

数学分析 (III)

Contents

I 笔记	5
13 多元函数的极限和连续	7
13.1 欧氏空间	7
13.1.1 开集和闭集	7
13.1.2 欧氏空间的基本定理	8
13.2 多元函数与向量函数的极限	9
13.3 多元连续函数	10
13.3.1 多元复合向量函数连续性定理	11
13.3.2 集合连通性	11
13.3.3 连续函数性质	11
13.3.4 同胚映射	13
14 多元微分学	15
14.1 偏导数与全微分	15
14.1.1 偏导数与全微分	16
14.1.2 向量函数的导数与全微分	19
14.2 多元函数求导法	21
14.2.1 导数的四则运算和复合函数求导	21
14.2.2 高阶偏导数	24
14.2.3 一阶微分的形式不变性与高阶微分	25
14.3 泰勒公式	26
14.3.1 泰勒公式与余项	27
14.3.2 微分中值	28
14.3.3 Hessi 矩阵	28
14.4 隐函数和逆映射	29

14.4.1 单方程隐函数	29
14.4.2 方程组隐函数	31
14.4.3 逆映射存在定理	32
14.5 多元函数的极值	33
14.5.1 通常极值问题	33
14.5.2 条件极值问题	36
14.6 多元微分学的几何应用	38
14.6.1 空间曲线的切线和法平面	38
14.6.2 曲面的切平面与法线	40
14.6.3 多元凸函数	42
II 习题	43
1 多元函数的极限和连续	45
1.1 例题	45
1.2 习题	45
2 多元微分学	61
2.1 例题	61

Part I

笔记

Chapter 13

多元函数的极限和连续

Chapter	Summary
13.1	欧氏空间：把 \mathbb{R} 推广到多维实数空间，为后续在 \mathbb{R}^n 上定义极限和连续奠定基础.
13.2	多元函数与向量函数的极限：推广定义多维空间下的极限函数.
13.3	多元连续函数：推广多维空间下的连续函数.

13.1 欧氏空间

Section	Summary
13.1.1	开集和闭集：定义和简要性质
13.1.2	欧式空间的基本定理：完备性、闭集套定理、聚点原理、有限覆盖定理.

13.1.1 开集和闭集

定义 13.1.1 (开集、闭集). $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为开集，若 $E = E^\circ$. 开集的补集称为闭集

命题 13.1.1 (开集、闭集性质). \mathbb{R}^n 的开集有以下性质

1. \mathbb{R}^n, \emptyset 是开集
2. 任意开集的并是开集
3. 有限开集的交的开集

4. \mathbb{R}^n, \emptyset 是闭集
5. 有限闭集的并是闭集
6. 任意闭集的交是闭集
7. E 是闭集当且仅当 $E = E'$
8. $\bar{E} = E \cup E'$ 是包含 E 的最小闭集, 即一切包含 E 的闭集的交集.

这里任意开集的交不一定是开集, 反例如

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U\left(x, \frac{1}{k}\right) = \{x\}$$

是闭集.

对任意闭集的并不一定是闭集, 反例如

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$

则 0 是这个集合的一个极限点, 且不属于这个集合, 因此这个集合不是闭集.

13.1.2 欧氏空间的基本定理

定理 13.1.1 (完备性). 欧氏空间 \mathbb{R}^n 是完备的, 即任意 Cauchy 序列的极限在 \mathbb{R}^n 内.

通过 \mathbb{R} 的完备性可以容易得到.

定理 13.1.2 (闭集套定理). 递减且直径趋于 0 的非空闭集套 $\{F_k\}$ 的极限集是一个点.

证明 任取 $x_k \in F_k$, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 K , 当 $k > K$ 时

$$\text{diam}(F_k) < \varepsilon$$

当 $k'' > k' > K$ 时

$$|x_{k'} - x_{k''}| \leq \text{diam}(F_{k'}) < \varepsilon$$

即 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列, 由 \mathbb{R}^n 完备性 $x_0 \in \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, 且该点列属于闭集, 因此 x_0 属于任意闭集, 即

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

又因为 $\text{diam}(F_k) \rightarrow 0$, 因此 x_0 唯一, 证毕.

定理 13.1.3 (聚点原理 (Bolzano-Weierstrass 定理)). \mathbb{R}^n 任意有界点列存在收敛子列. 等价形式是 \mathbb{R}^n 任意有界无穷集合存在聚点.

证明 每个分量存在收敛子列, 依次取子列即可.

定理 13.1.4 (有限覆盖定理). 在 \mathbb{R}^n 中有界闭集等价于紧集.

证明

1. 必要性: 对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{U(0, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是一个开覆盖, 于是存在有界子覆盖, 因此 E 是有界集合.

假设存在 $x_0 \in E', x_0 \notin E$, 任取 $x \neq x_0, x \in E$, 则

$$\bigcup_{x \in E} U(x, r_x) \supset E \quad r_x = \frac{1}{2}|x - x_0|$$

于是存在

$$\bigcup_{k=1}^K U(x_k, r_{x_k}) \supset E$$

取 $r_K = \min\{r_k\}_{1 \leq k \leq K}$, 则

$$U(x_0, r_K) \cap \left\{ \bigcup_{k=1}^K U(x_k, r_{x_k}) \right\} = \emptyset$$

矛盾.

2. 充分性: 假设存在 E 的一个开覆盖, 其任意有限个开集不能覆盖 E , 对 E 的每个分量不断二分, 利用闭集套定理, 容易得到矛盾.

13.2 多元函数与向量函数的极限

定义 13.2.1. $z = f(x, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $N_0((x_0, y_0), \delta_0) \subset E (\delta_0 > 0)$ 内, 对每个固定的 $y \neq y_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y)$ 存在, 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = A$, 称 A 为 $f(x, y)$ 趋于 (x_0, y_0) 先 x 后 y 的累次极限, 记为

$$A = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

命题 13.2.1 (累次极限和极限的关系). 累次极限都存在的时候极限可能不存在, 如

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$, 而 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

极限存在的时候累次极限不一定存在, 如

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 都不存在, 因此累次极限也就无从讨论.

上述反例的问题出在累次极限的第一个趋近下极限可能不存在, 我们能证明, 若极限本身存在, 且第一个趋近下的极限存在, 则累次极限存在且等于极限. 即下面的定理.

定理 13.2.1 (累次极限等于极限的情况). $f(x, y)$ 在 $N_0((x_0, y_0), \delta_0)$ 上有定义, 且

1. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A, A \in \mathbb{R} \text{ or } \infty$
2. 对 $U_0(y_0, \delta_0)$ 内固定的 $y \neq y_0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y)$ 存在.

则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = A$$

证明 对 $A \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \delta_0)$, 当 $(x, y) \in N_0((x_0, y_0), \delta)$ 时

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因为第一个趋近下极限存在, 在上式两边令 $x \rightarrow x_0$, 则

$$|\phi(y) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

证毕.

13.3 多元连续函数

Section Summary

- 13.3.1 多元复合向量函数连续性定理
- 13.3.2 集合连通性: 定义了道路连通, 在本书中只讨论这一种连通.
- 13.3.3 连续函数性质: 推广一元连续函数的三个性质: 最值、介值和一致连续.

13.3.4 同胚映射

13.3.1 多元复合向量函数连续性定理

定理 13.3.1 (多元复合向量函数连续性定理). $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \dots, g_l(\mathbf{y}))$ 在 $\mathbf{f}(E)$ 上连续, 则 $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 在 E 上连续.

13.3.2 集合连通性

定义 13.3.1 (曲线). $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, 称 D 上的 n 为连续函数

$$\mathbf{h}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

为 \mathbb{R}^n 的一条连续曲线, 简称曲线. 也称为 \mathbb{R}^n 的一条道路或路径.

定义 13.3.2 (道路连通). $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空, 若 E 的任意两点之间都存在连接两点的道路, 称 E 是道路连通的.

在本课程我们提到的连通性就是上述简单定义的连通, 因此之后不说道路连通, 都直接简称连通.

连通的开集称为区域, 若 D 是区域, 称 $D \cup \partial D$ 为闭区域.

在多元微积分和一元微积分的对比中, 区域对应开区间, 闭区域对应闭区间.

凸的区域称为凸域.

13.3.3 连续函数性质

本节推广一元连续函数具有的三个性质:

1. 在闭区间有最值
2. 在区间上有介值
3. 在闭区间上一致连续

在 \mathbb{R} 上, 闭区间上的连续函数存在最大、最小值, 可以理解为: 闭区间上的连续函数的值域是闭区间, 这个结论推广到 \mathbb{R}^n 的情形, 首先闭区间对应 \mathbb{R}^n 的紧集, 因此我们先证明: 连续的向量函数把紧集映到紧集.

定理 13.3.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, 向量函数 $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 则 $\mathbf{f}(E)$ 是 \mathbb{R}^m 中紧集.

证明 假设存在 $\{\mathbf{x}_k\} \subset E$ 使得 $|\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)| = +\infty$, 由 E 紧性, 存在子序列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_j} = \mathbf{x}_0 \in E$, 又 \mathbf{f} 连续, 于是 $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_j}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 因此 $\mathbf{f}(E)$ 是紧集.

任取 $\mathbf{f}(E)$ 的聚点 \mathbf{u}_0 , 则存在 $\{\mathbf{x}'_k\} \subset E$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) = \mathbf{u}_0$, 由紧性, 存在收敛子列 $\{\mathbf{x}'_{k_j}\}$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}'_{k_j} = \mathbf{x}'_0 \in E$, 由 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}'_0 连续, 有

$$\mathbf{u}_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_{k_j}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}'_0) \in \mathbf{f}(E)$$

接下来考虑 $m = 1$ 的特例, 就得到:

推论 13.3.1 (最值定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, $f(\mathbf{x})$ 在 E 连续, 则 $f(E)$ 是 \mathbb{R} 上的紧集, 于是 $f(\mathbf{x})$ 在 E 上取到最大、最小值.

\mathbb{R} 上连续函数在区间上具有介质性质, 该性质成立的充要条件是值域是一个区间, 区间在 \mathbb{R}^n 中对应连通集合, 因此先证明: 连续的向量函数把连通集映到连通集.

定理 13.3.3. $E \subset \mathbb{R}^n$ 是连通集, 向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 E 上连续, 则 $\mathbf{f}(E)$ 是 \mathbb{R}^m 上的连通集.

证明 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$, 则存在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ 使得

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) \quad j = 1, 2$$

由于 E 连通, 则存在连接 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 的道路 $\mathbf{h}(t), t \in [0, 1]$, 容易看出 $\mathbf{f}(\mathbf{h}(t))$ 是 $\mathbf{f}(E)$ 中连接 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的一条道路, 说明 $\mathbf{f}(E)$ 是 \mathbb{R}^m 中的连通集.

于是考虑 $m = 1$ 的特例就得到

推论 13.3.2 (介值定理). $E \subset \mathbb{R}^n$ 是连通集, $u = f(\mathbf{x})$ 在 E 连续, $u_1, u_2 \in f(E), u_1 < u_2$, 对 $\forall c \in (u_1, u_2)$, 存在 $\xi \in E$ 使得

$$f(\xi) = c$$

\mathbb{R} 中在闭区间上连续的函数一致连续, 推广到 \mathbb{R}^n , 即在紧集上连续的函数一致连续.

定理 13.3.4 (一致连续定理). $E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 若向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 E 上连续, 则在 E 一致连续.

证明 否则, 假设 f 在 E 不一致连续, 则存在两个序列 $\{x_n\}, \{x'_n\} \subset E$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

因为 E 是有界闭集, 则 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 且极限在 E 内, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in E$, 则

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$$

与 $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ 矛盾.

13.3.4 同胚映射

定义 13.3.3 (同胚映射). $f(x) : E \rightarrow f(E)$ 是连续的一一对应且其逆映射也连续, 则称 f 为 $E \rightarrow f(E)$ 的同胚映射. 也称为变换.

