数学分析 (III)

Contents

Part I

笔记

Chapter 13

多元函数的极限和连续

1. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$
2. 多元函数与向量函数的极限
3. 多元连续函数

13.1 欧氏空间

- 欧氏空间及其基本定理
- 点集拓扑

13.1.1 欧氏空间及其基本定理

定理 13.1.1 (完备性). 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，即任意 Cauchy 序列的极限在 $\mathbb{R}^n$ 内.

定理 13.1.2 (闭集套定理). 递减且直径趋于 0 的非空闭集套 $\{F_k\}$ 的极限集是一个点.

证明 在 F_k 中任取 x_k ，则 $|x_{k'} - x_{k''}| < \operatorname{diam}(F_{k'})$ 是 Cauchy 序列，设 $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ ，因为 F 都是闭集，因此该极限就是极限集，且由直径趋于 0 得到 x_0 唯一.

定理 13.1.3 (聚点原理 (Bolzano-Weierstrass 定理)). $\mathbb{R}^n$ 任意有界点列存在收敛子列. 等价形式是 $\mathbb{R}^n$ 任意有界无穷集合存在聚点.

证明 每个分量存在收敛子列，依次取子列即可.

定理 13.1.4 (有限覆盖定理). 有界闭集等价于紧集.

证明

1. 必要性：对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，$\{U(0,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个开覆盖，于是存在有界子覆盖，因此 E 是有界集合.

   假设存在 $x_0 \in E', x_0 \notin E$ ，任取 $x \neq x_0, x \in E$ ，则

   $$\bigcup_{x\in E} U(x, r_x) \supset E \quad r_x = \frac{1}{2}|x - x_0|$$

   于是存在

   $$\bigcup_{k=1}^{K} U(x_k, r_{x_k}) \supset E$$

   取 $r_K = \min\{r_k\}_{1\le k\le K}$ ，则

   $$U(x_0, r_K) \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{K} U(x_k, r_{x_k})\right\} = \emptyset$$

   矛盾.

2. 充分性：假设存在 E 的一个开覆盖，其任意有限个开集不能覆盖 E ，对 E 的每个分量不断二分，利用闭集套定理，容易得到矛盾.

13.1.2 点集拓扑

见实变函数的相关章节.

13.2 多元函数与向量函数的极限

- 累次极限

13.2.1 累次极限

定义 13.2.1. $z = f(x,y) : E \to \mathbb{R}$ 在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0) \subset E(\delta_0 > 0)$ 内，对每个固定的 $y \neq y_0$ ，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \phi(y)$ 存在，且 $\lim\limits_{y\to y_0} \phi(y) = A$ ，称 A 为 $f(x,y)$ 趋于 (x_0,y_0) 先 x 后 y 的**累次极限**，记为

$$A = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

命题 13.2.1 (累次极限和极限的关系). 累次极限都存在的时候极限可能不存在，如

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=1$ ，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

极限存在的时候累次极限不一定存在，如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ ，而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y),\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 都不存在，因此累次极限也就无从讨论.

上述反例的问题出在累次极限的第一个趋近下极限可能不存在，我们能证明，若极限本身存在，且第一个趋近下的极限存在，则累次极限存在且等于极限. 即下面的定理.

定理 13.2.1 (累次极限等于极限的情况)**.** $f(x,y)$ 在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0)$ 上有定义，且

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A, A\in\mathbb{R}\,\mathrm{or}\,\infty$
2. 对 $U_0(y_0,\delta_0)$ 内固定的 $y\neq y_0$ ，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\phi(y)$ 存在.

则

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=A$$

证明 对 $A\in\mathbb{R}$ ，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,\delta_0)$ ，当 $(x,y)\in N_0((x_0,y_0),\delta)$ 时

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为第一个趋近下极限存在，在上式两边令 $x\to x_0$ ，则

$$|\phi(y)-A|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

证毕.

13.3 多元连续函数

- 多元复合向量函数连续性定理
- 集合连通性
- 连续函数性质
- 同胚映射

13.3.1 多元复合向量函数连续性定理

定理 13.3.1 (多元复合向量函数连续性定理)**.** $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})):E\to\mathbb{R}^m$ 连续，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_l(\boldsymbol{y}))$ 在 $\boldsymbol{f}(E)$ 上连续，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 E 上连续.

13.3.2 集合连通性

连通性的定义和结论见复变函数相关章节（在复变函数里是 $\mathbb{R}^2$ 的情形，与 $\mathbb{R}^n$ 没有本质区别）

13.3.3 连续函数性质

在 $\mathbb{R}$ 上，闭区间上的连续函数存在最大、最小值，可以理解为：闭区间上的连续函数的值域是闭区间，这个结论推广到 $\mathbb{R}^n$ 的情形，首先闭区间对应 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，因此我们先证明：连续的向量函数把紧集映到紧集.

定理 13.3.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，向量函数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中紧集.

证明 假设存在 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset E$ 使得 $|\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)| = +\infty$ ，由 E 紧性，存在子序列 $\{\boldsymbol{x}_{k_j}\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_j} = \boldsymbol{x}_0 \in E$ ，又 $\boldsymbol{f}$ 连续，于是 $\lim\limits_{j\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_j}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，因此 $\boldsymbol{f}(E)$ 是紧集.

任取 $\boldsymbol{f}(E)$ 的聚点 $\boldsymbol{u}_0$ ，则存在 $\{\boldsymbol{x}'_k\} \subset E$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_k) = \boldsymbol{u}_0$ ，由紧性，存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}'_{k_j}\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} \boldsymbol{x}'_{k_j} = \boldsymbol{x}'_0 \in E$ ，由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}'_0$ 连续，有

$$\boldsymbol{u}_0 = \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_{k_j}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_0) \in \boldsymbol{f}(E)$$

接下来考虑 $m = 1$ 的特例，就得到：

推论 13.3.1 (最值定理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，$f(\boldsymbol{x})$ 在 E 连续，则 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧集，于是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 E 上取到最大、最小值.

$\mathbb{R}$ 上连续函数在区间上具有介质性质，该性质成立的充要条件是值域是一个区间，区间在 $\mathbb{R}^n$ 中对应连通集合，因此先证明：连续的向量函数把连通集映到连通集.

定理 13.3.3. $E \subset \mathbb{R}^n$ 是连通集，向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 上连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的连通集.

