{k,l(k)}$ ，它们互不相交且每个开矩体边长小于 $\delta/2$ ，现在保持每个 $I_{k,i}$ 的中心不动，变成扩大 $\lambda \in (1,2)$ 倍作出开矩体 $\lambda I_{k,i}$ ，显然

$$\bigcup_{i=1}^{l(k)} \lambda I_{k,i} \supset I_k \quad \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{i=1}^{l(k)} |I_{k,i}| = \lambda^n |I_k|$$

易知 $\{\lambda I_{k,i}\}$ 是 E 的变成小于 δ 的 $L-$ 覆盖，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(k)} |\lambda I_{k,i}| = \lambda^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon)$$

从而得到 $m_\delta^*(E) \leq \lambda^n (m^*(E) + \varepsilon)$ ，令 $\lambda \to 1$ ，得到

$$m_\delta^*(E) \leq m^*(E)$$

证毕。

只需证 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$ 即可。不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < +\infty$ ，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 E_1, E_2 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$$

其中 I_k 的边长都小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}$ ，将 $\{I_k\}$ 分为两族：

$$\text{(i)} J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{i_k} \supset E_1 \quad \text{(ii)} J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k \geq 1} J_{l_k} \supset E_2$$

且其中任一矩体都不能同时含有 E_1, E_2 的点，从而

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon > \sum_{k \geq 1} |I_k| &= \sum_{k \geq 1} |J_{i_k}| + \sum_{k \geq 1} |J_{l_k}| \\ &\geq m^*(E_1) + m^*(E_2) \end{aligned}$$

证毕。

本节介绍的外测度是定义在 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ 上的集合函数。一般地说，设 X 是非空集合，μ^* 是定义在 $\mathscr{P}(X)$ 上的集合函数，且

1. $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(E) \geq 0 (E \subset X)$
2. $E_1, E_2 \subset X, E_1 \subset E_2 \implies \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$
3. $\{E_n\} \subset X$

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

则称 μ^* 是 X 上的一个**外测度**。

若 (X,d) 是一个距离空间，且其上外测度 μ^* 还满足：$d(E_1,E_2)>0$ 时，有

$$\mu^*(E_1\cup E_2)=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)$$

则称 μ^* 是 X 上的一个**距离外测度**（距离外测度性质可以证明开集可测性）

2.2 可测集与测度

上节 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 外测度具有次可加性，即不满足可数可加性。这样集合函数 m^* 依然不是我们引言里希望的测度，那么满足其余条件且具有可数可加性的测度是否存在？结论是否定的，即不存在一个在 $\mathbb{R}^n$ 的一切子集上都有定义的测度，即有些点集不存在测度。因此我们就转而考虑在 Lebesgue 外测度的基础上，在 $\mathbb{R}^n$ 中诱导出一个可测集合类，在 m^* 上是一种所期望的测度。因此我们直接**引用可加性条件来诱导可测集**。

首先认为 $\mathbb{R}^n$ 的任意矩体属于可测集合类，因此若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 也属于可测集合类，则根据可加性有

$$m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)$$

上述等式本可作为可测集的定义，然而实际上我们还可以由此证明，对任意 $T\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

[1]从而下面定义 E 为可测集时，不采用矩体（$\mathbb{R}^n$ 中特有）作试验集，而代之以一般点集，从而可以让定义被推广到抽象测度。

定义 2.2.1. $E\subset\mathbb{R}^n$ ，若对任意点集 $T\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

[1]对 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 T 的 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le m(T)+\varepsilon$$

从而

$$\begin{aligned}m^*(T)&\le m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}[m^*(I_k\cap E)+m^*(I_k\cap E^c)]\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le m^*(T)+\varepsilon\end{aligned}$$

即证。

则称 E 为 **Lebesgue 可测集**，简称为**可测集**，其中 T 称为**试验集**（这一定义可测集的等式也称为 Caratheodory 条件）可测集全体称为**可测集类**，记为 $\mathscr{M}$.

