# 数学分析 (III)

# Contents

# Part I

# 笔记

# Chapter 13

# 多元函数的极限和连续

| Chapter | Summary |
|---|---|
| 13.1 | 欧氏空间：把 $\mathbb{R}$ 推广到多维实数空间，为后续在 $\mathbb{R}^n$ 上定义极限和连续奠定基础. |
| 13.2 | 多元函数与向量函数的极限：推广定义多维空间下的极限函数. |
| 13.3 | 多元连续函数：推广多维空间下的连续函数. |

## 13.1 欧氏空间

| Section | Summary |
|---|---|
| 13.1.1 | 开集和闭集：定义和简要性质 |
| 13.1.2 | 欧式空间的基本定理：完备性、闭集套定理、聚点原理、有限覆盖定理. |

### 13.1.1 开集和闭集

**定义 13.1.1** (开集、闭集). $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为开集，若 $E = E^\circ$ . 开集的补集称为闭集

**命题 13.1.1** (开集、闭集性质). $\mathbb{R}^n$ 的开集有以下性质

1. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 是开集

2. 任意开集的并是开集

3. 有限开集的交的开集

4. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 是闭集

5. 有限闭集的并是闭集

6. 任意闭集的交是闭集

7. $E$ 是闭集当且仅当 $E = E'$

8. $\overline{E} = E \cup E'$ 是包含 $E$ 的最小闭集，即一切包含 $E$ 的闭集的交集.

这里任意开集的交不一定是开集，反例如

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U\left(x, \frac{1}{k}\right) = \{x\}$$

是闭集.

对任意闭集的并不一定是闭集，反例如

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\}$$

则 0 是这个集合的一个极限点，且不属于这个集合，因此这个集合不是闭集.

### 13.1.2 欧氏空间的基本定理

**定理 13.1.1** (完备性). 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，即任意 Cauchy 序列的极限在 $\mathbb{R}^n$ 内.

通过 $\mathbb{R}$ 的完备性可以容易得到.

**定理 13.1.2** (闭集套定理). 递减且直径趋于 0 的非空闭集套 $\{F_k\}$ 的极限集是一个点.

**证明** 任取 $x_k \in F_k$ ，对 $\varepsilon > 0$ ，存在 $K$ ，当 $k > K$ 时

$$\operatorname{diam}(F_k) < \varepsilon$$

当 $k'' > k' > K$ 时

$$|x_{k'} - x_{k''}| \leq \operatorname{diam}(F_{k'}) < \varepsilon$$

即 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列，由 $\mathbb{R}^n$ 完备性 $x_0 \in \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ ，且该点列属于闭集，因此 $x_0$ 属于任意闭集，即

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

又因为 $\operatorname{diam}(F_k) \to 0$ ，因此 $x_0$ 唯一，证毕.

**定理 13.1.3** (聚点原理 (Bolzano-Weierstrass 定理)). $\mathbb{R}^n$ 任意有界点列存在收敛子列. 等价形式是 $\mathbb{R}^n$ 任意有界无穷集合存在聚点.

**证明** 每个分量存在收敛子列，依次取子列即可.

**定理 13.1.4** (有限覆盖定理). 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集等价于紧集.

**证明**

1. 必要性：对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，$\{U(0,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个开覆盖，于是存在有界子覆盖，因此 $E$ 是有界集合.

   假设存在 $x_0 \in E', x_0 \notin E$ ，任取 $x \neq x_0, x \in E$ ，则

   $$\bigcup_{x\in E} U(x, r_x) \supset E \quad r_x = \frac{1}{2}|x - x_0|$$

   于是存在

   $$\bigcup_{k=1}^{K} U(x_k, r_{x_k}) \supset E$$

   取 $r_K = \min\{r_k\}_{1\le k\le K}$ ，则

   $$U(x_0, r_K) \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{K} U(x_k, r_{x_k})\right\} = \emptyset$$

   矛盾.

2. 充分性：假设存在 $E$ 的一个开覆盖，其任意有限个开集不能覆盖 $E$ ，对 $E$ 的每个分量不断二分，利用闭集套定理，容易得到矛盾.

## 13.2 多元函数与向量函数的极限

**定义 13.2.1.** $z = f(x,y) : E \to \mathbb{R}$ 在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0) \subset E(\delta_0 > 0)$ 内，对每个固定的 $y \neq y_0$ ，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \phi(y)$ 存在，且 $\lim\limits_{y\to y_0} \phi(y) = A$ ，称 $A$ 为 $f(x,y)$ 趋于 $(x_0,y_0)$ 先 $x$ 后 $y$ 的**累次极限**，记为

$$A = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

**命题 13.2.1** (累次极限和极限的关系). 累次极限都存在的时候极限可能不存在，如

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=1$ ，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

极限存在的时候累次极限不一定存在，如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & xy\neq0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ ，而 $\lim\limits_{x\to0}f(x,y),\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 都不存在，因此累次极限也就无从讨论.

上述反例的问题出在累次极限的第一个趋近下极限可能不存在，我们能证明，若极限本身存在，且第一个趋近下的极限存在，则累次极限存在且等于极限. 即下面的定理.

**定理 13.2.1** (累次极限等于极限的情况). $f(x,y)$ 在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0)$ 上有定义，且

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A, A\in\mathbb{R}\,\mathrm{or}\,\infty$
2. 对 $U_0(y_0,\delta_0)$ 内固定的 $y\neq y_0$ ，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\phi(y)$ 存在.

则

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=A$$

**证明** 对 $A\in\mathbb{R}$ ，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,\delta_0)$ ，当 $(x,y)\in N_0((x_0,y_0),\delta)$ 时

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为第一个趋近下极限存在，在上式两边令 $x\to x_0$ ，则

$$|\phi(y)-A|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

证毕.

## 13.3 多元连续函数

| Section | Summary |
|---|---|
| 13.3.1 | 多元复合向量函数连续性定理 |
| 13.3.2 | 集合连通性：定义了道路连通，在本书中只讨论这一种连通. |
| 13.3.3 | 连续函数性质：推广一元连续函数的三个性质：最值、介值和一致连续. |

### 13.3.1 多元复合向量函数连续性定理

**定理 13.3.1** (多元复合向量函数连续性定理). $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})) : E \to \mathbb{R}^m$ 连续，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{y}), \cdots, g_l(\boldsymbol{y}))$ 在 $\boldsymbol{f}(E)$ 上连续，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $E$ 上连续.

### 13.3.2 集合连通性

**定义 13.3.1** (曲线). $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ，称 $D$ 上的 $n$ 为连续函数

$$\boldsymbol{h}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

为 $\mathbb{R}^n$ 的一条**连续曲线**，简称**曲线**. 也称为 $\mathbb{R}^n$ 的一条**道路**或**路径**.

**定义 13.3.2** (道路连通). $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空，若 $E$ 的任意两点之间都存在连接两点的道路，称 $E$ 是**道路连通**的.

在本课程我们提到的连通性就是上述简单定义的连通，因此之后不说道路连通，都直接简称连通.

连通的开集称为**区域**，若 $D$ 是区域，称 $D \cup \partial D$ 为闭区域.

在多元微积分和一元微积分的对比中，**区域对应开区间，闭区域对应闭区间**.

凸的区域称为**凸域**.

### 13.3.3 连续函数性质

本节推广一元连续函数具有的三个性质：

1. 在闭区间有最值

2. 在区间上有介值

3. 在闭区间上一致连续

在 $\mathbb{R}$ 上，闭区间上的连续函数存在最大、最小值，可以理解为：闭区间上的连续函数的值域是闭区间，这个结论推广到 $\mathbb{R}^n$ 的情形，首先闭区间对应 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，因此我们先证明：连续的向量函数把紧集映到紧集.

**定理 13.3.2.** $E\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集，向量函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中紧集.

**证明** 假设存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subset E$ 使得 $|\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)|=+\infty$ ，由 $E$ 紧性，存在子序列 $\{\boldsymbol{x}_{k_j}\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_j}=\boldsymbol{x}_0\in E$ ，又 $\boldsymbol{f}$ 连续，于是 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_j})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，因此 $\boldsymbol{f}(E)$ 是紧集.

任取 $\boldsymbol{f}(E)$ 的聚点 $\boldsymbol{u}_0$ ，则存在 $\{\boldsymbol{x}_k'\}\subset E$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k')=\boldsymbol{u}_0$ ，由紧性，存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_j}'\}$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_j}'=\boldsymbol{x}_0'\in E$ ，由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0'$ 连续，有

$$\boldsymbol{u}_0=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_j}')=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0')\in\boldsymbol{f}(E)$$

接下来考虑 $m=1$ 的特例，就得到：

**推论 13.3.1** (最值定理)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 连续，则 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧集，于是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上取到最大、最小值.

$\mathbb{R}$ 上连续函数在区间上具有介质性质，该性质成立的充要条件是值域是一个区间，区间在 $\mathbb{R}^n$ 中对应连通集合，因此先证明：连续的向量函数把连通集映到连通集.

**定理 13.3.3.** $E\subset\mathbb{R}^n$ 是连通集，向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的连通集.

**证明** 设 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{f}(E)\subset\mathbb{R}^m$ ，则存在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in E$ 使得

$$\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)\quad j=1,2$$

由于 $E$ 连通，则存在连接 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 的道路 $\boldsymbol{h}(t),t\in[0,1]$ ，容易看出 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}(t))$ 是 $\boldsymbol{f}(E)$ 中连接 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 的一条道路，说明 $\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的连通集.

于是考虑 $m=1$ 的特例就得到

**推论 13.3.2** (介值定理)**.** $E\subset\mathbb{R}^n$ 是连通集，$u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 连续，$u_1,u_2\in f(E),u_1<u_2$ ，对 $\forall c\in(u_1,u_2)$ ，存在 $\boldsymbol{\xi}\in E$ 使得

$$f(\boldsymbol{\xi})=c$$

$\mathbb{R}$ 中在闭区间上连续的函数一致连续，推广到 $\mathbb{R}^n$ ，即在紧集上连续的函数一致连续.

**定理 13.3.4** (一致连续定理)**.** $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集，若向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $E$ 上连续，则在 $E$ 一致连续.

**证明** 否则，假设 $\boldsymbol{f}$ 在 $E$ 不一致连续，则存在两个序列 $\{\boldsymbol{x}_n\},\{\boldsymbol{x}'_n\}\subset E$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}'_n|<\frac{1}{n}\quad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_n)|\geq\varepsilon_0\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

因为 $E$ 是有界闭集，则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 且极限在 $E$ 内，记 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_{n_k}=\boldsymbol{x}_0\in E$ ，则

$$|\boldsymbol{x}_{n_k}-\boldsymbol{x}'_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}'_{n_k}=\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_{n_k}+(\boldsymbol{x}'_{n_k}-\boldsymbol{x}_{n_k}))=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_{n_k}=\boldsymbol{x}_0$$

与 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_k})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_{n_k})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾.

### 13.3.4 同胚映射

**定义 13.3.3** (同胚映射)**.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\boldsymbol{f}(E)$ 是连续的一一对应且其逆映射也连续，则称 $\boldsymbol{f}$ 为 $E\to\boldsymbol{f}(E)$ 的同胚映射. 也称为**变换**.

# Chapter 14

# 多元微分学

| Chapter | Summary |
|---|---|
| 14.1 | 偏导数与全微分：定义多元函数、多元向量函数的偏导数和全微分，说明多元情形下可微和可导之间的区别以及联系. |
| 14.2 | 多元函数求导法 |
| 14.3 | 泰勒公式 |
| 14.4 | 隐函数存在定理 |
| 14.5 | 多元函数的极值 |
| 14.6 | 多元微分学的几何应用 |

## 14.1 偏导数与全微分

| Section | Summary |
|---|---|
| 14.1.1 | 多元连续函数的导数和微分：给出导数、微分在多元情形的定义，阐述二者之间的区别和联系. |
| 14.1.2 | 向量函数的导数和全微分：给出多元向量函数导数和微分的定义，以及和多元连续函数的导数、微分之间的关系. |

### 14.1.1 偏导数与全微分

**定义 14.1.1** (偏导数). 设函数 $u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有定义，$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ ，对 $1\le i\le n$ ，若一元函数

$$f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$$

在 $x_i^0$ 处的导数存在，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $x_i$ 可偏导，导数可记为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\quad f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 内的每一点都关于 $x_i$ 可偏导，将其偏导数记为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\quad f'_{x_i}(\boldsymbol{x})\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

**定义 14.1.2** (方向导数). $u=f(x)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，**单位向量** $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$ 为一方向，如果

$$\lim_{t\to0+0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在，称该极限为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 的**方向导数**，记为 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$ .

**偏导数和方向导数的关系**：设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $x_i$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在并等于 $A$ ，若记 $\boldsymbol{v}_i$ 是第 $i$ 个分量为 1 的单位向量，则 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}_i}=A$ .

**定义 14.1.3** (全微分). 设函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，记 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$ ，称为自变量的**全增量**. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}$ ，若存在仅依赖 $\boldsymbol{x}_0$ 的常数 $A_i$ 使得

$$\Delta f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)\quad |\Delta\boldsymbol{x}|\to0$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并称 $\displaystyle\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分，记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ .

当 $x_i$ 是自变量时，定义 $\mathrm{d}x_i=\Delta x_i$ ，于是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分可以记为

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n A_i\mathrm{d}x_i$$

下面的定理说明在多元情形下，可微能够推出存在各个偏导数，因此可微是比可导更严格的条件. 且全微分和偏导数之间满足

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

**定理 14.1.1.** $f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，微分记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathrm{d}x_i$ ，则

1. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续；
2. $f(\boldsymbol{x})$ 关于 $x_i$ 可偏导，且 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$ .

**证明**

1. 记 $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ ，则 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 等价于 $\Delta\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ ，即 $\Delta x_i \to 0, \forall i (1 \le i \le n)$ ，于是

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} [f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)] = \lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \left[ \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta\boldsymbol{x}|) \right] = 0$$

   即 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

2. 对任意固定的 $i$ ，当 $j \ne i$ 时，令 $x_j = x_j^0$ ，即 $\Delta x_j = 0$ ，此时

$$\Delta\boldsymbol{x} = (0, \cdots, \Delta x_i, 0, \cdots, 0) \quad |\Delta\boldsymbol{x}| = |\Delta x_i|$$

   于是

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0) - f(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left( A_i + \frac{o(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} \right) \\ &= A_i \end{aligned}$$

   从而 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 $x_i$ 可偏导，且 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$ ，证毕.

既然可导是更弱的条件，需要补充什么条件能够从可导推出可微？下面的定理说明，在各个偏导数都连续的时候，函数可微.

**定理 14.1.2.** $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0 \in D$ ，设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内存在各个偏导数，并且这些偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. [1]

证明繁琐，略. 可见课本 P47-P49.

若 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D$ 上关于自变量的各个分量都具有连续偏导数，称 $f(\boldsymbol{x}) \in C^1(D)$ ，也称**连续可微**.

下面的定理给出可微的函数的方向导数和偏导数之间的关系.

---

[1]根据课本习题第一章第十五题，这个条件可以弱化为：有 $n-1$ 个偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

**定理 14.1.3.** $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿 $\boldsymbol{v} = (\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_n)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \cos\theta_i$$

**证明** 由可微性和方向导数定义，得到

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0+0} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} t\cos\theta_i + o(|t|)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \cos\theta_i$$

证毕.

由上述定理，当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $n$ 个偏导数不全为零时，对模长确定的方向向量（不妨设模长为 1 ，即单位方向向量）$f(\boldsymbol{x})$ 沿方向

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\right)^2}} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

的方向导数达到最大值，因此向量 $\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处方向导数达到最大的方向，同时它的模就是该方向的方向导数，于是我们引进梯度的定义.

**定义 14.1.4** (梯度)**.** 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则称向量

$$\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的梯度，记为 $\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$ ，[2]即

$$\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

设 $f, g$ 均是可微函数，则从定义容易推出梯度有以下性质：

1. $\mathrm{grad} C = \mathbf{0}$ ；
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathrm{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{grad} f + \beta \mathrm{grad} g$ ；
3. $\mathrm{grad}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{grad} g + g \cdot \mathrm{grad} f$ ；
4. $\mathrm{grad} \dfrac{f}{g} = \dfrac{1}{g^2}(g \cdot \mathrm{grad} f - f \cdot \mathrm{grad} g)(g \neq 0)$ .

从梯度的定义可以看出，当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，$f(\boldsymbol{x})$ 沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数可以简单记成 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}} = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v}$ .

[2]也常常记为 $\nabla f$ .

### 14.1.2 向量函数的导数与全微分

我们用矩阵的形式来表示向量函数的导数和全微分.

**定义 14.1.5.** 向量函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，对 $\boldsymbol{x}_0\in D$ ，定义 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全增量，如果存在 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(A_{ij})$$

使得 $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)&=(\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0),\cdots,\Delta f_m(\boldsymbol{x}_0))^T\\&=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1(|\Delta\boldsymbol{x}|)\\ \vdots\\ \alpha_m(|\Delta\boldsymbol{x}|)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 中的元素仅依赖于 $\boldsymbol{x}_0$ 而不依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，对于 $\forall j(1\le j\le m)$ ，$\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta\boldsymbol{x}$ ，并且满足 $\lim\limits_{|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha_j(|\Delta\boldsymbol{x}|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$ ，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微或可导，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Fréchet 导数，记作 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 或 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ；$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全微分，记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}$$

若规定 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{x}$ ，则有 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ .

下面讨论如何判断一个向量函数的可微性，以及当它可微时，如何求它的导数.

简单概括，向量函数在某点可微的充要条件是每个分量函数在该点都可微. 把每个分量函数关于每个分量 $x_j$ 的偏导数排成矩阵（称为 Jacobi 矩阵），就得到向量函数的 Fréchet 导数，进而就得到全微分.

**定理 14.1.4.** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在 $D$ 上有定义，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微的充分必要条件是对于 $\forall j(1\le j\le m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，记

$$\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$$

则当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\quad\text{or}\quad\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}$$

**证明**

1. 必要性：设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，从而存在 $m \times n$ 矩阵 $(A_{ji})$ 使得当 $|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0$ 时有

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \Delta f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \Delta f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1i}\Delta x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{mi}\Delta x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1(|\Delta \boldsymbol{x}|) \\ \cdots \\ \alpha_m(|\Delta \boldsymbol{x}|) \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta \boldsymbol{x}$ ，且 $\lim\limits_{|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0} \dfrac{\alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|} = 0$ ，比较上式两边向量的分量，得到：当 $|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0$ 时

$$\Delta f_j(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\Delta x_i + \alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)$$

由多元函数可微定义可知，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$$

2. 充分性：设对 $\forall j (1 \le j \le m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则

$$\Delta f_j(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i + \alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)$$

其中 $\alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)$ 依赖于 $\Delta \boldsymbol{x}$ ，且 $\lim\limits_{|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0} \dfrac{\alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|} = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) &= (\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \Delta f(\boldsymbol{x}_0))^T \\ &= \left(\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)_{m \times n} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(|\Delta \boldsymbol{x}|) \\ \vdots \\ \alpha_m(|\Delta \boldsymbol{x}|) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)$ 满足 $\lim\limits_{|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0} \dfrac{\alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|} = \boldsymbol{0}$ ，由定义 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}$ ，证毕.

当向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 中的每个分量函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处均可微时，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**雅可比矩阵**，记为 $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}_0)$ .

特别地，当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $n$ 维向量函数时，$\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵，此时 $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的行列式称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**雅可比行列式**，记为

$$|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)| \quad \text{or} \quad \left.\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

显然对一个向量函数，如果分量函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处具有各个偏导数，我们就可以形式地定义 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$ . 但是这不能说明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 一定可微.

考虑向量函数可微的条件，容易得到：当 $f_j(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续时，根据前面的定理，得到此时 $f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

另外，若对于 $\forall j(1 \leq j \leq m)$ ，$f_j(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数在区域 $D$ 上连续，称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 上是 $C^1$ 的，记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C^1(D)$ .

特别地，我们称 $\mathbb{R}^n$ 中区域 $D \to \Omega$ 的变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $C^1$ 的，如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C^1(D), \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) \in C^1(\Omega)$ .

最后，把 $f(\boldsymbol{x})$ 看成只有一个分量的多元向量函数，则利用多元向量函数的导数的记号，我们可以得到，当 $f(\boldsymbol{x})$ 可微时

$$f'(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right) = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}) \tag{14.1}$$

## 14.2 多元函数求导法

| Section | Summary |
|---|---|
| 14.2.1 | 导数的四则运算和复合函数求导：介绍复合函数的全微分，推论得到复合向量函数的全微分以及复合函数的导数（这个导数是上一节把多元函数看出一个分量的向量函数下的导数） |
| 14.2.2 | 高阶偏导数：介绍高阶偏导数可交换自变量的条件 |
| 14.2.3 | 一阶微分的形式不变性与高阶微分 |

### 14.2.1 导数的四则运算和复合函数求导

多元函数四则运算的导数和一元函数相同.

下面我么主要考虑复合函数的求导法. 简单概括复合函数求导形式上和一元函数类似.

**定理 14.2.1** (复合函数求导). $f(\boldsymbol{u}) = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有定义，且在 $\boldsymbol{u}_0 \in \Omega$ 处可微，再设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处可微，且 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ ，则 $f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)) = f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

**证明** 证明思路很清晰，因为 $f, \boldsymbol{u}$ 都可微，写出全微分之后，证明 $f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是全微分即可. 由 $f, \boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{x}_0$ 处可微，得到

$$\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta \boldsymbol{x} + \alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|) \quad \frac{\alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|} \to 0$$

$$\Delta f(\boldsymbol{u}_0) = f(\boldsymbol{u}_0 + \Delta \boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{u}_0) = f'(\boldsymbol{u}_0)\Delta \boldsymbol{u} + \beta(|\Delta \boldsymbol{u}|) \quad \frac{\beta(|\Delta \boldsymbol{u}|)}{|\Delta \boldsymbol{u}|} \to 0$$

代入得到

$$\begin{aligned}\Delta f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)) &= f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)) \\ &= f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta \boldsymbol{x} + \gamma(|\Delta \boldsymbol{x}|)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma(|\Delta \boldsymbol{x}|) &= f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)\alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)) + \beta(|\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)|) \\ &= f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)\alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)) + \beta(|\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta \boldsymbol{x} + \alpha(|\Delta \boldsymbol{x}|)|)\end{aligned}$$

然后证明

$$\frac{\gamma(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|} \to 0(|\Delta \boldsymbol{x}| \to 0)$$

即可.

从上述复合函数求导可以推出复合向量函数的求导：

**推论 14.2.1.** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}), \cdots, f_l(\boldsymbol{u}))^T$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 可微,$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 可微，且 $\boldsymbol{u}(D) \subset \Omega$ ，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 在 $D$ 可微，且

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

按照向量函数全微分的定义和上面复合函数求导直接得到.