Chapter 14

多元微分学

Chapter	Summary
14.1	偏导数与全微分：定义多元函数、多元向量函数的偏导数和全微分，说明多元情形下可微和可导之间的区别以及联系.
14.2	多元函数求导法
14.3	泰勒公式
14.4	隐函数存在定理
14.5	多元函数的极值
14.6	多元微分学的几何应用

14.1 偏导数与全微分

Section	Summary
14.1.1	多元连续函数的导数和微分：给出导数、微分在多元情形的定义，阐述二者之间的区别和联系.
14.1.2	向量函数的导数和全微分：给出多元向量函数导数和微分的定义，以及和多元连续函数的导数、微分之间的关系.

14.1.1 偏导数与全微分

定义 14.1.1 (偏导数). 设函数 $u = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, 对 $1 \leq i \leq n$, 若一元函数

$$f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

在 x_i^0 处的导数存在, 则称 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处关于 x_i 可偏导, 导数可记为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \quad f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

若 $f(\mathbf{x})$ 在 D 内的每一点都关于 x_i 可偏导, 将其偏导数记为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad f'_{x_i}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

定义 14.1.2 (方向导数). $u = f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{v} = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)$ 为一方向, 如果

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

存在, 称该极限为 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处沿 \mathbf{v} 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}$ 或 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}_0}$.

偏导数和方向导数的关系: 设 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处关于 x_i 的偏导数 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$ 存在并等于 A , 若记 \mathbf{v}_i 是第 i 个分量为 1 的单位向量, 则 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}_i} = A$.

定义 14.1.3 (全微分). 设函数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, 记 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, 称为自变量的全增量. 设 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$, 若存在仅依赖 \mathbf{x}_0 的常数 A_i 使得

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + o(|\Delta \mathbf{x}|) \quad |\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$$

则称 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 并称 $\sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的全微分, 记为 $df(\mathbf{x}_0)$.

当 x_i 是自变量时, 定义 $dx_i = \Delta x_i$, 于是 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的全微分可以记为

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$$

下面的定理说明在多元情形下, 可微能够推出存在各个偏导数, 因此可微是比可导更严格的条件. 且全微分和偏导数之间满足

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} dx_i$$

定理 14.1.1. $f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义, 在 \mathbf{x}_0 处可微, 微分记为 $df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$, 则

1. $f(x)$ 在 \mathbf{x}_0 处连续;
2. $f(x)$ 关于 x_i 可偏导, 且 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$.

证明

1. 记 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, 则 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 等价于 $\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, 即 $\Delta x_i \rightarrow 0, \forall i (1 \leq i \leq n)$, 于是

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} [f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)] = \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \left[\sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + o(|\Delta \mathbf{x}|) \right] = 0$$

即 $f(x)$ 在 \mathbf{x}_0 处连续.

2. 对任意固定的 i , 当 $j \neq i$ 时, 令 $x_j = x_j^0$, 即 $\Delta x_j = 0$, 此时

$$\Delta \mathbf{x} = (0, \dots, \Delta x_i, 0, \dots, 0) \quad |\Delta \mathbf{x}| = |\Delta x_i|$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} \\ = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(A_i + \frac{o(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} \right) \\ = A_i \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 关于 x_i 可偏导, 且 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = A_i$, 证毕.

既然可导是更弱的条件, 需要补充什么条件能够从可导推出可微? 下面的定理说明, 在各个偏导数都连续的时候, 函数可微.

定理 14.1.2. $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, $\mathbf{x}_0 \in D$, 设 $f(x)$ 在 \mathbf{x}_0 的邻域 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内存在各个偏导数, 并且这些偏导数在 \mathbf{x}_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{x}_0 处可微.¹

证明繁琐, 略. 可见课本 P47-P49.

若 $f(x)$ 在区域 D 上关于自变量的各个分量都具有连续偏导数, 称 $f(x) \in C^1(D)$, 也称连续可微.

下面的定理给出可微的函数的方向导数和偏导数之间的关系.

¹根据课本习题第一章第十五题, 这个条件可以弱化为: 有 $n-1$ 个偏导数在 \mathbf{x}_0 处连续.

定理 14.1.3. $f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义, 在 \mathbf{x}_0 处可微, 则 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处沿 $\mathbf{v} = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \cos \theta_i$$

证明 由可微性和方向导数定义, 得到

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} t \cos \theta_i + o(|t|)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \cos \theta_i$$

证毕.

由上述定理, 当 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 的 n 个偏导数不全为零时, 对模长确定的方向向量 (不妨设模长为 1, 即单位方向向量) $f(\mathbf{x})$ 沿方向

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right)^2}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

的方向导数达到最大值, 因此向量 $\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)$ 是 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处方向导数达到最大的方向, 同时它的模就是该方向的方向导数, 于是我们引进梯度的定义.

定义 14.1.4 (梯度). 设 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 则称向量

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

为 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的梯度, 记为 $\text{grad} f(\mathbf{x}_0)$, ²即

$$\text{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

设 f, g 均是可微函数, 则从定义容易推出梯度有以下性质:

1. $\text{grad} C = \mathbf{0}$;
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{grad} f + \beta \text{grad} g$;
3. $\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad} g + g \cdot \text{grad} f$;
4. $\text{grad} \frac{f}{g} = \frac{1}{g^2} (g \cdot \text{grad} f - f \cdot \text{grad} g) (g \neq 0)$.

从梯度的定义可以看出, 当 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微时, $f(\mathbf{x})$ 沿方向 \mathbf{v} 的方向导数可以简单记成 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = \text{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$.

²也常常记为 ∇f .

14.1.2 向量函数的导数与全微分

我们用矩阵的形式来表示向量函数的导数和全微分.

定义 14.1.5. 向量函数 $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, 对 $\mathbf{x}_0 \in D$, 定义 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$ 为 \mathbf{x} 在 \mathbf{x}_0 处的全增量, 如果存在 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = (A_{ij})$$

使得 $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= (\Delta f_1(\mathbf{x}_0), \dots, \Delta f_m(\mathbf{x}_0))^T \\ &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(|\Delta \mathbf{x}|) \\ \vdots \\ \alpha_m(|\Delta \mathbf{x}|) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 \mathbf{A} 中的元素仅依赖于 \mathbf{x}_0 而不依赖于 $\Delta \mathbf{x}$, 对于 $\forall j (1 \leq j \leq m)$, $\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)$ 依赖于 $\Delta \mathbf{x}$, 并且满足 $\lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} = 0$, 则称 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微或可导, 矩阵 \mathbf{A} 称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的 Fréchet 导数, 记作 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ 或 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$; $\mathbf{A}\Delta \mathbf{x}$ 称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的全微分, 记作 $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 即

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x}$$

若规定 $d\mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}$, 则有 $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$.

下面讨论如何判断一个向量函数的可微性, 以及当它可微时, 如何求它的导数.

简单概括, 向量函数在某点可微的充要条件是每个分量函数在该点都可微. 把每个分量函数关于每个分量 x_j 的偏导数排成矩阵 (称为 Jacobi 矩阵), 就得到向量函数的 Fréchet 导数, 进而就得到全微分.

定理 14.1.4. 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的区域, $\mathbf{x}_0 \in D$, 向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ 在 D 上有定义, 则 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微的充分必要条件是对于 $\forall j (1 \leq j \leq m)$, $f_j(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 记

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \right)_{m \times n}$$

则当 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微时, 有

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}d\mathbf{x} \quad \text{or} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}$$

证明

1. 必要性: 设 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 可微, 从而存在 $m \times n$ 矩阵 (A_{ji}) 使得当 $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ 时有

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \Delta f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \Delta f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i} \Delta x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{mi} \Delta x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1(|\Delta \mathbf{x}|) \\ \vdots \\ \alpha_m(|\Delta \mathbf{x}|) \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)$ 依赖于 $\Delta \mathbf{x}$, 且 $\lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} = 0$, 比较上式两边向量的分量, 得到: 当 $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ 时

$$\Delta f_j(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n A_{ji} \Delta x_i + \alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)$$

由多元函数可微定义可知, $f_j(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 且

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

2. 充分性: 设对 $\forall j (1 \leq j \leq m)$, $f_j(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 则

$$\Delta f_j(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)$$

其中 $\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)$ 依赖于 $\Delta \mathbf{x}$, 且 $\lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\alpha_j(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= (\Delta f_1(\mathbf{x}_0), \dots, \Delta f_m(\mathbf{x}_0))^T \\ &= \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{m \times n} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(|\Delta \mathbf{x}|) \\ \vdots \\ \alpha_m(|\Delta \mathbf{x}|) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\alpha(|\Delta \mathbf{x}|)$ 满足 $\lim_{|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\alpha(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} = 0$, 由定义 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 且 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}$, 证毕.

当向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$ 中的每个分量函数在 \mathbf{x}_0 处均可微时, 矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ 称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的雅可比矩阵, 记为 $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$.

特别地, 当 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 是 n 维向量函数时, \mathbf{A} 是 $n \times n$ 矩阵, 此时 $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ 的行列式称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的雅可比行列式, 记为

$$|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)| \quad \text{or} \quad \left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

显然对一个向量函数, 如果分量函数在 \mathbf{x}_0 处具有各个偏导数, 我们就可以形式地定义 $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$. 但是这不能说明 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 一定可微.

考虑向量函数可微的条件, 容易得到: 当 $f_j(\mathbf{x})$ 的各个偏导数都在 \mathbf{x}_0 处连续时, 根据前面的定理, 得到此时 $f_j(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 因此 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微.

另外, 若对于 $\forall j(1 \leq j \leq m)$, $f_j(\mathbf{x})$ 的各个偏导数在区域 D 上连续, 称 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上是 C^1 的, 记为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1(D)$.

特别地, 我们称 \mathbb{R}^n 中区域 $D \rightarrow \Omega$ 的变换 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 C^1 的, 如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1(D)$, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \in C^1(\Omega)$.

最后, 把 $f(\mathbf{x})$ 看成只有一个分量的多元向量函数, 则利用多元向量函数的导数的记号, 我们可以得到, 当 $f(\mathbf{x})$ 可微时

$$f'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = \text{grad} f(\mathbf{x}) \quad (14.1)$$

14.2 多元函数求导法

Section	Summary
14.2.1	导数的四则运算和复合函数求导: 介绍复合函数的全微分, 推论得到复合向量函数的全微分以及复合函数的导数 (这个导数是上一节把多元函数看出一个分量的向量函数下的导数)
14.2.2	高阶偏导数: 介绍高阶偏导数可交换自变量的条件
14.2.3	一阶微分的形式不变性与高阶微分

14.2.1 导数的四则运算和复合函数求导

多元函数四则运算的导数和一元函数相同.

下面我么主要考虑复合函数的求导法. 简单概括复合函数求导形式上和一元函数类似.

定理 14.2.1 (复合函数求导). $f(\mathbf{u}) = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有定义, 且在 $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ 处可微, 再设 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义, 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 处可微, 且 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$, 则 $f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 在 \mathbf{x}_0 处可微, 且

$$df(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)) = f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$$

证明 证明思路很清晰, 因为 f, \mathbf{u} 都可微, 写出全微分之后, 证明 $f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$ 是全微分即可. 由 f, \mathbf{u} 在 $\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0$ 处可微, 得到

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} + \alpha(|\Delta \mathbf{x}|) \quad \frac{\alpha(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} \rightarrow 0 \\ \Delta f(\mathbf{u}_0) &= f(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}) - f(\mathbf{u}_0) = f'(\mathbf{u}_0)\Delta \mathbf{u} + \beta(|\Delta \mathbf{u}|) \quad \frac{\beta(|\Delta \mathbf{u}|)}{|\Delta \mathbf{u}|} \rightarrow 0\end{aligned}$$

代入得到

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)) &= f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x})) - f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)) \\ &= f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} + \gamma(|\Delta \mathbf{x}|)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma(|\Delta \mathbf{x}|) &= f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\alpha(|\Delta \mathbf{x}|) + \beta(|\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|) \\ &= f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\alpha(|\Delta \mathbf{x}|) + \beta(|\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} + \alpha(|\Delta \mathbf{x}|)|)\end{aligned}$$

然后证明

$$\frac{\gamma(|\Delta \mathbf{x}|)}{|\Delta \mathbf{x}|} \rightarrow 0 (|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0)$$

即可.