对 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，要证明其是可测集，只需要证明对 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

即可。

命题 2.2.1. 可测集具有下列性质

1. $\emptyset \in \mathscr{M}$
2. $E \in \mathscr{M} \implies E^c \in \mathscr{M}$
3. $E_1, E_2 \in \mathscr{M} \implies E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \backslash E_2 \in \mathscr{M}$
4. $E_i \in \mathscr{M} \implies \bigcup\limits_i E_i \in \mathscr{M}$ ，若进一步有 $E_i \cap E_j = \emptyset$ ，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

即 m^* 在 $\mathscr{M}$ 上满足**可数可加性**（或称为 $\sigma-$ 可加性）

因此 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\mathscr{M}$ 构成一个 $\sigma-$ 代数，对可测集 E ，其外测度称为**测度**，记为 $m(E)$ ，这就是通常所说的 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度。[2]

定理 2.2.1 (递增可测集列的测度运算)**.** 若有递增可测集列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \cdots$ ，则

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

[2]一般来说，X 是非空集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的一些子集构成的 $\sigma-$ 代数。若 μ 是定义在 $\mathscr{A}$ 的集合函数，且满足

1. $0 \leq \mu(E) \leq +\infty (E \in \mathscr{A})$
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. μ 在 $\mathscr{A}$ 可数可加

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的（非负）测度，$\mathscr{A}$ 中的元素称为 (μ) 可测集，有序组 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 称为测度空间。本节建立的就是 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{M}, m)$ 测度空间。

证明 不妨设 $m(E_k) < +\infty, \forall k$ （否则显然成立）因为测度可加，于是

$$m(E_k \backslash E_{k-1}) = m(E_k) - m(E_{k-1})$$

令 $E_0 = \emptyset$ ，得到

$$\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \backslash E_{k-1})$$

应用可加性得到

$$\begin{aligned} m(\lim_{k\to\infty} E_k) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \backslash E_{k-1})\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} m(E_k) \end{aligned}$$

证毕。

推论 2.2.1 (递减可测集列的测度运算)**.** 若有递减可测集列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$ ，且 $m(E_1) < +\infty$ ，则

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

证明 $\{E_1 \backslash E_k\}$ 是递增集合列，于是

$$m(E_1 \backslash \lim_{k\to\infty} E_k) = m(\lim_{k\to\infty} (E_1 \backslash E_k)) = \lim_{k\to\infty} m(E_1 \backslash E_k)$$

证毕。

命题 2.2.2 (可测集列上下极限)**.** 1. 若有可测集列 $\{E_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$ ，则

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) = 0$$

2. $\{E_k\}$ 是可测集列，则

$$m(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k) \leq \underline{\lim_{k\to\infty}} m(E_k)$$

[3]

证明

1.

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = 0$$

[3]也称结论

$$m(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} m(E_n) \quad m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} m(E_n)$$

为 **Fatou** 引理。

2. 因为 $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k$，因此

$$m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leq m(E_k)$$

即证。

Part II

课本习题

Chapter 3

第一章

3.1 思考题

题目 3.1.1 (p8-1)**.** 证明：设 A, B, E 是全集 X 的子集，则

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \iff B^c = E$$

证明

1. $\Longleftarrow$ 对 $\forall a \in B = E^c$ ，则显然

$$a \in (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A) = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A)$$

对 $\forall a \in (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) = (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A)$ ，则 $a \in B = E^c$ ，否则，$a \in A \cap A^c$ ，矛盾. 于是 $B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A)$.

2. $\Longrightarrow$ 若 $B = (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A)$ ，则

$$\begin{aligned} B^c &= [(E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A)]^c = (E^c \cup A^c)^c \cup (E^c \cup A)^c \\ &= (E \cap A) \cup (E \cap A^c) = E \end{aligned}$$

证毕.

题目 3.1.2 (p8-2)**.** 证明：设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$ ，则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)$$

证明 为简化，记要证明的两个集合依次为 P, Q ，则 $\forall x \in P$ ，存在 m, n 使得 $x \in A_m, x \in B_n$ ，不妨设 $m > n$ ，则 $x \in A_m \cap B_m$ ，容易验证 $A_i \cap B_i \subset A_j \cap B_j, \forall i < j$ ，

因此 $x \in Q$；同理，若 $x \in Q$，则存在 k 使得 $x \in A_k, x \in B_k$，于是 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，即 $x \in P$.

题目 3.1.3 (p8-3)**.** 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset$，则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$$

证明 为简化，记要证明的两个集合依次为 P, Q，则 $\forall x \in P$，不妨设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，则对任意 k 都有 $x \in A_k \cup B_k$，于是 $x \in Q$；对 $\forall x \in Q$，若 $x \in A_n$ 对任意 n 恒成立，则 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，于是 $x \in P$，否则，存在 k 使得 $x \notin A_n, \forall n > k$，则 $x \in B_n$ 对 $\forall n$ 恒成立，于是 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，即 $x \in P$.

题目 3.1.4 (p8-4)**.** 证明：设有集合 A, B, E, F.