**推论 14.2.2.** 设 $D, \Omega$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $D \to \Omega$ 的 $C^1$ 变换，则对 $\forall \boldsymbol{x} \in D$ 有

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ；对于 $\boldsymbol{y} \in \Omega$ ，有

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$ . 特别地，当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 时

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $n \times n$ 单位矩阵，$[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$ 为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的逆矩阵. [3]

[3]在第二个式子两边取行列式得到

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} = 1$$

**证明** 由 $C^1$ 变换的定义，得到 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}^{-1}$ 都是可微向量函数，因此

$$(\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}$$

两边对 $\boldsymbol{x}$ 求导数就得到第一个式子. 同理

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{y}$$

两边对 $\boldsymbol{y}$ 求导数就得到第二个式子. 第三个式子在前面基础上显然.

在得到复合函数全微分之后，根据上一节微分和偏导数的关系，我们自然的得到下面的关于复合函数求偏导数的推论：

**推论 14.2.3.** $f(\boldsymbol{u}) = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有定义，且在 $\boldsymbol{u}_0 \in \Omega$ 处可微，再设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义，在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处可微，且 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ ，则对于 $\forall i (1 \le i \le n)$ ，$f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $x_i$ 可偏导，且

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \right)$$

[4]

**证明** 由 14.1得到

$$(f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})))'|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_n} \right)$$

用矩阵形式表示，得到

$$\begin{aligned}
& f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\
\frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}
\end{pmatrix} \\
&= \left( \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} \right), \cdots, \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \right) \right)
\end{aligned}$$

---

[4]此处的 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微这个条件可以减弱成在 $\mathbf{x}_0$ 处存在各个偏导数. 但 $f(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{u}_0$ 处可微不能减弱成存在各个偏导数，例如

$$f(u, v) = \begin{cases} 1 & uv \ne 0 \\ 0 & uv = 0 \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

令 $u, v = t$ ，则 $g(t) = f(t, t)$ 在 $t = 0$ 处不连续不可导.

又因为 $(f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})))'|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)$ ，比较分量即得，证毕.

上述推论给出的求导公式称为**链锁法则**. 对二元形式，设 $z = f(u,v), u = u(x,y), v = v(x,y)$ 都是可微函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

若给出的函数有形式 $z = f(u(x,y), v(x,y))$ ，可以用下列记号

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\frac{\partial u}{\partial x} + f_2'\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'\frac{\partial u}{\partial y} + f_2'\frac{\partial v}{\partial y}$$

其中 $f_i'$ 指的是 $f$ 对第 $i$ 个变量求偏导数.

### 14.2.2 高阶偏导数

设 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上具有各个偏导数. 由定义，其每个偏导数 $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ 作为 $D$ 上的 $n$ 元函数，若它们仍具有各个偏导数，称它们的偏导数为 $f(\mathbf{x})$ 的二阶偏导数. 类似定义更高阶偏导数.

当 $\partial\left(\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)/\partial x_k$ 存在时，将其记为 $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k\partial x_i}, f''_{x_kx_i}f''_{ki}(x)$ .

一个函数的各个高阶偏导数都存在时，改变对自变量分量的求导顺序，高阶偏导数的值也可能改变，如

**例 14.2.1.** 对函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

此时 $f_x'(0,y) = -y, f_y'(x,0) = x$ ，于是

$$f''_{yx}(0,0) = -1 \neq 1 = f''_{xy}(0,0)$$

当高阶偏导数在某点连续，在该点改变自变量顺序，高阶偏导数的值不变. 即下面的定理

**定理 14.2.2.** 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D$ ，且对于 $1\le j<k\le n$ ，$f''_{kj}(\boldsymbol{x}), f''_{jk}(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 内存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则

$$f''_{kj}(\boldsymbol{x}_0) = f''_{jk}(\boldsymbol{x}_0)$$

**证明** 不妨设 $j=1,k=2$ ，记 $\boldsymbol{x}=(x,y,\boldsymbol{x}'),\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,\boldsymbol{x}_0')$ ，对充分小的 $\Delta x,\Delta y$ ，考虑

$$\begin{aligned}I(\Delta x,\Delta y):=&\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(x_0+\Delta x,y_0,\boldsymbol{x}_0')}{\Delta x\Delta y}\\&-\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta x\Delta y}\end{aligned}$$

记

$$g(x)=f(x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f(x,y_0,\boldsymbol{x}_0')$$

$$h(y)=f(x_0+\Delta x,y,\boldsymbol{x}_0')-f(x_0,y,\boldsymbol{x}_0')$$

则由一元函数微分中值定理得到

$$\begin{aligned}I(\Delta x,\Delta y)&=\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x\Delta y}=\frac{g'(x_0+\theta_1\Delta x)}{\Delta y}\\&=\frac{f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y,\boldsymbol{x}_0')-f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0,\boldsymbol{x}_0')}{\Delta y}\\&=f_{yx}''(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y,\boldsymbol{x}_0')\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$ ，同理得到

$$I(\Delta x,\Delta y)=f_{xy}''(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y,\boldsymbol{x}_0')$$

联立两式，利用它们在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的连续性，令 $\Delta x,\Delta y\to 0$ ，得到

$$f_{yx}''(\boldsymbol{x}_0)=f_{xy}''(\boldsymbol{x}_0)$$

对于复合函数的高阶偏导数，和一元的情形一样，不存在一般性的公式，需要逐次求出.

### 14.2.3 一阶微分的形式不变性与高阶微分

因为全微分可以写成偏导数的形式，在每一个偏导数都是可微函数的条件下，我们可以定义更高阶的微分：

**定义 14.2.1** (高阶微分). $D\subset\mathbb{R}^n$ 是区域，函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}\in D$ 处可微，即

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

若每一个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 都仍是可微函数，则称

$$\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k\partial x_i}\mathrm{d}x_k\right)\mathrm{d}x_i$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 的二阶微分，记为 $\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{x})$ . 归纳地得到 $\mathrm{d}^kf(\boldsymbol{x})=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}f(\boldsymbol{x}))$ .

若形式地记 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{x})$ ，当 $f(\boldsymbol{x})$ 的每个 $k$ 阶偏导数都连续，可以用容易记忆的方法记成

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x})$$

特别地，对二元函数 $f(x,y)$ ，若各个 $k$ 阶导数都存在且连续（即高阶偏导可以交换自变量顺序），则

$$\mathrm{d}^k f(x,y)=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\mathrm{d}x^{k-j}\mathrm{d}y^j$$

下面介绍多元函数一阶微分的形式不变性：

**命题 14.2.1** (一阶微分的形式不变性)**.** 设 $f(\boldsymbol{u})=f(u_1,\cdots,u_m)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^m$ 上可微，则 $f(\boldsymbol{u})$ 的微分

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u})=f'(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

此时 $\boldsymbol{u}$ 是自变量.

设 $\boldsymbol{u}=(u_1(\boldsymbol{x}),\cdots,u_m(\boldsymbol{x}))^T$ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上的可微向量函数，且 $\boldsymbol{u}(\Omega)\subset D$ ，则由复合函数求导法则得到

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))=f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}=(u_1'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\cdots,u_m'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x})^T=\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ，因此当 $\boldsymbol{x}$ 是变量，$\boldsymbol{u}$ 是中间变量时我们仍然有：

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{u})=f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f'(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

因为二阶以上的微分不再具有形式不变性，因此多元函数情形也没有高阶微分的形式不变性.

## 14.3 泰勒公式

| **Section** | **Summary** |
|---|---|
| 14.3.1 | 泰勒公式与余项 |
| 14.3.2 | 微分中值 |
| 14.3.3 | Hessi 矩阵 |

### 14.3.1 泰勒公式与余项

**定理 14.3.1** (泰勒公式)**.** $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内具有 $K+1$ 阶连续偏导数，则对 $\forall\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ ，有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=&f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0)\\&+\frac{1}{(K+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K+1} f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})\end{aligned}$$

其中 $\theta\in(0,1)$ .

**证明** 本质上是一元函数的泰勒公式的推广.

构造一元函数

$$\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})\quad t\in[0,1]$$

由复合函数求导公式，$\varphi(t)$ 有 $K+1$ 阶连续导数，因此由一元函数的泰勒公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k+\frac{\varphi^{(K+1)}(\theta t)}{(K+1)!}t^{K+1}$$

其中 $\theta\in(0,1)$ ，注意到

$$\varphi^{(k)}(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})$$

代入即证.

当 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D$ 内有 $K+1$ 阶连续偏导数时，上述定理的余项

$$R_{K+1}(\boldsymbol{h})=\frac{1}{(K+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K+1} f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})$$

称为**拉格朗日余项**.

**推论 14.3.1.** $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内有 $K$ 阶连续偏导数，$\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ ，则

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0)+o(|\boldsymbol{h}|^K)(|\boldsymbol{h}|\to 0)$$

**证明** 由泰勒公式得到

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=&f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0)\\&+\frac{1}{K!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{K}(f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0))\end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ . 记最后的余项为 $R_K(\boldsymbol{h})$ ，则

$$\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \frac{R_K(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^K} = \lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \frac{1}{K!} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{|\boldsymbol{h}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^K (f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$$

这是因为和式每一项系数有界，且 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h}$ 的每个 $K$ 阶偏导数区域 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $K$ 阶偏导数（由条件偏导数连续）.

上述推论的余项 $o(|\boldsymbol{h}|^K)$ 称为**皮亚诺余项**.

由上述推论，若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = P_K(h_1, h_2, \cdots, h_n) + o(|\boldsymbol{h}|^K) \quad (|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

其中 $P_K$ 是 $n$ 元 $K$ 次多项式，则上式必定是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内的泰勒公式.

### 14.3.2 微分中值

在泰勒公式中取 $K = 0$ ，得到

**定理 14.3.2** (拉格朗日微分中值定理). $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且 $\forall t \in [0,1], \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \in D$ ，则

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \\ &= f'(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0,1)$ .

类似一元函数的情形，我们容易得到下面的推论：

**推论 14.3.2.** $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 的各个偏导数均为 0 ，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 为常数函数.

### 14.3.3 Hessi 矩阵

在泰勒公式中令 $K = 1$ ，得到

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h}^T + \frac{1}{2} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T + o(|\boldsymbol{h}|^2) \quad (|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

其中

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0) = \left( \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

称为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 **Hessi 矩阵**

## 14.4 隐函数和逆映射

| Section | Summary |
|---|---|
| 14.4.1 | 单方程隐函数：给出单方程隐函数存在的充分条件 |
| 14.4.2 | 方程组隐函数：给出方程组确定的隐函数存在的充分条件. 此时把每个方程看成向量函数的一个分量函数，则这里讨论的其实是向量函数确定的隐函数存在的充分条件. |
| 14.4.3 | 逆映射存在定理：利用隐函数组存在定理给出一个连续可微映射局部存在逆映射的充分条件. 容易看出本节讨论的都是充分条件. |

### 14.4.1 单方程隐函数

下面的定理给出了隐函数存在的**充分条件**：

**定理 14.4.1** (隐函数存在定理). $F(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 满足

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. $F(x,y),F'_y(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 连续
3. $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

则存在 $\delta_0>0$ ，使得在 $U(x_0,\delta_0)$ 内**存在唯一**满足下述条件的**连续函数** $y=f(x)$

1. $y_0=f(x_0)$
2. $F(x,f(x))=0,\forall x\in U(x_0,\delta_0)$
3. 若 $F'_x(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 连续，则 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 有连续导数，且

$$f'(x)=\frac{-F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

[5][6]

---

[5]该定理确定的隐函数是局部存在的，且定理的结论只给出了存在性，在很多情况下未必能找到解析式 $y=f(x)$ 来表示这个隐函数，如对 Kepler 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

在 $\mathbb{R}$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 无法写出解析式.

[6]因为定理只给出了充分性，因此 $F(x,y)$ 不满足上述条件的时候也可能唯一确定一个隐函数.

**证明** 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)>0$ ,因为 $F'_y(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内连续,则存在 $0<\delta_1,\delta_2<\delta$ 使得

$$F'_y(x,y)>0 \quad \forall (x,y)\in U(x_0,\delta_1)\times U(y_0,\delta_2)$$

固定 $x=x_0$ ，则 $F(x_0,y)$ 是 $U(y_0,\delta_2)$ 内严格上升函数，于是

$$F(x_0,y_0-\delta_2)<0<F(x_0,y_0+\delta_2)$$

且 $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0-\delta),(x_0,y_0+\delta)$ 连续，于是存在 $\delta_0$ 使得

$$F(x,y_0-\delta_2)<0<F(x,y_0+\delta_2) \quad \forall x\in U(x_0,\delta_0)$$

对任意给定的 $\bar{x}\in U(x_0,y_0)$ ，由 $F'_y(\bar{x},y)>0$ 得到**存在唯一**的 $\bar{y}\in U(y_0,\delta_2)$ 使得

$$F(\bar{x},\bar{y})=0$$

定义 $\bar{y}=f(\bar{x})$ ，则 $f$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 内有定义，且满足前两个条件.

下证 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)$ 内连续. 任取 $\overline{x}\in U(x_0,\delta_0)$ ，记 $\overline{y}=f(\overline{x})$ ，对充分小的 $\varepsilon$

$$F(\overline{x},\overline{y}-\varepsilon)<0<F(\overline{x},\overline{y}+\varepsilon)$$

由 $F(x,y)$ 在上述两点的连续性，存在充分小的 $\delta'$ 使得当 $x\in U(\overline{x},\delta')\subset U(x_0,\delta_0)$ 时

$$F(x,\overline{y}-\varepsilon)<0<F(x,\overline{y}+\varepsilon)>0$$

从上面隐函数存在性的证明过程知，当 $x\in U(\overline{x},\delta')$ 时

$$f(x)\in(\overline{y}-\varepsilon,\overline{y}+\varepsilon)$$

最后，若 $F'_x(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内存在且连续，证明 $y=f(x)$ 有连续导数.

任取 $\overline{x}\in U(x_0,\delta_0)$ ，取 $\Delta x$ 充分小使得 $\overline{x}+\Delta x\in U(x_0,\delta_0)$ ，记

$$\overline{y}=f(\overline{x}) \quad \Delta y=f(\overline{x}+\Delta x)-f(\overline{x})$$

由拉格朗日微分中值，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}0&=F(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta y)-F(\overline{x},\overline{y})\\&=F'_x(\overline{x}+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+F'_y(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

又 $F'_y(x,y)\neq 0$ ，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-F'_x(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)}{F'_y(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)}$$

令 $\Delta x \to 0$ ，由 $F_x', F_y'$ 连续性得到

$$f'(\overline{x}) = -\frac{F_x'(\overline{x}, f(\overline{x}))}{F_y'(\overline{x}, f(\overline{x}))}$$

上式可以看出 $f'(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 连续，证毕.

上述给出的是 $\mathbb{R}^2$ 的情形. 对 $\mathbb{R}^n$ 的情形，结果同样成立，即下面的形式:

**定理 14.4.2** (隐函数存在定理). $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内有定义，且

1. $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$
2. $F(\boldsymbol{x}, y), F_y'(\boldsymbol{x}, y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内连续
3. $F_y'(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$

则存在 $\delta_0$ ，使得 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y = f(\boldsymbol{x})$

1. $y_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$
2. $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$
3. 若 $F(\boldsymbol{x}, y)$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内存在各个连续偏导数，则 $y = f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 具有各个连续偏导数，且对 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ ，有

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}'(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{F_y'(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)} \quad y = f(\boldsymbol{x})$$

### 14.4.2 方程组隐函数

**定理 14.4.3** (隐函数组存在定理). 向量函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = (F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \cdots, F_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}))$$

在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \times U(\boldsymbol{u}_0, \delta)$ 内有定义，其中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \quad \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m) \in U(\boldsymbol{u}_0, \delta)$$

且满足

1. $F_j(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$
2. $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 以及它的各个偏导数在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) \times U(\boldsymbol{u}_0, \delta)$ 内连续

3. $\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\right|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)} \neq 0$

则存在 $\delta_0$ 使得 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内存在唯一的向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$$

满足

1. $\boldsymbol{u}_0 = (f_1(\boldsymbol{x}_0), f_2(\boldsymbol{x}_0), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}_0))$

2. 对 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 有

$$F_j(\boldsymbol{x}, f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})) = 0$$

3. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量函数在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 呢存在连续偏导数，记

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial x_j}\right)_{m\times n} \qquad \boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial u_j}\right)_{m\times m}$$

则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$$

### 14.4.3 逆映射存在定理

对可微映射，如何确定其逆映射的存在性？隐函数组存在定理可以给出一个连续可微映射局部存在逆映射的充分条件.

**定理 14.4.4** (逆映射存在定理)**.** 记

$$\boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n) = (f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

是区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 的一个 $C^1$ 映射，且在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 处

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \neq 0$$

记 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ ，则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)\subset D$ 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 到 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0))$ 的 $C^1$ 同胚映射. 其中 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0))$ 是包含 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个区域.

**证明** 对 $1\leq j\leq n$ ，记 $F_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = y_j - f_j(\boldsymbol{x})$ ，考虑

$$\begin{cases} F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ \cdots\cdots \\ F_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

由定理条件，方程组满足隐函数存在定理，因此在 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta_1)$ 内存在一个 $n$ 维向量函数

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))$$

满足 $\boldsymbol{x}_0=(g_1(\boldsymbol{y}_0),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}_0))$ 和

$$\begin{cases} y_1-f_1(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))=0\\ \cdots\cdots\\ y_n-f_n(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))=0\end{cases}$$

且 $(g_1(\boldsymbol{y}),\cdots,g_n(\boldsymbol{y}))$ 在 $U(\boldsymbol{y}_0,\delta_1)$ 内具有各个连续偏导数. 上述 $n$ 个等式表明在 $U(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{0}},\delta_1)$ 内 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的逆映射.

从逆映射存在定理的证明可知，若一个 $n$ 维 $n$ 元向量函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x}))$$

在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall\boldsymbol{x}\in D$ ，$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 非退化，即其 Jacobi 行列式不为零，则局部总存在逆映射，因此 $\boldsymbol{f}$ 必将开集映成开集. 另外因为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是连续函数，因此 $\boldsymbol{f}(D)$ 是一个区域.

如果只是要求存在逆映射，而不要求逆映射有连续偏导数，则 Jacobi 行列式非零的条件不是必要条件.

## 14.5 多元函数的极值

| Section | Summary |
|---|---|
| 14.5.1 | 通常极值问题：多元函数极值点如果可偏导，则偏导数为 0 . 进一步若可微，则梯度为 0 . 对于梯度为 0 的点，通过 Hessi 矩阵的定性来判断该点是不是极值点. |
| 14.5.2 | 条件极值问题：拉格朗日乘数法计算条件极值. |

### 14.5.1 通常极值问题

在定义上，多元函数的极值和一元是类似的，即邻域内的最大、最小值.

对二元的情形，若 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 取到极值，且在 $(x_0,y_0)$ 可微，则在该点的偏导数都为 0 ，即

$$f'(x_0,y_0)=\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$$

类似的，有

**定理 14.5.1.** $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内有定义，$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ . 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取极值且 $f(\boldsymbol{x})$ 在该点关于 $x_i(1\le i\le n)$ 可偏导，则有 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0$ . 特别地，若 $f(\boldsymbol{x})$ 在该点可微，则 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0$ .

**证明** 在定理的条件下一元函数

$$F_i(x_i)=f(x_1^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$$

在 $x_i^0$ 取到极值，因此

$$F_i'(x_i^0)=\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0\quad 1\le i\le n$$

证毕.

对 $n$ 元可微函数 $f(\boldsymbol{x})$ ，若 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0$ ，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的一个**驻点**或**临界点**. 因此对可微函数，极值点一定是驻点，但是反命题一般不真.

当可微函数的驻点不是极值点时，该驻点也称为**鞍点**.

类似一元函数，我们也可以用高阶导数来判断驻点是否是鞍点. 由于多元函数高阶偏导数复杂性，我们只考虑二阶偏导.

**定理 14.5.2.** $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数，且 $f'(\boldsymbol{x}_0)=0(\boldsymbol{x}_0\in D)$ ，且 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 满秩，则

1. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值
2. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 负定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极大值
3. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 不取极值

**证明** 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的充分小邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内有 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\\&\quad+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\\&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2\\&\quad+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)\quad(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\to 0)\end{aligned}$$

对 $\forall \boldsymbol{x} \in U_0(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ ，记 $\boldsymbol{x}' = \dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$ ，则 $|\boldsymbol{x}'| = 1$ . 由于 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x}'^T$ 是 $\{\boldsymbol{x}' : |\boldsymbol{x}'| = 1\}$ 上的连续函数，且后者是紧集，于是该函数在其上取到最大、最小值 $M, m$ .

1. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定时，对任意非零向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T > 0$$

因此 $m > 0$ ，从而存在 $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in U_0(\boldsymbol{x}_0, \delta_1)$ 时

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 + o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)| \\ &> f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{m}{4}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 > f(\boldsymbol{x}_0) \end{aligned}$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值.

2. 负定同理

3. $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，有 $m < 0 < M$ ，任取 $x_1 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\dfrac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\dfrac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|} = m$ ，则对充分小的 $t > 0$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + t\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}mt^2 + o(t^2) \\ &\le f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{4}mt^2 < f(\boldsymbol{x}_0) \end{aligned}$$

同理取 $x_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\dfrac{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\dfrac{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0|} = M$ ，则对充分小的 $t > 0$ 得到

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + t\frac{(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}Mt^2 + o(t^2) \\ &\ge f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{4}Mt^2 > f(\boldsymbol{x}_0) \end{aligned}$$

我们常用到 $n = 2$ 的情况，即：

**推论 14.5.1.** $f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数，$(x_0, y_0) \in D$ ，且 $f'(x_0, y_0) = 0$ ，记

$$\boldsymbol{H}_f(x_0, y_0) \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

则

1. $A > 0, AC - B^2 > 0$ 时，$f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处取极小值

2. $A < 0, AC - B^2 > 0$ 时 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 取极大值

3. $AC - B^2 < 0$ 时 $f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处不取极值

### 14.5.2 条件极值问题

**例 14.5.1.** 求 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 到原点的最短距离：可令 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ . 即求 $(x,y,z)$ 在 $\Gamma$ 上时 $f(x,y,z)$ 的最小值.

简化情况，先假设 $\Gamma$ 是一条平面曲线，被方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定. 假定 $\varphi$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall(x,y)\in D$ ，$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|_{(x,y)}$ 的秩为 1 ，再设 $(x_0,y_0)\in\Gamma$ 且是函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 是一个极值点，则由隐函数存在定理，理论上我们可以从 $\varphi=0$ 在附近解出 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ .

不妨设 $\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$ ，从而存在 $\delta>0$ 使得在 $U(x_0,\delta)$ 内存在 $y=y(x)$ ，满足 $y_0=y(x_0),\varphi(x,y(x))=0$ . 则 $x_0$ 是 $f(x,y(x))$ 的一个通常极值点，从而

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y'(x_0)=0$$

代入 $y'(x_0)=\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$ 得到

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}=0\\\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}=0\end{cases}$$

现在设 $\Gamma$ 是下述方程组确定的一条空间曲线

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=0\\\varphi_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

且假设 $\varphi_1,\varphi_2$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有连续偏导数，且对 $\forall(x,y,z)\in D$

$$\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}&\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{pmatrix}\right|_{(x,y,z)}$$

的秩为 2 ，则此时同样可以得到，在 $f(x,y,z)$ 的极值点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处，存在常数 $\lambda_1,\lambda_2$

使得成立下述方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0\end{cases}$$

对一般情形，可以证明下面的定理

**定理 14.5.3.** $f(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n(m<n)$ 内具有各个连续偏导数，$\boldsymbol{x}_0\in D$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=0\\ \varphi_2(x)=0\\ \cdots\cdots\\ \varphi_m(x)=0\end{cases}$$

下的极值点，且 $\varphi'(\boldsymbol{x}_0)$ 的秩为 $m$ ，则存在常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\dfrac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0 & i=1,2,\cdots,n\\ \varphi_j(\boldsymbol{x}_0)=0 & j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

若构造函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^m\lambda_j\varphi_j(x)$ ，则上述条件极值的必要条件形式上化为 $F$ 的通常极值的必要条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0 & i=1,2,\cdots,n\\ \dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \lambda_j}=0 & j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

上述求条件极值的必要条件的方法称为**拉格朗日乘数法**.

在拉格朗日乘数法中，条件极值问题转化为

$$F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(\boldsymbol{x})$$

的一般极值问题，因此我们用 $F(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Hessi 矩阵来判定驻点 $\boldsymbol{x}_0$ 是否为极值点. 可以证明，当 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 正定/负定时，条件极值点 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小值点/极大值点.

当 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不定时，条件极值依然可以取到.

## 14.6 多元微分学的几何应用

| Section | Summary |
|---|---|
| 14.6.1 | 空间曲线的切线与法平面：对参数方程给出的曲线和两个方程给出的曲线，分别介绍求切线和法平面的方法. |
| 14.6.2 | 曲面的切平面和法线：对单方程给出的曲面和参数方程给出的曲面，，分别介绍求切平面和法线的方法. |
| 14.6.3 | 多元凸函数：给出多元凸函数的定义，在具有二阶连续偏导的情况下，用 Hessi 矩阵半正定来等价凸函数. |

### 14.6.1 空间曲线的切线和法平面

不自交的曲线称为**简单曲线**，封闭且没有其它自交点的曲线称为**简单闭曲线**，即 Jordan 曲线.

先考虑较简单的情形，即空间曲线由参数方程

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(y) \qquad t \in (\alpha, \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$$

给出，且 $x, y, z$ 都是 $t$ 的可微函数，且

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

对这类曲线，其局部总是简单曲线.

在上述条件下，考虑过 $t_0 \in (\alpha, \beta)$ 对应的点 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处的切线方程. 其是 $\Gamma$ 上过 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0)$ 的割线当 $t \to y_0$ 的极限位置，于是切线方程

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

从上述方程，若记曲线 $\boldsymbol{h}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，则

$$\boldsymbol{h}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

即为曲线 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处的切向量.

同时，$\Gamma$ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$$

即

$$\boldsymbol{h}'(t_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t_0))=0$$

其次，我们来讨论两个方程确定的曲线的切线方程. 给定

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

其中 $(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$ . 假定 $F_1,F_2$ 均是 $D$ 上的可微函数，并设 $\boldsymbol{x}_0\in D$ ，当

$$\begin{pmatrix} F_1'(\boldsymbol{x}_0) \\ F_2'(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}_0}$$

的秩为 2 时，由隐函数组存在定理 14.4.3在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近，其中有两个变量可以确定为第三个变量的函数，从而该方程组能确定一条过 $\boldsymbol{x}_0$ 的曲线 $\Gamma$ ，且 $\boldsymbol{x}_0$ 附近 $\Gamma$ 还可以有参数形式 $(x(t),y(t),z(t)),t\in(\alpha,\beta)$ ，其中

$$(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=(x_0,y_0,z_0)=\boldsymbol{x}_0$$

由上面的讨论，曲线在 $\boldsymbol{x}_0$ 的切向量为 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ . 因为曲线 $\Gamma$ 由方程组确定，于是

$$\begin{cases} F_1(x(t),y(t),z(t))=0 \\ F_2(x(t),y(t),z(t))=0 \end{cases}$$

对方程组第一个方程两边关于 $t$ 求导得到

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}y'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}z'(t_0)=0$$

写成内积形式即

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot\left(\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x},\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y},\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}\right)$$

同理

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot\left(\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x},\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y},\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}\right)$$

因此 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的切向量和

$$F_1'(\boldsymbol{x}_0)\times F_2'(\boldsymbol{x}_0)=\left|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{matrix}\right|\Bigg|_{\boldsymbol{x}_0}$$

平行，记

$$A=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}\quad B=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}\quad C=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

则 $F_1'(\boldsymbol{x}_0)\times F_2'(\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ ，因此 $\Gamma$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处切线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

### 14.6.2 曲面的切平面与法线

设曲面 $S:F(x,y,z)=0$ ，其中 $F\in C^1(D)$ ，$D$ 为区域，设 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ ，下面求 $S$ 在 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面和法线方程.

任取 $S$ 上过 $(x_0,y_0,z_0)$ 的光滑曲线 $(x(t),y(t),z(t)),t\in(\alpha,\beta)$ ，则

$$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0\quad \forall t\in(\alpha,\beta)$$

设 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 使得 $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=(x_0,y_0,z_0)$ ，对上述方程两边在 $t_0$ 求导得到

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

注意到 $(x',y',z')$ 是该曲线的切向量，于是上式说明该切向量和向量 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 正交，从而当 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 不是零向量时，上式表明 $S$ 过 $(x_0,y_0,z_0)$ 的任何光滑曲线的切向量和固定向量 $F'(x_0,y_0,z_0)$ 正交，于是 $S$ 过该点的任何光滑曲线在该点的切线都在平面

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

上，该平面称为 $S$ 在 $(x_0,y_0,z_0)$ 的**切平面**.

另外，直线

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

为 $S$ 在 $(x_0,y_0,z_0)$ 的**法线**.

反之，当 $F' \neq 0$ 时，我们可以证明曲线在该处切平面上任何过该点的直线都是曲面上某光滑曲线的切线（见习题）

现在设 $S$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

给出，其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是区域，且三个函数均有连续偏导数.

此时取 $S$ 上两条曲线

$$\begin{cases} x = x(u,v_0) \\ y = y(u,v_0) \\ z = z(u,v_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(u_0,v) \\ y = y(u_0,v) \\ z = z(u_0,v) \end{cases}$$

在 $(x_0, y_0, z_0)$ 处切向量分别为

$$(x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0))$$
$$(x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0))$$

若这两个向量不平行，其对应的切线将确定 $S$ 在 $(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= (x_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0)) \\ &\times (x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)} \end{aligned}$$

因此当

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}$$

的秩为 2 时

$$A = \left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \quad B = \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \quad C = \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}$$

于是该曲面在 $(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程和法线方程分别为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

对 $\mathbb{R}^n$ 的曲线，称 $[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 的一个连续映射 $\boldsymbol{h}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 为一条曲线. 当 $\boldsymbol{h}(t)$ 由连续导数且 $\boldsymbol{h}'(t)\neq 0$ ，称曲线为**光滑曲线**，并称 $\boldsymbol{h}'(t_0)$ 是曲线在 $\boldsymbol{h}(t_0)$ 的**切向量**. 类似地，称 $F(\boldsymbol{x})=F(x_1,\cdots,x_n)=0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个曲面，其中 $F(\boldsymbol{x})\in C^1$ . 当 $F'(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$ 时，称 $F'(\boldsymbol{x}_0)$ 为曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**法向量**，并称

$$F'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}(x_i-x_i^0)=0$$

为曲面在 $\boldsymbol{x}_0$ 的**切平面方程**.

### 14.6.3 多元凸函数

**定义 14.6.1.** $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个凸域，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 内有定义，若对 $\forall\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1\in D,\forall t\in(0,1)$ 有

$$f(t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2)\leq tf(\boldsymbol{x}_1)+(1-t)f(\boldsymbol{x}_2)$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 是**凸函数**.

**定理 14.6.1.** $D\subset\mathbb{R}^n$ 是凸域，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $D$ 内有二阶连续偏导数，则下列结论等价

1. $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数
2. 对 $\forall\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}\in D$ ，成立 $f(\boldsymbol{x})\geq f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T$
3. 对 $\forall\boldsymbol{x}_0\in D$ ，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Hessi 矩阵半正定

[7]

[7]条件 (2) 说明 $u=f(\boldsymbol{x})$ 表示的曲面在任一点的切平面的上方.

# Chapter 15

# 重积分

| Chapter | Summary |
|---|---|
| 15.1 | 重积分的定义 |
| 15.2 | 多元函数的可积性理论与重积分的性质 |
| 15.3 | 化重积分为累次积分 |
| 15.4 | 重积分的变量替换 |
| 15.5 | 广义重积分 |

## 15.1 重积分的定义

| Section | Summary |
|---|---|
| 15.1.1 | 多维空间中集合的体积：定义多维空间集合的体积，并给出可求体积的定义和判断方法。 |
| 15.1.2 | 重积分的定义：定义 $\mathbb{R}^n$ 上的重积分。 |

**例 15.1.1.** 对空间的闭区域 $D$ ，以 $\rho(x,y,z)$ 来刻画物体的密度，则对 $D$ 作分割

$$\Delta = \{\Delta D_1, \cdots, \Delta D_K\} \quad \bigcup_{k=1}^{K} \Delta D_k = D$$

且 $\operatorname{diam}(\Delta D_k)$ 很小（使得 $\rho$ 在 $\Delta D_k$ 上变化不大，近似为常数）则任取 $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta D_k$ ,，记 $\Delta V_k$ 为 $\Delta D_k$ 的体积，作 $\rho(x,y,z)$ 的**黎曼和**

$$\sum_{k=1}^{K} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k$$

若 $\lambda(\Delta) = \max\{\text{diam}(\Delta D_k)\} \to 0$ 时黎曼和存在极限 $m$ ，称 $m$ 为物体的质量。

### 15.1.1 多维空间中集合的体积

我们定义 $n$ **维长方体**

$$A = \{(x_1, \cdots, x_n) : a_j \le x_j \le b_j\}$$

体积为 $V(A) = \prod(b_j - a_j)$ 。本章若无特别说明，所有长方体指的都是上述形式的长方体，即**每个面都和某个坐标平面平行**。

下面我们讨论非空有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的体积的定义。

假设 $E$ 不是一个长方体，考虑 $\mathbb{R}^n$ 中有限个长方体构成的长方体族 $\{A_k\}_{k=1}^K$ ，且假定它们满足条件：

1. $A_j^\circ \cap A_l^\circ = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^K A_k \supset E$

为简便，一下把满足上述条件的长方体族记为 $\mathscr{A}_E$ 。

对每个给定的 $\mathscr{A}_E$ ，记 $m(\mathscr{A}_E)$ 为 $\mathscr{A}_E$ 中完全含于 $E$ 内的长方体体积之和，$M(\mathscr{A}_E)$ 为 $\mathscr{A}_E$ 中和 $E$ 的交非空的长方体的体积之和，显然 $m(\mathscr{A}_E) \le M(\mathscr{A}_E)$ .

设 $\mathscr{A}_E = \{A_k\}_{k=1}^K, \mathscr{A}'_E = \{A'_j\}_{j=1}^J$ 分别为两个满足上述条件的长方体族。若

$$\forall A'_{j_0} \in \mathscr{A}'_E, \exists A_{k_0} \in \mathscr{A}_E, s.t. \quad A'_{j_0} \subset A_{k_0}$$

则称 $\mathscr{A}'_E$ 是 $\mathscr{A}_E$ 的**细分**。此时

$$m(\mathscr{A}_E) \le m(\mathscr{A}'_E) \le M(\mathscr{A}'_E) \le M(\mathscr{A}_E)$$

因此类似定积分的 Darboux 理论的上下积分，我们定义

$$m(E) = \sup m(\mathscr{A}_E) \quad M(E) = \inf M(\mathscr{A}_E)$$

当然这里的 $\sup, \inf$ 都是关于满足条件 (1), (2) 的长方体族 $\mathscr{A}_E$ 取的。

自然地，我们有关于体积的如下定义：

**定义 15.1.1.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集合，若

$$m(E) = M(E)$$

则称 $E$ **可求体积**，称 $m(E) = M(E)$ 是 $E$ 的**体积**。记为 $V(E)$ .

为了刻画可求体积的集合，我们给出下述定理：

**定理 15.1.1.** $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集合，则 $E$ 可求体积的充分必要条件是 $V(\partial E) = 0$ .

**证明**

1. 必要性：若 $E$ 可求体积，则对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在满足上述两个条件的长方体族 $\mathscr{A}^1(E)$ 使得
$$M(\mathscr{A}_E^1) - m(\mathscr{A}_E^1) < \varepsilon$$
取 $\mathscr{A}_E^1$ 中和 $\partial E$ 相交的长方体构成的集合 $\mathscr{A}_{\partial E}^1$ ，则
$$M(\mathscr{A}_{\partial E}^1) = M(\mathscr{A}_E^1) - m(\mathscr{A}_E^1) < \varepsilon$$
从而 $\inf M(\mathscr{A}_{\partial E}) < \varepsilon$ ，于是 $V(\partial E) = 0$ .

2. 充分性：设 $V(\partial E) = 0$ ，则对 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在有限个长方体构成的集合 $\mathscr{A}_{\partial E}^2$ 使得 $M(\mathscr{A}_{\partial E}^2) < \varepsilon$ 。任取集合 $\mathscr{A}_E^2$ ，使得 $\mathscr{A}_{\partial E}^2$ 中长方体都在 $\mathscr{A}_E^2$ 中，则
$$M(\mathscr{A}_E^2) - m(\mathscr{A}_E^2) \le M(\mathscr{A}_{\partial E}^2) < \varepsilon$$
因此 $M(E) = m(E)$ ，证毕。

对 $\mathbb{R}^n$ 的有界集合，若 $V(E) = 0$ ，则称 $E$ 为**零体积集**。

对 $\mathbb{R}^2$ 中可求体积的有界集合 $E$ ，也称可求面积，并记 $V(E) = \sigma(E)$ .[1]

关于 $\mathbb{R}^n$ 有界子集的体积，由上述定理可以得到推论：

**推论 15.1.1.** $A, B$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可求体积的有界集合，则 $A \cup B, A \cap B, A \backslash B$ 可求体积。

**证明** 因为
$$\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B) \quad \partial(A \cap B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$
$$\partial(A \backslash B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$

特别地，对常遇到的区域，容易看出下述结论成立：

**推论 15.1.2.** $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，则 $D$ 可求体积的充要条件是 $\overline{D}$ 可求体积，且当它们可求体积时
$$V(D) = V(\overline{D})$$

最后我们指出：$\mathbb{R}^n$ 中存在**不可求体积的有界闭区域**，构造复杂。

---

[1] 从体积的定义容易看出，若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 体积为零，则对 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $\mathbb{R}^n$ 中有限个长方体 $A_1, \cdots, A_K$ ，使得
$$\bigcup_{k=1}^K A_k^\circ \supset E \quad V\left(\bigcup_{k=1}^K A_k\right) < \varepsilon$$
由有限个长方体组成的集合也称为**简单集合**。

### 15.1.2 重积分的定义

$D \subset \mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域，称

$$\Delta = \{\Delta D_1, \cdots, \Delta D_K\}$$

是 $D$ 的一个**分割**，若 $\Delta$ 满足

1. 每个 $\Delta D_k$ 是 $D$ 的一个可求体积的闭子集

2. $\Delta D_1, \cdots, \Delta D_K$ 两两交集体积为零

3. $$D = \bigcup_{k=1}^{K} \Delta D_k$$

记 $\Delta V_k$ 为 $\Delta D_k$ 的体积，$d_k$ 为 $\Delta D_k$ 的直径，并记 $\lambda(\Delta) = \max\{d_k\}$ .

**定义 15.1.2.** $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在可求体积的有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义，$\Delta$ 为 $D$ 的一个分割，在每个 $\Delta D_k$ 上任取一点 $\xi_k$ ，作黎曼和

$$\sum_{k=1}^{K} f(\xi_k) \Delta V_k$$

若存在常数 $I$ 使得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，对 $D$ 的任何分割 $\Delta$ 和任意选取的 $\xi_k$ ，只要 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时就有

$$\left| \sum_{k=1}^{K} f(\xi_k) \Delta V_k - I \right| < \varepsilon$$

则称 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 上**可积**，并称 $I$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 的 $n$ **重积分**，记为

$$\iint \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \mathrm{d}V \quad \vee \quad \iint \cdots \int_D f(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 称为**被积函数**,$D$ 称为**积分区域**,$x_1, \cdots, x_n$ 称为**积分变量**,$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ 称为**体积元素**。

特别地，当 $n = 2$ 时记 $f(x, y)$ 在 $D$ 的**二重积分**为

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma \quad \vee \quad \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

也称 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为**面积元素**；当 $n = 3$ 称为**三重积分**。

二重积分具有鲜明几何意义。设 $z = f(x, y)$ 定义在可求面积的有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上，再设 $f(x, y)$ 在 $D$ 上连续且为正函数，则二重积分是曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。

特别地，当 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是可求面积的有界闭区域时 $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 $D$ 的面积；$D\subset\mathbb{R}^3$ 是可求体积的有界闭区域时 $\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 等于 $D$ 的体积.[2]

## 15.2 多元函数的可积性理论与重积分的性质

| Section | Summary |
|---|---|
| 15.2.1 | 达布理论：通过达布理论给出重积分可积的充要条件，即振幅可控。并证明连续函数是可积函数类 |
| 15.2.2 | 重积分的性质：类比定积分，给出重积分的性质：线性性、绝对值不等式、分区间积分、中值定理、乘积可积等。 |

### 15.2.1 达布理论

**定理 15.2.1.** $D\subset\mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域，若 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 可积，则 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 有界。

**证明** 否则 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 无界，因为 $D$ 的紧性和有限覆盖定理，存在 $\mathbf{x}_0\in D$ 使得 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 的任意邻域都无界。

此时对任意 $\delta>0$ ，令 $\Delta D_\delta$ 为 $U(\mathbf{x}_0,\delta)\cap D$ 的闭包，则 $\Delta D_\delta$ 的体积 $V(\Delta D_\delta)>0$ [3]

另外，显然存在 $D$ 的分割 $\Delta=\{\Delta D_\delta,\Delta D_1,\cdots,\Delta D_K\}$ ，且 $\lambda(\Delta)\le 2\delta$ ，我们可以选择 $\xi_\delta\in D_\delta$ 使得 $f(\mathbf{x})$ 关于 $\Delta$ 的某些黎曼和绝对值大于任何指定正数。

在本小节，我们总是假定 $D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可求体积的有界闭区域，$f(\mathbf{x})$ 是 $D$ 上有界函数，并记 $M,m$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 的上下确界。

对 $D$ 的分割 $\Delta=\{\Delta D_1,\cdots,\Delta D_K\}$ ，记 $\Delta V_k$ 是 $\Delta D_k$ 的体积，$M_k,m_k$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在 $\Delta D_k$ 的上下确界，称

$$\overline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^K M_k\Delta V_k\quad \underline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^K m_k\Delta V_k$$

为 $f(\mathbf{x})$ 关于分割 $\Delta$ 的**达布大和、达布小和**。我们有下列性质

[2] $n=1$ 时有界闭区域 $D$ 一定是有界闭区间，设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义，上述重积分的定义和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分的定义并不一致，这是因为在定积分中我们需要考虑积分区间的有限长度，而上述重积分不考虑区间的方向，只考虑长度。

[3] 这是因为若 $\mathbf{x}_0$ 是 $D$ 内点，则显然；若 $\mathbf{x}_0$ 是 $D$ 边界点，则因为 $D$ 是 $D^\circ$ 闭包，于是 $U(\mathbf{x}_0,\delta)$ 中必定含有 $D^\circ$ 的点 $\mathbf{x}_1$ ，从而存在 $\delta'\in(0,\delta)$ 使得 $U(\mathbf{x}_1,\delta')\subset\Delta D_\delta$ .

1. $S(\Delta)$ 为函数 $f(\mathbf{x})$ 关于 $\Delta$ 的任意黎曼和，则

$$\underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta) \leq \overline{S}(\Delta)$$

2. 若 $D$ 的两个分割满足 $\Delta_2 \subset \Delta_1$ ，则

$$\underline{S}(\Delta_1) \geq \underline{S}(\Delta_2) \quad \overline{S}(\Delta_1) \leq \overline{S}(\Delta_2)$$

3. 对任意两个分割 $\Delta_1, \Delta_2$ 总有

$$\underline{S}(\Delta_1) \leq \overline{S}(\Delta_2)$$

记

$$I^* = \inf_{\Delta} \overline{S}(\Delta) \quad I_* = \sup_{\Delta} \underline{S}(\Delta)$$

分别称为 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 的**上积分**和**下积分**。

**定理 15.2.2** (达布定理)**.** $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \overline{S}(\Delta) = I^*, \lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \underline{S}(\Delta) = I_*$ .