从上述复合函数求导可以推出复合向量函数的求导:

推论 14.2.1. $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_l(\mathbf{u}))^T$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 可微, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))^T$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 可微, 且 $\mathbf{u}(D) \subset \Omega$, 则 $\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 在 D 可微, 且

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

按照向量函数全微分的定义和上面复合函数求导直接得到.

推论 14.2.2. 设 D, Ω 为 \mathbb{R}^n 中的区域, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 $D \rightarrow \Omega$ 的 C^1 变换, 则对 $\forall \mathbf{x} \in D$ 有

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{E}$$

其中 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; 对于 $\mathbf{y} \in \Omega$, 有

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{E}$$

其中 $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$. 特别地, 当 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 时

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = [\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}$$

其中 \mathbf{E} 是 $n \times n$ 单位矩阵, $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{-1}$ 为 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 的逆矩阵. ³

³在第二个式子两边取行列式得到

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = 1$$

证明 由 C^1 变换的定义, 得到 $\mathbf{f}, \mathbf{f}^{-1}$ 都是可微向量函数, 因此

$$(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$$

两边对 \mathbf{x} 求导数就得到第一个式子. 同理

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}$$

两边对 \mathbf{y} 求导数就得到第二个式子. 第三个式子在前面基础上显然.

在得到复合函数全微分之后, 根据上一节微分和偏导数的关系, 我们自然的得到下面的关于复合函数求偏导数的推论:

推论 14.2.3. $f(\mathbf{u}) = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有定义, 且在 $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ 处可微, 再设 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有定义, 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 处可微, 且 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$, 则对于 $\forall i(1 \leq i \leq n)$, $f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 在 \mathbf{x}_0 处关于 x_i 可偏导, 且

$$\frac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right)$$

4

证明 由 14.1 得到

$$(f(\mathbf{u}(\mathbf{x})))'|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_n} \right)$$

用矩阵形式表示, 得到

$$\begin{aligned} & f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \right), \dots, \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \right) \end{aligned}$$

⁴此处的 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处可微这个条件可以减弱成在 \mathbf{x}_0 处存在各个偏导数. 但 $f(\mathbf{u})$ 在 \mathbf{u}_0 处可微不能减弱成存在各个偏导数, 例如

$$f(u, v) = \begin{cases} 1 & uv \neq 0 \\ 0 & uv = 0 \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

令 $u, v = t$, 则 $g(t) = f(t, t)$ 在 $t = 0$ 处不连续不可导.

又因为 $(f(\mathbf{u}(\mathbf{x})))'|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)$, 比较分量即得, 证毕.

上述推论给出的求导公式称为**链锁法则**. 对二元形式, 设 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 都是可微函数, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

若给出的函数有形式 $z = f(u(x, y), v(x, y))$, 可以用下列记号

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

其中 f'_i 指的是 f 对第 i 个变量求偏导数.

14.2.2 高阶偏导数

设 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上具有各个偏导数. 由定义, 其每个偏导数 $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ 作为 D 上的 n 元函数, 若它们仍具有各个偏导数, 称它们的偏导数为 $f(\mathbf{x})$ 的二阶偏导数. 类似定义更高阶偏导数.

当 $\partial \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) / \partial x_k$ 存在时, 将其记为 $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i}, f''_{x_k x_i} f''_{ki}(x)$.

一个函数的各个高阶偏导数都存在时, 改变对自变量分量的求导顺序, 高阶偏导数的值也可能改变, 如

例 14.2.1. 对函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

此时 $f'_x(0, y) = -y, f'_y(x, 0) = x$, 于是

$$f''_{yx}(0, 0) = -1 \neq 1 = f''_{xy}(0, 0)$$

当高阶偏导数在某点连续, 在该点改变自变量顺序, 高阶偏导数的值不变. 即下面的定理

定理 14.2.2. 设函数 $f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上有定义, $\mathbf{x}_0 \in D$, 且对于 $1 \leq j < k \leq n$, $f''_{kj}(\mathbf{x}), f''_{jk}(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta)$ 内存在, 且在 \mathbf{x}_0 处连续, 则

$$f''_{kj}(\mathbf{x}_0) = f''_{jk}(\mathbf{x}_0)$$

证明 不妨设 $j = 1, k = 2$, 记 $\mathbf{x} = (x, y, \mathbf{x}')$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, \mathbf{x}'_0)$, 对充分小的 $\Delta x, \Delta y$, 考虑

$$I(\Delta x, \Delta y) := \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \mathbf{x}'_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, \mathbf{x}'_0)}{\Delta x \Delta y} - \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, \mathbf{x}'_0) - f(x_0, y_0, \mathbf{x}'_0)}{\Delta x \Delta y}$$

记

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y, \mathbf{x}'_0) - f(x, y_0, \mathbf{x}'_0)$$

$$h(y) = f(x_0 + \Delta x, y, \mathbf{x}'_0) - f(x_0, y, \mathbf{x}'_0)$$

则由一元函数微分中值定理得到

$$\begin{aligned} I(\Delta x, \Delta y) &= \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x \Delta y} = \frac{g'(x_0 + \theta_1 \Delta x)}{\Delta y} \\ &= \frac{f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y, \mathbf{x}'_0) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0, \mathbf{x}'_0)}{\Delta y} \\ &= f''_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y, \mathbf{x}'_0) \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, 同理得到

$$I(\Delta x, \Delta y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y, \mathbf{x}'_0)$$

联立两式, 利用它们在 \mathbf{x}_0 处的连续性, 令 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, 得到

$$f''_{yx}(\mathbf{x}_0) = f''_{xy}(\mathbf{x}_0)$$

对于复合函数的高阶偏导数, 和一元的情形一样, 不存在一般性的公式, 需要逐次求出.

14.2.3 一阶微分的形式不变性与高阶微分

因为全微分可以写成偏导数的形式, 在每一个偏导数都是可微函数的条件下, 我们可以定义更高阶的微分:

定义 14.2.1 (高阶微分). $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, 函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \in D$ 处可微, 即

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i$$

若每一个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 都仍是可微函数, 则称

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} dx_k \right) dx_i$$

为 $f(\mathbf{x})$ 的二阶微分, 记为 $d^2 f(\mathbf{x})$. 归纳地得到 $d^k f(\mathbf{x}) = d(d^{k-1} f(\mathbf{x}))$.

若形式地记 $df(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f(\mathbf{x})$, 当 $f(\mathbf{x})$ 的每个 k 阶偏导数都连续, 可以用容易记忆的方法记成

$$d^k f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x})$$

特别地, 对二元函数 $f(x, y)$, 若各个 k 阶导数都存在且连续 (即高阶偏导可以交换自变量顺序), 则

$$d^k f(x, y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) = \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k-j} \partial y^j} dx^{k-j} dy^j$$

下面介绍多元函数一阶微分的形式不变性:

命题 14.2.1 (一阶微分的形式不变性). 设 $f(\mathbf{u}) = f(u_1, \dots, u_m)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上可微, 则 $f(\mathbf{u})$ 的微分

$$df(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

此时 \mathbf{u} 是自变量.

设 $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))^T$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的可微向量函数, 且 $\mathbf{u}(\Omega) \subset D$, 则由复合函数求导法则得到

$$df(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

因为 $d\mathbf{u} = (u'_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \dots, u'_m(\mathbf{x})d\mathbf{x})^T = \mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, 因此当 \mathbf{x} 是变量, \mathbf{u} 是中间变量时我们仍然有:

$$df(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = f'(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

因为二阶以上的微分不再具有形式不变性, 因此多元函数情形也没有高阶微分的形式不变性.

14.3 泰勒公式

Section Summary

- 14.3.1 泰勒公式与余项
 - 14.3.2 微分中值
 - 14.3.3 Hessi 矩阵
-

14.3.1 泰勒公式与余项

定理 14.3.1 (泰勒公式). $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内具有 $K+1$ 阶连续偏导数, 则对 $\forall \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$, 有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{(K+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{K+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}) \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$.

证明 本质上是一元函数的泰勒公式的推广.

构造一元函数

$$\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \quad t \in [0, 1]$$

由复合函数求导公式, $\varphi(t)$ 有 $K+1$ 阶连续导数, 因此由一元函数的泰勒公式

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^K \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(K+1)}(\theta t)}{(K+1)!} t^{K+1}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$, 注意到

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$$

代入即证.

当 $f(\mathbf{x})$ 在区域 D 内有 $K+1$ 阶连续偏导数时, 上述定理的余项

$$R_{K+1}(\mathbf{h}) = \frac{1}{(K+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{K+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})$$

称为拉格朗日余项.

推论 14.3.1. $f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内有 K 阶连续偏导数, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$, 则

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{h}|^K) (|\mathbf{h}| \rightarrow 0)$$

证明 由泰勒公式得到

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{K!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^K (f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)) \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$. 记最后的余项为 $R_K(\mathbf{h})$, 则

$$\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{R_K(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|^K} = \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{1}{K!} \left(\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{|\mathbf{h}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^K (f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)) = 0$$

这是因为和式每一项系数有界, 且 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}$ 的每个 K 阶偏导数区域 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 的 K 阶偏导数 (由条件偏导数连续).

上述推论的余项 $o(|\mathbf{h}|^K)$ 称为皮亚诺余项.

由上述推论, 若 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = P_K(h_1, h_2, \dots, h_n) + o(|\mathbf{h}|^K) \quad (|\mathbf{h}| \rightarrow 0)$$

其中 P_K 是 n 元 K 次多项式, 则上式必定是 $f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内的泰勒公式.

14.3.2 微分中值

在泰勒公式中取 $K = 0$, 得到

定理 14.3.2 (拉格朗日微分中值定理). $f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数, 且 $\forall t \in [0, 1], \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in D$, 则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \\ &= f'(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$.

类似一元函数的情形, 我们容易得到下面的推论:

推论 14.3.2. $f(\mathbf{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 的各个偏导数均为 0, 则 $f(\mathbf{x})$ 在 D 为常数函数.

14.3.3 Hessi 矩阵

在泰勒公式中令 $K = 1$, 得到

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}^T + \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}^T + o(|\mathbf{h}|^2) \quad (|\mathbf{h}| \rightarrow 0)$$

其中

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

称为 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的 **Hessi 矩阵**

14.4 隐函数和逆映射

Section	Summary
14.4.1	单方程隐函数：给出单方程隐函数存在的充分条件
14.4.2	方程组隐函数：给出方程组确定的隐函数存在的充分条件. 此时把每个方程看成向量函数的一个分量函数，则这里讨论的其实是向量函数确定的隐函数存在的充分条件.
14.4.3	逆映射存在定理：利用隐函数组存在定理给出一个连续可微映射局部存在逆映射的充分条件. 容易看出本节讨论的都是充分条件.

14.4.1 单方程隐函数

下面的定理给出了隐函数存在的充分条件：

定理 14.4.1 (隐函数存在定理). $F(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 满足

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y), F'_y(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 连续
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

则存在 $\delta_0 > 0$ ，使得在 $U(x_0, \delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y = f(x)$

1. $y_0 = f(x_0)$
2. $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in U(x_0, \delta_0)$
3. 若 $F'_x(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 连续，则 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 有连续导数，且

$$f'(x) = \frac{-F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

56

⁵该定理确定的隐函数是局部存在的，且定理的结论只给出了存在性，在很多情况下未必能找到解析式 $y = f(x)$ 来表示这个隐函数，如对 Kepler 方程

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0$$

在 \mathbb{R} 确定的隐函数 $y = f(x)$ 无法写出解析式.

⁶因为定理只给出了充分性，因此 $F(x, y)$ 不满足上述条件的时候也可能唯一确定一个隐函数.