1. 若 $A \cup B = E \cup F, A \cap F = \emptyset, B \cap E = \emptyset$，则

$$A = E \quad B = F$$

2. 若 $A \cup B = E \cup F, A_1 = A \cap E, A_2 = A \cap F$，则

$$A_1 \cup A_2 = A$$

证明

1. 对 $\forall x \in A$，假设 $x \notin E$，则因为 $x \in A \cup B = E \cup F$，于是 $x \in E$，由对称性，证毕.

2. 对 $\forall x \in A$，假设 $x \notin A_1$，则 $x \notin E$，因为 $x \in A \cup B = E \cup F$，于是 $x \in F$，于是 $x \in A_2$，由对称性，证毕.

题目 3.1.5 (p11-1)**.** 证明：设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

则对 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(x \in \mathbb{R} : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right)$$

证明 若 $f(x)\le t$ ，则 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $f_n(x)<t+\varepsilon,\forall n>N$ ，记

$$A_n=\{x:f_n(x)<t+\varepsilon\}$$

则等价于 $x\in\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$ ，又因为 $\forall\varepsilon>0$ 的可以用 $k\to\infty$ 下的 $\dfrac{1}{k}$ 来表示，且 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)\to f(x)$ ，于是两边取极限得到

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)\le t\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(x\in\mathbb{R}:f_n(x)<t+\frac{1}{k}\right)$$

题目 3.1.6 (p11-2)**.** 证明：设 $a_n\to a(n\to\infty)$ ，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right)=\{a\}$$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$ 记

$$A_n=(a_n-\varepsilon,a_n+\varepsilon)$$

则 $\{a\}=\bigcap\limits_{\varepsilon}\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k$ ，证毕，用 $k\to\infty$ 下的 $\dfrac{1}{k}$ 表示 $\forall\varepsilon>0$ ，则

$$\{a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right)$$

题目 3.1.7 (p13-1)**.** 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，记 $f_1(x)=f(x),f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ ，若存在 n_0 使得 $f_{n_0}(x)=x$ ，证明 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

证明 否则，假设存在 $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\ne x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ ，则

$$f_{n_0}(x_1)=f_{n_0-1}(f(x_1))=f_{n_0-1}(f(x_2))=f_{n_0}(x_2)$$

得到 $x_1=x_2$ ，矛盾，因此 f 是 $\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ 的单射.

假设存在 $y\in f(\mathbb{R})$ 使得 $f(x)\ne y,\forall x\in\mathbb{R}$ ，令 $x_0=f_{n_0-1}(y)\in\mathbb{R}$ ，则

$$f(x_0)=f_{n_0}(y)=y$$

矛盾，因此 f 是 $\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ 的满射.

题目 3.1.8 (p13-2)**.** 证明：不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f ，它在无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射，而在 $\mathbb{Q}$ 上不是一一映射.

证明

题目 3.1.9 (p13-3)**.** $f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B\subset Y$ 有

$$f(f^{-1}(B))=B$$

证明

1. 若 $f: X \to Y$ 是满射，对任意真子集 $B \subset Y$ ，显然 $f(f^{-1}(B)) \subset B$. 假设存在 $y \in B$ 使得
$$f(x) \neq y \quad \forall x \in f^{-1}(B)$$
因为 f 是满射，于是存在 $x' \in X - f^{-1}(B)$ 使得 $f(x') = y \in B$ ，则 $x' \in f^{-1}(B)$ ，矛盾.

2. 若对任意真子集 $B \subset Y$ 都有 $f(f^{-1}(B)) = B$ ，若 $|Y| = 1$ ，结论显然成立，否则，假设存在 $y \in Y$ 使得
$$f(x) \neq y \quad \forall x \in X$$
则 $\{y\}$ 是 Y 的一个真子集，且 $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ ，于是 $f(f^{-1}(\{y\})) = \emptyset \neq \{y\}$ ，矛盾.

题目 3.1.10 (p14-4). 证明：对满射 $f: X \to Y$ ，下述命题等价

1. f 是一一映射.
2. 对任意的 $A, B \subset X$ ，有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ；
3. 对满足 $A \cap B = \emptyset$ 的 $A, B \subset X$ ，有 $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
4. 对任意的 $A \subset B \subset X$ ，有 $f(B \backslash A) = f(B) \backslash f(A)$.

证明

1. (1) $\implies$ (2)

   对 $y \in f(A \cap B)$ ，存在 $x \in A \cap B$ 使得 $y = f(x)$ ，则 $y \in f(A), y \in f(B)$.

