10 月 18 日

Contents

1 直线和圆的方程 **5**

1.1 倾斜角和斜率 5

1.2 直线方程 5

1.2.1 点斜式 5

1.2.2 两点式 6

1.2.3 一般式 6

1.3 直线交点坐标和距离公式 7

1.3.1 直线交点坐标 7

1.3.2 距离公式 7

1.4 圆的方程 8

1.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 9

Chapter 1

直线和圆的方程

1.1 倾斜角和斜率

定义 1.1.1. x 轴正向和直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线的**倾斜角**，倾斜角的正切值叫做直线的**斜率**。

任取直线上不相等的两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，则斜率

$$k = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

命题 1.1.1. l_1, l_2 是两条不同的直线，斜率分别为 k_1, k_2 ，则

1. $l_1 \parallel l_2 \iff k_1 = k_2$
2. $l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1$

证明

1. 若 $l_1 \parallel l_2$ ，则二者倾斜角相等，即 $\alpha_1 = \alpha_2$ ，因此 $k_1 = k_2$
2. 若 $l_1 \perp l_2$ ，则二者倾斜角相差 $\frac{\pi}{2}$ ，因此 $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

1.2 直线方程

1.2.1 点斜式

直线 l 经过 $P_0(x_0, y_0)$ ，斜率为 k ，则直线方程

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

称为**点斜式方程**。

倾斜角 $\dfrac{\pi}{2}$ 的直线的斜率不存在，因此不能用点斜式方程表示，此时表示为

$$l : x = x_0$$

若 $x_0 = 0$ ，即 l 经过 $P_0(0, y_0)$ ，此时点斜式方程为

$$y = kx + y_0$$

y 轴和直线 l 的交点的纵坐标叫做直线 l 在 y 轴上的截距，上述形式的方程称为**斜截式方程**，是点斜式的一个特例。

1.2.2 两点式

直线 l 经过不相等的两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，则直线的方程

1. 当 $x_1 = x_2$ 时，直线方程为 $x = x_1$

2. 当 $x_1 \neq x_2$ 时，直线方程为

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

特别地，当 $y_1 \neq y_2$ 时，方程为

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

称为**两点式方程**。

1.2.3 一般式

命题 1.2.1. 任意关于 x, y 的二元一次方程的图像都是直线；反之，任意直线的方程都是关于 x, y 的二元一次方程

证明 对直线 l ，当斜率存在时，记其方程

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

是关于 x, y 的二元一次方程。当斜率不存在时，方程

$$x = x_0$$

是关于 x, y 的二元一次方程。

对任意关于 x, y 的二元一次方程

$$Ax + By + C = 0$$

其中 A, B 不全为 0 ，则 $B \neq 0$ 时，方程可化为

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

表示过 $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ ，斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线。当 $B = 0$ 时，方程可化为

$$x = -\frac{C}{A}$$

表示过 $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ 垂直 x 轴的直线。

把 $Ax + By + C = 0(A^2 + B^2 \neq 0)$ 叫做直线的**一般式方程**。

1.3 直线交点坐标和距离公式

1.3.1 直线交点坐标

两条直线 l_1, l_2 的交点坐标即两条直线方程组的解。

1.3.2 距离公式

命题 1.3.1. 直线 l 的一般式方程 $ax + by + c = 0$ ，点 $P(x_0, y_0)$ ，则点 P 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

证明 若 $a = 0$ ，则直线 $l : y = -\frac{c}{b}$ 平行 x 轴，此时 P 到 l 的距离即

$$d = \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|$$

代入 $a = 0$ ，形式和要证的方程相同。

若 $b = 0$ ，则直线 $l : x = -\frac{c}{a}$ 平行 y 轴，此时 P 到 l 的距离即

$$d = \left|x_0 + \frac{c}{a}\right|$$

代入 $b = 0$ ，形式和要证的方程相同。

若 $a,b\neq 0$，过 P 点作垂直 x 轴的直线，与 l 交于 Q，则 Q 点坐标为 $\left(x_0,-\dfrac{ax_0+c}{b}\right)$，作 P 到 l 的垂线，垂足记为 H，则

$$\angle QPH=\alpha\vee\angle QPH=\pi-\alpha$$

其中 α 是直线 l 的倾斜角，于是

$$|\tan\alpha|=|\tan\angle QPH|=\left|\frac{a}{b}\right|$$

$\tan\alpha=\tan\angle QPH=-\dfrac{a}{b}$，此时 P 到直线 l 的距离即 $|PH|$，于是

$$\begin{aligned}|PH|=|PQ|\cos\angle QPH&=|PQ|\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan^2\alpha+1}}\\&=\left|y_0+\frac{ax_0+c}{b}\right|\cdot\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}\\&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

证毕。

推论 1.3.1. 两条平行直线 l_1,l_2 的方程分别为

$$\begin{cases}l_1:Ax+By+C_1=0\\l_2:Ax+By+C_2=0\end{cases}$$

则两直线之间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

1.4 圆的方程

$\odot A$ 圆心坐标 $A(a,b)$，半径 R，则圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

称为**圆的标准方程**。

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

称为**圆的一般方程**，配方得到

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2}{4}-F$$

因此当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，该方程的图像是 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\sqrt{\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}}$ 为半径的圆。

1.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

记圆心到直线的距离为 d ，圆的半径为 R ，直线和圆的位置关系

1. 相交 $\iff$ 有两个公共点 $\iff$ $d < R$
2. 相切 $\iff$ 恰有一个公共点 $\iff$ $d = R$
3. 相离 $\iff$ 没有公共点 $\iff$ $d > R$

记两圆的半径分别为 r, R ，圆心之间的距离为 d ，则两圆的位置关系

1. 相交 $\iff$ 有两个公共点 $\iff$ $|r - R| < d < r + R$
2. 相切 $\iff$ 恰有一个公共点 $\iff$ $d = |r - R| \vee d = r + R$
3. 相离 $\iff$ 没有公共点 $\iff$ $d < |r - R| \vee d > r + R$