证明 不妨设 $F'_y(x_0, y_0) > 0$, 因为 $F'_y(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 内连续, 则存在 $0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$ 使得

$$F'_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in U(x_0, \delta_1) \times U(y_0, \delta_2)$$

固定 $x = x_0$, 则 $F(x_0, y)$ 是 $U(y_0, \delta_2)$ 内严格上升函数, 于是

$$F(x_0, y_0 - \delta_2) < 0 < F(x_0, y_0 + \delta_2)$$

且 $F(x, y)$ 在 $(x_0, y_0 - \delta), (x_0, y_0 + \delta)$ 连续, 于是存在 δ_0 使得

$$F(x, y_0 - \delta_2) < 0 < F(x, y_0 + \delta_2) \quad \forall x \in U(x_0, \delta_0)$$

对任意给定的 $\bar{x} \in U(x_0, y_0)$, 由 $F'_y(\bar{x}, y) > 0$ 得到存在唯一的 $\bar{y} \in U(y_0, \delta_2)$ 使得

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

定义 $\bar{y} = f(\bar{x})$, 则 f 在 $U(x_0, \delta_0)$ 内有定义, 且满足前两个条件.

下证 $y = f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 内连续. 任取 $\bar{x} \in U(x_0, \delta_0)$, 记 $\bar{y} = f(\bar{x})$, 对充分小的 ε

$$F(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon) < 0 < F(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon)$$

由 $F(x, y)$ 在上述两点的连续性, 存在充分小的 δ' 使得当 $x \in U(\bar{x}, \delta') \subset U(x_0, \delta_0)$ 时

$$F(x, \bar{y} - \varepsilon) < 0 < F(x, \bar{y} + \varepsilon) > 0$$

从上面隐函数存在性的证明过程知, 当 $x \in U(\bar{x}, \delta')$ 时

$$f(x) \in (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$$

最后, 若 $F'_x(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 内存在且连续, 证明 $y = f(x)$ 有连续导数.

任取 $\bar{x} \in U(x_0, \delta_0)$, 取 Δx 充分小使得 $\bar{x} + \Delta x \in U(x_0, \delta_0)$, 记

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \quad \Delta y = f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x})$$

由拉格朗日微分中值, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} 0 &= F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= F'_x(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y) \Delta x + F'_y(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y) \Delta y \end{aligned}$$

又 $F'_y(x, y) \neq 0$, 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y)}{F'_y(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y)}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 由 F'_x, F'_y 连续性得到

$$f'(\bar{x}) = -\frac{F'_x(\bar{x}, f(\bar{x}))}{F'_y(\bar{x}, f(\bar{x}))}$$

上式可以看出 $f'(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 连续, 证毕.

上述给出的是 \mathbb{R}^2 的情形. 对 \mathbb{R}^n 的情形, 结果同样成立, 即下面的形式:

定理 14.4.2 (隐函数存在定理). $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内有定义, 且

1. $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$
2. $F(\mathbf{x}, y), F'_y(\mathbf{x}, y)$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内连续
3. $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$

则存在 δ_0 , 使得 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y = f(\mathbf{x})$

1. $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$
2. $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0, \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$
3. 若 $F(\mathbf{x}, y)$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \times U(y_0, \delta)$ 内存在各个连续偏导数, 则 $y = f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 具有各个连续偏导数, 且对 $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$, 有

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y)} \quad y = f(\mathbf{x})$$

14.4.2 方程组隐函数

定理 14.4.3 (隐函数组存在定理). 向量函数

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), F_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

在 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \times U(\mathbf{u}_0, \delta)$ 内有定义, 其中

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U(\mathbf{x}_0, \delta) \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in U(\mathbf{u}_0, \delta)$$

且满足

1. $F_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$
2. $F_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 以及它的各个偏导数在 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \times U(\mathbf{u}_0, \delta)$ 内连续

$$3. \left. \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \neq 0$$

则存在 δ_0 使得 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内存在唯一的向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

满足

$$1. \mathbf{u}_0 = (f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), \dots, f_m(\mathbf{x}_0))$$

2. 对 $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 有

$$F_j(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = 0$$

3. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的每个分量函数在 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内存在连续偏导数, 记

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right)_{m \times n} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial F_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right)_{m \times m}$$

则

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}$$

14.4.3 逆映射存在定理

对可微映射, 如何确定其逆映射的存在性? 隐函数组存在定理可以给出一个连续可微映射局部存在逆映射的充分条件.

定理 14.4.4 (逆映射存在定理). 记

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的一个 C^1 映射, 且在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 处

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_{\mathbf{x}_0} \neq 0$$

记 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 则存在 \mathbf{x}_0 的邻域 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0) \subset D$ 使得 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 到 $\mathbf{f}(U(\mathbf{x}_0, \delta_0))$ 的 C^1 同胚映射. 其中 $\mathbf{f}(U(\mathbf{x}_0, \delta_0))$ 是包含 \mathbf{y}_0 的一个区域.

证明 对 $1 \leq j \leq n$, 记 $F_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_j - f_j(\mathbf{x})$, 考虑

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \end{cases}$$

由定理条件, 方程组满足隐函数存在定理, 因此在 \mathbf{y}_0 的某个邻域 $U(\mathbf{y}_0, \delta_1)$ 内存在一个 n 维向量函数

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y}))$$

满足 $\mathbf{x}_0 = (g_1(\mathbf{y}_0), \dots, g_n(\mathbf{y}_0))$ 和

$$\begin{cases} y_1 - f_1(g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y_n - f_n(g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) = 0 \end{cases}$$

且 $(g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y}))$ 在 $U(\mathbf{y}_0, \delta_1)$ 内具有各个连续偏导数. 上述 n 个等式表明在 $U(\mathbf{y}_0, \delta_1)$ 内 $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ 是 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的逆映射.

从逆映射存在定理的证明可知, 若一个 n 维 n 元向量函数

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$$

在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数, 且对 $\forall \mathbf{x} \in D$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 非退化, 即其 Jacobi 行列式不为零, 则局部总存在逆映射, 因此 \mathbf{f} 必将开集映成开集. 另外因为 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是连续函数, 因此 $\mathbf{f}(D)$ 是一个区域.

如果只是要求存在逆映射, 而不要求逆映射有连续偏导数, 则 Jacobi 行列式非零的条件不是必要条件.

14.5 多元函数的极值

Section	Summary
14.5.1	通常极值问题: 多元函数极值点如果可偏导, 则偏导数为 0. 进一步若可微, 则梯度为 0. 对于梯度为 0 的点, 通过 Hessi 矩阵的定性来判断该点是不是极值点.
14.5.2	条件极值问题: 拉格朗日乘数法计算条件极值.

14.5.1 通常极值问题

在定义上, 多元函数的极值和一元是类似的, 即邻域内的最大、最小值.

对二元的情形, 若 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取到极值, 且在 (x_0, y_0) 可微, 则在该点的偏导数都为 0, 即

$$f'(x_0, y_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$$

类似的, 有

定理 14.5.1. $f(\mathbf{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内有定义, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$. 若 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处取极值且 $f(\mathbf{x})$ 在该点关于 $x_i (1 \leq i \leq n)$ 可偏导, 则有 $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0$. 特别地, 若 $f(\mathbf{x})$ 在该点可微, 则 $f'(\mathbf{x}_0) = 0$.

证明 在定理的条件下一元函数

$$F_i(x_i) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

在 x_i^0 取到极值, 因此

$$F_i'(x_i^0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

证毕.

对 n 元可微函数 $f(\mathbf{x})$, 若 $f'(\mathbf{x}_0) = 0$, 则称 \mathbf{x}_0 为 $f(\mathbf{x})$ 的一个驻点或临界点. 因此对可微函数, 极值点一定是驻点, 但是反命题一般不真.

当可微函数的驻点不是极值点时, 该驻点也称为鞍点.

类似一元函数, 我们也可以用高阶导数来判断驻点是否是鞍点. 由于多元函数高阶偏导数复杂性, 我们只考虑二阶偏导.

定理 14.5.2. $f(\mathbf{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数, 且 $f'(\mathbf{x}_0) = 0 (\mathbf{x}_0 \in D)$, 且 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 满秩, 则

1. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定时, $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 取极小值
2. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 负定时, $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 取极大值
3. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定时, $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 不取极值

证明 在 \mathbf{x}_0 的充分小邻域 $U(\mathbf{x}_0, \delta_0)$ 内有 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \\ &\quad + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \\ &\quad + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

对 $\forall \mathbf{x} \in U_0(\mathbf{x}_0, \delta_0)$, 记 $\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$, 则 $|\mathbf{x}'| = 1$. 由于 $\mathbf{x}' \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}'^T$ 是 $\{\mathbf{x}' : |\mathbf{x}'| = 1\}$ 上的连续函数, 且后者是紧集, 于是该函数在其上取到最大、最小值 M, m .

1. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定时, 对任意非零向量 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T > 0$$

因此 $m > 0$, 从而存在 $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ 使得当 $\mathbf{x} \in U_0(\mathbf{x}_0, \delta_1)$ 时

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \\ &> f(\mathbf{x}_0) + \frac{m}{4} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 > f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

即 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 取极小值.

2. 负定同理

3. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定时, 有 $m < 0 < M$, 任取 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|} \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|} = m$, 则对充分小的 $t > 0$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} m t^2 + o(t^2) \\ &\leq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} m t^2 < f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

同理取 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0|} \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)^T}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0|} = M$, 则对充分小的 $t > 0$ 得到

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} M t^2 + o(t^2) \\ &\geq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} M t^2 > f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

我们常用到 $n = 2$ 的情况, 即:

推论 14.5.1. $f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有二阶连续偏导数, $(x_0, y_0) \in D$, 且 $f'(x_0, y_0) = 0$, 记

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

则

1. $A > 0, AC - B^2 > 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取极小值
2. $A < 0, AC - B^2 > 0$ 时 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取极大值
3. $AC - B^2 < 0$ 时 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不取极值

14.5.2 条件极值问题

例 14.5.1. 求 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 到原点的最短距离: 可令 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 即求 (x, y, z) 在 Γ 上时 $f(x, y, z)$ 的最小值.

简化情况, 先假设 Γ 是一条平面曲线, 被方程 $\varphi(x, y) = 0$ 确定. 假定 φ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数, 且对 $\forall (x, y) \in D$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{(x, y)}$ 的秩为 1, 再设 $(x_0, y_0) \in \Gamma$ 且是函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是一个极值点, 则由隐函数存在定理, 理论上我们可以从 $\varphi = 0$ 在附近解出 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$.

不妨设 $\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, 从而存在 $\delta > 0$ 使得在 $U(x_0, \delta)$ 内存在 $y = y(x)$, 满足 $y_0 = y(x_0), \varphi(x, y(x)) = 0$. 则 x_0 是 $f(x, y(x))$ 的一个通常极值点, 从而

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y'(x_0) = 0$$

代入 $y'(x_0) = \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$ 得到

$$\frac{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

即存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

现在设 Γ 是下述方程组确定的一条空间曲线

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

且假设 φ_1, φ_2 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 有连续偏导数, 且对 $\forall (x, y, z) \in D$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{array} \right) \Big|_{(x, y, z)}$$

的秩为 2, 则此时同样可以得到, 在 $f(x, y, z)$ 的极值点 (x_0, y_0, z_0) 处, 存在常数 λ_1, λ_2

使得成立下述方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

对一般情形, 可以证明下面的定理

定理 14.5.3. $f(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n (m < n)$ 内具有各个连续偏导数, $\mathbf{x}_0 \in D$ 为 $f(\mathbf{x})$ 在约束条件

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \varphi_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

下的极值点, 且 $\varphi'(\mathbf{x}_0)$ 的秩为 m , 则存在常数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \varphi_j(\mathbf{x}_0) = 0 & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

若构造函数 $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$, 则上述条件极值的必要条件形式上化为 F 的通常极值的必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

上述求条件极值的必要条件的方法称为拉格朗日乘数法.

在拉格朗日乘数法中, 条件极值问题转化为

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$$

的一般极值问题, 因此我们用 $F(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的 Hessi 矩阵来判定驻点 \mathbf{x}_0 是否为极值点. 可以证明, 当 $\mathbf{b}H_f(\mathbf{x}_0)$ 正定/负定时, 条件极值点 \mathbf{x}_0 为极小值点/极大值点.

当 $H_f(\mathbf{x}_0)$ 不定时, 条件极值依然可以取到.