   对 $y \in f(A) \cap f(B)$ ，存在 $x_1 \in A, x_2 \in B$ 使得 $y = f(x_1) = f(x_2)$ ，因为 f 是单射，于是 $x_1 = x_2$ ，则 $x_1 \in A \cap B$ ，于是 $y = f(x_1) \subset f(A \cap B)$

2. (2) $\implies$ (3)

   对任意 $A \cap B = \emptyset$ ，$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.

3. (3) $\implies$ (4)

   对 $y \in f(B \backslash A)$ ，存在 $x \in B \backslash A$ 使得 $y = f(x)$ ，因为 $x \in B$ ，于是 $f(x) \in f(B)$ ，假设 $f(x) \in f(A)$ ，则存在 $x' \in A$ 使得 $x' = x$ ，与 $x \in B \backslash A$ 矛盾，因此 $y \in f(B) \backslash f(A)$

对 $y\in f(B)\backslash f(A)$ ，则存在 $x\in B$ 使得 $y=f(x)$ 且 $y\neq f(x'),\forall x'\in A$ ，于是 $x\in B\backslash A$ ，则 $x\in f(B\backslash A)$.

4. (4) $\implies$ (1) 假设存在 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$ ，令 $A=\{x_1\},B=\{x_1,x_2\}$ ，则
$$f(B\backslash A)=\{f(x_2)\}\quad f(B)\backslash f(A)=\emptyset$$
矛盾. 因此 f 是单射，于是是一一映射.

题目 3.1.11 (p14-5)**.** 设 $f:X\to Y,g:Y\to X$ ，若对任意的 $x\in X$ ，必有 $g(f(x))=x$ ，则 f 是单射，g 是满射.

证明 假设存在 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$ ，则
$$g(f(x_1))=x_1\neq x_2=g(f(x_2))$$
矛盾，因此 f 是单射.

假设存在 $x\in X$ 使得 $g(y)\neq x,\forall y\in Y$，因为 $f(x)\in Y$ ，且
$$g(f(x))=x$$
矛盾，因此 g 是满射.

题目 3.1.12 (p17-1)**.** 设 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$ ，若 $A_1\sim B_1,A_2\sim B_2$ ，试问：是否有 $(A_2\backslash A_1)\sim(B_2\sim B_1)$ ？

证明 不一定，如 $A_1=2\mathbb{Z},A_2=\mathbb{Z},B_1=\mathbb{Z}\backslash\{0\},B_2=\mathbb{Z}$ ，则 $A_1\sim B_1,A_2\sim B_2$ ，但
$$A_2\backslash A_1=\{2k+1:k\in\mathbb{Z}\}\quad B_2\backslash B_1=0$$
显然两个集合不对等.

题目 3.1.13 (p17-2)**.** 若 $(A\backslash B)\sim(B\backslash A)$ ，则 $A\sim B$ ，对吗？

证明 若 $A\cap B=\emptyset$，则结论自然成立; 若 $A\cap B\neq\emptyset$，则存在一一映射 $f:A\backslash B\to B\backslash A$ ，定义
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in A\backslash B\\ x & x\in A\cap B\end{cases}$$
则 $g(x)$ 是一一映射，于是 $A\sim B$.

题目 3.1.14 (p18-3)**.** 若 $A\subset B$ 且 $A\sim(A\cup C)$ ，证明 $B\sim(B\cup C)$.

证明 因为 $(B\cup C)\backslash(A\cup C)=B\backslash A$ ，且 $A\sim(A\cup C)$ ，则存在一一映射 $f:A\to A\cup C$ ，定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A \\ x & x\in B\backslash A \end{cases}$$

则 $g(x)$ 是一个一一映射，于是 $B\sim(B\cup C)$.

题目 3.1.15 (p23-4). 对平面上的直线 $3y-2x=5$ 来说，它具有以下性质：若 $x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}$ ，试问：具有这种性质的直线在平面上有多少？

解 因为 $0\in\mathbb{Q}$ ，因此 $f(0)=b\in\mathbb{Q}$ ，假设 $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ，因为 $1\in\mathbb{Q},-1\in\mathbb{Q}$ ，则

$$\begin{cases} a+b=c\in\mathbb{Q} \\ -a+b=d\in\mathbb{Q} \end{cases} \implies a=\frac{c-d}{2}\in\mathbb{Q}$$

矛盾，因此 $a\in\mathbb{Q}$.

显然对任意 $a,b\in\mathbb{Q}$ ，$y=ax+b$ 都满足上述性质，因此具有这种性质的直线有 $\|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\|=\aleph_0$.