证明 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ ，则存在 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ 使得

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j) \quad j = 1, 2$$

由于 E 连通，则存在连接 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 的道路 $\boldsymbol{h}(t), t \in [0, 1]$ ，容易看出 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}(t))$ 是 $\boldsymbol{f}(E)$ 中连接 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 的一条道路，说明 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的连通集.

于是考虑 $m = 1$ 的特例就得到

推论 13.3.2 (介值定理). $E \subset \mathbb{R}^n$ 是连通集，$u = f(\boldsymbol{x})$ 在 E 连续，$u_1, u_2 \in f(E), u_1 < u_2$ ，对 $\forall c \in (u_1, u_2)$ ，存在 $\boldsymbol{\xi} \in E$ 使得

$$f(\boldsymbol{\xi}) = c$$

$\mathbb{R}$ 中在闭区间上连续的函数一致连续，推广到 $\mathbb{R}^n$ ，即在紧集上连续的函数一致连续.

定理 13.3.4 (一致连续定理). $E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，若向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 上连续，则在 E 一致连续.

证明 否则，假设 $\boldsymbol{f}$ 在 E 不一致连续，则存在两个序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}, \{\boldsymbol{x}'_n\} \subset E$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}'_n| < \frac{1}{n} \quad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

因为 E 是有界闭集，则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 且极限在 E 内，记 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_{n_k} = \boldsymbol{x}_0 \in E$ ，则

$$|\boldsymbol{x}_{n_k} - \boldsymbol{x}'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_{n_k} + (\boldsymbol{x}'_{n_k} - \boldsymbol{x}_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_{n_k} = \boldsymbol{x}_0$$

与 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ 矛盾.

13.3.4 同胚映射

定义 13.3.1 (同胚映射). $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : E \to \boldsymbol{f}(E)$ 是连续的一一对应且其逆映射也连续，则称 $\boldsymbol{f}$ 为 $E \to \boldsymbol{f}(E)$ 的同胚映射. 也称为**变换**.

Chapter 14

多元微分学

14.1 偏导数与全微分

14.1.1 偏导数

定义 14.1.1. 设函数 $u = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，$\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ ，对 $1 \leq i \leq n$ ，若一元函数

$$f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0)$$

在 x_i^0 处的导数存在，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_i 可偏导，导数可记为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \quad f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内的每一点都关于 x_i 可偏导，将其偏导数记为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \quad f'_{x_i}(\boldsymbol{x}) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

14.1.2 方向导数

定义 14.1.2. $u = f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0 \in D$ ，$\boldsymbol{v} = (\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_n)$ 为一方向，如果

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在，称该极限为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 的**方向导数**，记为 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$.

设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_i 的偏导数 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在并等于 A ，若记 $\boldsymbol{v}_i$ 是第 i 个分量为 1 的单位向量，则 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}_i} = A$.

14.1.3 全微分

定义 14.1.3. 设函数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义，记 $\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$ ，称为自变量的**全增量**. 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}$ ，若存在仅依赖 $\boldsymbol{x}_0$ 的常数 A_i 使得

$$\Delta f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \quad |\Delta\boldsymbol{x}| \to 0$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并称 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分，记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$.

当 x_i 是自变量时，定义 $\mathrm{d}x_i = \Delta x_i$ ，于是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分可以记为

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathrm{d}x_i$$

定理 14.1.1. $f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，微分记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \mathrm{d}x_i$ ，则

1. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续；
2. $f(\boldsymbol{x})$ 关于 x_i 可偏导，且 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$.

证明

1. 记 $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ ，则 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 等价于 $\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ ，即 $\Delta x_i \to 0, \forall i (1 \le i \le n)$ ，于是

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} [f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)] = \lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \right] = 0$$

   即 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

2. 对任意固定的 i ，当 $j \ne i$ 时，令 $x_j = x_j^0$ ，即 $\Delta x_j = 0$ ，此时

$$\Delta\boldsymbol{x} = (0, \cdots, \Delta x_i, 0, \cdots, 0) \quad |\Delta\boldsymbol{x}| = |\Delta x_i|$$

   于是

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0) - f(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(A_i + \frac{o(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} \right) \\ &= A_i \end{aligned}$$

   从而 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 x_i 可偏导，且 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$ ，证毕.

上诉定理说明当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，有

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

显然可偏导和可微在多元函数的情形下是不等价的，但是我们有定理：

定理 14.1.2. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内存在各个偏导数，并且这些偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

证明繁琐，略. 可见课本 P47-P49.

根据课本习题第一章第十五题，这个条件可以弱化为：有 $n-1$ 个偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

若 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 上关于自变量的各个分量都具有连续偏导数，称 $f(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$ ，也称**连续可微**.

定理 14.1.3. $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i$$

证明 由可微性和方向导数定义，得到

$$\lim_{t\to0+0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=\lim_{t\to0+0}\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}t\cos\theta_i+o(|t|)}{t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i$$

证毕.

14.1.4 梯度

由上一小节的结论,当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 处可微时,$f(\boldsymbol{x})$ 沿任意方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos\theta_i$$

当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 n 个偏导数不全为零时，对模长确定的方向向量（不妨设模长为 1 ，即单位方向向量）$f(\boldsymbol{x})$ 沿方向

$$\boldsymbol{v}_0=\frac{1}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)^2}}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

的方向导数达到最大值，因此向量 $\left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处方向导数达到最大的方向，同时它的模就是该方向的方向导数，于是我们引进梯度的定义.

定义 14.1.4. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则称向量

$$\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的梯度，记为 $\mathrm{grad}f(\boldsymbol{x}_0)$ ，即

$$\mathrm{grad}f(\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

设 f,g 均是可微函数，则从定义容易推出梯度有以下性质：

1. $\mathrm{grad}C=\mathbf{0}$ ；
2. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\mathrm{grad}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathrm{grad}f+\beta\mathrm{grad}g$ ；
3. $\mathrm{grad}(f\cdot g)=f\cdot\mathrm{grad}g+g\cdot\mathrm{grad}f$ ；
4. $\mathrm{grad}\dfrac{f}{g}=\dfrac{1}{g^2}(g\cdot\mathrm{grad}f-f\cdot\mathrm{grad}g)(g\neq 0)$.

从梯度的定义可以看出，当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，$f(\boldsymbol{x})$ 沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数可以简单记成 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}}=\mathrm{grad}f(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{v}$.