14.6 多元微分学的几何应用

Section	Summary
14.6.1	空间曲线的切线与法平面：对参数方程给出的曲线和两个方程给出的曲线，分别介绍求切线和法平面的方法.
14.6.2	曲面的切平面和法线：对单方程给出的曲面和参数方程给出的曲面，分别介绍求切平面和法线的方法.
14.6.3	多元凸函数：给出多元凸函数的定义，在具有二阶连续偏导的情况下，用 Hessi 矩阵半正定来等价凸函数.

14.6.1 空间曲线的切线和法平面

不自交的曲线称为**简单曲线**，封闭且没有其它自交点的曲线称为**简单闭曲线**，即 Jordan 曲线.

先考虑较简单的情形，即空间曲线由参数方程

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

给出，且 x, y, z 都是 t 的可微函数，且

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

对这类曲线，其局部总是简单曲线.

在上述条件下，考虑过 $t_0 \in (\alpha, \beta)$ 对应的点 $\mathbf{x}(t_0)$ 处的切线方程. 其是 Γ 上过 $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0)$ 的割线当 $t \rightarrow t_0$ 的极限位置，于是切线方程

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

从上述方程，若记曲线 $\mathbf{h}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，则

$$\mathbf{h}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

即为曲线 Γ 在 $\mathbf{x}(t_0)$ 处的切向量.

同时, Γ 在 $\mathbf{x}(t_0)$ 的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

即

$$\mathbf{h}'(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) = 0$$

其次, 我们来讨论两个方程确定的曲线的切线方程. 给定

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

其中 $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$. 假定 F_1, F_2 均是 D 上的可微函数, 并设 $\mathbf{x}_0 \in D$, 当

$$\begin{pmatrix} F_1'(\mathbf{x}_0) \\ F_2'(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}_0}$$

的秩为 2 时, 由隐函数组存在定理 14.4.3 在 \mathbf{x}_0 附近, 其中有两个变量可以确定为第三个变量的函数, 从而该方程组能确定一条过 \mathbf{x}_0 的曲线 Γ , 且 \mathbf{x}_0 附近 Γ 还可以有参数形式 $(x(t), y(t), z(t)), t \in (\alpha, \beta)$, 其中

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{x}_0$$

由上面的讨论, 曲线在 \mathbf{x}_0 的切向量为 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. 因为曲线 Γ 由方程组确定, 于是

$$\begin{cases} F_1(x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) = 0 \end{cases}$$

对方程组第一个方程两边关于 t 求导得到

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial y} y'(t_0) + \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial z} z'(t_0) = 0$$

写成内积形式即

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \cdot \left(\frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x}, \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial y}, \frac{\partial F_1(\mathbf{x}_0)}{\partial z} \right)$$

同理

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \cdot \left(\frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial y}, \frac{\partial F_2(\mathbf{x}_0)}{\partial z} \right)$$

因此 Γ 在 \mathbf{x}_0 的切向量和

$$F'_1(\mathbf{x}_0) \times F'_2(\mathbf{x}_0) = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{array} \right\|_{\mathbf{x}_0}$$

平行, 记

$$A = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad B = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad C = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \Big|_{\mathbf{x}_0}$$

则 $F'_1(\mathbf{x}_0) \times F'_2(\mathbf{x}_0) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, 因此 Γ 在 \mathbf{x}_0 处切线方程为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

14.6.2 曲面的切平面与法线

设曲面 $S : F(x, y, z) = 0$, 其中 $F \in C^1(D)$, D 为区域, 设 $(x_0, y_0, z_0) \in D$ 使得 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 下面求 S 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面和法线方程.

任取 S 上过 (x_0, y_0, z_0) 的光滑曲线 $(x(t), y(t), z(t)), t \in (\alpha, \beta)$, 则

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

设 $t_0 \in (\alpha, \beta)$ 使得 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$, 对上述方程两边在 t_0 求导得到

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0$$

注意到 (x', y', z') 是该曲线的切向量, 于是上式说明该切向量和向量 $F'(x_0, y_0, z_0)$ 正交, 从而当 $F'(x_0, y_0, z_0)$ 不是零向量时, 上式表明 S 过 (x_0, y_0, z_0) 的任何光滑曲线的切向量和固定向量 $F'(x_0, y_0, z_0)$ 正交, 于是 S 过该点的任何光滑曲线在该点的切线都在平面

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

上, 该平面称为 S 在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面.

另外, 直线

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

为 S 在 (x_0, y_0, z_0) 的法线.

反之, 当 $F' \neq 0$ 时, 我们可以证明曲线在该处切平面上任何过该点的直线都是曲面上某光滑曲线的切线 (见习题)

现在设 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

给出, 其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是区域, 且三个函数均有连续偏导数.

此时取 S 上两条曲线

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$$

在 (x_0, y_0, z_0) 处切向量分别为

$$(x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0))$$

$$(x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0))$$

若这两个向量不平行, 其对应的切线将确定 S 在 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (x_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0)) \\ &\quad \times (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0)) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \end{aligned}$$

因此当

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

的秩为 2 时

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

于是该曲面在 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程和法线方程分别为

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ \frac{x - x_0}{A} &= \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \end{aligned}$$

对 \mathbb{R}^n 的曲线, 称 $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的一个连续映射 $\mathbf{h}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ 为一条曲线. 当 $\mathbf{h}(t)$ 由连续导数且 $\mathbf{h}'(t) \neq 0$, 称曲线为光滑曲线, 并称 $\mathbf{h}'(t_0)$ 是曲线在 $\mathbf{h}(t_0)$ 的切向量. 类似地, 称 $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = 0$ 为 \mathbb{R}^n 的一个曲面, 其中 $F(\mathbf{x}) \in C^1$. 当 $F'(\mathbf{x}_0) \neq 0$ 时, 称 $F'(\mathbf{x}_0)$ 为曲面在 \mathbf{x}_0 处的法向量, 并称

$$F'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0$$

为曲面在 \mathbf{x}_0 的切平面方程.

14.6.3 多元凸函数

定义 14.6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸域, $f(\mathbf{x})$ 在 D 内有定义, 若对 $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D, \forall t \in (0, 1)$ 有

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \leq tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2)$$

则称 $f(\mathbf{x})$ 在 D 是凸函数.

定理 14.6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸域, $f(\mathbf{x})$ 在 D 内有二阶连续偏导数, 则下列结论等价

1. $f(\mathbf{x})$ 是凸函数
2. 对 $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D$, 成立 $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T$
3. 对 $\forall \mathbf{x}_0 \in D$, $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处的 Hessi 矩阵半正定

7

⁷条件 (2) 说明 $u = f(\mathbf{x})$ 表示的曲面在任一点的切平面的上方.

Part II

习题

Chapter 1

多元函数的极限和连续

1.1 例题

题目 1.1.1 (p33-4). 证明: 不存在 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的同胚映射.

证明 否则, 设 $f(x)$ 是同胚, 取 $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(E) = \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$, 则 E 是 \mathbb{R} 的不连通集, $f(E)$ 是 \mathbb{R}^2 的连通集, 但连续函数 f^{-1} 把 $f(E)$ 映到 E , 矛盾.

1.2 习题

题目 1.2.1. 证明 \mathbb{R}^n 中两点间的距离满足三角不等式: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, 成立 $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

证明 设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, \mathbf{y}, \mathbf{z} 同理, 则即证

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2}$$

令 $p_i = x_i - y_i, q_i = y_i - z_i$, 则上式等价于

$$\begin{aligned} \sqrt{(p_1 + q_1)^2 + \dots + (p_n + q_n)^2} &\leq \sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} \\ \iff p_1 q_1 + \dots + p_n q_n &\leq (p_1^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + \dots + q_n^2) \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, 上式成立, 证毕.

题目 1.2.2. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = +\infty$, 则称 \mathbb{R}^n 中的点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 趋于 ∞ . 现在设点列 $\{\mathbf{x}_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)\}$ 趋于 ∞ , 试判断下列命题是否正确.

1. 对 $\forall i (1 \leq i \leq n)$, 序列 $\{x_i^k\}$ 趋于 ∞ ;

2. $\exists i_0 (i \leq i_0 \leq n)$, 序列 $\{x_{i_0}^k\}$ 趋于 ∞ .

证明

1. 错误, 如 $\mathbf{x}_k = (k, 0, \dots, 0)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = +\infty$, 但对 $\forall i (2 \leq i \leq n)$, $\{x_i^k\}$ 趋于 ∞ 不成立.
2. 错误, 如 $\mathbf{x}_k = (k + (-1)^k k, k - (-1)^k k, 0, \dots, 0)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = +\infty$, 但 $\{x_1^k\}, \{x_2^k\}$ 广义极限不存在, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = 0, \forall i (3 \leq i \leq n)$.

题目 1.2.3. 求下列集合的聚点集

1. $E = \left\{ \left(\frac{q}{p}, \frac{q}{p}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 : (p, q) = 1, q < p \right\}$;
2. $E = \left\{ \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k, \sin \frac{k\pi}{2} \right) : k = 1, 2, \dots \right\}$;
3. $E = \left\{ \left(r \cos \left(\tan \frac{\pi}{2} r \right), r \sin \left(\tan \frac{\pi}{2} r \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \right\}$.

解

1. $E' = \{(x, x, 1) : x \in [0, 1]\}$;
2. $E' = \{(1, 0), (1, -1), (1, 1)\}$;
3. $E' = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

题目 1.2.4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 1\}$;
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}$;

解

1.

$$E^\circ = \emptyset, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 1) : x, y \geq 0\}$$

$$\partial E = \{(x, y, 1) : x, y \geq 0\}$$

$$\overline{E} = \partial E$$

2.

$$E^\circ = E, (E^c)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 1\}$$

$$\partial E = \{(x, y) : x = 0, y^2 \geq 1\} \cup \{(x, y) : x > 0, x^2 + y^2 - 2x = 1\}$$

$$\overline{E} = \{(x, y) : x \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

题目 1.2.5. 设 $\{(x_k, y_k)\} \subset \mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否为真: 点列 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 \mathbb{R}^2 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_k y_k\}$ 在 \mathbb{R} 中有聚点.

证明

1. 充分性不成立, 如 $x_k = k, y_k = \frac{1}{k+1}$, 则 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 \mathbb{R}^2 中无聚点, 而 $\{x_k y_k\}$ 有聚点 1.
2. 必要性不成立, 如 $x_k = \frac{1}{k}, y_k = 0$, 则 $\{(x_k, y_k)\}$ 在 \mathbb{R}^2 中有聚点 0, 而 $\{x_k y_k\} = \{0\}$ 无聚点.

题目 1.2.6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明

1. $\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$;
2. $E' = \overline{E}'$.

证明

1. $E^\circ \subset E, \partial E \subset \overline{E}$, 下证 $\overline{E} \subset E^\circ \cup \partial E$. 对任意 $x \in \overline{E}$, 若 $x \in E'$, 则 $x \in E$ 或 $x \in \partial E$; 若 $x \in E$, 则 $x \in E'$ 或 $x \in \partial E$. 证毕.
2. 先证明 $E' \subset \overline{E}'$: 对任意 $x \in E'$, 假设 $x \notin \overline{E}'$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $U(x, \delta) \cap \overline{E} = \emptyset$, 因为 $\overline{E} = E \cup E'$, 则 $U(x, \delta) \cap E' = \emptyset$, 矛盾. 下证 $\overline{E}' \subset E'$: 对任意 $x \in \overline{E}'$, 假设 $x \notin E'$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $U(x, \delta) \cap E = \emptyset$, 显然与 $x \in \overline{E}'$ 矛盾, 证毕.

题目 1.2.7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 \mathbb{R}^n 的一族集合, 证明:

1. 当 Γ 为有限指标集时, 成立 $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \overline{A_\lambda}, \bigcap_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda^\circ \subset \left(\bigcap_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda\right)^\circ$;
2. 对任意指标集, 成立 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$.

证明

- 1.