类似定积分达布理论的讨论，可以得到下面的结论：

**定理 15.2.3.** $f(\mathbf{x})$ 在可求体积的有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有界，则在 $D$ 上可积的充要条件是：对 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $D$ 上的分割 $\Delta$ 使得

$$\sum_{k=1}^{K} \omega_k \Delta V_k < \varepsilon$$

其中 $\omega_k = M_k - m_k$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在 $\Delta D_k$ 上的振幅。

在重积分可积性讨论中，当有界闭区域 $D$ 的边界很复杂时，相应的分割 $\Delta$ 中的每个小集合可能也较复杂，导致对重积分计算公式推导产生困难。

值得指出的是，当 $f(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 $D$ 上可积时，可以证明 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 上的重积分 $I$ 等于一列特别的黎曼和的极限。在该序列中，黎曼和对应的分割有以下形式

$$\Delta' = \{\Delta D_1', \cdots, \Delta D_J', \Delta D_1'', \cdots, \Delta D_L''\}$$

其中 $\Delta D_j$ 为完全落在 $D^\circ$ 的闭区域，$\Delta D_l'' \cap \partial D \neq \emptyset$ 。在 $\Delta D_j'$ 上任取 $\xi_j$ ，则

$$\lim_{\lambda(\Delta')\to 0} \sum_{j=1}^{J} f(\xi_j) \Delta V_j' = I$$

这是因为：$f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 可积，则存在 $M>0$ 使得对 $\forall \mathbf{x}\in D$ ，有 $|f(\mathbf{x})|\leq M$ . 又因为 $f$ 可积性，则存在 $I$ 使得对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对任意 $\lambda(\Delta)<\delta$ 的分割 $\Delta$ 和介点 $\{\xi_k\}$ 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{K} f(\xi_k)\Delta V_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \sum_{k=1}^{K}\omega_k V_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $D$ 可求体积，则存在有限个长方体集合 $\mathscr{A}_D=\{A_k\}_{k=1}^{K'}$ 使得

$$M(\mathscr{A}_D)-m(\mathscr{A}_D)<\frac{\varepsilon}{4M}$$

令 $A_k$ 充分小，使得 $\operatorname{diam}(A_k)<\delta$ ，则 $\Delta=\{A_k\cap D\}_{k=1}^{K'}$ 是 $D$ 的一个 $\lambda(\Delta)<\delta$ 的分割。此时

$$\left|\sum_{k=1}^{K'} f(\xi_k)\Delta V_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

记

$$\Delta'=\{\Delta D_1',\cdots,\Delta D_J',\Delta D_1'',\cdots,\Delta D_L''\}$$

是上述形式的分割，则

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{K'} f(\xi_k)\Delta V_k - \sum_{j=1}^{J} f(\xi_j')\Delta V_j'\right|\\
\leq&\sum_{j=1}^{J}|f(\xi_j)-f(\xi_j')|\Delta V_j' + \left|\sum_{l=1}^{L} f(\xi_l)\Delta V_l''\right|\\
\leq&\sum_{k=1}^{K'}\omega_k\Delta V_k + M\cdot(M(\mathscr{A}_D)-m(\mathscr{A}_D))\\
<&\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

从而

$$\left|\sum_{j=1}^{J} f(\xi_j')\Delta V_j' - I\right| < \varepsilon$$

注意到上述黎曼和只和 $D$ 内部小长方体构成的集合有关，我们将其用下面的推论形式给出：

**推论 15.2.1.** $f(\mathbf{x})$ 在可求体积的有界闭区域 $D$ 上可积，且积分值为 $I$ ，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ，对 $D$ 的满足前述要求的特殊分割

$$\Delta'=\{\Delta D_1',\cdots,\Delta D_J',\Delta D_1'',\cdots,\Delta D_L''\}$$

当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时

$$\left|\sum_{j=1}^{J} f(\xi_j')\Delta V_j' - I\right| < \varepsilon$$

下面讨论可积函数类。

**定理 15.2.4.** $D \subset \mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域，上面的连续函数可积。

**证明** 记 $V(D)=V$ . 因为 $f$ 在 $D$ 一致连续，则 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ ，当 $D_1 \subset D, \operatorname{diam}(D_1)<\delta$ 时，$f(\mathbf{x})$ 在 $D_1$ 的振幅 $\omega(D_1)<\dfrac{\varepsilon}{V}$ .

于是任取 $D$ 的分割 $\{\Delta D_1, \cdots, \Delta D_K\}$ 使得 $\lambda(\Delta)<\delta$ ，则

$$\sum_{k=1}^{K} \omega_k \Delta V_k<\frac{\varepsilon}{V} \sum_{k=1}^{K} \Delta V_k=\varepsilon$$

证毕。[4]

### 15.2.2 重积分的性质

在下述性质中，我们总是假定 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为可求体积的有界闭区域。

**命题 15.2.1.** 1. 函数 $f, g$ 在 $D$ 可积，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，则 $\alpha f+\beta g$ 在 $D$ 可积，且

$$\iint \cdots \int_D(\alpha f+\beta g) \mathrm{d} V=\alpha \iint \cdots \int_D f \mathrm{d} V+\beta \iint \cdots \int_D g \mathrm{d} V$$

2. $f$ 在 $D$ 可积，则 $|f|$ 在 $D$ 可积，且

$$\left|\iint \cdots \int_D f \mathrm{d} V\right| \leq \iint \cdots \int_D|f| \mathrm{d} V$$

3. $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ 为可求体积的有界闭区域，$D_1^{\circ} \cap D_2^{\circ}=\emptyset$ ，且 $D_1 \cup D_2$ 为可求体积的有界闭区域，则 $f$ 在 $D_1 \cup D_2$ 可积的充要条件是 $f$ 在 $D_1, D_2$ 分别可积，且 $f$ 在 $D_1 \cup D_2$ 可积时

$$\iint \cdots \int_{D_1 \cup D_2} f \mathrm{d} V=\iint \cdots \int_{D_1} f \mathrm{d} V+\iint \cdots \int_{D_2} f \mathrm{d} V$$

4. $f, g$ 在 $D$ 可积，且 $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in D$ ，则

$$\iint \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \mathrm{d} V \leq \iint \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \mathrm{d} V$$

5. $f, g$ 在 $D$ 可积，则 $f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})$ 在 $D$ 可积

6. **重积分第一中值定理**：$f$ 在 $D$ 连续，$g$ 在 $D$ 可积且不变号，则存在 $\xi \in D$ 使得

$$\iint \cdots \int_D f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \mathrm{d} V=f(\xi) \iint \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \mathrm{d} V$$

[4] 上述方法可以证明以下结论：$f$ 在可求体积的有界闭区域 $D$ 有界，且除去一个 $D$ 的零体积集外连续，则 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 上可积。

# 15.3 化重积分为累次积分

| Section | Summary |
|---|---|
| 15.3.1 | 化二重积分为累次积分：介绍化二重积分为累次积分的方法，以及累次积分在计算中的意义。 |
| 15.3 2 | 化三重积分为累次积分：介绍化三重积分为累次积分的两个角度。 |

## 15.3.1 化二重积分为累次积分

从简单入手，先考虑矩形区域上的二重积分：

**定理 15.3.1.** $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 可积，且对 $\forall x\in[a,b], I(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在，则定积分 $\displaystyle\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x:=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

**证明** 作 $[a,b]$ 分割

$$\Delta_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_J=b$$

记 $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$ ，对 $[c,d]$ 分割

$$\Delta_y=c=y_0<y_1<\cdots<y_K=d$$

记 $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$ ，则组成 $D$ 的一个分割

$$\Delta=\{\Delta D_{jk}:1\le j\le J,1\le k\le K\}$$

显然 $\lambda(\Delta)\to 0$ 的充要条件是 $\lambda(\Delta_x)\to 0,\lambda(\Delta_y)\to 0$ 。任取 $(\xi_j,\eta_k)\in\Delta D_{jk}$ ，则

$$\sum_{j=1}^J\sum_{k=1}^K m_{jk}\Delta x_j\Delta y_k\le\sum_{j=1}^J\sum_{k=1}^K f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j\Delta y_k\le\sum_{j=1}^J\sum_{k=1}^K M_{jk}\Delta x_j\Delta y_k$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J\sum_{k=1}^K m_{jk}\Delta x_j\Delta y_k&\le\sum_{j=1}^J\left(\int_c^d f(\xi_j,y)\,\mathrm{d}y\right)\Delta x_j\\&=\sum_{j=1}^J I(\xi_j)\Delta x_j\le\sum_{j=1}^J\sum_{k=1}^K M_{jk}\Delta x_j\Delta y_k\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} m_{jk}\Delta x_j\Delta y_k = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} M_{jk}\Delta x_j\Delta y_k$$

$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由定积分定义可知 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且

$$\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{j=1}^{J} I(\xi_j)\Delta x_j = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[5]

在矩形区域上二重积分相当于一个二元函数的极限，而累次极限相当于一个二元函数的累次极限。因此类似极限和累次极限关系，当二重积分存在的时候，不能保证该积分可以用累次积分求出，如在 $[0,1]\times[0,1]$ 中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & x=\dfrac{1}{k}(k\in\mathbb{N}),y\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

此时 $f\left(\dfrac{1}{k},y\right)=\dfrac{1}{k}D(y)$ ，其中 $D(y)$ 是 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数，不可积。

下面讨论 $\mathbb{R}^2$ 上两类特殊有界闭区域上的二重积分问题：

先复习一下 $X,Y$ 型区域的概念。若区域 $D=\{(x,y):a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ ，其中 $\varphi_1,\varphi_2$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $\varphi_1(x)<\varphi_2(x),\forall x\in(a,b)$ ，则称 $D$ 为 **$X$ 型区域**。类似定义 **$Y$ 型区域**。

显然 $X,Y$ 型区域都是可求面积的。对此类区域的二重积分，我们有：

**定理 15.3.2.** $D=\{(x,y):a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ 是 $X$ 型区域，$f$ 在 $D$ 可积，且对 $\forall x\in[a,b]$ ，都有 $I(x)=\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在，则定积分 $\displaystyle\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b I(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

[6]

---

[5]若 $\forall y\in[c,d],J(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在，则类似可以证明 $\displaystyle\int_c^d J(y)\,\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

今后形如 $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的积分为**累次积分**。

[6]当 $f$ 在 $Y$ 型区域

$$D=\{(x,y):c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

**证明** 因为 $\varphi_1, \varphi_2$ 连续，取 $c = \max\{\varphi_1(x)\} - 1, d = \max\{\varphi_2(x)\} + 1$ ，则 $D \subset D_1 = [a,b] \times [c,d]$ 。记

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in D_1 \backslash D \end{cases}$$

则由重积分性质 $\tilde{f}$ 在 $D_1$ 可积，且

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

证毕。

### 15.3.2 化三重积分为累次积分

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是可求面积的有界闭区域，$\varphi(x,y), \psi(x,y)$ 是 $\Omega$ 上的连续函数，且

$$\varphi(x,y) < \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega^\circ$$

记

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

则容易推出 $D$ 是可求体积的闭区域，再设 $f(x,y,z)$ 在 $D$ 连续，则

$$I(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

在 $\Omega$ 可积，且有

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_\Omega I(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

若三重积分的积分区域 $D$ 有以下两种形式：

$$D = \{(x,y,z) : (y,z) \in \Omega, \varphi(y,z) \le x \le \psi(y,z)\}$$

$$D = \{(x,y,z) : (x,z) \in \Omega, \varphi(x,z) \le y \le \psi(x,z)\}$$

---

可积，且对 $\forall y \in [c,d], J(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在时，则定积分 $\int_c^d J(y)\,\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d J(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

类似地也可以化为累次积分。

显然设空间有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 的边界是有限块分片光滑曲面组成，且 $(x,y,z)\in D$ 时 $a\le z\le b$ ，又设对 $\forall z\in[a,b]$ ，平面 $z=z$ 截 $D$ 得到的截面是可求面积的平面闭区域 $D_z$ ，则 $f(x,y,z)$ 在 $D$ 连续时

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}V &= \int_a^b (\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}z\\ &:= \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当平行 $Ozx, Oyz$ 平面的平面截 $D$ 所得截面是可求面积的平面闭区域时，也有类似的公式。

# 15.4 重积分的变量替换

| Section | Summary |
|---|---|
| 15.4.1 | 重积分的变量替换公式：详细介绍了二重积分的极坐标变换和三重积分的柱坐标、球坐标变换，并给出了 $n$ 重积分的坐标变换公式。 |

## 15.4.1 重积分的变量替换公式

本节我们主要证明二重积分的变量替换公式，对于 $n>2$ 的情形不加证明给出变量替换公式。

$\mathbf{T}(u,v)=\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 是可求面积的有界闭区域 $D$ 到可求面积的有界闭区域 $\Omega$ 的 $C^1$ 统配映射，且对 $\forall(u,v)\in D$ 有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$ 。则 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 $D$ 上不改变符号。注意到向量函数的导数定义，$\mathbf{T}(u,v)$ 在 $(u,v)\in D$ 处的导数行列式即 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ .

在一元微积分中 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续不变号时

$$\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = |f(b)-f(a)|$$

类比下我们猜测 $\Omega$ 的面积是 $\displaystyle\iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ .

**定理 15.4.1.** $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界闭区域，$\partial D$ 由有线条分段光滑曲线组成，变换 $\mathbf{T}(u,v)$ : $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 是 $D$ 到有界闭区域 $\Omega$ 的 $C^1$ 同胚映射，且在 $D$ 上处处有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$ ，

再设 $f(x,y)$ 在 $\Omega$ 可积，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

对 $n$ 重积分，有下述定理

**定理 15.4.2.** 设变换

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x_1(\mathbf{u}),\cdots,x_n(\mathbf{u}))$$

是可求体积的有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 到可求体积的有界闭区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 的统配映射，各个偏导数在包含 $D$ 的区域上连续，且在 $D$ 上 $\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,x_n)}\neq 0$ ，再设 $f(\mathbf{x})$ 在 $\Omega$ 可积，则

$$\begin{aligned}&\iint\cdots\int_\Omega f(x_1,\cdots,x)n\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\ =&\iint\cdots\iint_D f(x_1(u_1,\cdots,u_n),x_n(u_1,\cdots,u_n))\cdot\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\end{aligned}$$

## 15.4.2 利用变量替换计算重积分

本小节举例说明如何利用变量替换公式计算重积分。

考虑二重积分变换中的极坐标变换

$$\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}\qquad 0\le r<+\infty\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

的 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|_{(r,\theta)} = r$$

且极坐标变换在正实轴和原点处不是一一映射的，但它是

$$\{(r,\theta):0<r<+\infty,0<\theta<2\pi\}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y):x\ge 0\}$$

的 $C^1$ 同胚映射。

在例题 3.1.9中，尽管极坐标变换不是 $D\to\Omega$ 的同胚，但应用极坐标变换仍可以正确计算 $\sigma(\Omega)$ 。可以用下面的方法来说明该计算的合理性：

对 $\forall\varepsilon>0$ ，记 $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\{(x,y):\varepsilon<x<1,-\varepsilon x<y<\varepsilon x\}$ ，则极坐标变换是

$$D_\varepsilon = \{(r,\theta):\varepsilon\le r\le 1,2\pi-\arctan\varepsilon\le\theta\le\arctan\varepsilon\}\to\Omega_\varepsilon$$

的 $C^1$ 变换，因此

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega) &= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint_{\Omega_\varepsilon} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint_{D_\varepsilon} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 r\,\mathrm{d}r\int_{\arctan\varepsilon}^{2\pi-\arctan\varepsilon}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi\end{aligned}$$

因此，对一个映射在挖掉有线条光滑曲线后的区域之间是 $C^1$ 同胚映射时，可以在原来的闭区域直接用换元。

对三重积分的计算，有下面两种常用变换：

1. **柱坐标变换**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

2. **球坐标变换**

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$$

# Part II

# 习题

# Chapter 1

# 多元函数的极限和连续

## 1.1 例题

**题目 1.1.1** (p33-4)**.** 证明：不存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的同胚映射.

**证明** 否则，设 $\boldsymbol{f}(x)$ 是同胚，取 $E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ，$\boldsymbol{f}(E) = \mathbb{R}^2\backslash\{\boldsymbol{f}(0)\}$ ，则 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 的不连通集，$\boldsymbol{f}(E)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通集，但连续函数 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 把 $\boldsymbol{f}(E)$ 映到 $E$ ，矛盾.

## 1.2 习题

**题目 1.2.1.** 证明 $\mathbb{R}^n$ 中两点间的距离满足三角不等式：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ ，成立 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$ .

**证明** 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 同理，则即证

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2}$$

令 $p_i = x_i - y_i, q_i = y_i - z_i$ ，则上式等价于

$$\begin{aligned} &\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + \cdots + (p_n + q_n)^2} \leq \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + \cdots + q_n^2} \\ \Longleftrightarrow\ & p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n \leq (p_1^2 + \cdots + p_n^2)(q_1^2 + \cdots + q_n^2) \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式，上式成立，证毕.

**题目 1.2.2.** 若 $\lim\limits_{k \to \infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 $\infty$ . 现在设点列 $\{\boldsymbol{x}_k = (x_1^k, \cdots, x_n^k)\}$ 趋于 $\infty$ ，试判断下列命题是否正确.

1. 对 $\forall i (1 \leq i \leq n)$ ，序列 $\{x_i^k\}$ 趋于 $\infty$ ；

2. $\exists i_0(i \le i_0 \le n)$ ，序列 $\{x_{i_0}^k\}$ 趋于 $\infty$ .

**证明**

1. 错误，如 $\boldsymbol{x}_k = (k, 0, \cdots, 0)$ ，则 $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，但对 $\forall i(2 \le i \le n)$ ，$\{x_i^k\}$ 趋于 $\infty$ 不成立.

2. 错误，如 $\boldsymbol{x}_k = (k+(-1)^k k, k-(-1)^k k, 0, \cdots, 0)$ ，则 $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$ ，但 $\{x_1^k\}, \{x_2^k\}$ 广义极限不存在，$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = 0, \forall i(3 \le i \le n)$ .

**题目 1.2.3.** 求下列集合的聚点集

1. $E = \left\{\left(\dfrac{q}{p}, \dfrac{q}{p}, 1\right) \in \mathbb{R}^3 : (p, q) = 1, q < p\right\}$ ；
2. $E = \left\{\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k, \sin\dfrac{k\pi}{2}\right) : k = 1, 2, \cdots\right\}$ ；
3. $E = \left\{\left(r\cos\left(\tan\dfrac{\pi}{2}r\right), r\sin\left(\tan\dfrac{\pi}{2}r\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1\right\}$ .

**解**

1. $E' = \{(x, x, 1) : x \in [0, 1]\}$ ；

2. $E' = \{(1, 0), (1, -1), (1, 1)\}$ ；

3. $E' = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

**题目 1.2.4.** 求下列集合的内部、外部、边界及闭包：

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 1\}$ ；

2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}$ ；

**解**

1. 
$$
\begin{aligned}
&E^\circ = \emptyset, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, 1) : x, y \ge 0\} \\
&\partial E = \{(x, y, 1) : x, y \ge 0\} \\
&\overline{E} = \partial E
\end{aligned}
$$

2. 
$$
\begin{aligned}
&E^\circ = E, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y) : x \ge 0, x^2 + y^2 - 2x \ge 1\} \\
&\partial E = \{(x, y) : x = 0, y^2 \ge 1\} \cup \{(x, y) : x > 0, x^2 + y^2 - 2x = 1\} \\
&\overline{E} = \{(x, y) : x \ge 0, x^2 + y^2 \ge 1\}
\end{aligned}
$$

**题目 1.2.5.** 设 $\{(x_k,y_k)\}\subset\mathbb{R}^2$ 是一个点列，判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

**证明**

1. 充分性不成立，如 $x_k=k, y_k=\dfrac{1}{k+1}$ ，则 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中无聚点，而 $\{x_ky_k\}$ 有聚点 $1$ .
2. 必要性不成立，如 $x_k=\dfrac{1}{k}, y_k=0$ ，则 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点 $0$ ，而 $\{x_ky_k\}=\{0\}$ 无聚点.

**题目 1.2.6.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ ，证明

1. $\overline{E}=E^\circ\cup\partial E$ ；
2. $E'=\overline{E}'$ .

**证明**

1. $E^\circ\subset E,\partial E\subset\overline{E}$ ，下证 $\overline{E}\subset E^\circ\cup\partial E$ . 对任意 $x\in\overline{E}$ ，若 $x\in E'$ ，则 $x\in E$ 或 $x\in\partial E$ ；若 $x\in E$ ，则 $x\in E'$ 或 $x\in\partial E$ . 证毕.
2. 先证明 $E'\subset\overline{E}'$ ：对任意 $x\in E'$ ，假设 $x\notin\overline{E}'$ ，则存在 $\delta>0$ 使得 $U(x,\delta)\cap\overline{E}=\emptyset$ ，因为 $\overline{E}=E\cup E'$ ，则 $U(x,\delta)\cap E'=\emptyset$ ，矛盾. 下证 $\overline{E}'\subset E'$ ：对任意 $x\in\overline{E}'$ ，假设 $x\notin E'$ ，则存在 $\delta>0$ 使得 $U(x,\delta)\cap E=\emptyset$ ，显然与 $x\in\overline{E}'$ 矛盾，证毕.

**题目 1.2.7.** 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合，证明：

1. 当 $\Gamma$ 为有限指标集时，成立 $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda},\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^\circ\subset\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ$ ；
2. 对任意指标集，成立 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^\circ\subset\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ,\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ .

**证明**

1.

**题目 1.2.8.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ ，证明：

1. $E'$ 是闭集；
2. $\partial E$ 是闭集.

**证明**

1. 否则，存在 $x \notin E'$ ，且 $x$ 是 $E'$ 的聚点. 则 $x$ 不是 $E$ 的聚点，即存在 $\delta_x > 0$ ，使得 $U_0(x, \delta_x) \cap \emptyset$ . 显然与 $x$ 是 $E'$ 的聚点矛盾，因此 $E'$ 是闭集.

2. 否则，存在 $x_0 \notin \partial E$ ，且 $x_0$ 是 $\partial E$ 的聚点. 则 $x_0$ 是 $E$ 的聚点，否则，存在 $\delta > 0$ 使得 $U_0(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$ ，则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \dfrac{\delta}{2}\right)$ ，与 $x_0$ 是 $\partial E$ 的聚点矛盾. 因为 $x_0 \notin \partial E$ ，因此下列情况之一必定成立

   (a) 存在 $\delta_0 > 0$ ，使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E = \emptyset$ . 显然与 $x_0$ 是 $E$ 的聚点矛盾

   (b) 存在 $\delta_0 > 0$ ，使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E^c = \emptyset$ . 则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \dfrac{\delta_0}{2}\right)$ ，与 $x_0$ 是 $\partial E$ 的聚点矛盾.

   因此 $\partial E$ 是闭集.

**题目 1.2.9.** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ ，记 $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$ ，判断下列命题是否为真.

1. $E$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集时，$E_1, E_2$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集；

2. $E_1, E_2$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集时，$E$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集.

**证明**

1. 当 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，则对 $\forall (x_1, x_2) \in E$ ，存在 $\delta > 0$ 使得 $U((x_1, x_2), \delta) \subset E$ ，于是 $U(x_1, \delta) \subset E_1, U(x_2, \delta) \subset E_2$ ，因此 $E_1, E_2$ 均为开集.

   令 $E = \left\{(x, y) : y = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，则 $E_1 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集，此时结论不成立.

2. 令 $E = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 < 2\}$ ，则 $E_1, E_2$ 均为开集，而 $E$ 不是开集.

   令 $E = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \le 2\}$ ，则 $E_1, E_2$ 均为闭集，而 $E$ 不是闭集. 因此两个命题均不成立.

**题目 1.2.10.** 构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k, y_k)\}$ ，使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$ .

**解** 令

$$E = \left\{\left(r\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right), r\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1\right\}$$

即可.

**题目 1.2.11.** $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两个非空集合，定义 $E_1, E_2$ 之间的距离如下

$$d(E_1, E_2) = \inf|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x}\in E_1, \boldsymbol{y}\in E_2}$$

1. 举例说明存在不交的开集 $E_1, E_2$ 使得 $d(E_1, E_2) = 0$
2. 举例说明存在不交的闭集 $E_1, E_2$ 使得 $d(E_1, E_2) = 0$
3. 证明若紧集 $E_1, E_2$ 满足 $d(E_1, E_2) = 0$ ，则 $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

**证明**

1. $E_1 = (-1, 0), E_2 = (0, 1)$
2. $E_1 = \{(x, y) : y = 0\}, E_2 = \{(x, y) : y = e^x\}$
3. 则存在 $\{x_n\} \subset E_1, \{y_n\} \subset E_2$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ . 记这个极限为 $t$ ，则 $t \in E_1 \cap E_2$ .