14.1.5 向量函数的导数与全微分

定义 14.1.5. 向量函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D,\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全增量，如果存在 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(A_{ij})$$

使得 $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=(\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0),\cdots,\Delta f_m(\boldsymbol{x}_0))^T\\&=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\vdots\\\Delta x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1(|\Delta\boldsymbol{x}|)\\\vdots\\\alpha_m(|\Delta\boldsymbol{x}|)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 中的元素仅依赖于 $\boldsymbol{x}_0$ 而不依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，对于 $\forall j(1\leq j\leq m)$ ，$\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，并且满足 $\lim\limits_{|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$ ，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微或可导，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Fréchet 导数，记作 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 或 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ；$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分，记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}$$

若规定 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{x}$ ，则有 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

下面讨论如何判断一个向量函数的可微性，以及当它可微时，如何求它的导数.

定理 14.1.4. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在 D 上有定义，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微的充分必要条件是对于 $\forall j(1\le j\le m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，记

$$\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$$

则当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\quad\text{or}\quad\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}$$

证明

1. 必要性：设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，从而存在 $m\times n$ 矩阵 (A_{ji}) 使得当 $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ 时有

$$\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \Delta f_m(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^n A_{1i}\Delta x_i\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n A_{mi}\Delta x_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1(|\Delta\boldsymbol{x}|)\\ \cdots\\ \alpha_m(|\Delta\boldsymbol{x}|)\end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，且 $\lim\limits_{|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$ ，比较上式两边向量的分量，得到：当 $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ 时

$$\Delta f_j(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n A_{ji}\Delta x_i+\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$$

由多元函数可微定义可知，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且

$$A_{ji}=\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$$

2. 充分性：设对 $\forall j(1\le j\le m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则

$$\Delta f_j(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$$

其中 $\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，且 $\lim\limits_{|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$ ，因此

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=(\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0),\cdots,\Delta f(\boldsymbol{x}_0))^T\\&=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\\vdots\\\Delta x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1(|\Delta\boldsymbol{x}|)\\\vdots\\\alpha_m(|\Delta\boldsymbol{x}|)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\alpha(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ 满足 $\lim\limits_{|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha(|\Delta\boldsymbol{x}|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=\boldsymbol{0}$，由定义 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}$ ，证毕.

当向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 中的每个分量函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处均可微时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的雅可比矩阵，记为 $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}_0)$. 特别地，当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 是 n 维向量函数时，$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，此时 $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的行列式称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的雅可比行列式，记为

$$|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)|\quad\text{or}\quad\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

当 $f_j(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 另外，若对于 $\forall j(1\le j\le m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数在区域 D 上连续，称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是 C^1 的，记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$. 特别地，我们称 $\mathbb{R}^n$ 中区域 $D\to\Omega$ 的变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 C^1 的，如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(D),\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})\in C^1(\Omega)$.

利用向量函数导数的记号，对一个多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ ，当它可微时

$$f'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)=\mathrm{grad}f(\boldsymbol{x})\tag{14.1}$$

14.2 多元函数求导法

14.2.1 导数的四则运算

多元函数四则运算的导数和一元函数相同.

14.2.2 复合函数的求导法

复合函数的导数和一元函数相同.

推论 14.2.1. 设 D,Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $D\to\Omega$ 的 C^1 变换，则对 $\forall\boldsymbol{x}\in D$ 有

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ；对于 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ ，有

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$. 特别地，当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 时

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})=[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $n\times n$ 单位矩阵，$[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$ 为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的逆矩阵.

下面的推论是多元复合函数求偏导数的基础:

推论 14.2.2. 设函数 $f(\boldsymbol{u})=f(u_1,\cdots,u_m)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 上有定义，且在 $\boldsymbol{u}_0=(u_1^0,\cdots,u_m^0)^T\in\Omega$ 处可微，设向量函数

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=(u_1(\boldsymbol{x}),\cdots,u_m(\boldsymbol{x}))^T$$

在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，在 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 处可微，且 $\boldsymbol{u}_0=u(\boldsymbol{x}_0)$ ，则对于 $\forall i(1\le i\le n)$ ，$f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_i 可偏导，且

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j},\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)$$

证明 由 14.1得到

$$(f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})))'|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_n}\right)$$

用矩阵形式表示，得到

$$\begin{aligned}
&f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\\
&=\begin{pmatrix}
\frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\
\frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}
\end{pmatrix}\\
&=\left(\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\right),\cdots,\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)\right)
\end{aligned}$$

又因为 $(f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})))'|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)$ ，比较分量即得，证毕.

此处的 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微可以减弱成在 $\mathbf{x}_0$ 处存在各个偏导数. 但 $f(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{u}_0$ 处可微不能减弱成存在各个偏导数，例如

$$f(u,v)=\begin{cases}1 & uv\neq 0\\ 0 & uv=0\end{cases}\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

令 $u,v=t$ ，则 $g(t)=f(t,t)$ 在 $t=0$ 处不连续不可导.

上述推论给出的求导公式称为链锁法则. 对二元形式，设 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$ 都是可微函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

若给出的函数有形式 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ ，可以用下列记号

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\frac{\partial v}{\partial y}$$

其中 f_i' 指的是 f 对第 i 个变量求偏导数.

14.2.3 高阶偏导数

设 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上具有各个偏导数. 由定义，其每个偏导数 $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ 作为 D 上的 n 元函数，若它们仍具有各个偏导数，称它们的偏导数为 $f(\mathbf{x})$ 的二阶偏导数. 类似定义更高阶偏导数.

当 $\partial\left(\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)/\partial x_k$ 存在时，将其记为 $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k\partial x_i}, f''_{x_kx_i}f''_{ki}(x)$.

附加一些条件可以使高阶偏导数的值对求导顺序无关：

定理 14.2.1. 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，且对于 $1\leq j<k\leq n$ ，$f''_{kj}(\boldsymbol{x}),f''_{jk}(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 内存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则二者相等.