题目 1.2.8. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明:

1. E' 是闭集;
2. ∂E 是闭集.

证明

1. 否则, 存在 $x \notin E'$, 且 x 是 E' 的聚点. 则 x 不是 E 的聚点, 即存在 $\delta_x > 0$, 使得 $U_0(x, \delta_x) \cap \emptyset$. 显然与 x 是 E' 的聚点矛盾, 因此 E' 是闭集.
2. 否则, 存在 $x_0 \notin \partial E$, 且 x_0 是 ∂E 的聚点. 则 x_0 是 E 的聚点, 否则, 存在 $\delta > 0$ 使得 $U_0(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$, 则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right)$, 与 x_0 是 ∂E 的聚点矛盾. 因为 $x_0 \notin \partial E$, 因此下列情况之一必定成立
 - (a) 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E = \emptyset$. 显然与 x_0 是 E 的聚点矛盾
 - (b) 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $U_0(x_0, \delta_0) \cap E^c = \emptyset$. 则 $x \notin \partial E, \forall x \in U_0\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)$, 与 x_0 是 ∂E 的聚点矛盾.

因此 ∂E 是闭集.

题目 1.2.9. 设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 记 $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$, $E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$, 判断下列命题是否为真.

1. E 为 \mathbb{R}^2 中的开 (闭) 集时, E_1, E_2 均为 \mathbb{R} 中的开 (闭) 集;
2. E_1, E_2 均为 \mathbb{R} 中的开 (闭) 集时, E 为 \mathbb{R}^2 中的开 (闭) 集.

证明

1. 当 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, 则对 $\forall (x_1, x_2) \in E$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $U((x_1, x_2), \delta) \subset E$, 于是 $U(x_1, \delta) \subset E_1, U(x_2, \delta) \subset E_2$, 因此 E_1, E_2 均为开集.
令 $E = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ 为 \mathbb{R}^2 中的闭集, 则 $E_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 是 \mathbb{R} 上的开集, 此时结论不成立.
2. 令 $E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$, 则 E_1, E_2 均为开集, 而 E 不是开集.
令 $E = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$, 则 E_1, E_2 均为闭集, 而 E 不是闭集. 因此两个命题均不成立.

题目 1.2.10. 构造 \mathbb{R}^2 中单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k, y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

解 令

$$E = \left\{ \left(r \cos \left(\tan \frac{\pi}{2} r \right), r \sin \left(\tan \frac{\pi}{2} r \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \right\}$$

即可.

题目 1.2.11. $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两个非空集合, 定义 E_1, E_2 之间的距离如下

$$d(E_1, E_2) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x} \in E_1, \mathbf{y} \in E_2\}$$

1. 举例说明存在不交的开集 E_1, E_2 使得 $d(E_1, E_2) = 0$
2. 举例说明存在不交的闭集 E_1, E_2 使得 $d(E_1, E_2) = 0$
3. 证明若紧集 E_1, E_2 满足 $d(E_1, E_2) = 0$, 则 $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

证明

1. $E_1 = (-1, 0), E_2 = (0, 1)$
2. $E_1 = \{(x, y) : y = 0\}, E_2 = \{(x, y) : y = e^x\}$
3. 则存在 $\{x_n\} \subset E_1, \{y_n\} \subset E_2$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 记这个极限为 t , 则 $t \in E_1 \cap E_2$.

题目 1.2.12. $F \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, $E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $F \subset E$, 证明: 存在开集 O , 使得 $F \subset O \subset \overline{O} \subset E$.

证明 对 $\forall x \in F$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得 $U(x, \delta_x) \subset E$, 则 $\bigcup_{x \in F} U\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ 是 F 的一个开覆盖, 因此存在一个有限子覆盖 $O = \bigcup_{i=1}^n U\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$, 满足 $F \subset O \subset E$. 设 $O_1 = \bigcup_{i=1}^n U(x_i, \delta_{x_i})$, 则 $O \subset \overline{O} \subset O_1 \subset E$, 证毕.

题目 1.2.13. 求下列函数定义域

1. $f(x, y, z) = \ln(y - x^2 - z^2)$
2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$
3. $f(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - z)}{\sqrt{z}}$

解 简单题

题目 1.2.14. 确定极限是否存在并求出

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y}$, 其中 $y > x^2$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(x^2 + y^2)$

3. $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2)e^{-(|x|+|y|)}$
4. $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x| + |y|}\right)^{x^2/(|x|+|y|)}$
5. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{x+y}$
6. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x^{yz}$, 其中 $x, y, z > 0$
7. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + z^2}$
8. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
9. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{|\mathbf{x}|^2}$

证明

1. $|\sin(x^3 + y^3)| \leq |x^3 + y^3|$, 极限为 0

2. 不妨设 $x^2 + y^2 < 1$, 因为 $\ln(x^2 + y^2) = 4 \ln \sqrt[4]{x^2 + y^2} = -4 \ln \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}$, 于是

$$|x \ln(x^2 + y^2)| = \left| 4x \ln \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} \right| < \left| \frac{4x}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} \right| < \left| \frac{4x}{\sqrt{|x|}} \right| = 4\sqrt{|x|} \rightarrow 0$$

因此极限为 0 .

3. 不妨设 $x^2 + y^2 > 1$, 则

$$\begin{aligned} |(x^2 + y^2)e^{-(|x|+|y|)}| &= |e^{\ln(x^2+y^2)-(|x|+|y|)}| < |e^{4 \ln \sqrt[4]{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}| \\ &< |e^{4 \sqrt[4]{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}| = |e^{4-(\sqrt[4]{x^2+y^2}-2)^2}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此极限为 0 .

4. 考虑 $\{(0, k)\}, \{(k, 0)\}$, 极限分别为 $1, e$, 因此极限不存在

5. 考虑 $\left\{\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}, \left\{\left(0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$, 极限分别为 $1, 0$, 因此极限不存在

6. 考虑 $\left\{\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{k!}, \frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$, 极限分别为 $(1, 0)$, 因此极限不存在

7. 考虑 $\left\{\left(\frac{1}{k}, 1, \frac{1}{k}\right)\right\}, \left\{\left(0, 1, \frac{1}{k}\right)\right\}$, 极限分别为 $\frac{1}{2}, 0$, 因此极限不存在

8. 因为

$$\left| \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \left| \frac{xyz}{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}} \right| = \frac{|xyz|^{2/3}}{\sqrt{3}} \rightarrow 0$$

因此极限为 0 .

9. 考虑 $\left\{ \left(\frac{1}{k}, 0, 0, \dots \right) \right\}, \left\{ \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, 0, \dots \right) \right\}$, 极限分别为 1, 0 , 因此极限不存在

题目 1.2.15. 给出三元函数累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z)$ 的定义, 并构造一个三元函数使得 $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ 存在但 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} f(x, y, z)$ 不存在.

解 只需要在二元累次极限的基础上考虑即可.

$f(x, y, z)$ 在 $N_0((x_0, y_0, z_0), \delta_0)$ 上有定义, 且对每个固定的 $x \neq x_0$ 都存在

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z) = \varphi(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, 则定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z) = A$$

累次极限不存在的情况, 只需要让 $\varphi(x)$ 不存在即可, 考虑

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y + z) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \sin \frac{1}{z} & xyz \neq 0 \\ 0 & xyz = 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = 0$, 而 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} f(x, y, z)$ 不存在.

题目 1.2.16. $y = f(x)$ 在 $U_0(0, \delta_0)$ 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_0(0, \delta_0)$$

证明当 $xy \neq 0$ 时

$$1. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x)f(y)}{f^2(x) + f^2(y)} \text{ 不存在}$$

$$2. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{yf^2(x)}{f^4(x) + y^2} \text{ 不存在}$$

证明 考虑让 (x, y) 用两种方法趋近 $(0, 0)$ 来得到两个不同的极限.

1. 任取 $x_1 \in U_0(0, \delta_0)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则存在 $x_2 \in U_0(0, \delta_0)$ 使得 $|f(x_2)| \in \left(0, \frac{|f(x_1)|}{2} \right)$, 依次类推得到 $\{x_n\} \subset U_0(0, \delta_0)$ 满足

$$|f(x_n)| < \frac{|f(x_{n-1})|}{2^{n-1}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = 0$$

则 $(x_n, x_n) \rightarrow (0, 0), (x_{n-1}, x_n) \rightarrow (0, 0)$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)f(x_n)}{f^2(x_n) + f^2(x_n)} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)f(x_{n-1})}{f^2(x_n) + f^2(x_{n-1})}$$

因此极限不存在

2. 考虑 (x, y) 分别沿着曲线 $y = f^2(x), y = \frac{1}{2}f^2(x)$ 趋近于 $(0, 0)$, 则

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{yy}{y^2 + y^2} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} = \lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{y \cdot 2y}{y^2 + (2y)^2}$$

因此极限不存在.

题目 1.2.17. 构造 $f(x, y)$ 使得对 $k = 1, 2, \dots, K$ 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^k) = 0$, 但 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在.

解 令 $f(x, y) = \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + y}$, 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^{K+1}) = \frac{1}{2}$$

因此极限不存在.

题目 1.2.18. $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 除直线 $x = a, y = b$ 外处处有定义, 且满足

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$$

证明: 存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得

1. $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$
2. $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} h(y) = c$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = c$, 其中 $x \neq a, y \neq b$.

证明

1. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta), y \neq b$ 有

$$|f(x_1, y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad |f(x_2, y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

又因为 $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$ 存在, 于是存在 $y_0 \neq b$ 使得

$$|f(x_1, y_0) - g(x_1)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad |f(x_2, y_0) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

于是

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &\leq |g(x_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - h(y_0)| \\ &\quad + |h(y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - g(x_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

于是由 Cauchy 准则得到 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 存在, 记为 c .

2. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对 $\forall x \in U_0(a, \delta_0), y \neq b$ 有

$$|f(x, y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由上一小问, 存在 $x_0 \in U_0(a, \delta_0)$ 使得

$$|g(x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为 $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$ 存在, 于是存在 $\delta > 0$ 使得对 $\forall y \in U_0(b, \delta)$, 有

$$|f(x_0, y) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned} |h(y) - c| &\leq |h(y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - g(x_0)| + |g(x_0) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

因此 $\lim_{y \rightarrow b} h(y) = c$.

3. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对 $\forall x \in U_0(a, \delta_1), y \neq b$ 有

$$|f(x, y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由上一小问, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得对 $\forall y \in U_0(b, \delta_2)$ 有

$$|h(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$|f(x, y) - c| \leq |f(x, y) - h(y)| + |h(y) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

证毕.

题目 1.2.19. $f(x) \in C([0, 1])$, $g(y)$ 在 $[0, 1]$ 有唯一的第一类间断点 $y_0 = \frac{1}{2}$. 求 $F(x, y) = f(x)g(y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的全体间断点.

解 容易得到 $g(y)$ 在 $[0, 1]$ 有界, 因此全体间断点为

$$\left\{ \left(x, \frac{1}{2} \right) : f(x) \neq 0, x \in [0, 1] \right\}$$

题目 1.2.20. $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上定义, 且对固定的 x 是 y 的连续函数, 对固定的 y 是 x 的连续函数, 证明若 f 满足下列条件之一, 则是连续函数

1. 对固定的 x , f 是 y 的单调上升函数
2. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $y_1, y_2 \in [0, 1]$ 且 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

证明

1. 任取 (x_0, y_0) , 对 $\forall \varepsilon > 0$, 对固定的 x_0 , f 关于 y 连续, 则存在 $y_1 < y_0 < y_2$ 使得

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x_0, y_0) - f(x_0, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对固定的 y_1, y_2 , 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时

$$|f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x, y_2) - f(x_0, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因为对任意的 x 和 $y \in [y_1, y_2]$ 有

$$f(x, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x, y_2)$$

于是对 $x \in U(x_0, \delta), y \in [y_1, y_2]$ 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \max\{|f(x, y_1) - f(x_0, y_0)|, |f(x, y_2) - f(x_0, y_0)|\}$$

不妨设 $\max\{|f(x, y_1) - f(x_0, y_0)|, |f(x, y_2) - f(x_0, y_0)|\} = |f(x, y_1) - f(x_0, y_0)|$, 此时

$$|f(x, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| + |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

证毕.

2. 因为固定 y , f 对 x 是连续函数, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$$

由题设条件, 存在 $\delta' > 0$ 使得

$$|f(x, y_0) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in U(y_0, \delta')$$

因此对 $\forall x \in U(x_0, \delta), y \in U(y_0, \delta')$ 有

$$\begin{aligned} |f(x_0, y_0) - f(x, y)| &\leq |f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x, y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

证毕.