**题目 1.2.12.** $F \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 $F \subset E$ ，证明：存在开集 $O$ ，使得 $F \subset O \subset \overline{O} \subset E$ .

**证明** 对 $\forall x \in F$ ，存在 $\delta_x > 0$ 使得 $U(x, \delta_x) \subset E$ ，则 $\bigcup\limits_{x\in F} U\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right)$ 是 $F$ 的一个开覆盖，因此存在一个有限子覆盖 $O = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U\left(x_i, \dfrac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ ，满足 $F \subset O \subset E$ . 设 $O_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i})$ ，则 $O \subset \overline{O} \subset O_1 \subset E$ ，证毕.

**题目 1.2.13.** 求下列函数定义域

1. $f(x, y, z) = \ln(y - x^2 - z^2)$
2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$
3. $f(x, y, z) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 - z)}{\sqrt{z}}$

**解** 简单题

**题目 1.2.14.** 确定极限是否存在并求出

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y}$ ，其中 $y > x^2$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(x^2 + y^2)$

3. $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty}(x^2+y^2)e^{-(|x|+|y|)}$

4. $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|+|y|}\right)^{x^2/(|x|+|y|)}$

5. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$

6. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}x^{yz}$ ，其中 $x,y,z>0$

7. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\dfrac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

9. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$

**证明**

1. $|\sin(x^3+y^3)|\le|x^3+y^3|$ ，极限为 0

2. 不妨设 $x^2+y^2<1$ ，因为 $\ln(x^2+y^2)=4\ln\sqrt[4]{x^2+y^2}=-4\ln\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$ ，于是

$$|x\ln(x^2+y^2)|=\left|4x\ln\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right|<\left|\frac{4x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right|<\left|\frac{4x}{\sqrt{|x|}}\right|=4|\sqrt{x}|\to0$$

因此极限为 0 .

3. 不妨设 $x^2+y^2>1$ ，则

$$\begin{aligned}|(x^2+y^2)e^{-(|x|+|y|)}|&=|e^{\ln(x^2+y^2)-(|x|+|y|)}|<|e^{4\ln\sqrt[4]{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}|\\&<|e^{4\sqrt[4]{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}|=|e^{4-(\sqrt[4]{x^2+y^2}-2)^2}|\to0\end{aligned}$$

因此极限为 0 .

4. 考虑 $\{(0,k)\},\{(k,0)\}$ ，极限分别为 $1,e$ ，因此极限不存在

5. 考虑 $\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\right\},\left\{\left(0,\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\right\}$ ，极限分别为 $1,0$ ，因此极限不存在

6. 考虑 $\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{\sqrt{k}},\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\},\left\{\dfrac{1}{k!},\dfrac{1}{\sqrt{k}},\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right\}$ ，极限分别为 $(1,0)$ ，因此极限不存在

7. 考虑 $\left\{\left(\dfrac{1}{k},1,\dfrac{1}{k}\right)\right\},\left\{\left(0,1,\dfrac{1}{k}\right)\right\}$ ，极限分别为 $\dfrac{1}{2},0$ ，因此极限不存在

8. 因为

$$\left|\frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leq \left|\frac{xyz}{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}}\right| = \frac{|xyz|^{2/3}}{\sqrt{3}} \to 0$$

因此极限为 0 .

9. 考虑 $\left\{\left(\frac{1}{k},0,0,\cdots\right)\right\},\left\{\left(\frac{1}{k},-\frac{1}{k},0,\cdots\right)\right\}$ ，极限分别为 $1,0$ ，因此极限不存在

**题目 1.2.15.** 给出三元函数累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0} f(x,y,z)$ 的定义，并构造一个三元函数使得 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ 存在但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0} f(x,y,z)$ 不存在.

**解** 只需要在二元累次极限的基础上考虑即可.

$f(x,y,z)$ 在 $N_0((x_0,y_0,z_0),\delta_0)$ 上有定义，且对每个固定的 $x\neq x_0$ 都存在

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z) = \varphi(x)$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ ，则定义

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z) = A$$

累次极限不存在的情况，只需要让 $\varphi(x)$ 不存在即可，考虑

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x+y+z)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{z} & xyz\neq 0 \\ 0 & xyz=0 \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$ ，而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0} f(x,y,z)$ 不存在.

**题目 1.2.16.** $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ，且

$$f(x)\neq 0 \quad \forall x\in U_0(0,\delta_0)$$

证明当 $xy\neq 0$ 时

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$ 不存在

**证明** 考虑让 $(x,y)$ 用两种方法趋近 $(0,0)$ 来得到两个不同的极限.

1. 任取 $x_1\in U_0(0,\delta_0)$ ，因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ，则存在 $x_2\in U_0(0,\delta_0)$ 使得 $|f(x_2)|\in \left(0,\dfrac{|f(x_1)|}{2}\right)$ ，依次类推得到 $\{x_n\}\subset U_0(0,\delta_0)$ 满足

$$|f(x_n)| < \frac{|f(x_{n-1})|}{2^{n-1}} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = 0$$

则 $(x_n, x_n) \to (0,0), (x_{n-1}, x_n) \to (0,0)$ ，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)f(x_n)}{f^2(x_n)+f^2(x_n)} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)f(x_{n-1})}{f^2(x_n)+f^2(x_{n-1})}$$

因此极限不存在

2. 考虑 $(x,y)$ 分别沿着曲线 $y=f^2(x), y=\frac{1}{2}f^2(x)$ 趋近于 $(0,0)$ ，则

$$\lim_{y\to 0+0} \frac{yy}{y^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} = \lim_{y\to 0+0} \frac{y\cdot 2y}{y^2+(2y)^2}$$

因此极限不存在.

**题目 1.2.17.** 构造 $f(x,y)$ 使得对 $k=1,2,\cdots,K$ 有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^k)=0$，但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

**解** 令 $f(x,y)=\dfrac{x^{K+1}}{x^{K+1}+y}$ ，此时

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^k)=0 \quad k=1,2,\cdots,K$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,x^{K+1})=\frac{1}{2}$$

因此极限不存在.

**题目 1.2.18.** $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 除直线 $x=a, y=b$ 外处处有定义，且满足

$$\lim_{y\to b} f(x,y)=g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x,y)=h(y)$$

证明：存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得

1. $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$
2. $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\lim\limits_{y\to b} h(y)=c$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=c$ ，其中 $x\neq a, y\neq b$ .

**证明**

1. 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 一致存在，因此对 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得对 $\forall x_1,x_2\in U_0(a,\delta), y\neq b$ 有

$$|f(x_1,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad |f(x_2,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

又因为 $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = g(x)$ 存在，于是存在 $y_0 \neq b$ 使得

$$|f(x_1,y_0) - g(x_1)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad |f(x_2,y_0) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

于是

$$\begin{aligned}|g(x_1) - g(x_2)| &\leq |g(x_1) - f(x_1,y_0)| + |f(x_1,y_0) - h(y_0)| \\ &\quad + |h(y_0) - f(x_2,y_0)| + |f(x_2,y_0) - g(x_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

于是由 Cauchy 准则得到 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在，记为 $c$ .

2. 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = h(y)$ 一致存在，因此对 $\forall\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta_0 > 0$ ，使得对 $\forall x \in U_0(a,\delta_0), y \neq b$ 有

$$|f(x,y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由上一小问，存在 $x_0 \in U_0(a,\delta_0)$ 使得

$$|g(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为 $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = g(x)$ 存在，于是存在 $\delta > 0$ 使得对 $\forall y \in U_0(b,\delta)$ ，有

$$|f(x_0,y) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}|h(y) - c| &\leq |h(y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - g(x_0)| + |g(x_0) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{y\to b} h(y) = c$ .

3. 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = h(y)$ 一致存在，因此对 $\forall\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta_1 > 0$ ，使得对 $\forall x \in U_0(a,\delta_1), y \neq b$ 有

$$|f(x,y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由上一小问，存在 $\delta_2 > 0$ 使得对 $\forall y \in U_0(b,\delta_2)$ 有

$$|h(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$|f(x,y) - c| \leq |f(x,y) - h(y)| + |h(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

证毕.

**题目 1.2.19.** $f(x) \in C([0,1])$ ，$g(y)$ 在 $[0,1]$ 有唯一的第一类间断点 $y_0 = \frac{1}{2}$ . 求 $F(x,y) = f(x)g(y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 的全体间断点.

**解** 容易得到 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 有界，因此全体间断点为

$$\left\{\left(x, \frac{1}{2}\right) : f(x) \neq 0, x \in [0,1]\right\}$$

**题目 1.2.20.** $f(x,y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上定义，且对固定的 $x$ 是 $y$ 的连续函数，对固定的 $y$ 是 $x$ 的连续函数，证明若 $f$ 满足下列条件之一，则是连续函数

1. 对固定的 $x$ ，$f$ 是 $y$ 的单调上升函数
2. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $y_1, y_2 \in [0,1]$ 且 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$$

**证明**

1. 任取 $(x_0, y_0)$ ，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，对固定的 $x_0$ ，$f$ 关于 $y$ 连续，则存在 $y_1 < y_0 < y_2$ 使得
$$|f(x_0,y_0) - f(x_0,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x_0,y_0) - f(x_0,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
对固定的 $y_1, y_2$ ，存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时
$$|f(x,y_1) - f(x_0,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x,y_2) - f(x_0,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
又因为对任意的 $x$ 和 $y \in [y_1, y_2]$ 有
$$f(x,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x,y_2)$$
于是对 $x \in U(x_0,\delta), y \in [y_1, y_2]$ 有
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \max\{|f(x,y_1) - f(x_0,y_0)|, |f(x,y_2) - f(x_0,y_0)|\}$$
不妨设 $\max\{|f(x,y_1) - f(x_0,y_0)|, |f(x,y_2) - f(x_0,y_0)|\} = |f(x,y_1) - f(x_0,y_0)|$ ，此时
$$|f(x,y_1) - f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y_1) - f(x_0,y_1)| + |f(x_0,y_1) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
因此
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$
证毕.

2. 因为固定 $y$ ，$f$ 对 $x$ 是连续函数，因此对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ ，使得

$$|f(x_0,y_0)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in U(x_0,\delta)$$

由题设条件，存在 $\delta'>0$ 使得

$$|f(x,y_0)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall y\in U(y_0,\delta')$$

因此对 $\forall x\in U(x_0,\delta),y\in U(y_0,\delta')$ 有

$$\begin{aligned}|f(x_0,y_0)-f(x,y)|&\le|f(x_0,y_0)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x,y)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

证毕.

**题目 1.2.21.** $E\subset\mathbb{R}^n$ ，证明向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处连续的充要条件是对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)$ 内连续的函数 $h(\boldsymbol{y})$ ，$h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

**证明**

1. 充分性：若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不连续，则其某个分量 $f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不连续. 令 $h(\boldsymbol{y})=y_j$ ，其中 $y_j$ 为 $\boldsymbol{y}$ 的第 $j$ 个分量，则 $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不连续，矛盾

2. 必要性：由多元复合向量函数的连续性定理 13.3.1即可证明.

**题目 1.2.22.** $U\subset\mathbb{R}^n$ 是非空开集，证明 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 在 $U$ 连续的充要条件是开集的原像是开集，即对任意开集 $E\subset\mathbb{R}^m$ ，$\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

**证明**

1. 充分性：假设 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不连续，则存在 $\varepsilon>0$ 使得对 $\forall\delta>0$ 都存在 $\boldsymbol{x}_1\in U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\notin U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$ ，则开集 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$ 的原像存在孤立点 $\boldsymbol{x}_0$ ，矛盾.

2. 必要性：假设开集 $U_1\subset\mathbb{R}^m$ 的原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(U_1)$ 存在孤立点 $\boldsymbol{x}_0$ ，因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 属于开集 $U_1$ ，因此存在 $\varepsilon>0$ 使得 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)\subset U_1$ . 因为 $\boldsymbol{f}$ 连续，则存在 $\delta>0$ 使得

$$\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0,\delta))\subset U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)\subset U_1$$

于是 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset\boldsymbol{f}^{-1}(U_1)$ ，与 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{f}^{-1}(U_1)$ 的孤立点矛盾.

**证明** $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界区域，$z=f(x,y)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数，且对 $\forall(x,y)\in D$ ，有 $f(x,y)>0$ . 再设 $z=g(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有定义，且存在 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $g(x_0,y_0)>0$ ，以及对 $\forall(x,y)\in\overline{D}\backslash\{(x_0,y_0)\}$ ，有 $f(x,y)=g(x,y)$ ，问

1. $g(x_0,y_0)$ 满足什么条件时 $\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0<z<g(x,y)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的开集

2. $g(x_0,y_0)$ 满足什么条件时 $\{(x,y,z):(x,y)\in \overline{D}, 0\leq z\leq g(x,y)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的闭集

**证明** 对第一问，当 $g(x_0,y_0)>f(x_0,y_0)$ 时，要考虑的集合在三维空间内等价于在 $(x_0,y_0)$ 部分有一条垂直向上的线段，这个线段显然不是开集的部分.

同理，对第二问，当 $g(x_0,y_0)<f(x_0,y_0)$ 时，要考虑的集合在三维空间内在 $(x_0,y_0)$ 部分向下凹进去一个线段，导致这个集合的补集多出来这样一个线段，导致补集不是一个开集.

1. 记要考虑的集合为 $A$ ，当 $g(x_0,y_0)>f(x_0,y_0)$ 时，则存在 $z\in(f(x_0,y_0),g(x_0,y_0))$ ，此时 $(x_0,y_0,z)$ 不是 $A$ 的内点，因此 $g(x_0,y_0)\leq f(x_0,y_0)$ .

2. 同理此时 $g(x_0,y_0)\geq f(x_0,y_0)$ .

**题目 1.2.23.** $E=\{(x,y):x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\}$ ，证明 $E$ 可数，且 $\mathbb{R}^2/E$ 是连通集.

**证明** 因为 $\mathbb{Q}$ 可数，且可数个可数集的笛卡尔积可数，因此 $E$ 可数.

因为 $[0,2\pi]\sim[0,1]\sim\mathbb{R}$ 不可数，因此从 $\mathbb{R}^2\backslash E$ 任意一点引出的射线个数是不可数的. 任取 $A,B\in\mathbb{R}^2$ ，记从它们引出的射线的集合分别为 $U,V$ ，则 $U,V$ 不可数，又因为 $E$ 可数，因此 $U,V$ 分别存在不可数的子集 $U',V'$ 使得其中的射线不经过 $E$ 的点，任取 $\alpha\in U,\beta\in V$ ，它们交点为 $P$ ，则折线 $A-P-B$ 就是连接 $A,B$ 的道路.

**题目 1.2.24.** $f\in C([0,1]\times[0,1])$ ，最大、最小值为 $M,m$ ，证明对 $\forall c\in(m,M)$ 存在无穷多个 $(\xi,\eta)\in D$ 使得

$$f(\xi,\eta)=c$$

**证明** 不妨设 $f(x_1,y_1)=m, f(x_2,y_2)=M$ ，则任取道路 $\gamma:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ 使得

$$\gamma(t)\in[0,1]\times[0,1]\quad \gamma(0)=(x_1,y_1),\gamma(1)=(x_2,y_2)$$

显然存在无穷多个只在 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 有交点的上述 $\gamma$ ，对每个 $\gamma$ 都有 $f(\gamma(t))\in C([0,1])$ ，于是存在 $t_0\in[0,1]$ 使得 $f(\gamma(t_0))=c$ ，因为每个 $\gamma$ 除了端点不相交，因此每个 $\gamma(t_0)$ 各不相同，证毕.

**题目 1.2.25.** $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 非退化矩阵，证明存在 $\lambda>0$ 使得对 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 有 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\geq\lambda|\boldsymbol{x}|$ .

**证明** 当 $\boldsymbol{x}=0$ 时结论显然. 当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时 $\hat{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ 是单位向量，设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T$ ，则

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|=\begin{bmatrix}\alpha_1\boldsymbol{x}\\ \alpha_2\boldsymbol{x}\\ \vdots\\ \alpha_n\boldsymbol{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\hat{\boldsymbol{x}}\\ \alpha_2\hat{\boldsymbol{x}}\\ \vdots\\ \alpha_3\hat{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}|\boldsymbol{x}|:=f(\hat{\boldsymbol{x}})|\boldsymbol{x}|$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 非退化，于是 $f(\hat{\boldsymbol{x}})$ 恒成立，又因为 $f$ 在 $\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|=1\}$ 连续，于是存在 $\lambda$ 使得

$$f(\hat{\boldsymbol{x}})\geq\lambda\quad\forall|\hat{\boldsymbol{x}}|=1$$

证毕.

**题目 1.2.26.** $E\subset\mathbb{R}^n$ ，证明 $f(\boldsymbol{x})=\inf|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{y}\in E}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 一致连续.

**证明** 对 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y}\in E$ 有

$$|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$$

则

$$f(\boldsymbol{x}_2)\leq|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$$

即

$$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}|\geq f(\boldsymbol{x}_2)-|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$$

因为上式对任意 $\boldsymbol{y}\in E$ 都成立，于是

$$f(\boldsymbol{x}_1)\geq f(\boldsymbol{x}_2)-|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$$

同理 $f(\boldsymbol{x}_2)\geq f(\boldsymbol{x}_1)-|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$ ，于是

$$|f(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x}_2)|\leq|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$$

证毕.

**题目 1.2.27.** 证明 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在 $\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0\}$ 上不一致连续.

**证明** 取 $\varepsilon=1$ ，对 $\forall\delta>0$ ，存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\dfrac{1}{k}<\delta$ ，则 $\left|\left(k,\dfrac{1}{k}\right)-(k,0)\right|<\delta$ ，且

$$f\left(k,\frac{1}{k}\right)-f(k,0)=1\geq\varepsilon$$

证毕.

**题目 1.2.28.** 用有限覆盖定理和聚点原理分别证明 $\mathbb{R}^n$ 中紧集上连续函数一致连续.

**证明**

1. 有限覆盖定理：对 $f \in C(E), E \subset \mathbb{R}^n$ ，对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E$ ，存在 $\delta_x > 0$ 使得
$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x' \in U(x, \delta_x)$$
此时
$$\bigcup_{x \in E} U\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$$
是 $E$ 的开覆盖，因为 $E$ 是紧集，于是存在 $n$ 使得
$$\bigcup_{i=1}^{n} U\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \supset E$$
则令 $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2}\right\}_{1 \le i \le n}$ ，对 $\forall y \in U(x, \delta)$ 有
$$x \in U\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \subset U(x_i, \delta_{x_i}) \implies y \in U(x_i, \delta_{x_i})$$
从而
$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
证毕.

2. 聚点原理：假设紧集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$ 不一致连续，则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 使得
$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \quad |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$
取 $\{x_k\}, \{y_k\}$ 的收敛子列，则其极限 $x_0, y_0$ 相等，与 $|f(x_0) - f(y_0)| \ge \varepsilon$ 矛盾，证毕.

**题目 1.2.29.** 证明：$f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ 一致连续的充要条件是存在 $\overline{U(0,1)}$ 上的连续函数 $g(\boldsymbol{x})$ 使得
$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in U(0,1)$$

**证明**

1. 充分性：因为 $\overline{U(0,1)}$ 是紧集，则 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\overline{U(0,1)}$ 一致连续，于是在 $U(0,1)$ 一致连续.

2. 必要性：对任意单位向量 $\boldsymbol{x}$ ，存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subset U(0,1)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$ ，因为 $f$ 在 $U(0,1)$ 一致连续，则 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)$ 收敛，记

$$g(\boldsymbol{x})=\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)$$

则对任意满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}'_k=\boldsymbol{x}$ 的 $\{\boldsymbol{x}'_k\}\subset U(0,1)$ ，因为 $f$ 在 $U(0,1)$ 一致连续，因此

$$|\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)-\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}'_k)|\le K\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}'_k|=0$$

其中 $K$ 是 $f$ 决定的常数. 此时补充定义 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in U(0,1)$ ，则 $g$ 是 $\overline{U(0,1)}$ 上的连续函数.

**题目 1.2.30.** $E\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，$D\subset E$ 称为 $E$ 的一个**分支**，若 $D$ 是区域，且对任何区域 $D'\subset E$ ，只要 $D\cap D'\neq\emptyset$ ，总有 $D'\subset D$ . 证明 $\mathbb{R}^n$ 中任何开集都是可数个分支的并.

**证明** 任意区域包含至少一个有理点，因此不相交的区域可数. 结论显然.

**题目 1.2.31.** 构造 $\Delta=\{(x,y):x^2+y^2<1\}\to\mathbb{R}$ 的同胚映射.

**解** $f(x,y)=\left(\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ .

# Chapter 2

# 多元微分学

## 2.1 例题

**题目 2.1.1** (63-1). $u = e^{x^2+y^2+z^2}, z = x^2 \sin y$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ .

**解** 对 $x$ 求偏导的时候，$y$ 关于 $x$ 是常数，$z$ 关于 $x$ 是函数，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

同理对 $y$ 求偏导的时候，$x$ 关于 $y$ 是常数，$z$ 关于 $y$ 是函数，因此

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (2y + x^4 \sin 2y) \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

**题目 2.1.2** (64-2). $u = f\left(xy, \dfrac{y}{x}, yz\right)$ ，并设 $f$ 是可微函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ .

**解** 因为不知道 $f$ 的具体解析式，即 $f(k_1, k_2, k_3)$ 和 $k_1, k_2, k_3$ 之间的关系，采用记号 $f_i'$ （$f$ 对第 $k_i$ 个分量的偏导）来表示偏导数.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= f_1' \frac{\partial (xy)}{\partial x} + f_2' \frac{\partial (y/x)}{\partial x} + f_3' \cdot 0 = y f_1' - \frac{y}{x^2} f_2' \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= f_1' \frac{\partial (xy)}{\partial y} + f_2' \frac{\partial (y/x)}{\partial y} + f_3' \frac{\partial (yz)}{\partial y} = x f_1' + \frac{1}{x} f_2' + z f_3' \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= f_1' \cdot 0 + f_2' \cdot 0 + f_3' \frac{\partial (yz)}{\partial z} = y f_3'
\end{aligned}$$

**题目 2.1.3** (66-4). $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, , g_m(\boldsymbol{x}))$ 为 $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的可微向量函数，证明

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^T]' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^T]' + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T]'$$

**证明** 令 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T\\(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T\end{pmatrix}=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}),g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_m(\boldsymbol{x}))^T$ ，则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 是 $D\to\mathbb{R}^{2m}$ 可微函数.

记 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_{2m})^T$ ，令 $G(\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i=1}^{m}y_iy_{m+i}$ ，则 $G(\boldsymbol{y})$ 是 $\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$ 的可微函数，容易验证

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))^T=G(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$$

由链锁法则即证.

**题目 2.1.4** (67-6). $u=f(x-\lambda t)$ ，$\lambda$ 是常数，$f$ 是 $\mathbb{R}$ 的可微函数，证明

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

且上述方程的解一定具有形式 $u=g(x-\lambda t)$ ，其中 $g$ 是任意 $\mathbb{R}$ 中可微函数.