证明 不妨设 $j=1,k=2$ ，记 $\boldsymbol{x}=(x,y,\boldsymbol{x}'),\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,\boldsymbol{x}_0')$ ，对充分小的 $\Delta x,\Delta y$ ，考虑

$$\begin{aligned}I(\Delta x,\Delta y):=&\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(x_0+\Delta x,y_0,\boldsymbol{x}_0')}{\Delta x\Delta y}\\&-\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta x\Delta y}\end{aligned}$$

记

$$g(x)=f(x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(x,y_0,\boldsymbol{x}_0')$$
$$h(y)=f(x_0+\Delta x,y,\boldsymbol{x}_0')-f(x_0,y,\boldsymbol{x}_0')$$

则由一元函数微分中值定理得到

$$\begin{aligned}I(\Delta x,\Delta y)&=\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x\Delta y}=\frac{g'(x_0+\theta_1\Delta x)}{\Delta y}\\&=\frac{f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}'_0)-f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0,\boldsymbol{x}'_0)}{\Delta y}\\&=f''_{yx}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y,\boldsymbol{x}'_0)\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$ ，同理得到

$$I(\Delta x,\Delta y)=f''_{xy}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y,\boldsymbol{x}'_0)$$

联立两式，利用它们在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的连续性，令 $\Delta x,\Delta y\to 0$ ，得到

$$f''_{yx}(\boldsymbol{x}_0)=f''_{xy}(\boldsymbol{x}_0)$$

14.2.4 复合函数的高阶偏导数

没有一般性的公式，需要逐次求出.

14.2.5 一阶微分的形式不变性与高阶微分

定义 14.2.1. $D\subset\mathbb{R}^n$ 是区域，函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}\in D$ 处可微，即

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 仍是可微函数，称

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k\partial x_i}\mathrm{d}x_k\right)\mathrm{d}x_i$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 的二阶微分，记为 $\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{x})$. 归纳地得到 $\mathrm{d}^kf(\boldsymbol{x})=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}f(\boldsymbol{x}))$.

若形式地记 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{x})$ ，当 $f(\boldsymbol{x})$ 的每个 k 阶偏导数都连续，可以用容易记忆的方法记成

$$\mathrm{d}^kf(\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^kf(\boldsymbol{x})$$

特别地，对二元函数 $f(x,y)$ ，若各个 k 阶导数都存在且连续，则

$$\mathrm{d}^kf(x,y)=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x,y)=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\frac{\partial^kf(x,y)}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\mathrm{d}x^{k-j}\mathrm{d}y^j$$

命题 14.2.1 (一阶微分的形式不变性). 设 $f(\boldsymbol{u}) = f(u_1, \cdots, u_m)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上可微，则 $f(\boldsymbol{u})$ 的微分 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) = f'(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ ，此时 $\boldsymbol{u}$ 是自变量.

设 $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_m(\boldsymbol{x}))^T$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的可微向量函数，且 $\boldsymbol{u}(\Omega) \subset D$ ，则

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (u_1'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \cdots, u_m'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ，因此 $\boldsymbol{u}$ 是中间变量时

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) = f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = f'(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

因为二阶以上的微分不再具有形式不变性，因此多元函数情形也没有高阶微分的形式不变性.

14.3 泰勒公式

- 泰勒公式与余项
- 微分中值
- Hessi 矩阵

14.3.1 泰勒公式与余项

定理 14.3.1 (泰勒公式). $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内具有 $K+1$ 阶连续偏导数，则对 $\forall \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ ，有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\boldsymbol{x}_0) \\ &+ \frac{1}{(K+1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{K+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h}) \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$.

证明 本质上是一元函数的泰勒公式的推广.

构造一元函数

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) \quad t \in [0, 1]$$

由复合函数求导公式，$\varphi(t)$ 有 $K+1$ 阶连续导数，因此由一元函数的泰勒公式

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{K} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(K+1)}(\theta t)}{(K+1)!} t^{K+1}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ ，注意到

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$$

代入即证.

当 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 内有 $K+1$ 阶连续偏导数时，上述定理的余项

$$R_{K+1}(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{(K+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h})$$

称为**拉格朗日余项**.

推论 14.3.1. $f(\boldsymbol{x}) \in C^K(U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0))$ ，则

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{h}|^K)(|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

证明 由泰勒公式得到

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) &+ \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0) \\ &+ \frac{1}{K!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^K (f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)) \end{aligned}$$

记最后的余项为 $R_K(\boldsymbol{h})$ ，则

$$\lim_{|\boldsymbol{h}| \to 0} \frac{R_K(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^K} = \lim_{|\boldsymbol{h}| \to 0} \frac{1}{K!}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{|\boldsymbol{h}|} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^K (f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$$

这是因为和式每一项系数有界，且 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}$ 的每个 K 阶偏导数区域 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 K 阶偏导数（由条件偏导数连续）.

上述推论的余项 $o(|\boldsymbol{h}|^K)$ 称为皮亚诺余项.

由上述推论，若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = P_K(h_1, h_2, \cdots, h_n) + o(|\boldsymbol{h}|^K) \quad (|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

其中 P_K 是 n 元 K 次多项式，则上式必定是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内的泰勒公式.

14.3.2 微分中值

在泰勒公式中取 $K = 0$ ，得到

定理 14.3.2 (拉格朗日微分中值定理). $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且 $\forall t \in [0,1], \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \in D$ ，则

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) \\ &= f'(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T \end{aligned}$$

类似一元函数的情形，得到

推论 14.3.2. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 的各个偏导数均为 0 ，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 为常数函数.

14.3.3 Hessi 矩阵

在泰勒公式中令 $K = 1$ ，得到

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)\cdot \boldsymbol{h}^T + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}\cdot \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}^T + o(|\boldsymbol{h}|^2) \quad (|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

其中

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

称为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 **Hessi 矩阵**

14.4 隐函数存在定理

- 多元函数隐函数
- 方程组隐函数
- 逆映射存在定理

14.4.1 多元函数隐函数

定理 14.4.1 (隐函数存在定理). $F(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 满足

1. $F(x_0,y_0) = 0$
2. $F(x,y), F'_y(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 连续
3. $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$

则存在 $\delta_0 > 0$ ，使得在 $U(x_0,\delta_0)$ 内**存在唯一**满足下述条件的**连续函数** $y = f(x)$

1. $y_0 = f(x_0)$

2. $F(x,f(x))=0,\forall x\in U(x_0,\delta_0)$

3. 若 $F'_x(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 连续，则 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 有连续导数，且

$$f'(x)=\frac{-F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

证明 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)>0$ ，则存在 $0<\delta_1,\delta_2<\delta$ 使得

$$F'_y(x,y)>0\quad\forall(x,y)\in U(x_0,\delta_1)\times U(y_0,\delta_2)$$

于是固定 x_0 ，$F(x_0,y)$ 是 $U(y_0,\delta_2)$ 内严格上升函数，于是

$$F(x_0,y_0-\delta_2)<0<F(x_0,y_0+\delta_2)$$

且 $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0-\delta),(x_0,y_0+\delta)$ 连续，于是存在 δ_0 使得

$$F(x,y_0-\delta_2)<0<F(x,y_0+\delta_2)\quad\forall x\in U(x_0,\delta_0)$$

对任意给定的 $\bar{x}\in U(x_0,y_0)$ ，由 $F'_y(\bar{x},y)>0$ 得到**存在唯一**的 $\bar{y}\in U(y_0,\delta_2)$ 使得

$$F(\bar{x},\bar{y})=0$$

定义 $\bar{y}=f(\bar{x})$ ，则 f 在 $U(x_0,\delta_0)$ 内有定义，且满足前两个条件.