题目 1.2.21. $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $\mathbf{x}_0 \in E$ 处连续的充要条件是对任何在 $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta)$ 内连续的函数 $h(\mathbf{y})$, $h(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 在 \mathbf{x}_0 处连续.

证明

- 充分性: 若 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处不连续, 则其某个分量 $f_j(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处不连续. 令 $h(\mathbf{y}) = y_j$, 其中 y_j 为 \mathbf{y} 的第 j 个分量, 则 $h(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ 在 \mathbf{x}_0 处不连续, 矛盾.
- 必要性: 由多元复合向量函数的连续性定理 13.3.1 即可证明.

题目 1.2.22. $U \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集, 证明 $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 U 连续的充要条件是开集的原像是开集, 即对任意开集 $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}^{-1}(E)$ 是 \mathbb{R}^n 的开集.

证明

- 充分性: 假设 \mathbf{f} 在 \mathbf{x}_0 处不连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得对 $\forall \delta > 0$ 都存在 $\mathbf{x}_1 \in U_0(\mathbf{x}_0, \delta)$ 使得 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \notin U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$, 则开集 $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$ 的原像存在孤立点 \mathbf{x}_0 , 矛盾.
- 必要性: 假设开集 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ 的原像 $\mathbf{f}^{-1}(U_1)$ 存在孤立点 \mathbf{x}_0 , 因为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 属于开集 U_1 , 因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset U_1$. 因为 \mathbf{f} 连续, 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mathbf{f}(U(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset U_1$$

于是 $U(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbf{f}^{-1}(U_1)$, 与 \mathbf{x}_0 是 $\mathbf{f}^{-1}(U_1)$ 的孤立点矛盾.

证明 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域, $z = f(x, y)$ 是 \overline{D} 上的连续函数, 且对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(x, y) > 0$. 再设 $z = g(x, y)$ 在 \overline{D} 上有定义, 且存在 $(x_0, y_0) \in D$ 使得 $g(x_0, y_0) > 0$, 以及对 $\forall (x, y) \in \overline{D} \setminus \{(x_0, y_0)\}$, 有 $f(x, y) = g(x, y)$, 问

1. $g(x_0, y_0)$ 满足什么条件时 $\{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 < z < g(x, y)\}$ 是 \mathbb{R}^3 的开集
2. $g(x_0, y_0)$ 满足什么条件时 $\{(x, y, z) : (x, y) \in \overline{D}, 0 \leq z \leq g(x, y)\}$ 是 \mathbb{R}^3 的闭集

证明 对第一问, 当 $g(x_0, y_0) > f(x_0, y_0)$ 时, 要考虑的集合在三维空间内等价于在 (x_0, y_0) 部分有一条垂直向上的线段, 这个线段显然不是开集的部分.

同理, 对第二问, 当 $g(x_0, y_0) < f(x_0, y_0)$ 时, 要考虑的集合在三维空间内在 (x_0, y_0) 部分向下凹进去一个线段, 导致这个集合的补集多出来这样一个线段, 导致补集不是一个开集.

1. 记要考虑的集合为 A , 当 $g(x_0, y_0) > f(x_0, y_0)$ 时, 则存在 $z \in (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$, 此时 (x_0, y_0, z) 不是 A 的内点, 因此 $g(x_0, y_0) \leq f(x_0, y_0)$.
2. 同理此时 $g(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_0)$.

题目 1.2.23. $E = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$, 证明 E 可数, 且 \mathbb{R}^2/E 是连通集.

证明 因为 \mathbb{Q} 可数, 且可数个可数集的笛卡尔积可数, 因此 E 可数.

因为 $[0, 2\pi] \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ 不可数, 因此从 $\mathbb{R}^2 \setminus E$ 任意一点引出的射线个数是不可数的. 任取 $A, B \in \mathbb{R}^2$, 记从它们引出的射线的集合分别为 U, V , 则 U, V 不可数, 又因为 E 可数, 因此 U, V 分别存在不可数的子集 U', V' 使得其中的射线不经过 E 的点, 任取 $\alpha \in U, \beta \in V$, 它们交点为 P , 则折线 $A - P - B$ 就是连接 A, B 的道路.

题目 1.2.24. $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$, 最大、最小值为 M, m , 证明对 $\forall c \in (m, M)$ 存在无穷多个 $(\xi, \eta) \in D$ 使得

$$f(\xi, \eta) = c$$

证明 不妨设 $f(x_1, y_1) = m, f(x_2, y_2) = M$, 则任取道路 $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ 使得

$$\gamma(t) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \gamma(0) = (x_1, y_1), \gamma(1) = (x_2, y_2)$$

显然存在无穷多个只在 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 有交点的上述 γ , 对每个 γ 都有 $f(\gamma(t)) \in C([0, 1])$, 于是存在 $t_0 \in [0, 1]$ 使得 $f(\gamma(t_0)) = c$, 因为每个 γ 除了端点不相交, 因此每个 $\gamma(t_0)$ 各不相同, 证毕.

题目 1.2.25. A 是 $n \times n$ 非退化矩阵, 证明存在 $\lambda > 0$ 使得对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 有 $|\mathbf{Ax}| \geq \lambda |\mathbf{x}|$.

证明 当 $\mathbf{x} = 0$ 时结论显然. 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时 $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ 是单位向量, 设 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, 则

$$|\mathbf{Ax}| = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{x} \\ \alpha_2 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \alpha_n \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \hat{\mathbf{x}} \\ \alpha_2 \hat{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \alpha_n \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} |\mathbf{x}| := f(\hat{\mathbf{x}})|\mathbf{x}|$$

因为 \mathbf{A} 非退化, 于是 $f(\hat{\mathbf{x}})$ 恒成立, 又因为 f 在 $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$ 连续, 于是存在 λ 使得

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \geq \lambda \quad \forall |\hat{\mathbf{x}}| = 1$$

证毕.

题目 1.2.26. $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明 $f(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in E} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 在 \mathbb{R}^n 一致连续.

证明 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y} \in E$ 有

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

则

$$f(\mathbf{x}_2) \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}| + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

即

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}| \geq f(\mathbf{x}_2) - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

因为上式对任意 $\mathbf{y} \in E$ 都成立, 于是

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_2) - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

同理 $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, 于是

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

证毕.

题目 1.2.27. 证明 $f(x, y) = \sqrt{xy}$ 在 $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ 上不一致连续.

证明 取 $\varepsilon = 1$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{k} < \delta$, 则 $\left| \left(k, \frac{1}{k}\right) - (k, 0) \right| < \delta$, 且

$$f\left(k, \frac{1}{k}\right) - f(k, 0) = 1 \geq \varepsilon$$

证毕.

题目 1.2.28. 用有限覆盖定理和聚点原理分别证明 \mathbb{R}^n 中紧集上连续函数一致连续.

证明

1. 有限覆盖定理: 对 $f \in C(E), E \subset \mathbb{R}^n$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x' \in U(x, \delta_x)$$

此时

$$\bigcup_{x \in E} U\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$$

是 E 的开覆盖, 因为 E 是紧集, 于是存在 n 使得

$$\bigcup_{i=1}^n U\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \supset E$$

则令 $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} \right\}_{1 \leq i \leq n}$, 对 $\forall y \in U(x, \delta)$ 有

$$x \in U\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \subset U(x_i, \delta_{x_i}) \implies y \in U(x_i, \delta_{x_i})$$

从而

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

证毕.

2. 聚点原理: 假设紧集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$ 不一致连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\{x_k\}, \{y_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 使得

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \quad |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$$

取 $\{x_k\}, \{y_k\}$ 的收敛子列, 则其极限 x_0, y_0 相等, 与 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq \varepsilon$ 矛盾, 证毕.

题目 1.2.29. 证明: $f(\mathbf{x})$ 在 $U(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ 一致连续的充要条件是存在 $\overline{U(0, 1)}$ 上的连续函数 $g(\mathbf{x})$ 使得

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U(0, 1)$$

证明

1. 充分性: 因为 $\overline{U(0, 1)}$ 是紧集, 则 $g(\mathbf{x})$ 在 $\overline{U(0, 1)}$ 一致连续, 于是在 $U(0, 1)$ 一致连续.

2. 必要性: 对任意单位向量 \mathbf{x} , 存在 $\{\mathbf{x}_k\} \subset U(0, 1)$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, 因为 f 在 $U(0, 1)$ 一致连续, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k)$ 收敛, 记

$$g(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k)$$

则对任意满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}'_k = \mathbf{x}$ 的 $\{\mathbf{x}'_k\} \subset U(0, 1)$, 因为 f 在 $U(0, 1)$ 一致连续, 因此

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}'_k)| \leq K \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k| = 0$$

其中 K 是 f 决定的常数. 此时补充定义 $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in U(0, 1)$, 则 g 是 $\overline{U(0, 1)}$ 上的连续函数.

题目 1.2.30. $E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $D \subset E$ 称为 E 的一个分支, 若 D 是区域, 且对任何区域 $D' \subset E$, 只要 $D \cap D' \neq \emptyset$, 总有 $D' \subset D$. 证明 \mathbb{R}^n 中任何开集都是可数个分支的并.

证明 任意区域包含至少一个有理点, 因此不相交的区域可数. 结论显然.

题目 1.2.31. 构造 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ 的同胚映射.

解
$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Chapter 2

多元微分学

2.1 例题

题目 2.1.1 (63-1). $u = e^{x^2+y^2+z^2}$, $z = x^2 \sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导的时候, y 关于 x 是常数, z 关于 x 是函数, 因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

同理对 y 求偏导的时候, x 关于 y 是常数, z 关于 y 是函数, 因此

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial e^{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (2y + x^4 \sin 2y) \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

题目 2.1.2 (64-2). $u = f\left(xy, \frac{y}{x}, yz\right)$, 并设 f 是可微函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

解 因为不知道 f 的具体解析式, 即 $f(k_1, k_2, k_3)$ 和 k_1, k_2, k_3 之间的关系, 采用记号 f'_i (f 对第 k_i 个分量的偏导) 来表示偏导数.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1 \frac{\partial(xy)}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial(y/x)}{\partial x} + f'_3 \cdot 0 = yf'_1 - \frac{y}{x^2} f'_2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_1 \frac{\partial(xy)}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial(y/x)}{\partial y} + f'_3 \frac{\partial(yz)}{\partial y} = xf'_1 + \frac{1}{x} f'_2 + zf'_3 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= f'_1 \cdot 0 + f'_2 \cdot 0 + f'_3 \frac{\partial(yz)}{\partial z} = yf'_3\end{aligned}$$

题目 2.1.3 (66-4). $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$ 为 $D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的可微向量函数, 证明

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})^T]' = \mathbf{f}(\mathbf{x})[\mathbf{g}(\mathbf{x})^T]' + \mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{f}(\mathbf{x})^T]'$$

证明 令 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T \\ (\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \end{pmatrix} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T$, 则 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是 $D \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ 可微函数.

记 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{2m})^T$, 令 $G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m y_i y_{m+i}$, 则 $G(\mathbf{y})$ 是 $\mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ 的可微函数, 容易验证

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T = G(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$$

由链锁法则即证.

题目 2.1.4 (67-6). $u = f(x - \lambda t)$, λ 是常数, f 是 \mathbb{R} 的可微函数, 证明

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

且上述方程的解一定具有形式 $u = g(x - \lambda t)$, 其中 g 是任意 \mathbb{R} 中可微函数.

证明 记 $y = x - \lambda t$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda f'(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = f'(y) \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

设可微函数 $u = u(x, t)$ 是上述方程的解, 作变量替换 $\begin{cases} x = y + \lambda t \\ z = t \end{cases}$, 得到

$$u(x, t) = u(y + \lambda z, z) := u_1(y, z)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{aligned}$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

说明 $u_1(y, z)$ 和 z 无关, 即 $u_1 = g(y)$, 即 $u = g(x - \lambda t)$, 其中 g 是任意可微函数.