题目 3.1.16 (p23-5). 试问：由自然数组成且公差亦为自然数的等差数列之全体形成的集合的基数是什么？

解 显然上述的不同等差数列由有序自然数组 $\{m,n\}$ 唯一决定，因此基数为 $\|\mathbb{N}\times\mathbb{N}\|=\aleph_0$.

题目 3.1.17 (p23-6). 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可微，且除可数集外，有 $f'(x)=0$ ，试证明 $f(x)=c$ （常数）.

证明 任取 $x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$ ，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\,\mathrm{d}x=0$$

于是 $f(x)=c$.

题目 3.1.18 (p23-7). 试问：是否存在满足

$$f(x)=\begin{cases} & x \\ & x \end{cases}$$

的函数 $f\in C(\mathbb{R})$ ？

证明

题目 3.1.19 (p23-8)**.** 设 $E \subset (0,1)$ 是无限集，若从 E 中任意选取不同的数所组成的无穷正项级数总是收敛的，试证明 E 是可数集.

证明 令 $E_k = \left\{x : x \geq \dfrac{1}{k}, x \in E\right\}$ ，则 E_k 是有限集，否则，由 E_k 中元素构成的无穷正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

不收敛. 可数个可数集的并依然是可数集，且

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

因此 E 是可数集.

题目 3.1.20 (p25-9)**.** 试问：直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么？

解 开区间被其上下确界构成的有序实数组 (a,b) 唯一确定，因此基数为 $\|\mathbb{R}\times\mathbb{R}\| = c$.

题目 3.1.21 (p25-10)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是不可数集，试证明存在 $x_0 \in E$ 使得对于任一内含 x_0 的圆邻域 $B(x_0)$ ，点集 $E \cap B(x_0)$ 为不可数集.

证明

题目 3.1.22 (p25-11)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}$ ，且 $\|E\| < c$ ，试证明存在实数 a ，使得 $E + \{a\} = \{x + a : x \in E\} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

证明 否则，对 $\forall a \in \mathbb{R}$ ，存在 $e \in E$ 使得 $a + e \in \mathbb{Q}$ ，于是

$$a \in \{q - e : q \in \mathbb{Q}, e \in E\}$$

记这个集合为 A ，则 $\mathbb{R} \subset A$ ，又显然 $A \subset \mathbb{R}$ ，因此 $A = \mathbb{R}$ ，

题目 3.1.23 (p25-12)**.** 试作由 $0,1$ 两个数组成的数列的全体 E 与 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 之间的一一映射.

解 令 $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to E$

$$f(A) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \quad x_n = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

题目 3.1.24 (p25-13). 试问：是否存在集合 E ，使得 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集？

证明 若 E 是有限集，则 $\mathscr{P}(E)$ 也是有限集；若 E 是可列集，记

$$E=\{e_1,e_2,\cdots\}$$

对任意 $X\in\mathscr{P}(E)$ ，用序列 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 表示 X ，其中

$$x_i=\begin{cases}1 & e_i\in X\\ 0 & e_i\notin X\end{cases}$$

则 $\{(x_1,x_2,\cdots)\}$ 和 $\mathscr{P}(E)$ 一一对应，假设 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集，则 $\{(x_1,x_2,\cdots)\}$ 是可列集，列出如下

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{matrix}$$

定义 $(y_1,y_2,\cdots)$ 为 $y_i=1-x_i$ ，则显然 $(y_1,\cdots,y_n)\notin\{(x_1,x_2,\cdots)\}$ ，矛盾. 若 E 是不可数集，显然 $\mathscr{P}(E)$ 是不可数集，因此不存在.

题目 3.1.25 (p25-14). 试证明全体超越数（即不是整系数方程 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根）的基数是 c .

证明 设 X_n 为所有 n 次整系数方程构成的集合，则 $X_n\sim\mathbb{Z}^{n+1}$ ，是可数集，又因为自然数 $\mathbb{N}$ 是可数集，可数个可数集的并是可数集，因此全体整系数方程构成的集合 X 是可数集，又因为每个整系数方程的根的数目是有限集，有限个可数集的并集是可数集，因此全体整系数方程的根构成的集合是可数集，记为 A ，所有超越数构成的集合记为 B ，则

$$\mathbb{R}=A\cup B$$

则 $\|B\|=c$.

题目 3.1.26 (p29-1). 证明：设 $E\subset\mathbb{R}$ 是不可数集，则 $E'\neq\emptyset$.