下证 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 内连续. 任取 $\overline{x}\in U(x_0,\delta_0)$ ，记 $\overline{y}=f(\overline{x})$ ，对充分小的 ε

$$F(\overline{x},\overline{y}-\varepsilon)<0<F(\overline{x},\overline{y}+\varepsilon)$$

由 $F(x,y)$ 在上述两点的连续性，存在充分小的 δ' 使得当 $x\in U(\overline{x},\delta')\subset U(x_0,\delta_0)$ 时

$$F(x,\overline{y}-\varepsilon)<0<F(x,\overline{y}+\varepsilon)>0$$

从上面隐函数存在性的证明过程知，当 $x\in U(\overline{x},\delta')$ 时

$$f(x)\in(\overline{y}-\varepsilon,\overline{y}+\varepsilon)$$

最后，若 $F'_x(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内存在且连续，证明 $y=f(x)$ 有连续导数.

任取 $\overline{x}\in U(x_0,\delta_0)$ ，取 Δx 充分小使得 $\overline{x}+\Delta x\in U(x_0,\delta_0)$ ，记

$$\overline{y}=f(\overline{x})\quad\Delta y=f(\overline{x}+\Delta x)-f(\overline{x})$$

由拉格朗日微分中值，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}0&=F(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta y)-F(\overline{x},\overline{y})\\&=F'_x(\overline{x}+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+F'_y(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

又 $F'_y(x,y)\neq 0$ ，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-F'_x(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)}{F'_y(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)}$$

令 $\Delta x\to 0$ ，由 F'_x,F'_y 连续性得到

$$f'(\overline{x})=-\frac{F'_x(\overline{x},f(\overline{x}))}{F'_y(\overline{x},f(\overline{x}))}$$

上式可以看出 $f'(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 连续，证毕.

上述给出的是 $\mathbb{R}^2$ 的情形. 对 $\mathbb{R}^n$ 的情形，结果同样成立

定理 14.4.2 (隐函数存在定理)**.** $F(\boldsymbol{x},y)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\times U(y_0,\delta)$ 内有定义，且

1. $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$
2. $F(\boldsymbol{x},y),F'_y(\boldsymbol{x},y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\times U(y_0,\delta)$ 内连续
3. $F'_y(\boldsymbol{x}_0,y_0)\neq 0$

则存在 δ_0 ，使得 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y=f(\boldsymbol{x})$

1. $y_0=f(\boldsymbol{x}_0)$
2. $F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))=0,\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$
3. 若 $F(\boldsymbol{x},y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\times U(y_0,\delta)$ 内存在各个连续偏导数，则 $y=f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 具有各个连续偏导数，且对 $\forall\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ ，有

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}{F'_y(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}\quad y=f(\boldsymbol{x})$$

14.4.2 方程组隐函数

定理 14.4.3 (隐函数组存在定理)**.** 向量函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=(F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\cdots,F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))$$

在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\times U(\boldsymbol{u}_0,\delta)$ 内有定义，且满足

1. $F_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=0$
2. $F_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 以及它的各个偏导数在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\times U(\boldsymbol{u}_0,\delta)$ 内连续

3. $\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\right|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)} \neq 0$

则存在 δ_0 使得 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内存在唯一的向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$$

满足

1. $\boldsymbol{u}_0 = (f_1(\boldsymbol{x}_0), f_2(\boldsymbol{x}_0), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}_0))$

2. 对 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 有

$$F_j(\boldsymbol{x}, f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})) = 0$$

3. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量函数在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 呢存在连续偏导数，记

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial x_j}\right)_{m\times n} \qquad \boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial u_j}\right)_{m\times m}$$

则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$$

14.4.3 逆映射存在定理

定理 14.4.4 (逆映射存在定理)**.** 记

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的一个 C^1 映射，且在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \neq 0$$

记 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0) \subset D$ 使得 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 到 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0))$ 的 C^1 同胚映射. 其中 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0))$ 是包含 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个区域。

证明 对 $1 \le j \le n$ ，记 $F_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = y_j - f_j(\boldsymbol{x})$ ，考虑

$$\begin{cases} F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ \cdots\cdots \\ F_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

由定理条件，方程组满足隐函数存在定理，因此在 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta_1)$ 内存在一个 n 维向量函数

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))$$

满足 $\boldsymbol{x}_0=(g_1(\boldsymbol{y}_0),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}_0))$ 和

$$\begin{cases} y_1-f_1(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))=0 \\ \cdots\cdots \\ y_n-f_n(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))=0 \end{cases}$$

且 $(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))$ 在 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta_1)$ 内具有各个连续偏导数。上述 n 个等式表明在 $U(\boldsymbol{y_0},\delta_1)$ 内 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的逆映射。

从逆映射存在定理的证明可知，若一个 n 维 n 元向量函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x}))$$

在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall\boldsymbol{x}\in D$ ，$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 非退化，即其 Jacobi 行列式不为零，则局部总存在逆映射，因此 $\boldsymbol{f}$ 必将开集映成开集。另外因为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是连续函数，因此 $\boldsymbol{f}(D)$ 是一个区域。

如果只是要求存在逆映射，而不要求逆映射有连续偏导数，则 Jacobi 行列式非零的条件不是必要条件。

14.5 多元函数的极值

- 一般极值
- 条件极值

14.5.1 一般极值

定理 14.5.1. $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内有定义，$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 。若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取极值且 $f(\boldsymbol{x})$ 在该点关于 x_i 可偏导，则有 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0$ 。特别地，若 $f(\boldsymbol{x})$ 在该点可微，则 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0$.