**证明** 记 $y=x-\lambda t$ ，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\lambda f'(y)\\\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=f'(y)\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

设可微函数 $u=u(x,t)$ 是上述方程的解，作变量替换 $\begin{cases}x=y+\lambda t\\z=t\end{cases}$ ，得到

$$u(x,t)=u(y+\lambda z,z):=u_1(y,z)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\\\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial y}\end{aligned}$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial z}=0$$

说明 $u_1(y,z)$ 和 $z$ 无关，即 $u_1=g(y)$ ，即 $u=g(x-\lambda t)$ ，其中 $g$ 是任意可微函数.

**题目 2.1.5** (71-8). $u=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$ ，求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ （假定二阶偏导数都连续）

**解** 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'$，则链锁法则得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=y^2f_{11}''-\frac{y^2}{x^2}f_{12}''-\frac{y^2}{x^2}f_{12}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}f_2'\\&=y^2f_{11}''-\frac{2y^2}{x^2}f_{12}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}f_2'\\\frac{\partial u}{\partial x\partial y}&=f_1'+xyf_{11}'+\frac{y}{x}f_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{xy}{x^2}f_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''\\&=xyf_{11}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'\end{aligned}$$

**题目 2.1.6.** $u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

求 $f(r)$ .

**解** 求出二阶偏导代入得到

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$$

即

$$(r^2f'(r))'=r^2f''(r)+2rf'(r)=0$$

因此存在常数 $C'$ 使得

$$f'(r)=\frac{C'}{r^2}$$

对两边求不定积分得到

$$f(r)=-\frac{C'}{r}+C_1=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C_1}$$

其中 $C=-C',C_1$ 为常数.

**题目 2.1.7** (74-10)**.** $f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$ 有二阶连续偏导数，求所有二阶偏导数.

**解** 我们在 2.1.5用逐次求导的方法得到偏导数. 现在我们直接通过二阶微分来求，因为

$$\mathrm{d}f=f_1'\mathrm{d}(xy)+f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f &= \left(f_{11}'\mathrm{d}(xy) + f_{12}''\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\mathrm{d}(xy) + f_1'\mathrm{d}^2(xy) \\
&+ \left(f_{21}''\mathrm{d}(xy) + f_{22}''\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) + f_2'\mathrm{d}^2\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \left(y^2 f_{11}'' - \frac{2y^2}{x^2}f_{12}'' + \frac{y^2}{x^4}f_{22}'' + \frac{2y}{x^3}f_2'\right)\mathrm{d}x^2 \\
&+ 2\left(xyf_{11}'' - \frac{y}{x^3}f_{22}'' + f_1' - \frac{1}{x^2}f_2'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \left(x^2 f_{11}'' + 2f_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}''\right)\mathrm{d}y^2
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 f_{11}'' - \frac{2y^2}{x^2}f_{12}'' + \frac{y^2}{x^4}f_{22}'' + \frac{2y}{x^3}f_2' \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= xyf_{11}'' - \frac{y}{x^3}f_{22}'' + f_1' - \frac{1}{x^2}f_2' \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 f_{11}'' + 2f_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}''
\end{aligned}$$

**题目 2.1.8** (78-1)**.** 求 $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ 在 $(1,0)$ 附近带皮亚诺余项的泰勒公式（直到二次项）

**解** 因为

$$f_x' = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad f_y' = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

继续求二阶偏导得到

$$f_{xx}' = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad f_{xy}' = \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} \quad f_{yy}' = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

令 $h = x-1, k = y$ ，得到

$$\begin{aligned}
f(1+h,k) &= f(1,0) + f_x'(1,0)h + f_y'(1,0)k \\
&+ \frac{1}{2}(f_{xx}'(1,0)h^2 + 2f_{xy}'(1,0)hk + f_{yy}'(1,0)k^2) + o(|(h,k)|^2) \\
&= 1 - 2k + 2hk + 2k^2 + o(|(h,k)|^2)
\end{aligned}$$

代入得到

$$\frac{x-y}{x+y} = 1 - 2y + 2(x-1)y + 2y^2 + o((x-1)^2 + y^2) \quad ((x-1)^2 + y^2 \to 0)$$

**题目 2.1.9** (78-2)**.** 求 $f(x,y) = xe^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 处所有四阶偏导数.

**解** 由 $e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= xe^{x+y} \\
&= x\left[1 + \sum_{k=1}^{K}\frac{(x+y)^k}{k!} + o((\sqrt{x^2+y^2})^K)\right] \quad (\sqrt{x^2+y^2} \to 0)
\end{aligned}$$

令 $K=3$ 得到

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+x^2+xy+\frac{1}{2}(x^3+2x^2y+xy^2) \\ &+\frac{1}{6}(x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3) \\ &+o((\sqrt{x^2+y^2})^4) \quad (\sqrt{x^2+y^2}\to 0) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\frac{C_4^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^4}=\frac{1}{6} \quad \frac{C_4^3}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3\partial y}=\frac{1}{2} \quad \frac{C_4^2}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{1}{2} \\ &\frac{C_4^1}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x\partial y^3}=\frac{1}{6} \quad \frac{C_4^0}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial y^4}=0 \end{aligned}$$

**题目 2.1.10** (84-1)**.** $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$ 都是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数，且都具有连续偏导数，证明

1. $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$
2. $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

[1]

**证明** 因为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}{F'_y(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)} \quad y=f(\boldsymbol{x})$$

于是

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=-\frac{F'_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{F'_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

代入即证.

**题目 2.1.11** (85-2)**.** 证明在 $(0,0,0)$ 的邻域内

$$-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z=0$$

确定隐函数 $z=f(x,y)$ ，并求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处带皮亚诺余项的泰勒公式. （直到二次项）

**证明** 令 $F(x,y,z)=-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z$ ，则 $F(x,y,z)$ 具有各阶连续偏导数，且 $F'_z(0,0,0)\neq 0$ ，因此 $F(x,y,z)=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$ ，且 $f(x,y)$ 在该邻域有各阶偏导数.

---

[1]在一元微分学中，当 $y$ 是 $x$ 的函数时，可以把 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看做 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$ 的商. 本题说明在多元微分学中 $z=f(x,y)$ 可偏导时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记号.

因为 $f(0,0)=0$ ，因此 $z=f(x,y)$ 的泰勒公式具有下述形式

$$f(x,y)=a_1x+a_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2+o(x^2+y^2)$$

因为

$$\begin{aligned}\sin z &= z+o(|z|^2)\\ &= a_1x+a_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2+o(x^2+y^2)\end{aligned}$$

代入 $F(x,y,z)=0$ 得到

$$(2a_1-2)x+(2a_2+1)y+(2b_{11}-1)x^2+2b_{12}xy+(2b_{22}+1)y^2+o(x^2+y^2)=0$$

解得各个常数.

**题目 2.1.12** (90-3)**.** 证明方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+u^2-v^2=2\\ u+v+x+y=0\end{cases}$$

在 $(1,1,-1,-1)$ 的某个邻域 $U((1,1,-1,-1),\delta_0)$ 内确定隐函数组

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

并在该邻域内求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ .

**解**　$\boldsymbol{x}_0=(1,1,-1,-1)$ 是方程组的解，记

$$\begin{aligned}F(x,y,u,v)&=x^2+y^2+u^2-v^2-2\\ G(x,y,u,v)&=u+v+x+y\end{aligned}$$

则 $F,G$ 都有连续偏导数，且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=\left.\begin{vmatrix}2u & -2v\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_0}=-4\neq 0$$

因此存在 $\delta_0>0$ 使得方程组在 $U((1,1,-1,-1),\delta_0)$ 内唯一确定隐函数组

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

且 $u, v$ 在 $U((1,1),\delta_0)$ 内存在连续偏导数. 对原方程微分得到

$$\begin{cases} 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2u\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = 0 \\ \mathrm{d}u + \mathrm{d}v + \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

当 $u$ 对 $x$ 求偏导时 $y$ 固定，因此令 $\mathrm{d}y = 0$ ，得到

$$\begin{cases} u\mathrm{d}u - v\mathrm{d}v = -x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u + \mathrm{d}v = -\mathrm{d}x \end{cases}$$

解得 $\mathrm{d}u = \dfrac{-x+v}{u+v}\mathrm{d}x$ ，从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{x+u}{u+v}$ . 同理令 $\mathrm{d}x = 0$ 得到 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y-u}{u+v}$ .

**题目 2.1.13** (99-1)**.** 求函数 $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y$ 的极值.

**解** 代入 $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ 得到唯一的驻点 $(9,-4)$ . 因为

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \quad f''_{xy}(x,y) = 3 \quad f''_{yy}(x,y) = 6$$

从而

$$\begin{aligned} &f''_{xx}(9,-4) = 2 > 0 \\ &\begin{vmatrix} f''_{xx}(9,-4) & f''_{xy}(9,-4) \\ f''_{xy}(9,-4) & f''_{yy}(9,-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0 \end{aligned}$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(9,-4)$ 取到极小值. 因为 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 处处可微，因此 $(9,-4)$ 是唯一的极小值点.

**题目 2.1.14** (100-3)**.** $(x_k, y_k)(k = 1, 2, \cdots, K)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 内 $K$ 个两两不同的点，且不同在 $Oxy$ 的一条垂直 $x$ 轴的直线上，证明：存在唯一直线 $L_0 : y = ax + b$ 使得

$$f(s,t) = \sum_{k=1}^{K}(sx_k + t - y_k)^2$$

在 $(a,b)$ 处达到最小.

**证明** 显然 $f(s,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 处处可微，由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial s} = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{K} x_k(sx_k + t - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{K}(sx_k + t - y_k) = 0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} s\sum_{k=1}^{K} x_k^2 + t\sum_{k=1}^{K} x_k = \sum_{k=1}^{K} x_k y_k \\ s\sum_{k=1}^{K} x_k + Kt = \sum_{k=1}^{K} y_k \end{cases}$$

解得 $s, t$ ，分别记为 $a, b$ . 因为该问题的最小值总是存在，且 $f(s,t)$ 只有唯一的驻点 $(a,b)$ ，因此 $(a,b)$ 必为最小值点. [2]

**题目 2.1.15** (107-4)**.** 求 $16x^2+4y^2+9z^2=144$ 内接且各面平行于坐标平面的长方体的最大体积.

**解** 即求 $f(x,y,z)=8xyz$ 在约束条件

$$g(x,y,z)=16x^2+4y^2+9z^2-144=0$$

下的最大值. 由拉格朗日乘数法，作函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

求各个偏导数得到

$$\begin{cases} 8yz+32\lambda x=0 \\ 8xz+8\lambda y=0 \\ 8yy+18\lambda z=0 \\ 16x^2+4y^2+9z^2-144=0 \end{cases}$$

解得

$$xyz=-12\lambda$$

代入第一个偏导方程得到

$$-32\lambda(3-x^2)=0$$

于是 $\lambda=0$ 或 $x=\sqrt{3}$ . 当 $\lambda=0$ 时 $xyz=0$ ，显然舍去，因此 $x=\sqrt{3}$ . 同理把 $xyz=-12\lambda$ 代入第二、第三个偏导方程得到 $y=2\sqrt{3}, z=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ . 于是最大值

$$V=64\sqrt{3}$$

**题目 2.1.16** (115-1)**.** 求曲线 $\begin{cases} x^2-y^2+2z^2=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

---
[2]这个求解方法称为**最小二乘法**.

**解** 令两个方程分别为 $F(x,y,z),G(x,y,z)$ ，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,1)}=-6\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,1,1)}=2\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,1)}=4$$

于是切线方程

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

法平面方程

$$-3(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0\implies 3x-y-2z=0$$

**题目 2.1.17** (116-2)**.** 证明曲面 $S:x^2+y^2+2xyz=4$ 和曲面族 $S_t:2x+ty^2-(1+t)z^2=1$ 在 $(1,1,1)$ 处正交，并求处交线在该点的切线方程.

**解** 令两个方程分别为 $F(x,y,z),G_t(x,y,z)$ ，则 $S$ 在 $(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\left(\frac{\partial F(1,1,1)}{\partial x},\frac{\partial F(1,1,1)}{\partial y},\frac{\partial F(1,1,1)}{\partial z}\right)=(2,2,2)$$

$S_t$ 在 $(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\left(\frac{\partial G_t(1,1,1)}{\partial x},\frac{\partial G_t(1,1,1)}{\partial y},\frac{\partial G_t(1,1,1)}{\partial z}\right)=(2,2t,-2(1+t))$$

容易验证二者正交.

因为 $S,S_t$ 的交线在 $(1,1,1)$ 的切线方程即两曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面的交线，于是切线方程为

$$\begin{cases}(x-1)+(y-1)+(z-1)=0\\(x-1)+t(y-1)-(1+t)(z-1)=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x+ty-(1+t)z=0\end{cases}$$

## 2.2 习题

**题目 2.2.1.** $u=f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{x}_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n$ 内存在各个偏导数，且所有偏导数在该邻域内有界。证明 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续。

举例说明存在 $u=g(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 的某个邻域内存在无界的各个偏导数，但在 $\mathbf{x}_0$ 处连续。

**证明** 设 $\mathbf{x}_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ，对 $\Delta x_i\in(0,\delta_0)$ ，存在 $\theta_i\in(0,1)$ 使得

$$
\begin{aligned}
f(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Delta x_1 f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,x_3,\cdots,x_n)&=f(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\quad+\Delta x_2 f'_{x_2}(x_1+\Delta x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3,\cdots,x_n)\\
&\cdots\cdots\\
f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)&=f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n)\\
&\quad+\Delta x_n f'_{x_n}(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\theta_n\Delta x_n)
\end{aligned}
$$

由题设条件存在 $M>0$ 使得

$$|f'_{x_i}(\mathbf{x})|\le M\quad \forall 1\le i\le n,\forall \mathbf{x}\in U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$$

于是

$$|f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)|\le M(|\Delta x_1|+\cdots+|\Delta x_n|)\to 0$$

因此 $f$ 在 $U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$ 连续。

对

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

满足要求。

**题目 2.2.2.** 举例说明在 $\mathbb{R}^2$ 存在函数 $z=f(x,y)$ 使得 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内处处不连续，但在原点存在两个偏导数。

**解** 如

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\vee y\in\mathbb{Q}\\ 0 & x,y\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

显然 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 处处不连续，而

$$f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$$

**题目 2.2.3.** 求函数在指定点处的偏导数

1. $f(x,y)=xy\ln[x^2+\sin(xy^2)+\sin(xy)]$ ，求 $f'_x(1,-1),f'_y(1,-1)$
2. $f(x,y,z)=(x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{xz}{x+y}\right)$ ，求 $f'_x(1,0,\pi)$

**解** 对指定点求偏导，可以采取如下方法

1. $f'_x(1,-1) = \left.\dfrac{\mathrm{d}(f(x,-1))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = -2$
2. $f'_y(1,-1) = \left.\dfrac{\mathrm{d}(f(1,y))}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1} = \cos 1$

**题目 2.2.4.** 简单的求导题。

**题目 2.2.5.** 简单的求导题。

**题目 2.2.6.** 根据方向导数的定义，求 $f(x,y)=x^2\sin y$ 在 $(1,0)$ 处分别沿方向 $\mathbf{i}, -\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}$ 的方向导数

**解** 这里 $\mathbf{i}=(1,0), \mathbf{j}=(0,1)$ ，则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,0)}{\partial \mathbf{i}} &= \lim_{t\to 0+0}\frac{f(1+t,0)-f(1,0)}{t} = 0\\
\frac{\partial f(1,0)}{\partial(-\mathbf{j})} &= \lim_{t\to 0+0}\frac{f(1,-t)-f(1,0)}{t} = -1\\
\frac{\partial f(1,0)}{\partial(\mathbf{i}+\mathbf{j})} &= \lim_{t\to 0+0}\frac{f(1+t,t)-f(1,0)}{t} = 1
\end{aligned}$$

**题目 2.2.7.** 函数 $f(x,y,z)=x^2-xy+y^2+z^2$ ，求它在 $(1,1,1)$ 的沿各个方向的方向导数，并求处方向导数的最大值、最小值以及方向导数为零的所有方向。

**解** 设单位向量 $\mathbf{v}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$ ，则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x}\cos\theta_1 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial y}\cos\theta_2 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial z}\cos\theta_3\\
&= \cos\theta_1+\cos\theta_2+2\cos\theta_3
\end{aligned}$$

又因为

$$|\cos\theta_1+\cos\theta_2+2\cos\theta_3| \le \sqrt{(1^2+1^2+2^2)(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3)} = \sqrt{6}$$

于是方向导数的最值为 $\pm\sqrt{6}$ 。方向导数为零的方向为

$$\left(\pm\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}}, \mp\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}}-t, t\right) \quad |t|<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

或者直接由梯度的意义得到

$$\max\left\{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = |\nabla f(\mathbf{x}_0)| \quad \min\left\{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = -|\nabla f(\mathbf{x}_0)|$$

**题目 2.2.8.** $z = u(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ 内可微，令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ，在 $Oxy$ 上作单位向量 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ，分别表示 $\theta$ 固定时 $r$ 增加的方向和 $r$ 固定时 $\theta$ 增加的方向。证明

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**证明** 由描述

$$\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

由方向导数的定义

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证毕。

**题目 2.2.9.** 给出一个函数 $u = f(\mathbf{x})$ 满足：在 $\mathbf{x} = 0$ 处各个方向导数和偏导数都存在，且在 $\mathbf{x} = 0$ 处连续但不可微。

**解** 设 $u$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，令

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{x_n} & x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则

$$f_i' = 0, \forall 1 \le i \le n$$

对任意单位向量 $\mathbf{v} = (\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_n)$ ，方向导数

$$\frac{\partial f(0)}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(t\mathbf{v}) - f(0)}{t} = 0$$

且容易验证

$$\lim_{\mathbf{x} \to 0} f(\mathbf{x}) = 0 = f(0)$$

而 $\lim\limits_{\mathbf{x} \to 0} \dfrac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}$ 不存在，因此 $f$ 在 $\mathbf{x} = 0$ 不可微。

**题目 2.2.10.** 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} |\mathbf{x}|^2 \sin\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2} & |\mathbf{x}| \ne 0 \\ 0 & |\mathbf{x}| = 0 \end{cases}$$

证明：$\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ 在 $\mathbf{x} = 0$ 处不连续，但 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处可微。

**证明** 求偏导得到

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2x_i\left(\sin\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{x_i^2}{|\mathbf{x}|^2}\cos\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$$

则 $\dfrac{\partial f(0)}{\partial x_i}$ 不存在，因此在 $\mathbf{x}=0$ 不连续。而

$$f(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|)(|\mathbf{x}| \to 0)$$

因此 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}=0$ 可微。

**题目 2.2.11.** 求下列函数在指定点处的微分：

1. $f(x,y) = 3x^2 - xy^2 + y^2$ 在 $(1,2)$ 处
2. $f(x,y) = xe^y + x^y$ 在 $(1,0)$ 处

**解** 容易验证各个偏导数连续，于是

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

1. $\mathrm{d}f(x,y) = 2\mathrm{d}x$
2. $\mathrm{d}f(x,y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

**题目 2.2.12.** 求下列函数的微分

1. $f(x,y) = y^2\sin x + 2x^2y$
2. $f(x,y) = xe^{-2y} + 3y^4$
3. $f(x,y,z) = y^2\ln(x^2+2)(z^2+1)$
4. $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|, \mathbf{x} \neq 0$
5. $f(\mathbf{x}) = \ln|\mathbf{x}|, \mathbf{x} \neq 0$

**解**

1. $\mathrm{d}f(x,y) = (y^2\cos x + 4xy)\mathrm{d}x + (2y\sin x + 2x^2)\mathrm{d}y$
2. $\mathrm{d}f(x,y) = e^{-2y}\mathrm{d}x + (-2xe^{-2y} + 12y^3)\mathrm{d}y$
3. $\mathrm{d}f(x,y,z) = \dfrac{2xy^2}{x^2+2}\mathrm{d}x + (2y\ln(x^2+2)(z^2+1))\mathrm{d}y + \dfrac{2zy^2}{z^2+2}\mathrm{d}x$

4. $\mathrm{d}f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|\mathbf{x}|}\mathrm{d}x_i$

5. $\mathrm{d}f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}\mathrm{d}x_i$

**题目 2.2.13.** 函数 $f(x,y)=x^2y-3y$ ，求 $f(x,y)$ 的微分和 $f(5.12,6.85)$ 的近似值

**解** $\mathrm{d}f(x,y)=2xy\mathrm{d}x+(x^2-3)\mathrm{d}y$ ，则

$$\begin{aligned}f(5.12,6.85)&\approx f(5,7)+2\times5\times7\times0.12+(5^2-3)\times(-0.15)\\&=159.1\end{aligned}$$

**题目 2.2.14.** 利用微分求近似值

1. $\sqrt{(1.02)^2+(2.03)^2+(3.02)^2}$

2. $3.01^{0.99}$

**解**

1. 因为

$$\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{(1.02)^2+(2.03)^2+(3.02)^2}\approx&\sqrt{1^2+2^2+3^2}+\frac{0.02+0.06+0.06}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\\=&1.01\sqrt{14}\end{aligned}$$

2. 因为

$$\mathrm{d}x^y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+(x^y\ln x)\mathrm{d}y$$

于是

$$3.01^{0.99}\approx3+1\times0.01+3\ln3\times(-0.01)\approx2.98$$

**题目 2.2.15.** $u=f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n(n\geq2)$ 的邻域 $U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$ 内存在 $n$ 个偏导数，且有 $n-1$ 个偏导数在该邻域内连续，证明 $u=f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微。

**证明** 设 $\mathbf{x}_0=(x_1,\cdots,x_n)$ 。不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ 在 $U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$ 上连续，则对 $\forall\Delta x_i\in U(0,\delta_0)$ ，考虑

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

依次把 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ 通过微分中值放缩，得到存在 $\theta_i \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
=&f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2+\theta_2\Delta x_2, \cdots, x_n+\Delta x_n)\Delta x_2 \\
&+\cdots+f'_{x_{n-1}}(x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, x_n+\Delta x_n)\Delta x_{n-1} + f'_{x_n}(x_1, \cdots, x_n)\Delta x_n \\
&+o(\Delta x_n)(\Delta x_n \to 0)
\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ 连续，当 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n \to 0$ 时上述的 $f'_{x_1}, \cdots, f'_{x_{n-1}}$ 都趋于 $f'_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n), 1 \leq i \leq n-1$．代入得到

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1, \cdots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, \cdots, x_n) \\
=&f'_{x_1}(x_1, \cdots, x_n)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x_1, \cdots, x_n)\Delta x_n + o(\sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2})
\end{aligned}$$

因此 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微。

**题目 2.2.16.** 求下列函数梯度

1. $f(x,y,z) = x^2 \sin yz + y^2 e^{xz} + z^2$

2. $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| e^{-|\mathbf{x}|}, \mathbf{x} \neq 0, n \geq 2$

**解**

1. 容易验证 $f$ 可微，则

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= (2x\sin yz + y^2 z e^{xz}, x^2 z\cos yz + 2ye^{xz}, x^2 y\cos yz + xy^2 e^{xz} + 2z)
\end{aligned}$$

2. 同理

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} - 1\right) e^{-|\mathbf{x}|}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

**题目 2.2.17.** 求 $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 在 $\mathbb{R}^3$ 各点的梯度，并求 $(x,y,z)$ 使得在该点的梯度分别垂直 $z$ 轴、平行 $z$ 轴以及梯度为零。

**解**　梯度

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy)$$

满足要求的点分别为

$$(a, b, \pm\sqrt{ab}) \quad (0,0,a) \vee (a,a,a) \quad (a,a,a)$$

**题目 2.2.18.** $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 可微，且沿方向 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的方向导数为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ，沿 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的方向导数为 $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 。求在 $(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 的方向导数和梯度。

**解** 由题设条件

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

解得

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1}{2},\frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{2}+7}{2}\right)$$

于是

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \mathbf{i}}=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1}{2}\quad\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \mathbf{j}}=\frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{2}+7}{2}$$

**题目 2.2.19.** 求 $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ 在 $(1,2,1)$ 的所有方向导数构成的集合。

**解** 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ 是单位向量，则

$$\sigma:\mathbf{v}\to\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}=|\nabla f(\mathbf{x})|\cdot\cos\langle\nabla f(\mathbf{x}),\mathbf{v}\rangle$$

是 $\mathbb{R}^3\to[-|\nabla f(\mathbf{x})|,|\nabla f(\mathbf{x})|]$ 的满射。因此所求集合为 $[-|\nabla f(1,2,-1)|,|\nabla f(1,2,-1)|]$ .