证明 假设 $E'=\emptyset$ ，则对 $\forall x\in E$ ，存在 $\delta_x>0$ 使得 $U_0(x,\delta_x)\cap E=\emptyset$ ，于是 E 和 $\{U(x,\delta_x)\}$ 之间存在一个一一映射，因为 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间是可数的，与 E 不可数矛盾.

题目 3.1.27 (p29-2). 证明：设 $E\subset\mathbb{R}^n$ ，若 E' 是可数集，则 E 是可数集.

证明 令 $X = E \backslash E'$ ，则 X 是孤立点集，于是存在 $\delta > 0$ 使得

$$\{U(x, \delta)_{x \in X}\}$$

是互不相交的集合，并在 X 和上述集合之间建立了一个一一映射. 在每个 $U(x, \delta)$ 中选择一个有理点 q_x ，即每个分量都是有理数的点，因为这些集合互不相交，因此所有的 q_x 互不相同，于是建立了一个

$$\{U(x, \delta)_{x \in X}\} \to \mathbb{Q}^n$$

的单射，因为 $\mathbb{Q}$ 可数，于是 $\mathbb{Q}^n$ 可数，于是 $\{U(x, \delta)_{x \in X}\} \to \mathbb{Q}^n$ 可数，于是 X 可数，则 $E = X \cup E'$ 可数.

题目 3.1.28 (p29-3)**.** 证明：若 $E \subset (0, +\infty)$ 中的点不能以数值大小排列，则 $E' \neq \emptyset$.

证明 对 $\forall k \in \mathbb{N}$ ，$E \cap (k-1, k]$ 中只有有限多个点，即可数个点，将这些点排列，再按照 $\{k\}$ 排列，是可数集.

题目 3.1.29 (p29-4)**.** 证明：设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界点列，且

$$|a_n - a_{n+1}| \geq 1$$

则 $\{a_n\}$ 可能有无穷多个极限点.

证明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可列集，设

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n_k, m_k)\}$$

包括了全部的自然数二元组，令

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n_k} + \dfrac{1}{m_k} & n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{n_k} + \dfrac{1}{m_k} + 4 & n = 2k \end{cases}$$

显然 $\{a_n\}$ 有界，且

$$\begin{aligned} |a_{2k} - a_{2k-1}| &= 4 > 1 \\ |a_{2k+1} - a_{2k}| &= \left| 4 + \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k+1}} + \frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}} \right| > 1 \end{aligned}$$

且对任意 $n_0 \in \mathbb{N}$ ，$\dfrac{1}{n_0}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个聚点，因此 $\{a_n\}$ 有无穷多个聚点.

题目 3.1.30 (p29-5)**.** 证明：若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 中任意两点间的距离均大于 1 ，则 E 是可数集.

证明 此时 $\{U(x,1)_{x\in E}\}$ 是互不相交的集合，对每一个 $U(x,1)_{x\in E}$ ，存在

$$(p_x,q_x)\in U(x,1) \quad p_x,q_x\in\mathbb{Q}$$

则存在一个单射

$$f:\{U(x,1)_{x\in E}\}\to\mathbb{Q}^2$$

因为 $\mathbb{Q}^2$ 可数，于是 E 可数.

题目 3.1.31 (p32-1)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是非空点集，若 E 中任一子集皆为闭集，试问 E 是有限集吗？

解 未必，如 $\mathbb{N}$.

题目 3.1.32 (p32-2)**.** 设 $A,B\subset\mathbb{R}$ ，试问：等式 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 是否一定成立.

解 不一定，如

$$A=\left\{\frac{1}{k}:k\in\mathbb{Z}^+\right\} \quad B=\left\{-\frac{1}{k}:k\in\mathbb{Z}^+\right\}$$

则 $A\cap B=\emptyset$ ，于是 $\overline{A\cap B}=\emptyset$ ，而 $\overline{A}=\overline{B}=\{0\}$ ，于是 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{0\}$.

题目 3.1.33 (p32-3)**.** 设 $E_k\subset\mathbb{R}^n$ ，令 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ ，若有 $x_0\in E'$ ，试问：是否一定存在 E_{k_0} 使得 $x_0\in E'_{k_0}$.

证明 不一定，如

$$E_k=\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

则 $E'_k=\dfrac{1}{k}$ ，而 0 是 E 的聚点.

题目 3.1.34 (p32-4)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ ，试证明 $\overline{E}$ 是包含 E 的一切闭集之交.

证明 设闭集 $F\supset E$ ，则 $E'\subset F'\subset F$ ，于是 $\overline{E}\subset F$. 设 X 是所有包含 E 的闭集之交，则 $\overline{E}\subset X$. 又因为 $\overline{E}$ 是包含 E 的闭集，因此 $X\subset\overline{E}$.