证明 在定理的条件下一元函数

$$F_i(x_i)=f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$$

在 x_i^0 取到极值，证毕。

对 n 元可微函数 $f(\boldsymbol{x})$ ，若 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0$ ，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的一个**驻点**或**临界点**。因此对可微函数，极值点一定是驻点，但是反命题一般不真。

当可微函数的驻点不是极值点时，该驻点也称为**鞍点**。

类似一元函数，我们也可以用高阶导数来判断驻点是否是鞍点。由于多元函数高阶偏导数复杂性，我们只考虑二阶偏导。

定理 14.5.2. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数，且 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0(\boldsymbol{x}_0\in D)$ ，且 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 满秩，则

1. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值
2. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 负定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极大值
3. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 不取极值

证明 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的充分小邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内有 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\\&+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\\&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2\\&+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\quad(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\to 0)\end{aligned}$$

对 $\forall\boldsymbol{x}\in U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ ，记 $\boldsymbol{x}'=\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$ ，则 $|\boldsymbol{x}'|=1$ 。由于 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x}'^T$ 是 $\{\boldsymbol{x}':|\boldsymbol{x}'|=1\}$ 上的连续函数，且后者是紧集，于是该函数在其上取到最大、最小值 M,m .

1. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定时，对任意非零向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$

   $$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T>0$$

   因此 $m>0$ ，从而存在 $\delta_1\in(0,\delta_0)$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta_1)$ 时

   $$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\\&>f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{m}{4}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2>f(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

   即 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值。

2. 负定同理

3. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，有 $m<0<M$ ，任取 $x_1\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}=m$ ，则对充分小的 $t>0$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+t\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|})&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}mt^2+o(t^2)\\&\le f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{4}mt^2<f(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

同理取 $x_2\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\frac{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0|}=M$ ，则对充分小的 $t>0$ 得到

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+t\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|})&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}Mt^2+o(t^2)\\&\ge f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{4}Mt^2>f(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

我们常用到 $n=2$ 的情况，即

推论 14.5.1. $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数，$(x_0,y_0)\in D$ ，且 $f'(x_0,y_0)=0$ ，记

$$\boldsymbol{H}_f(x_0,y_0)\triangleq\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$$

则

1. $A>0,AC-B^2>0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取极小值
2. $A<0,AC-B^2>0$ 时 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极大值
3. $AC-B^2<0$ 时 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不取极值

14.5.2 条件极值

例 14.5.1. 求 $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ 到原点的最短距离：可令 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。即求 (x,y,z) 在 Γ 时 $f(x,y,z)$ 的最小值。

简化情况，先假设 Γ 是一条平面曲线，被方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定。假定 φ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall(x,y)\in D$ ，$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\bigg|_{(x,y)}$ 的秩为 1 ，再设 $(x_0,y_0)\in\Gamma$ 且是函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 是一个极值点，则由隐函数存在定理，理论上我们可以从 $\varphi=0$ 在附近解出 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ 。

不妨设 $\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}\ne 0$ ，从而存在 $\delta>0$ 使得在 $U(x_0,\delta)$ 内存在 $y=y(x)$ ，满足 $y_0=y(x_0),\varphi(x,y(x))=0$ 。则 x_0 是 $f(x,y(x))$ 的一个通常极值点，从而

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y'(x_0)=0$$

代入 $y'(x_0)=\dfrac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$ 得到

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}$$

现在设 Γ 是下述方程组确定的一条空间曲线

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0\\ \varphi_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

且假设 φ_1,φ_2 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall(x,y,z)\in D$

$$\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}&\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{pmatrix}\right|_{(x,y,z)}$$

的秩为 2 ，则此时同样可以得到，在 $f(x,y,z)$ 的极值点 (x_0,y_0,z_0) 处，存在常数 λ_1,λ_2 使得成立下述方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0\end{cases}$$

对一般情形，可以证明下面的定理

定理 14.5.3. $f(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n(m<n)$ 内具有各个连续偏导数，$\boldsymbol{x}_0\in D$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=0\\ \varphi_2(x)=0\\ \cdots\cdots\\ \varphi_m(x)=0\end{cases}$$

下的极值点，且 $\varphi'(\boldsymbol{x}_0)$ 的秩为 m ，则存在常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0 & i=1,2,\cdots,n \\ \varphi_j(\boldsymbol{x}_0)=0 & j=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

若构造函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x)$ ，则上述条件极值的必要条件形式上化为 F 的通常极值的必要条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0 & i=1,2,\cdots,n \\ \dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \lambda_j}=0 & j=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

上述求条件极值的必要条件的方法称为**拉格朗日乘数法**。

在拉格朗日乘数法中，条件极值问题转化为

$$F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(\boldsymbol{x})$$

的一般极值问题，因此我们用 $F(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Hessi 矩阵来判定驻点 $\boldsymbol{x}_0$ 是否为极值点。可以证明，当 b$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定/负定时，条件极值点 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小值点/极大值点。

当 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，条件极值依然可以取到。

14.6 多元微分学的几何应用

- 空间曲线的切线和法平面
- 曲面的切平面与法线
- 多元凸函数

14.6.1 空间曲线的切线和法平面

不自交的曲线称为**简单曲线**，封闭且没有其它自交点的曲线称为**简单闭曲线**，即 Jordan 曲线。

先考虑较简单的情形，即空间曲线由参数方程

$$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(y) \\ z=z(t) \end{cases}\qquad t\in(\alpha,\beta)$$

给出，且 x, y, z 都是 t 的可微函数，且 $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ 。对这类曲线，其局部总是简单曲线。

考虑过 $t_0 \in (\alpha, \beta)$ 对应的点 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处的切线方程。其是 Γ 上过 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0)$ 的割线当 $t \to y_0$ 的极限位置，于是切线方程

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

从上述方程，若记曲线 $\boldsymbol{h}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，则

$$\boldsymbol{h}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

即为曲线 Γ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处的切向量。

同时，Γ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

即

$$\boldsymbol{h}'(t_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t_0)) = 0$$

其次，我们来讨论两个方程确定的曲线的切线方程。给定

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

其中 $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ 。假定 F_1, F_2 均是 D 上的可微函数，并设 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ，当

$$\begin{pmatrix} F_1'(\boldsymbol{x}_0) \\ F_2'(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}_0}$$