题目 2.1.5 (71-8). $u = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (假定二阶偏导数都连续)

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = yf'_1 - \frac{y}{x^2}f'_2$, 则链锁法则得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2 f''_{11} - \frac{y^2}{x^2} f''_{12} - \frac{y^2}{x^2} f''_{12} + \frac{y^2}{x^4} f''_{22} + \frac{2y}{x^3} f'_2 \\ &= y^2 f''_{11} - \frac{2y^2}{x^2} f''_{12} + \frac{y^2}{x^4} f''_{22} + \frac{2y}{x^3} f'_2 \\ \frac{\partial u}{\partial x \partial y} &= f'_1 + xy f''_{11} + \frac{y}{x} f''_{12} - \frac{1}{x^2} f'_2 - \frac{xy}{x^2} f''_{12} - \frac{y}{x^3} f''_{22} \\ &= xy f''_{11} - \frac{y}{x^3} f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{x^2} f'_2\end{aligned}$$

题目 2.1.6. $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 若

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

求 $f(r)$.

解 求出二阶偏导代入得到

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$$

即

$$(r^2 f'(r))' = r^2 f''(r) + 2r f'(r) = 0$$

因此存在常数 C' 使得

$$f'(r) = \frac{C'}{r^2}$$

对两边求不定积分得到

$$f(r) = -\frac{C'}{r} + C_1 = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C_1}$$

其中 $C = -C', C_1$ 为常数.

题目 2.1.7 (74-10). $f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$ 有二阶连续偏导数, 求所有二阶偏导数.

解 我们在 2.1.5 用逐次求导的方法得到偏导数. 现在我们直接通过二阶微分来求, 因为

$$df = f'_1 d(xy) + f'_2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} d^2 f &= \left(f'_{11} d(xy) + f'_{12} d\left(\frac{y}{x}\right) \right) d(xy) + f'_1 d^2(xy) \\ &\quad + \left(f'_{21} d(xy) + f'_{22} d\left(\frac{y}{x}\right) \right) d\left(\frac{y}{x}\right) + f'_2 d^2\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \left(y^2 f''_{11} - \frac{2y^2}{x^2} f''_{12} + \frac{y^2}{x^4} f'_{22} + \frac{2y}{x^3} f'_2 \right) dx^2 \\ &\quad + 2 \left(xy f''_{11} - \frac{y}{x^3} f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{x^2} f'_2 \right) dx dy \\ &\quad + \left(x^2 f''_{11} + 2f''_{12} + \frac{1}{x^2} f''_{22} \right) dy^2 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 f''_{11} - \frac{2y^2}{x^2} f''_{12} + \frac{y^2}{x^4} f'_{22} + \frac{2y}{x^3} f'_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= xy f''_{11} - \frac{y}{x^3} f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{x^2} f'_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 f''_{11} + 2f''_{12} + \frac{1}{x^2} f''_{22} \end{aligned}$$

题目 2.1.8 (78-1). 求 $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ 在 $(1, 0)$ 附近带皮亚诺余项的泰勒公式 (直到二次项)

解 因为

$$f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad f'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

继续求二阶偏导得到

$$f'_{xx} = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad f'_{xy} = \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} \quad f'_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

令 $h = x - 1, k = y$, 得到

$$\begin{aligned} f(1+h, k) &= f(1, 0) + f'_x(1, 0)h + f'_y(1, 0)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(f'_{xx}(1, 0)h^2 + 2f'_{xy}(1, 0)hk + f'_{yy}(1, 0)k^2) + o(|(h, k)|^2) \\ &= 1 - 2k + 2hk + 2k^2 + o(|(h, k)|^2) \end{aligned}$$

代入得到

$$\frac{x-y}{x+y} = 1 - 2y + 2(x-1)y + 2y^2 + o((x-1)^2 + y^2) \quad ((x-1)^2 + y^2 \rightarrow 0)$$

题目 2.1.9 (78-2). 求 $f(x, y) = xe^{x+y}$ 在 $(0, 0)$ 处所有四阶偏导数.

解 由 e^{x+y} 在 $(0, 0)$ 处的泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^{x+y} \\ &= x \left[1 + \sum_{k=1}^K \frac{(x+y)^k}{k!} + o((\sqrt{x^2+y^2})^K) \right] \quad (\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

令 $K = 3$ 得到

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + x^2 + xy + \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2y + xy^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3) \\ &\quad + o((\sqrt{x^2 + y^2})^4) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{C_4^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^4} &= \frac{1}{6} & \frac{C_4^3}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{1}{2} & \frac{C_4^2}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{C_4^1}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x \partial y^3} &= \frac{1}{6} & \frac{C_4^0}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial y^4} &= 0 \end{aligned}$$

题目 2.1.10 (84-1). $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 都是方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数, 且都具有连续偏导数, 证明

1. $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$
2. $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

1

证明 因为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y)} \quad y = f(\mathbf{x})$$

于是

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{F'_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F'_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

代入即证.

题目 2.1.11 (85-2). 证明在 $(0, 0, 0)$ 的邻域内

$$-2x + y - x^2 + y^2 + z + \sin z = 0$$

确定隐函数 $z = f(x, y)$, 并求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处带皮亚诺余项的泰勒公式. (直到二次项)

证明 令 $F(x, y, z) = -2x + y - x^2 + y^2 + z + \sin z$, 则 $F(x, y, z)$ 具有各阶连续偏导数, 且 $F'_z(0, 0, 0) \neq 0$, 因此 $F(x, y, z) = 0$ 在 $(0, 0, 0)$ 的某个邻域唯一确定隐函数 $z = f(x, y)$, 且 $f(x, y)$ 在该邻域有各阶偏导数.

¹在一元微分学中, 当 y 是 x 的函数时, 可以把 $\frac{dy}{dx}$ 看做 dy, dx 的商. 本题说明在多元微分学中 $z = f(x, y)$ 可偏导时, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记号.

因为 $f(0,0) = 0$, 因此 $z = f(x,y)$ 的泰勒公式具有下述形式

$$f(x,y) = a_1x + a_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

因为

$$\begin{aligned}\sin z &= z + o(|z|^2) \\ &= a_1x + a_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + o(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

代入 $F(x,y,z) = 0$ 得到

$$(2a_1 - 2)x + (2a_2 + 1)y + (2b_{11} - 1)x^2 + 2b_{12}xy + (2b_{22} + 1)y^2 + o(x^2 + y^2) = 0$$

解得各个常数.

题目 2.1.12 (90-3). 证明方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 2 \\ u + v + x + y = 0 \end{cases}$$

在 $(1,1,-1,-1)$ 的某个邻域 $U((1,1,-1,-1), \delta_0)$ 内确定隐函数组

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

并在该邻域内求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 $\mathbf{x}_0 = (1,1,-1,-1)$ 是方程组的解, 记

$$F(x,y,u,v) = x^2 + y^2 + u^2 - v^2 - 2$$

$$G(x,y,u,v) = u + v + x + y$$

则 F, G 都有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_0} = -4 \neq 0$$

因此存在 $\delta_0 > 0$ 使得方程组在 $U((1,1,-1,-1), \delta_0)$ 内唯一确定隐函数组

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

且 u, v 在 $U((1, 1), \delta_0)$ 内存在连续偏导数. 对原方程微分得到

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2udu - 2vdv = 0 \\ du + dv + dx + dy = 0 \end{cases}$$

当 u 对 x 求偏导时 y 固定, 因此令 $dy = 0$, 得到

$$\begin{cases} udu - vdv = -xdx \\ du + dv = -dx \end{cases}$$

解得 $du = \frac{-x+v}{u+v}dx$, 从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x+u}{u+v}$. 同理令 $dx = 0$ 得到 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-u}{u+v}$.

题目 2.1.13 (99-1). 求函数 $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y$ 的极值.

解 代入 $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ 得到唯一的驻点 $(9, -4)$. 因为

$$f''_{xx}(x, y) = 2 \quad f''_{xy}(x, y) = 3 \quad f''_{yy}(x, y) = 6$$

从而

$$\begin{aligned} f''_{xx}(9, -4) &= 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} f''_{xx}(9, -4) & f''_{xy}(9, -4) \\ f''_{xy}(9, -4) & f''_{yy}(9, -4) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0 \end{aligned}$$

因此 $f(x, y)$ 在 $(9, -4)$ 取到极小值. 因为 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 处处可微, 因此 $(9, -4)$ 是唯一的极小值点.

题目 2.1.14 (100-3). $(x_k, y_k) (k = 1, 2, \dots, K)$ 为 \mathbb{R}^2 内 K 个两两不同的点, 且不同在 Oxy 的一条垂直 x 轴的直线上, 证明: 存在唯一直线 $L_0: y = ax + b$ 使得

$$f(s, t) = \sum_{k=1}^K (sx_k + t - y_k)^2$$

在 (a, b) 处达到最小.

证明 显然 $f(s, t)$ 在 \mathbb{R}^2 处处可微, 由

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = 2 \sum_{k=1}^K x_k (sx_k + t - y_k) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = 2 \sum_{k=1}^K (sx_k + t - y_k) = 0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} s \sum_{k=1}^K x_k^2 + t \sum_{k=1}^K x_k = \sum_{k=1}^K x_k y_k \\ s \sum_{k=1}^K x_k + Kt = \sum_{k=1}^K y_k \end{cases}$$

解得 s, t ，分别记为 a, b 。因为该问题的最小值总是存在，且 $f(s, t)$ 只有唯一的驻点 (a, b) ，因此 (a, b) 必为最小值点。²

题目 2.1.15 (107-4). 求 $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ 内接且各面平行于坐标平面的长方体的最大体积.

解 即求 $f(x, y, z) = 8xyz$ 在约束条件

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

下的最大值. 由拉格朗日乘数法，作函数

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

求各个偏导数得到

$$\begin{cases} 8yz + 32\lambda x = 0 \\ 8xz + 8\lambda y = 0 \\ 8yy + 18\lambda z = 0 \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases}$$

解得

$$xyz = -12\lambda$$

代入第一个偏导方程得到

$$-32\lambda(3 - x^2) = 0$$

于是 $\lambda = 0$ 或 $x = \sqrt{3}$. 当 $\lambda = 0$ 时 $xyz = 0$ ，显然舍去，因此 $x = \sqrt{3}$. 同理把 $xyz = -12\lambda$ 代入第二、第三个偏导方程得到 $y = 2\sqrt{3}, z = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 于是最大值

$$V = 64\sqrt{3}$$

题目 2.1.16 (115-1). 求曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

²这个求解方法称为最小二乘法.

解 令两个方程分别为 $F(x, y, z), G(x, y, z)$, 则

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{(1,1,1)} = -6 \quad \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_{(1,1,1)} = 2 \quad \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_{(1,1,1)} = 4$$

于是切线方程

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

法平面方程

$$-3(x-1) + (y-1) + 2(z-1) = 0 \implies 3x - y - 2z = 0$$

题目 2.1.17 (116-2). 证明曲面 $S: x^2 + y^2 + 2xyz = 4$ 和曲面族 $S_t: 2x + ty^2 - (1+t)z^2 = 1$ 在 $(1, 1, 1)$ 处正交, 并求处交线在该点的切线方程.

解 令两个方程分别为 $F(x, y, z), G_t(x, y, z)$, 则 S 在 $(1, 1, 1)$ 处的法向量为

$$\left(\frac{\partial F(1, 1, 1)}{\partial x}, \frac{\partial F(1, 1, 1)}{\partial y}, \frac{\partial F(1, 1, 1)}{\partial z} \right) = (2, 2, 2)$$

S_t 在 $(1, 1, 1)$ 处的法向量为

$$\left(\frac{\partial G_t(1, 1, 1)}{\partial x}, \frac{\partial G_t(1, 1, 1)}{\partial y}, \frac{\partial G_t(1, 1, 1)}{\partial z} \right) = (2, 2t, -2(1+t))$$

容易验证二者正交.

因为 S, S_t 的交线在 $(1, 1, 1)$ 的切线方程即两曲面在 $(1, 1, 1)$ 的切平面的交线, 于是切线方程为

$$\begin{cases} (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \\ (x-1) + t(y-1) - (1+t)(z-1) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ty - (1+t)z = 0 \end{cases}$$