题目 3.1.35 (p33-5)**.** 设 $F\subset\mathbb{R}$ 是有界闭集，$f(x)$ 是定义在 F 上的实值函数，若对任意的 $x_0\in F'$ ，均有 $f(x)\to+\infty(x\in F,x\to x_0)$ ，试证明 F 是可数集.

证明 令

$$F_n=\{x\in F:f(x)\le n\}$$

则

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$$

假设存在 n_0 使得 F_{n_0} 是一个无限集，则因为 $F_{n_0} \subset F$ ，有界，于是存在一个收敛的子序列 $\{x_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. 显然 x_0 是 F 的一个极限点，于是

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

而 $\{f(x_k)\}$ 是一个有上界的序列，矛盾.

题目 3.1.36 (p33-6). 设 $f \in C(\mathbb{R})$ ，试证明 $F = \{(x,y) : f(x) \geq y\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

证明　假设存在 F 的极限点 $(x_0,y_0) \notin F$ ，则 $f(x_0) < y_0$ ，则因为 $f \in C(\mathbb{R})$ ，存在 $x_1 < x_0 < x_2$ 使得

$$f(x) < y_0 \quad \forall x \in [x_1,x_2]$$

由连续函数在闭区间上的最值定理，存在 $y_1 = \sup\{f(x)\}_{x\in[x_1,x_2]}$ ，则 $y_1 < y_0$ ，于是在 (x_0,y_0) 的邻域

$$[x_1,x_2] \times [y_1, 2y_0 - y_1]$$

上，恒有 $f(x) < y$ ，与 (x_0,y_0) 是 F 的聚点矛盾.

题目 3.1.37 (p33-7). 试在 $\mathbb{R}$ 中做出可列个互不相交的稠密可列集.

解　令 $\{p_n\}$ 是从小到大的素数列，定义

$$E_k = \{q + \sqrt{p_n} : q \in \mathbb{Q}\}$$

显然 E_k 是 $\mathbb{R}$ 上的稠密可列集，且 $\{E_k\}$ 可列. 假设 $E_j \cap E_j \neq \emptyset, i \neq j$ ，则

$$q_i + \sqrt{p_i} = q_j + \sqrt{p_j} \quad q_i, q_j \in \mathbb{Q}$$

则 $\sqrt{p_i} = \sqrt{p_j} + q_j - q_i = \sqrt{p_j} + q', q' \in \mathbb{Q}$ ，因为 $i \neq j$ ，因此 $q' \neq 0$ ，两边平方得到

$$\sqrt{p_j} = \frac{p_i - p_j - q'^2}{2q'} \in \mathbb{Q}$$

矛盾. 于是 $\{E_k\}$ 互不相交.

题目 3.1.38 (p36-1). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，试证明 $E^\circ = (\overline{E^c})^c, \partial E = \overline{E} \backslash E^\circ$.

证明　显然 $E^\circ \cap \overline{E^c} = \emptyset$ ，若 $x \notin E^\circ$ ，因为 $E^\circ \cup E^c \cup \partial E = \mathbb{R}^n$ ，因此 $x \in E^c \cup \partial E$ ，则 $x \in \overline{E^c}$ ，于是 $E^\circ = (\overline{E^c})^c$.

若 $x \in \overline{E}, x \notin E^\circ$ ，当 $x \in E$ 时，对任意的 $\delta > 0$ ，$U(x,\delta) \cap E^c \neq \emptyset$ ，则 $x \in \partial E$ ；当 $x \notin E, x \in E'$ 时，同理有 $x \in \partial E$.

题目 3.1.39 (p36-2)**.** 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

的不连续点集不是闭集.

证明 不连续点集是 $\{(x,y): x\neq 0, y=0\}$ ，不是闭集.

题目 3.1.40 (p36-3)**.** 证明 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是开集当且仅当 $G\cap\partial G=\emptyset$ ； $F\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集当且仅当 $\partial F\subset F$.

证明 由开集和边界定义，若 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，则 $G\cap\partial G=\emptyset$ ；当 $G\cap\partial G=\emptyset$ 时，假设 G 不是开集，则存在 $g\in G$ 使得

$$U(g,\delta)\cap G^c\neq\emptyset\quad\forall\delta>0$$

则 $g\in\partial G$ ，矛盾.