的秩为 2 时，由隐函数组存在定理 14.4.3在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近，其中有两个变量可以确定为第三个变量的函数，从而该方程组能确定一条过 $\boldsymbol{x}_0$ 的曲线 Γ ，且 $\boldsymbol{x}_0$ 附近 Γ 还可以有参数形式 $(x(t), y(t), z(t)), t \in (\alpha, \beta)$ ，其中

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0) = \boldsymbol{x}_0$$

由上面的讨论，曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 的切向量为 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 。因为曲线 Γ 由方程组确定，于是

$$\begin{cases} F_1(x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) = 0 \end{cases}$$

对方程组第一个方程两边关于 t 求导得到

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}y'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}z'(t_0)=0$$

写成内积形式即

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot\left(\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x},\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y},\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}\right)$$

同理

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot\left(\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x},\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y},\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}\right)$$

因此 Γ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的切向量和

$$F_1'(\boldsymbol{x}_0)\times F_2'(\boldsymbol{x}_0)=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

平行，记

$$A=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}\quad B=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}\quad C=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

则 $F_1'(\boldsymbol{x}_0)\times F_2'(\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ ，因此 Γ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处切线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

14.6.2 曲面的切平面与法线

设曲面 $S:F(x,y,z)=0$ ，其中 $F\in C^1(D)$ ，D 为区域，设 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ ，下面求 S 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面和法线方程。

任取 S 上过 (x_0,y_0,z_0) 的光滑曲线 $(x(t),y(t),z(t)),t\in(\alpha,\beta)$ ，则

$$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0\quad\forall t\in(\alpha,\beta)$$

设 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 使得 $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=(x_0,y_0,z_0)$ ，对上述方程两边在 t_0 求导得到

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

注意到 (x',y',z') 是该曲线的切向量，于是上式说明该切向量和向量 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 正交，从而当 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 不是零向量时，上式表明 S 过 (x_0,y_0,z_0) 的任何光滑曲线的切向量和固定向量 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 正交，于是 S 过该点的任何光滑曲线在该点的切线都在平面

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

上，该平面称为 S 在 (x_0,y_0,z_0) 的**切平面**。

另外，直线

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

为 S 在 (x_0,y_0,z_0) 的**法线**。

反之，当 $F'\neq 0$ 时，我们可以证明曲线在该处切平面上任何过该点的直线都是曲面上某光滑曲线的切线（见习题）

现在设 S 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D$$

给出，其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是区域，且三个函数均有连续偏导数。

此时取 S 上两条曲线

$$\begin{cases} x=x(u,v_0) \\ y=y(u,v_0) \\ z=z(u,v_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(u_0,v) \\ y=y(u_0,v) \\ z=z(u_0,v) \end{cases}$$

在 (x_0,y_0,z_0) 处切向量分别为

$$(x'_u(u_0,v_0),y'_u(u_0,v_0),z'_u(u_0,v_0))$$
$$(x'_v(u_0,v_0),y'_v(u_0,v_0),z'_v(u_0,v_0))$$

若这两个向量不平行，其对应的切线将确定 S 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(x_u(u_0,v_0),y'_u(u_0,v_0),z'_u(u_0,v_0))\\&\times(x'_v(u_0,v_0),y'_v(u_0,v_0),z'_v(u_0,v_0))\\&=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\end{aligned}$$

因此当

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}$$

的秩为 2 时

$$A = \left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \quad B = \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \quad C = \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}$$

于是该曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程和法线方程分别为

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$
$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 的曲线，称 $[0,1] \to \mathbb{R}^n$ 的一个连续映射 $\boldsymbol{h}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 为一条曲线。当 $\boldsymbol{h}(t)$ 由连续导数且 $\boldsymbol{h}'(t) \neq 0$ ，称曲线为**光滑曲线**，并称 $\boldsymbol{h}'(t_0)$ 是曲线在 $\boldsymbol{h}(t_0)$ 的**切向量**。类似地，称 $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个曲面，其中 $F(\boldsymbol{x}) \in C^1$ 。当 $F'(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ 时，称 $F'(\boldsymbol{x}_0)$ 为曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**法向量**，并称

$$F'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}(x_i - x_i^0) = 0$$

为曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 的**切平面方程**。

14.6.3 多元凸函数

定义 14.6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域，$f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内有定义，若对 $\forall \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D, \forall t \in (0,1)$ 有

$$f(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2) \leq tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2)$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 是**凸函数**。

定理 14.6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸域，$f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内有二阶连续偏导数，则下列结论等价

1. $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数

2. 对 $\forall \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in D$ ，成立 $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T$

3. 对 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in D$ ，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Hessi 矩阵半正定

Part II

习题

Chapter 1

多元函数的极限和连续

1.1 例题

题目 1.1.1 (p33-4). 证明：不存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的同胚映射.

证明 否则，设 $\boldsymbol{f}(x)$ 是同胚，取 $E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ，$\boldsymbol{f}(E) = \mathbb{R}^2\backslash\{\boldsymbol{f}(0)\}$ ，则 E 是 $\mathbb{R}$ 的不连通集，$\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通集，但连续函数 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 把 $\boldsymbol{f}(E)$ 映到 E ，矛盾.

1.2 习题

题目 1.2.1 (1). 证明 $\mathbb{R}^n$ 中两点间的距离满足三角不等式：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ ，成立 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

证明 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 同理，则即证

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2}$$

令 $p_i = x_i - y_i, q_i = y_i - z_i$ ，则上式等价于

$$\begin{aligned} &\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + \cdots + (p_n + q_n)^2} \leq \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + \cdots + q_n^2} \\ \iff &p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n \leq (p_1^2 + \cdots + p_n^2)(q_1^2 + \cdots + q_n^2) \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式，上式成立，证毕.

题目 1.2.2 (2). 若 $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 ∞ . 现在设点列 $\{\boldsymbol{x}_k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)\}$ 趋于 ∞ ，试判断下列命题是否正确.

1. 对 $\forall i (1 \leq i \leq n)$ ，序列 $\{x_i^k\}$ 趋于 ∞ ；

2. $\exists i_0 (i \le i_0 \le n)$ ，序列 $\{x_{i_0}^k\}$ 趋于 ∞ .

证明

1. 错误，如 $\boldsymbol{x}_k = (k, 0, \cdots, 0)$ ，则 $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，但对 $\forall i (2 \le i \le n)$ ，$\{x_i^k\}$ 趋于 ∞ 不成立.