**题目 2.2.20.** $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ ，求导数

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{x}|\mathbf{x}|$
2. $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},|\mathbf{x}|\neq 0$
3. $\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 的矩阵，$f(\mathbf{x})=(\mathbf{A}\mathbf{x})\cdot(\mathbf{A}\mathbf{x})$

**解**

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_n(\mathbf{x}))$ ，其中 $f_i(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|x_i$ ，则

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}=\begin{cases}|\mathbf{x}|+\dfrac{x_i^2}{|\mathbf{x}|} & i=j\\ \dfrac{x_ix_j}{|\mathbf{x}|} & i\neq j\end{cases}$$

因此

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$$

2. $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_n(\mathbf{x}))$ ，其中 $f_i(\mathbf{x})=\dfrac{x_i}{|\mathbf{x}|}$ ，求偏导即可。

3. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ ，则

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2$$

则

$$f'_{x_k}(\mathbf{x})=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$$

于是

$$f'(\mathbf{x})=2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

**题目 2.2.21.** $f(\mathbf{u})=f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 有定义，且在 $\mathbf{u}_0=(u_1^0,\cdots,u_m^0)\in\Omega$ 可微，设向量函数

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})=(u_1(\mathbf{x}),\cdots,u_m(\mathbf{x}))$$

在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内有定义，在 $\mathbf{x}_0\in(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 可偏导，且 $\mathbf{u}_0=g(\mathbf{x}_0)$ . 证明：对 $\forall i(1\le i\le n)$ ，$f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处关于 $x_i$ 可偏导，且

$$\frac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

**证明** $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 可偏导，则对 $\forall i(1\le i\le n)$ ，有

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0+\Delta x_i\varepsilon_i)-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\alpha(\Delta x_i)$$

其中 $\alpha(\Delta x_i)$ 依赖 $\Delta x_i$ 且 $\dfrac{\alpha(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\to 0$ . 又因为 $f(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_0$ 可微，则

$$\Delta f(\mathbf{u}_0)=f(\mathbf{u}_0+\Delta\mathbf{u})-f(\mathbf{u}_0)=f'(\mathbf{u}_0)\Delta\mathbf{u}+\beta(|\Delta\mathbf{u}|)$$

其中 $\beta(|\Delta\mathbf{u}|)$ 依赖 $\Delta\mathbf{u}$ 且 $\dfrac{\beta(|\Delta\mathbf{u}|)}{|\Delta\mathbf{u}|}\to 0$ 。对 $\forall i(1\le i\le n)$ 有

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))&=f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0+\Delta x_i\varepsilon_i))-f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\\&=f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\left(\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\alpha(\Delta x_i)\right)+\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\\&:=f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\gamma(\Delta x_i)\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\left|\frac{f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\alpha(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\right|\le|f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))|\lim_{\Delta x_i\to 0}\left|\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\alpha(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\right|=0$$

又因为

$$\frac{|\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|}{|\Delta x_i|} = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i + \alpha(\Delta x_i)\right|}{|\Delta x_i|} \leq \left|\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\right| + \frac{|\alpha(\Delta x_i)|}{|\Delta x_i|}$$

于是

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}\left|\frac{\beta(\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\Delta x_i}\right| = 0$$

两式相加得到

$$\frac{\gamma(\Delta x_i)}{\Delta x_i} \to 0$$

证毕。

**题目 2.2.22.** 求复合函数偏导数，其中 $f$ 是可微函数。

1. $z = f(xe^y, xe^{-y})$
2. $u = f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2, \prod_{i=1}^n x_i^2, x_3, \cdots, x_n\right)$

**解**

1. 由链锁法则
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(xe^y)}{\partial x}f_1' + \frac{\partial(xe^{-y})}{\partial y}f_2' = e^y f_1' + e^{-y}f_2'$$
2. 由链锁法则
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= 2x_1 f_1' + 2x_1\prod_{i=1}^n x_i^2 f_2' \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= 2x_2 f_1' + 2x_2\prod_{1\leq i\leq n, i\neq 2} x_i^2 f_2' \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} &= 2x_k f_1' + 2x_k\prod_{1\leq i\leq n, i\neq k} x_i^2 f_2' + f_k'\end{aligned}$$

**题目 2.2.23.** $u = f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内存在 $n$ 个连续偏导数，且各个偏导数都有界

1. 证明 $D$ 是凸域时 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 内一致连续
2. 说明 $D$ 不是凸域时 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 内可能不一致连续

**证明**

1. 当 $D$ 是凸域，对 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_k, y_{k+1}, \cdots, y_n) \in D, \eta_i \in (x_i, y_i)$ ，有
$$(x_1, \cdots, x_k, \eta_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n), \cdots, (x_1, \cdots, , x_k, y_{k+1}, \cdots, y_{n-1}, \eta_n) \in D$$

于是存在 $M>0,\xi_i\in(x_i,y_i)$ 使得

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\cdots,,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots,y_n)\\
=&(f(x_1,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n))+\cdots\\
+&(f(x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots,y_{n-1},x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots,y_n))\\
=&f'_{k+1}(x_1,\cdots,x_k,\xi_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n)(x_{k+1}-y_{k+1})+\cdots\\
+&f'_n(x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots,y_{n-1},\xi_n)(x_n-y_n)\\
\le&M\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-y_i)
\end{aligned}$$

因此 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 内一致连续。

2. 考虑区域 $D=N(0,1)\backslash\{(x_1,\cdots,x_{n-1},0):0\le x_1,\cdots,x_{n-1}<1\}$ 上的函数

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}0 & x_1,\cdots,x_n>0\\ x_n^2 & \text{otherwise}\end{cases}$$

**题目 2.2.24.** $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内处处存在两个偏导数。

1. 若 $D$ 是凸域，且 $\forall(x,y)\in D,f'_x(x,y)=0$ ，证明存在 $h(y)$ 使得在 $D$ 内 $f(x,y)\equiv h(y)$
2. 对 $\forall(x,y)\in D$ ( $D$ 不一定是凸域)，$f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$ ，证明在 $D$ 内 $f(x,y)$ 是常数函数。
3. 举例说明 $D$ 不是凸域的时候 (1) 的结论可能错误。

**证明**

1. 由微分中值得到

$$f(x_1,y)-f(x_2,y)=f'_x(\xi,y)(x_1-x_2)=0\quad \xi\in(x_1,x_2)$$

于是 $f(x,y)$ 是关于 $y$ 的函数，证毕。

2. 对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ ，任取道路 $\gamma$ 使得 $\gamma(0)=(x_1,y_1),\gamma(1)=(x_2,y_2)$ ，则对任意 $t\in[0,1]$ ，设 $\gamma(t)=(x_t,y_t)\in D$ ，则存在 $\delta_t>0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $U((x_t,y_t),\delta_t)$ 内是常数函数。则

$$\bigcup_{t\in[0,1]}U((x_t,y_t),\delta_t)\supset\gamma([0,1])$$

其中 $\gamma([0,1])$ 是有界闭集，因此存在 $N$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{N} U((x_{t_k}, y_{t_k}), \delta_{t_k}) \supset \gamma([0,1])$$

其中 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_N \leq 1$ 。因为 $\gamma[(0,1)]$ 是闭集，则其上任意一点都至少在两个开覆盖的区间内，于是得到 $f(x,y)$ 在 $\gamma([0,1])$ 上是常数函数，证毕。

3. 考虑 $D = N(0,1)\backslash\{(x,0) : 0 \leq x < 1\}$ 上的函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x, y > 0 \\ y^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**题目 2.2.25.** 若 $f(\mathbf{x})$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 且存在 $K \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$f(t\mathbf{x}) = t^K f(\mathbf{x}) \quad \forall t > 0, \mathbf{x} \in D$$

则称 $f$ 是 $K$ **次齐次函数**。设 $K$ 次齐次函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $D$ 具有各个 $k(1 \leq k \leq K)$ 阶偏序偏导数，证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\mathbf{x}) = K(K-1)\cdots(K-k+1)f(\mathbf{x})$$

**证明** 由题目条件

$$f(t\mathbf{x}) = t^K f(\mathbf{x}) \implies \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} t^K f(\mathbf{x})$$

令 $t = 1$ 即证。

**题目 2.2.26.** $z = e^{xy^2}$ ，其中 $x = t\cos t, y = t\sin t$ ，求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ .

**证明** $z = f(x,y) = e^{xy^2}$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= y^2 e^{xy^2} \cdot (\cos t - t\sin t) + 2xye^{xy^2}(\sin t + t\cos t) \end{aligned}$$

代入 $t = \frac{\pi}{2}, x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi^3}{8}$$

**题目 2.2.27.** 函数 $u = z\sin\frac{y}{x}$ ，其中 $x = 3r^2 + 2s, y = 4r - 2s^3, z = 2r^2 - 3^2$ ，求 $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$ .

**解** $u=f(x,y,z)=z\sin\dfrac{y}{x}$ ，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\\&=-\frac{yz}{x^2}\cos\frac{y}{x}\cdot 6r+\frac{z}{x}\cos\frac{y}{x}\cdot 4+\sin\frac{y}{x}\cdot 4r\\&=-\frac{6yzr}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x}+4r\sin\frac{y}{z}\\\frac{\partial u}{\partial s}&=-\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{6zs^2}{x}\cos\frac{y}{x}-6s\sin\frac{y}{z}\end{aligned}$$

**题目 2.2.28.** $x=r\cos\alpha-t\sin\alpha, y=r\sin\alpha+t\cos\alpha$ ，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为常数。证明对任何可微函数 $f(x,y)$ 有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$$

**证明** 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\&=\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\&=-\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

证毕。

**题目 2.2.29.** 证明

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{x^2+y^2}\\-\dfrac{y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 到自身的 $C^1$ 同胚映射，并求 $\mathbf{f}(x,y)$ 在 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 的 Jacobi 行列式。

**证明** $\mathbf{f}$ 各个分量的各个偏导数存在，因此 $C^1$ 。容易验证逆映射

$$\mathbf{f}^{-1}(x,y)=\mathbf{f}(x,y)$$

显然 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ 到自身的双射，因此是 $C^1$ 同胚。行列式

$$|\mathbf{f}'(x,y)|=\begin{vmatrix}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}&-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}&\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

**题目 2.2.30.** 求下列函数高阶偏导数 $\dfrac{\partial^{\sum_{i=1}^{n} m_i} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}$

1. $f(x_1, \cdots, x_n) = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

2. $f(x_1, \cdots, x_n) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$

**解**

1. 高阶导数等于本身

2. 
$$\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{n} m_i} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} m_i - 1}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - 1\right)!\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^m\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^{-\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

**题目 2.2.31.** 求二阶偏导数，其中 $f$ 有二阶连续导数

1. $z = f(x^2 + y^2, xy)$

2. $z = f(x_1 + \cdots + x_n)$

**解**

1. 一阶导
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + yf_2' \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf_1' + xf_2'$$
则
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial(2xf_1' + yf_2')}{\partial x} \\
&= 2f_1' + 2x(2xf_{11}'' + yf_{12}'') + y(2xf_{21}'' + yf_{22}'') \\
&= 4x^2 f_{11}'' + 4xyf_{12}'' + y^2 f_{22}'' + 2f_1' \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 4xyf_{11}'' + (2x^2 + 2y^2)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2' \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 4y^2 f_{11}'' + 4xyf_{12}'' + x^2 f_{22}'' + 2f_1'
\end{aligned}$$

2. 
$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f' \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = f''$$

**题目 2.2.32.** 验证下列函数满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

2. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

**证明** 求高阶偏导即可。

**题目 2.2.33.** 验证函数 $u=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-1}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$$

**证明** 求偏导即可。

**题目 2.2.34.** $f(x)$ 是二次可微函数，证明

$$F(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)] \quad c$$

满足 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

**证明** 求偏导即可。

**题目 2.2.35.** 证明在极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 下拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

**证明** 因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}&=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\
&\quad -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

代入即证。

**题目 2.2.36.** $u(x,y,z)=\dfrac{x-y+z}{x+y-z}$，证明

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

2. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$

**证明** 求偏导即证。

**题目 2.2.37.** $x = 2r - s, y = r + 2s$ ，求 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial r \partial s}$ ，其中 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数。

**解** $-2f''_{xx} + 3f''_{xy} + 2f''_{yy}$ .

**题目 2.2.38.** 把 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 写成 $F(x-1, y-1)$ 的形式。

**解**

$$\begin{aligned} F(x-1,y-1) &= a(x-1)^2 + 2b(x-1)(y-1) + c(y-1)^2 \\ &\quad + (2a+2b)(x-1) + (2b+2c)(y-1) + (a+2b+c) \end{aligned}$$

**题目 2.2.39.** 求 $e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 处泰勒公式，证明 $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ .

**证明** 幂级数展开

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K} \frac{(x+y)^k}{k!} + o((\sqrt{x^2+y^2})^K) \quad (\sqrt{x^2+y^2} \to 0)$$

幂级数展开代入即证。

**题目 2.2.40.** 将下列函数在原点处展开成泰勒公式到四次项

1. $\dfrac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}$
2. $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$

**解** 高阶偏导数计算量太大，考虑其它辅助的方法

1. 利用一元函数的泰勒公式，则

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = 1 - (x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 + o((x^2+y^2)^2) \quad (\sqrt{x^2+y^2} \to 0)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2} &= (1+x+y+2xy)(1-(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2) + o((x^2+y^2)^2) \\ &= (1+x+y+2xy)(1-(x^2+y^2)) + (x^2+y^2)^2 + o((x^2+y^2)^2) \\ &= 1 + x + y - x^2 + 2xy - y^2 - x^3 - x^2y - xy^2 - y^3 + x^4 - 2x^3y \\ &\quad + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 + o((x^2+y^2)^2) \quad (\sqrt{x^2+y^2} \to 0) \end{aligned}$$

2. 同理的方法，利用 $\dfrac{1}{1-S} = 1 + S + S^2 + \cdots$ 到四次阶段即可

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{1-(x_1+\cdots+x_n)} &= (x_1^2+\cdots+x_n^2)(1+x_1+\cdots+x_n+x_1^2+\cdots+x_n^2) \\ &\quad + o((x_1^2+\cdots+x_n^2)^2) \quad (\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \to 0) \end{aligned}$$

**题目 2.2.41.** 勒让德多项式

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

验证

1. $P_n(1)=1$
2. $P_n(-1)=(-1)^n$
3. $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$

**证明**

1. 令 $x=1$ ，则 $f(1,t)=\dfrac{1}{|1-t|}$ 展开为幂级数，因此 $|t|<1$ ，则

$$f(1,t)=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots$$

于是 $P_n(x)=1$

2. 令 $x=-1$ ，则 $f(-1,t)=\dfrac{1}{|1+t|}$ 展开为幂级数，因此 $|t|<1$ ，则

$$f(-1,t)=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots$$

于是 $P_n(-1)=(-1)^n$

3. 设 $u=-2xt+t^2$ ，则 $f(x,t)=(1+u)^{-1/2}$ ，展开得到

$$\begin{aligned}(1+u)^{-1/2}&=1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+o(u^2)\\&=1+xt+\frac{1}{2}(3x^2-1)t^2+o(t^2)\end{aligned}$$

比较系数得到

$$P_0(x)=1\quad P_1(x)=x\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

**题目 2.2.42.** $f(x,y)=e^{xy}$ ，对 $\forall k\in\mathbb{N}$ ，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近所有 $k$ 阶偏导数。

**解** 因为

$$e^{xy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xy)^k}{k!}$$

于是

$$\frac{(xy)^k}{k!}=\frac{1}{(2k)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2k}$$

比较系数得到

$$\frac{\partial^k f(0,0)}{\partial x^i \partial y^{k-i}} = \begin{cases} k! & k = 2i \\ 0 & k \neq 2i \end{cases}$$

**题目 2.2.43.** 举例说明存在原点 $(0,0)$ 某个邻域 $U((0,0),\delta_0)$ 内的连续函数 $z = F(x,y)$ 满足 $F(0,0) = 0$ 和下述条件之一

1. $F'_y(0,0)$ 不存在
2. $F'_y(0,0)$ 存在且 $F'_y(0,0) = 0$

但 $F(x,y) = 0$ 在 $U((0,0),\delta_0)$ 内唯一确定一个连续隐函数 $y = f(x)(x \in (-\delta_0,\delta_0))$ 使得 $f(0) = 0$ ，且 $x \in (-\delta_0,\delta_0)$ 时 $F(x,f(x)) = 0$ .

**解** 只需要令 $F(x,y) = G(y)$ 即可保证存在隐函数了，对两个条件，分别令

$$F(x,y) = |y| \quad F(x,y) = y^3$$

**题目 2.2.44.** 证明 $x^2 - 2xy + z + xe^z = 0$ 在 $(1,1,0)$ 某个邻域内唯一确定隐函数 $z = f(x,y)$ ，并求 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处泰勒公式（直到二次）

**解** 令 $F(x,y,z) = x^2 - 2xy + z + xe^z$ ，则 $F(1,1,0) = 0$ ，且 $F(x,y,z)$ 连续，又因为

$$F'_z(x,y,z) = 1 + xe^z$$

连续且在 $(1,1,0)$ 处不为零，因此 $F(x,y,z)$ 在 $(1,1,0)$ 的邻域唯一确定隐函数 $z = f(x,y)$ .

设

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & a_1(x-1) + a_2(y-1) + b_{11}(x-1)^2 + b_{12}(x-1)(y-1) \\ & + b_{22}(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2) \quad (\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \to 0) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & F(x,y,f(x,y)) \\ = & x^2 - 2xy + f(x,y) + xe^{f(x,y)} \\ = & x^2 - 2xy + f(x,y) + (x-1+1)\left(1 + f(x,y) + \frac{f^2(x,y)}{2} + o(f^2(x,y))\right) \\ = & (2a_1+1)(x-1) + (2a_2-2)(y-1) + \left(\frac{a_1^2}{2} + a_1 + 2b_{11} + 1\right)(x-1)^2 \\ & + (a_1a_2 + a_2 + 2b_{12} - 2)(x-1)(y-1) + \left(\frac{a_2^2}{2} + 2b_{22}\right)(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2) \end{aligned}$$

代入即可。

**题目 2.2.45.** 证明 $x+x^2+y^2+(x^2+y^2)z^2+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域内唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$ ，并求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处所有三阶偏导数。

**证明** $F(x,y,z)=x+x^2+y^2+(x^2+y^2)z^2+\sin z=0$ ，容易验证 $F(0,0,0)=0$ ，且

$$F'_z(x,y,z)=1+2x+2(x+y)z^2+\cos z$$

在 $(0,0,0)$ 的邻域内连续非零。于是存在唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$ .

设

$$\begin{aligned}f(x,y)=a_1x+a_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2&=c_{111}x^3+c_{112}x^2y\\&+c_{122}xy^2+c_{222}y^3+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad(\sqrt{x^2+y^2}\to 0)\end{aligned}$$

则代入即可。解出

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}=-1\quad\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}=0$$

**题目 2.2.46.** $z=F(x,y)$ 在区域 $D$ 有连续偏导数，且处处成立

$$F'_x(x,y)\neq 0\quad F'_y(x,y)\neq 0$$

证明对 $\forall(x_0,y_0)\in D$ 方程 $F(x,y)=F(x_0,y_0)$ 在 $(x_0,y_0)$ 某个邻域内确定的一隐函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 互为反函数。

**证明** 令 $G(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)$ 。容易验证 $G(x,y)=0$ 确定的两个隐函数都存在且唯一。注意到

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

在 $x_0$ 的某个邻域内导数不变号，于是存在反函数，由唯一性 $f(x),g(y)$ 互为反函数。

**题目 2.2.47.** 求下列方程确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数：

1. $F(x+y+z,xyz)=0$

2. $F(x^2+y^2,x^2+y^2+z^2)=0$

**解** 对 $F$ 求偏导，此时 $x,y,z$ 不是完全独立。把 $z$ 看做自变量的函数，剩下一个无关变量看做常数。

1. 因为

$$\frac{\partial F(x+y+z,xyz)}{\partial x}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)F'_1+\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)F'_2=0$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1' + yzF_2'}{F_1' + xyF_2'}$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1' + xzF_2'}{F_1' + xyF_2'}$$

2. 同理

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x(F_1' + F_2')}{zF_2'} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y(F_1' + F_2')}{zF_2'}$$

**题目 2.2.48.** 求下列方程确定的隐函数的偏导数（或导数）

1. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$
2. $x + e^{yz} + z^2 = 0$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

**解**

1. 直接求导得到

$$3x^2 + 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y - 3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

2. 两边对 $x$ 求偏导得到

$$1 + ye^{yz}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{ye^{yz} + 2z}$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2e^{yz} + 2}{(ye^{yz} + 2z)^3}$$

同理得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z^2e^{yz}(e^{yz} - 2z^2)}{(ye^{yz} + 2z)^3} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2ze^{yz}(yz - 1)}{(ye^{yz} + 2z)^3}$$

**题目 2.2.49.** $u = u(x, y)$ 是 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .

**解** 因为 $x$ 独立变量，因此 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'$ 。联立得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = f_2' + \frac{\partial z}{\partial y}f_3' + \frac{\partial t}{\partial y}f_4' \\ \frac{\partial g(y, z, t)}{\partial y} = g_1' + \frac{\partial z}{\partial y}g_2' + \frac{\partial t}{\partial y}g_3' = 0 \\ \frac{\partial h(z, t)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}h_1' + \frac{\partial t}{\partial y}h_2' = 0 \end{cases} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' + \frac{f_3'g_1'h_2'}{g_3'h_1' - g_2'h_2'} + \frac{f_4'g_1'h_1'}{g_2'h_2' - g_3'h_1'}$$

**题目 2.2.50.** 通过自变量变换 $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0(y > 0)$$

**解** 因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{2y\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)
\end{aligned}$$

代入得到化简为

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

**题目 2.2.51.** 设变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ .

**解**

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

又因为

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 1 \implies \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

**题目 2.2.52.** 变换 $\begin{cases} x = \dfrac{u^2 - v^2}{2} \\ y = uv \\ z = z \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}$ .