若 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集，且存在 $f\in\partial F, f\notin F$ ，则 $f\in F^c$ 是开集，于是存在 $\delta>0$ 使得

$$U(f,\delta)\cap F=\emptyset$$

与 $f\in\partial F$ 矛盾；当 $\partial F\subset F$ 时，假设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 不是闭集，则存在 F 的聚点 $f\notin F$ ，由边界点的定义，$f\in\partial F\subset F$ ，矛盾.

题目 3.1.41 (p36-4)**.** 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是非空开集，$r_0>0$. 若对任意的 $x\in G$ ，作闭球 $\overline{B(x,r_0)}$ ，证明 $A=\bigcup\limits_{x\in G}\overline{B(x,r_0)}$ 是开集.

证明 否则，假设存在 $a\in A$ 使得

$$U(a,\delta)\cap A^c\neq\emptyset\quad\forall\delta>0$$

此时对任意的 $x_a\in G$ 使得 $a\in\overline{B(x_a,r_0)}$ ，因为

$$A^c\supset\overline{B(x_a,r_0)}^c$$

于是

$$U(a,\delta)\cap\overline{B(x_a,r_0)}^c\neq\emptyset\quad\forall\delta>0$$

则 $|a-x_a|=r_0$ ，即所有满足 $a\in\overline{B(x,r_0)}$ 的 $x\in G$ 都满足 $|x-a|=r_0$ ，又因为 G 是开集，任取一个满足上述条件的 $x\in G$ ，存在 $U(x,\delta_x)\subset G$ ，则存在

$$x'\in U(x,\delta_x)\quad x'=x+t(a-x), t\in(0,1)$$

则显然 $|x'-a|<r_0$ ，且 $a\in\overline{B(x',r_0)}$ ，矛盾.

题目 3.1.42 (p36-5)**.** $F \subset \mathbb{R}$ 是无限闭集，证明存在 F 中的可数子集 E 使得 $\overline{E} = F$.

证明 令

$$\mathscr{I} = \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2\}$$

对任意使得 $I \cap F \neq \emptyset$ 的 $I \in \mathscr{I}$ ，任取 $x_I \in I$ ，令 $E = \{x_I\}_{I \in \mathscr{I}}$ ，则

$$E \subset F \implies \overline{E} \subset \overline{F} = F$$

因此只需证 $F \subset \overline{E}$.

对 $f \in F$ ，对任意 $\delta > 0$ ，存在 $I \in \mathscr{I}$ 使得 $I \subset U(f, \delta)$ ，此时 $f \in I \cap F$ ，于是存在 $x_I \in E, x_I \in I$ ，则 $f \in \overline{E}$.

题目 3.1.43 (36-6)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的每点都是 E 的孤立点，证明 E 是某开集和闭集的交集.

证明 $\forall x \in E$ ，存在 $\delta_x > 0$ 使得 $U_0(x, \delta_x) \cap E = \emptyset$ ，令

$$G = \bigcup_{x \in E} U\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$$

则 G 是开集的并，是一个开集，下证 $E = G \cap \overline{E}$. 显然 $E \subset G \cap \overline{E}$ ，只需证 $G \cap \overline{E} \subset E$.

对 $x_0 \in G \cap \overline{E}$ ，假设 $x_0 \notin E$ ，则 $x_0 \in G \cap E'$ ，于是存在 $x' \in E$ 使得

$$x_0 \in U\left(x', \frac{\delta_{x'}}{2}\right)$$

令 $r = \min\left\{|x_0 - x'|, \frac{\delta_{x'}}{2} - |x_0 - x'|\right\}$ ，则 $U(x_0, r) \cap E = \emptyset$ ，与 $x_0 \in E'$ 矛盾.

题目 3.1.44 (p38-7)**.** $\mathbb{R}^n$ 中 $\{G_a\}$ 是 E 的一个开覆盖，试问 $\{\overline{G_a}\}$ 能否覆盖 $\overline{E}$.

证明 不能，令 $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ，$\{G_a\} = \left\{\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ ，则

$$\{\overline{G_a}\} = \left\{\left[\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \overline{E} = E \cup \{0\}$$

显然 $0 \notin \{\overline{G_a}\}$.

题目 3.1.45 (p38-8)**.** 设 $\Gamma = \{[a_\alpha, b_\alpha] : \alpha \in [0,1]\}$ ，且 Γ 中任意两个闭区间必相交，证明

$$\bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha] \neq \emptyset$$

证明

题目 3.1.46 (p38-9)**.** 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是非空可数闭集，证明 F 含有孤立点.

证明 否则，

题目 3.1.47 (p38-10)**.** 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负渐降连续函数列，若在有界闭集 F 上 $f_n(x) \to 0(n \to \infty)$ ，证明 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于 0 .