2. 错误，如 $\boldsymbol{x}_k = (k+(-1)^k k, k-(-1)^k k, 0, \cdots, 0)$ ，则 $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，但 $\{x_1^k\}, \{x_2^k\}$ 广义极限不存在，$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = 0, \forall i (3 \le i \le n)$.

题目 1.2.3 (3)**.** 求下列集合的聚点集

1. $E = \left\{ \left(\dfrac{q}{p}, \dfrac{q}{p}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 : (p,q) = 1, q < p \right\}$ ；
2. $E = \left\{ \left(\ln \left(1 + \dfrac{1}{k} \right)^k, \sin \dfrac{k\pi}{2} \right) : k = 1, 2, \cdots \right\}$ ；
3. $E = \left\{ \left(r \cos \left(\tan \dfrac{\pi}{2} r \right), r \sin \left(\tan \dfrac{\pi}{2} r \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1 \right\}$.

解

1. $E' = \{(x, x, 1) : x \in [0, 1]\}$ ；

2. $E' = \{(1, 0), (1, -1), (1, 1)\}$ ；

3. $E' = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

题目 1.2.4 (4)**.** 求下列集合的内部、外部、边界及闭包：

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 1\}$ ；

2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}$ ；

解

1.
$$
\begin{aligned}
&E^\circ = \emptyset, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, 1) : x, y \ge 0\} \\
&\partial E = \{(x, y, 1) : x, y \ge 0\} \\
&\overline{E} = \partial E
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
&E^\circ = E, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y) : x \ge 0, x^2 + y^2 - 2x \ge 1\} \\
&\partial E = \{(x, y) : x = 0, y^2 \ge 1\} \cup \{(x, y) : x > 0, x^2 + y^2 - 2x = 1\} \\
&\overline{E} = \{(x, y) : x \ge 0, x^2 + y^2 \ge 1\}
\end{aligned}
$$

题目 1.2.5 (5)**.** 设 $\{(x_k, y_k)\} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个点列，判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_k y_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

证明

1. 充分性不成立，如 $x_k = k, y_k = \dfrac{1}{k+1}$ ，则 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中无聚点，而 $\{x_k y_k\}$ 有聚点 1 .
2. 必要性不成立，如 $x_k = \dfrac{1}{k}, y_k = 0$ ，则 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点 0 ，而 $\{x_k y_k\} = \{0\}$ 无聚点.

题目 1.2.6 (6)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，证明

1. $\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$ ；
2. $E' = \overline{E}'$.

证明

1. $E^\circ \subset E, \partial E \subset \overline{E}$ ，下证 $\overline{E} \subset E^\circ \cup \partial E$. 对任意 $x \in \overline{E}$ ，若 $x \in E'$ ，则 $x \in E$ 或 $x \in \partial E$ ；若 $x \in E$ ，则 $x \in E'$ 或 $x \in \partial E$. 证毕.
2. 先证明 $E' \subset \overline{E}'$ ：对任意 $x \in E'$ ，假设 $x \notin \overline{E}'$ ，则存在 $\delta > 0$ 使得 $U(x, \delta) \cap \overline{E} = \emptyset$ ，因为 $\overline{E} = E \cup E'$ ，则 $U(x, \delta) \cap E' = \emptyset$ ，矛盾. 下证 $\overline{E}' \subset E'$ ：对任意 $x \in \overline{E}'$ ，假设 $x \notin E'$ ，则存在 $\delta > 0$ 使得 $U(x, \delta) \cap E = \emptyset$ ，显然与 $x \in \overline{E}'$ 矛盾，证毕.

题目 1.2.7 (7)**.** 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合，证明：

1. 当 Γ 为有限指标集时，成立 $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda}} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^\circ$ ；
2. 对任意指标集，成立 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$.

证明

1.

题目 1.2.8 (8)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，证明：

1. E' 是闭集；
2. ∂E 是闭集.

证明

1. 否则，存在 $x \notin E'$ ，且 x 是 E' 的聚点. 则 x 不是 E 的聚点，即存在 $\delta_x > 0$ ，使得 $U_0(x, \delta_x) \cap \emptyset$. 显然与 x 是 E' 的聚点矛盾，因此 E' 是闭集.

2. 否则，存在 $x_0 \notin \partial E$ ，且 x_0 是 ∂E 的聚点. 则 x_0 是 E 的聚点，否则，存在 $\delta > 0$ 使得 $U_0(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$ ，则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \dfrac{\delta}{2}\right)$ ，与 x_0 是 ∂E 的聚点矛盾. 因为 $x_0 \notin \partial E$ ，因此下列情况之一必定成立

   (a) 存在 $\delta_0 > 0$ ，使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E = \emptyset$. 显然与 x_0 是 E 的聚点矛盾

   (b) 存在 $\delta_0 > 0$ ，使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E^c = \emptyset$. 则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \dfrac{\delta_0}{2}\right)$ ，与 x_0 是 ∂E 的聚点矛盾.

   因此 ∂E 是闭集.

题目 1.2.9 (9)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ ，记 $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$ ，判断下列命题是否为真.

1. E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集时，E_1, E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集；

2. E_1, E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集时，E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集.

证明

1. 当 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，则对 $\forall (x_1, x_2) \in E$ ，存在 $\delta > 0$ 使得 $U((x_1, x_2), \delta) \subset E$ ，于是 $U(x_1, \delta) \subset E_1, U(x_2, \delta) \subset E_2$ ，因此 E_1, E_2 均为开集.

   令 $E = \left\{(x, y) : y = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\right\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，则 $E_1 = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集，此时结论不成立.

2. 令 $E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ ，则 E_1, E_2 均为开集，而 E 不是开集.

   令 $E = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ ，则 E_1, E_2 均为闭集，而 E 不是闭集. 因此两个命题均不成立.

题目 1.2.10 (12)**.** $F \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 $F \subset E$ ，证明：存在开集 O ，使得 $F \subset O \subset \overline{O} \subset E$.

证明 对 $\forall x \in F$ ，存在 $\delta_x > 0$ 使得 $U(x, \delta_x) \subset E$ ，则 $\bigcup\limits_{x \in F} U\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right)$ 是 F 的一个开覆盖，因此存在一个有限子覆盖 $O = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U\left(x_i, \dfrac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ ，满足 $F \subset O \subset E$. 设 $O_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i})$ ，则 $O \subset \overline{O} \subset O_1 \subset E$ ，证毕.