**解** 代入得到 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} = u^2 + v^2$ .

**题目 2.2.53.** 椭圆求坐标变换 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}$

**解** 代入得到 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi$ .

**题目 2.2.54.** 证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 $C^1$ 同胚映射（$m < n$ ）

**证明** 假设对 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ ，$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的 $C^1$ 同胚映射，记逆映射

$$\mathbf{f}^{-1} = (f_1^{-1}, f_2^{-1}, \cdots, f_n^{-1})$$

则 $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{f}$ 是恒同映射，在 $\mathbf{x}$ 处的导数为

$$(\mathbf{f}^{-1}\mathbf{f})' = \left[\frac{\partial f_i^{-1}}{\partial y_j}\right]_{n\times m}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}$$

是 $n$ 级矩阵，秩不超过 $m$ ，因此 $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{f}$ 不可能是恒同映射，证毕。

**题目 2.2.55.** 1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 1$

2. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

**解**

1. 令 $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ ，得到驻点 $(\pm1,\pm2),(\pm1,\mp2)$ ，又因为

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

   在 $(1,2)$ 正定，在 $(-1,-2)$ 负定，在 $(1,-2),(-1,2)$ 不定，因此存在唯一的极小值点 $(1,2)$ 和唯一极大值点 $(-1,-2)$ .

2. 令 $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ ，得到驻点

$$(0,\pm1),(\pm1,0),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

   其中 $(0,\pm1),(\pm1,0)$ 处 Hessi 矩阵不定，在 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 正定，在 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 负定，因此 $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 为极小值点，$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 为极大值点。

**题目 2.2.56.** 证明

1. $(0,0)$ 是 $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$ 的鞍点

2. $f(x,y)$ 定义域限制在 $(0,0)$ 的任一条直线上时，它在 $(0,0)$ 处取极小值。

**证明** 这里 $(0,0)$ 处 Hessi 矩阵半正定，因此需要其它方法判断。

1. $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$ ，解出唯一的驻点 $(0,0)$ ，且对 $\forall\delta\in(0,1)$ ，存在
$$f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta^2}{2}\right)<0<f\left(\frac{\delta}{2},0\right)$$
因此 $(0,0)$ 是鞍点。

2. 限制在 $x=0$ 上时，$f(x,y)=y^2$ 在 $(0,0)$ 取到最小值。

   限制在直线 $y=kx$ 上时，$f(x,y)=3x^4-4kx^3+k^2x^2$ ，容易验证 $x=0$ 是极小值点，证毕。

**题目 2.2.57.** $F(x,u,v)=0$ 和 $G(x,u,v)=0$ 确定可微函数组 $\begin{cases}u=u(x)\\v=v(x)\end{cases}$ ，求 $u=u(x)$ 的驻点需要满足的必要条件。

**证明** 即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ ，联立
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=F'_1+\dfrac{\partial u}{\partial x}F'_2+\dfrac{\partial v}{\partial x}F'_3=0\\\dfrac{\partial G}{\partial x}=G'_1+\dfrac{\partial u}{\partial x}G'_2+\dfrac{\partial v}{\partial x}G'_3=0\end{cases}$$
得到 $F'_1G'_3=F'_3G'_1$ .

**题目 2.2.58.** 分别求 $\mathbb{R}^2$ 中单位元内接三角形和内接长方形的最大面积。

**解** 通常极值问题。分别为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4},2$ .

**题目 2.2.59.** $u=u(x,y)$ 在单位圆盘 $\Delta=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 的闭包上有二阶连续偏导数，在 $\Delta$ 内满足
$$u(x,y)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$
且在 $\partial\Delta$ 上 $u(x,y)\equiv0$ 。证明在 $\overline{\Delta}$ 上 $u(x,y)\equiv0$ .

**证明** 假设存在 $(x_0,y_0)\in\Delta$ 使得 $u(x_0,y_0)\neq0$ ，不妨设 $(x_0,y_0)$ 就是 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上的最小值点，则
$$\frac{\partial^2u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x_0,y_0)}{\partial y^2}=u(x_0,y_0)<0$$
不妨设 $\dfrac{\partial^2u(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$ ，因为 $(x_0,y_0)$ 是极小值点，于是 $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=0$ ，和 $u(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处在 $x$ 方向上的极小值性矛盾，证毕。

**题目 2.2.60.** 生产容积 $1\text{m}^3$ 的铁皮圆桶，什么尺寸最省材料？

**证明** 条件极值问题，底面半径 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}$ m ，高 $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/3}$ 最省。

**题目 2.2.61.** 求 $\mathbf{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ 到平面 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=0$ 的距离。其中 $a_i$ 是常数。

**解** 条件极值问题。$\mathbf{x}_0$ 到 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 的距离 $f(\mathbf{x})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2}$ ，约束条件 $\varphi(\mathbf{x})=\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=0$ ，作 $F(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\lambda\varphi(\mathbf{x})$ ，联立

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{x_i-x_i^0}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2}}+\lambda a_i=0(i=1,2,\cdots,n)\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=0\end{cases}$$

解得唯一的驻点

$$\mathbf{x}_1=\left(x_k^0-\frac{a_k\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^0}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\right)_{k=1,2,\cdots,n}$$

其 Hessi 矩阵

$$\mathbf{H}_F(\mathbf{x}_1)=\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^0\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}}\begin{bmatrix}\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne1}a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_1a_2 & \sum\limits_{1\le i\le n,i\ne2}a_i^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1a_n & -a_2a_n & \cdots & \sum\limits_{1\le\le n,i\ne n}a_i^2\end{bmatrix}$$

正定，因此距离为

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ix_i^0\right|\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$$

**题目 2.2.62.** 求原点到椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最小和最大距离。

**解** 距离 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，约束条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=z-x^2-y^2=0\\ \varphi_2(x,y,z)=x+y+z-1=0\end{cases}$$

乘数法得到驻点

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)\quad\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$$

计算 Hessi 矩阵得到前者是唯一的最小值点，后者是唯一的最大值点，则最小、最大距离分别为

$$\sqrt{9-5\sqrt{3}}\quad\sqrt{9+5\sqrt{3}}$$

**题目 2.2.63.** 求 $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ 在平面 $2x+3y+4z=12$ 上的最小值点。

**解** 拉格朗日乘数法，最小值点 $\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$.

**题目 2.2.64.** 求原点到曲线 $\begin{cases}xyz=1\\ y=2x\end{cases}$ 的距离。

**解** 曲线上的点直接表示为 $\left(x,2x,\frac{1}{2x^2}\right)$，则

$$f(x)=\sqrt{5x^2+\frac{1}{4x^4}}\geq f(10^{-1/6})=\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{10}}{2}$$

**题目 2.2.65.** 求曲线 $\begin{cases}x-y+4z=1\\ 2x^2+4y^2=3\end{cases}$ 上最高点和最低点的高度。

**解** 设 $z=f(x,y)=\frac{-x+y+1}{4}$，越是条件 $\varphi(x,y)=2x^2+4y^2-3=0$，由乘数法得到驻点 $\pm\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，考虑 Hessi 矩阵得到极小值点 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，极大值点 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

**题目 2.2.66.** 求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i$ 在球面 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 上的最大值，并证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

**证明** 乘数法，极大值点 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，最大值 $\sqrt{n}$ 。

因为不等式齐次，不妨设 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$，即证。

**题目 2.2.67.** $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，求关于 $(a,b,c)$ 的函数 $g(a,b,c)=\int_0^1(f(x)-ax^2-bx-c)^2\,\mathrm{d}x$ 的最小值点。

**解** 积分求导交换积分号和导数。

设 $E(x)=f(x)-ax^2-bx-c$ ，则 $g(a,b,c)=\int_0^1 E^2(x)\,\mathrm{d}x$ ，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a}&=\int_0^1 2E(x)\cdot\frac{\partial E}{\partial a}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 2E(x)\cdot(-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^1 E(x)x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}b+\frac{2}{3}c-\int_0^1 2x^2f(x)\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

同理得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial b}&=\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+c-\int_0^1 2xf(x)\,\mathrm{d}x=0\\\frac{\partial g}{\partial c}&=\frac{2}{3}a+b+2c-\int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

解得驻点

$$\left(\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\begin{pmatrix}180&-180&30\\-180&192&-36\\30&-36&9\end{pmatrix}$$

Hessi 矩阵恒为正定矩阵，因此上述驻点即 $g(a,b,c)$ 的最小值点。

**题目 2.2.68.** 求 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在 $x+y=c(c>0)$ 下的极值，并证明对 $\forall a\geq 0,b\geq 0,K\in\mathbb{N}$ 有

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^K\leq\frac{a^K+b^K}{2}$$

**解** 乘数法得到极小值点 $\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$ ，极小值 $\frac{c^K}{2^K}$ 。由齐次性不妨设 $a+b=c$ ，证毕。

**题目 2.2.69.** 椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ 和平面 $x+y-z=0$ 的交线为一椭圆，求该椭圆在该平面内所围区域的面积。

**解** 用条件极值角度求出端点。对椭圆上 $(x,y,z)$ ，到椭圆中心，即原点的距离

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

约束条件为

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=0\\\varphi_2(x,y,z)=x+y-z=0\end{cases}$$

乘数法得到极大值和极小值点分别为

$$\pm\left(\frac{40}{\sqrt{646}},-\frac{35}{\sqrt{646}},\frac{5}{\sqrt{646}}\right)\quad\pm\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{19}}\right)$$

因此半长轴长和半短轴长为 $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{17}},\sqrt{10}$ ，因此面积 $S=\pi ab=\frac{5\sqrt{510}}{17}\pi$ .

**题目 2.2.70.** 可微函数 $x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v)$ 满足 $F(x,y,z)=0$ ，其中 $F$ 是 $C^1$ 函数，证明

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}x+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}y+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}z=0$$

**证明** 因为

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=y_uz_v-y_vz_u$$

且

$$\mathrm{d}x=x_u\mathrm{d}u+x_v\mathrm{d}v$$

全部代入即证。

**题目 2.2.71.** 求 $\begin{cases}3x^2y+y^2z+2=0\\2xz-x^2y-3=0\end{cases}$ 在 $(1,-1,1)$ 处的切线方程与法平面方程。

**解** 记两条方程分别为 $F_1,F_2$ ，则

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,-1,1)}=3\quad\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,-1,1)}=16\quad\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-1,1)}=2$$

于是切线

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{16}=\frac{z-1}{2}$$

法平面

$$3(x-1)+16(y+1)+2(z-1)=0$$

**题目 2.2.72.** 求曲面的切平面和法线方程

1. $x^2+y^2-z^2-4=0$ 在 $(2,1,1)$ 处
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

**解**

1. 因为

$$F'_x(2,1,1)=4 \quad F'_y(2,1,1)=2 \quad F'_z(2,1,1)=-2$$

于是切平面

$$4(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0$$

所求法线方程

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

2. 切平面方程

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{a^2(x-x_0)}{x_0}=\frac{b^2(y-y_0)}{y_0}=\frac{c^2(z-z_0)}{z_0}$$

**题目 2.2.73.** 在曲面 $z=x^2-2xy-y^2-8x+4y$ 上找出所有 $(x,y,z)$ 使得在该点处曲面的切平面是水平的。

**解** 令 $F(x,y,z)=x^2-2xy-y^2-8x+4y-z=$ ，则

$$F'_x=2x-2y-8 \quad F'_y=-2y-2x+4$$

当 $F'_x=F'_y=0$ 时切平面水平，解得 $(3,-1,-14)$ .

**题目 2.2.74.** $\mathbb{R}^3$ 中曲面在柱面坐标 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$ 下方程 $F(r,\theta,z)=0$ ，其中 $F$ 是可微函数，求 $(r_0,\theta_0,z_0)$ 所对应曲面上的点处切平面方程和法线方程。

**解** 因为 $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x} \\ z=z \end{cases}$ ，于是

$$F'_x=F'_r\cos\theta-\frac{F'_\theta\sin\theta}{r} \quad F'_y=F'_r\sin\theta+\frac{F'_\theta\cos\theta}{r} \quad F'_z=F'_z$$

代入即得切平面方程和法线方程。

**题目 2.2.75.** 曲面 $S$ 由 $F(x,y,z)=0$ 给出，其中 $F$ 是区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内的 $C^1$ 函数，且在 $(x_0,,y_0,z_0)\in D$ 处满足 $F'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 。证明该曲面 $(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面上过点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的任何一条直线都是曲面上过该点的某一光滑曲线的切线。

**证明** 记

$$X=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\quad Y=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\quad Z=\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$$

则切平面

$$X(x-x_0)+Y(y-y_0)+Z(z-z_0)=0$$

考虑过 $(x_0,y_0,z_0)$ 且和切平面垂直的任意平面 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ，则在切平面上过 $(x_0,y_0,z_0)$ 的直线方程为两平面方程的联立，也正是曲线

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\end{cases}$$

在该点的切线，证毕。

**题目 2.2.76.** 证明 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$ 上任一点处切线和 $z$ 轴夹角为常数。

**证明** 因为 $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$ ，则切线方程

$$\frac{x-a\cos t_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-a\sin t_0}{a\cos t_0}=\frac{z-bt}{b}$$

其方向向量 $(-a\sin t_0,a\cos t_0,b)$ 和 $(0,0,1)$ 夹角为定值。

**题目 2.2.77.** 求曲面 $z=xe^{x/y}$ 上每一点的切平面方程并证明曲面上任何两个点处的切平面相交。

**证明** 曲面由 $F(x,y,z)=xe^{x/y}-z=0$ 确定，则切平面方程

$$e^{x_0/y_0}\left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)(x-x_0)-\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{x_0/y_0}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

其中 $z_0=x_0e^{x_0/y_0}$ ，则切平面即

$$z=e^{x_0/y_0}\left(\left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)x-\frac{x_0^2}{y_0^2}y\right)$$

显然每个切平面都经过原点。

**题目 2.2.78.** 求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和曲面 $z=xy$ 的夹角。

**解** 两个曲面的交点设为 $(x_0, y_0, z_0)$ 。则 $x^2 + y^2 = 1$ 在该点的法线的方向向量为 $(x_0, y_0, 0)$ ，$z = xy$ 在该点的法线的方向向量为 $(-y_0, -x_0, 1)$ ，于是夹角

$$\theta = \arccos|\sqrt{2}z_0|$$

**题目 2.2.79.** 证明 $F(x - az, y - bz) = 0$ 上任一点法线和一条固定直线垂直。

**证明** 因为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1' \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2' \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -aF_1' - bF_2'$$

于是曲线在 $(x_0, y_0, z_0)$ 的法线平行 $(F_1', F_2', -aF_1' - bF_2')$ ，垂直 $(a, b, 1)$ .

**题目 2.2.80.** 证明 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ 上任一点处切平面和三个坐标轴的交点到原点的距离之和为常数。

**证明** 切平面方程

$$\frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y - y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z - z_0}{\sqrt{z_0}} = 0$$

从而距离之和为 $(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0})^2 = a$ 。

**题目 2.2.81.** 证明曲面 $xyz = a(a > 0)$ 上任一点处切平面和三个坐标平面所围体积为常数。

**证明** 切平面

$$y_0z_0(x - x_0) + z_0x_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$$

则体积为 $\frac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0) = \frac{9a}{2}$ .

**题目 2.2.82.** 证明曲线 $x^2 + 4y + z^2 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$ 在 $(0, -1, 2)$ 处相切。

**证明** 二者在 $(0, -1, 2)$ 的切平面方程都是 $y + z - 1 = 0$ 。

# Chapter 3

# 重积分

## 3.1 例题

**题目 3.1.1.** $\mathbb{R}^2$ 中有界区域 $D$ 的边界由有线条可求长曲线组成，证明 $D$ 可求面积。

**证明** 设 $\partial D = \bigcup\limits_{j=1}^{J} \Gamma_j$ ，其中 $\Gamma_j$ 是可求长曲线。下证 $\sigma(\partial D) = 0$ ，只需证 $\sigma(\Gamma_j) = 0$ 。

设 $\Gamma_j$ 长度为 $l_j$ ，对 $\forall k \in \mathbb{N}$ ，将 $\Gamma_j$ 按弧长 $k$ 等分，容易验证每个小弧长都可以含于一个边长为 $\dfrac{4l_j}{k}$ 的正方形内，因此 $\Gamma_j$ 可被 $k$ 个变成 $\dfrac{4l_j}{k}$ 的正方形覆盖，因此

$$k\left(\frac{4l_j}{k}\right)^2 = \frac{16l_j^2}{k} \to 0$$

因此 $\sigma(\Gamma_j) = 0$ ，证毕。

**题目 3.1.2** (143-1)**.** $\{x_k\}$ 是区间 $[0,1]$ 所有有理数组成的序列，定义 $D = [0,1] \times [0,1]$ 上的函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & x = x_k, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明 $f$ 在 $D$ 可积且 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ .

**证明** $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, s.t. \dfrac{1}{K} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 。任取 $k > K$ ，将 $[0,1]$ $k$ 等分，相应将 $D$ $k^2$ 等分，其中至多 $2kK$ 个小正方形和线段

$$\{(x,y) : x = x_1, \cdots, x_K, 0 \le y \le 1\}$$

的交非空。则

$$\sum_{l=1}^{k^2} \omega_l \frac{1}{k^2} \le \frac{2kK}{k^2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{l=1}^{k^2} \frac{1}{k^2} = \frac{2K}{k} + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是令 $k > \dfrac{4K}{\varepsilon}$ ，则

$$\sum_{l=1}^{k^2} \omega_l \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

于是 $f$ 在 $D$ 可积。且对任意分割总可以取到介点使得 $f(\xi_k, \eta_k) = 0$ ，因此

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

**题目 3.1.3** (147-1). $D = [0,1] \times [0,1]$ ，计算 $I = \iint_D x(x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ .

**解** 被积函数 $x(x-y)^2$ 在 $D$ 连续，因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 (x-y)^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x \left[-\frac{1}{3}(x-y)^3\right]\Big|_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x[x^3 - (x-1)^3]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

**题目 3.1.4** (150-2). 有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 由 $y = 0, y = x^3, y = 2 - x$ 围成，$f(x,y)$ 是 $D$ 上连续函数，用两种顺序将二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分。

**解** 此时

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^{1/3}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^3} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

这里看做 $X$ 型区域的时候分成两个部分。

**题目 3.1.5** (150-3). 计算累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ .

**解** $\dfrac{\sin y}{y}$ 的原函数不能求，因此无法直接计算累次积分。考虑函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

在平面区域 $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}\}$ 上的二重积分。

因为 $f$ 在 $D$ 连续，于是二重积分可以化为累次积分，得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y &= \iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{(y-y^2)\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

**题目 3.1.6** (151-4)**.** 计算 $\mathbb{R}^3$ 中以柱面 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2(a>0)$ 为边界且含有原点的立体体积 $V$ .

**解** 有对称性，只需要考虑第一卦限的部分。该立体是区域

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\leq a,x,y\geq 0\}$$

为底，$z-\sqrt{a^2-x^2}$ 为顶的曲顶柱体。由二重积分意义

$$\begin{aligned}V&=8\iint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y\\&=8\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3\end{aligned}$$

**题目 3.1.7** (154-5)**.** 计算三重积分 $I=\iiint_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$ ，其中 $D$ 是 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 围成的闭区域。

**解** 记 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是直线 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成的闭区域，则

$$D=\{(x,y,z):0\leq z\leq 1-x-y,(x,y)\in\Omega\}$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\bigg|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{1+x+y}-\frac{y}{4}\right)\bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}\end{aligned}$$

**题目 3.1.8.** 计算三重积分

$$I=\iiint_D(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $D=\left\{(x,y,z):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1,a,b,c>0\right\}$ .

由积分区域对称性和被积函数对称性容易看出

$$\iiint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

因此

$$I=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 $\forall x\in[-a,a]$ ，截面 $D_x$

$$D_x=\left\{(y,z):\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\le 1\right\}$$

面积 $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ ，因此

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_{-a}^{a}x^2\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi a^3bc\end{aligned}$$

同理得到

$$\iiint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi ab^3c\qquad\iiint_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

于是

$$I=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$$

**题目 3.1.9** (163-1)**.** 计算 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ 的面积。

**解** 极坐标变换把 $D=\{(r,\theta):0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$ 映成 $\Omega$ ，且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ ，于是

$$\sigma(\Omega)=\iint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi$$

**题目 3.1.10** (164-2)**.** 计算二重积分 $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ,其中 $D$ 是 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围且落在 $\mathrm{I},\mathrm{IV}$ 象限的部分。

**解** 极坐标变换把 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 化为

$$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2r^2\cos 2\theta$$

当 $x>0$ 时

$$r=a\sqrt{\cos 2\theta}\qquad -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ ，于是

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=2\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}a^4\end{aligned}$$

**题目 3.1.11** (164-3)**.** 计算 $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D$ 是 $x^2-y^2=1, x^2-y^2=9, xy=2, xy=4$ 围成的闭区域。

**解** 变换 $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ ，则逆变换把矩形

$$\Omega = \{(u,v) : 1 \le u \le 9, 4 \le v \le 8\}$$

一一映射成 $D$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}\iint_\Omega \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8 \end{aligned}$$

**题目 3.1.12** (165-4)**.** 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ 的体积。

**解** 取 $D = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ ，所求体积为

$$V = 2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$$

则

$$V = 2\iint_\Omega c\sqrt{1-r^2}abr\mathrm{d}r = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abr\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi abc$$

**题目 3.1.13** (165-5)**.** 计算 $\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D$ 是 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的区域。

**解** 变换

$$\begin{cases} x = r\cos^2\theta \\ y = r\sin^2\theta \end{cases}$$

将 $\Omega = \left\{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$ 一一变到 $D$ 内部，则

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\iint_{\overline{\Omega}} r^{1/2}\sin 2\theta \cdot r\sin 2\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{3/2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

**题目 3.1.14** (167-6)**.** 空间立体 $D$ 由曲面 $z = 25 - x^2 - y^2$ 和平面 $z = 0$ 围成，求体积 $V$ .

**解** 此时

$$V = \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

取柱坐标变换，则

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^5 r\,\mathrm{d}r \int_0^{25-r^2} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^5 r(25 - r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{625}{2}\pi \end{aligned}$$

[1]

[1]该柱坐标变换在 $\Omega, D$ 内分别挖掉一个光滑曲面后是 $C^1$ 同胚，利用前面极坐标变换相似的方法容易验证上述重积分变量替换公式依然成立。