复习

一、行列式

1、计算行列式 $\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(\boldsymbol{n}-1) & 0\end{vmatrix}\ (\boldsymbol{n}\ge 1)$

解：将第一行分别加到第 2，3，…，n行，有 $\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 2(\boldsymbol{n}-1) & 2\boldsymbol{n}\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(\boldsymbol{n}-1) & 2\boldsymbol{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{n}\end{vmatrix}=\mathrm{n}!$

2、记 $\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n}+1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & \boldsymbol{n}+1 & \boldsymbol{n}+2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n}+1 & \boldsymbol{n}+2 & \cdots & 2\boldsymbol{n}-2 & 2\boldsymbol{n}-1\end{vmatrix}$ ，求 $\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{D}_n\ (\boldsymbol{n}\ge 3)$

解：$\boldsymbol{D}_1=1,\ \boldsymbol{D}_2=-1$，$\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & \boldsymbol{n}-1 & \boldsymbol{n}\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}=0\ (\boldsymbol{n}\ge 3)$，则 $\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{D}_n=0\ (\boldsymbol{n}\ge 3)$

3、计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1-b & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}$

解：$\mathrm{D}_n=\left(\sum_{i=1}^n a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ & \cdots & & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & \cdots & 0\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}=(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i-b\right)$

4、求n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a\end{vmatrix}$

解：$\left|D_n\right|.=(n+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a\end{vmatrix}=(n+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=a^n(n+a)$

5、计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & a\\ 1 & 1 & \dots & a & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a & \dots & 1 & 1\\ a & 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}$

解：将第一行后面的所有行加到第一行上，然后提出第一行的因子$(a+n-1)$，再将第一行乘以-1加到第一行后面的所有行，即可得到：

$$D_n=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0\\ a-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

6、求 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n\end{vmatrix}$

解：从第 2 行开始，每一行乘以（-1）加到上一行，再从第 1 列开始，每列加到后 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2+a_2 & a_1+a_2+a_3 & \cdots & x+\sum_{i=1}^{n}a_i\end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

7、计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix}a & 4 & 4 & \cdots & 4\\ 1 & a & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & a\end{vmatrix}$

解：$D_n=\begin{vmatrix}a & 4 & 4 & \cdots & 4\\ 1 & a & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & a & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & a\end{vmatrix}=(a+2a-2)(a-2)^{n-1}$

8、计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & -a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & -a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_2b_2 & -a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}b_1 & -a_{n-1}b_2 & a_{n-1}b_3 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ -a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$

解：

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}a_1b_i\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_1b_i\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & n-2 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}2^{n-1}(n-2)\prod_{i=1}^{n}a_1b_i=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^{n-1}(n-2)\prod_{i=1}^{n}a_1b_i$$

9、计算下列行列式：

1）$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$　　2）$D=|A|$，其中$A=(a_{ij})$是 2007 阶方阵，$a_{ij}=i-j$

解：1）行列式D经第二列与第三列对换，第二行与第三行对换，可得$D=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)$

2）由于$a_{ij}=i-j=-(j-i)=-a_{ji}$，由于奇数阶反对称行列式为零，即得：$D=0$

10、若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行列式$\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right|=m,\left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right|=n,$求行列式$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)\right|$

解：由行列式的性质，可得

$$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)\right|=\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_1\right|+\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2\right|=-\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right|+\left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right|=-m+n$$

11、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为三维向量，记三阶矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

已知$|A|=1$，求$|B|$.

解：由行列式的性质，可得

$$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2$$

12、设A,B都是5阶方阵，且$|A|=-1,|B|=2$，A^*是A的伴随矩阵，求行列式$|2(A^TB^{-1})^3A^*|$

解：$|2(A^TB^{-1})^3A^*|=32(|A|\dfrac{1}{|B|})^3|A|^{5-1}=-4$

13、设有三阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$和$\left|A^*-3A^{-1}\right|$.

解：$|\mathbf{A}| = -1 \neq 0,$ 因此矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，且有

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

故

$$\left|A^* - 3A^{-1}\right| = \left|\,|A|A^{-1} - 3A^{-1}\right| = (-4)^3\left|A^{-1}\right| = 64$$

14、设有四阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 求行列式 $|AA^T|$ 的值。

解：$|AA^T| = |A|^2, |A| = 40 \Rightarrow |AA^T| = 1600$

15、设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 证明：若 $|A| = O,$ 则 $|A^*| = O$

证：用反证法证之. 若 $|A^*| \neq 0,$ 则 A^* 为可逆矩阵，$\left(A^*\right)^{-1}$ 存在，由 $AA^* = O$ 得到 $AA^*\left(A^*\right)^{-1} = O,$ 即 $A = O.$ 这与 $A \neq O$ 矛盾，故 $|A^*| = 0.$ 再由（1）与（2）知，若 $|A| = 0,$ 则 $|A^*| = 0.$

16. 当 n 为奇数且 $AA^T = I$ 及 $|A| = 1$ 时，证明：$|I - A| = 0$.；

解：,
$$|E - A| = |AA^T - A| = |A(A^T - E)| = |A||A^T - E| = 1\cdot|(A - E)^T|$$
$$= |A - E| = |-(E - A)| = (-1)^n|E - A| = -|E - A|$$

所以 $|E - A| = 0$.

17、设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 证明

1. 若 $|A| = O,$ 则 $|A^*| = O$；　　2. $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证 1)（1）若 $A = O,$ 此时显然有 $A^* = O,$ 因而 $|A^*| = 0;$

（2）若 $A \neq O,$ 此时因 $|A| = 0,$ 有 $AA^* = |A|E = O.$

下证 $|A^*| = 0,$ 用反证法证之. 若 $|A^*| \neq 0,$ 则 A^* 为可逆矩阵，$\left(A^*\right)^{-1}$ 存在，由 $AA^* = O$ 得到

$$AA^*\left(A^*\right)^{-1} = O\left(A^*\right)^{-1} = O,$$

即 $A = O.$ 这与 $A \neq O$ 矛盾，故 $|A^*| = 0.$ 再由（1）与（2）知，若 $|A| = 0,$ 则 $|A^*| = 0.$

2)（1）若 $|A| = 0,$ 则由（1）知 $|A^*| = 0,$ 从而 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 成立.

（2）若 $|A| \neq 0,$ 则由 $AA^* = |A|E$ 得到 $|A||A^*| = |A|^n$, 即 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

由 1° 与 2° 知对任意 n 阶矩阵，均有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

18. 当 m 为给定任意正整数且 $(A + I)^m = O$ 时，证明：A 可逆.

解：由 $(A + E)^m = A^m + k_1A^{m-1} + k_2A^{m-2} + \cdots + k_{m-1}A + E = o$，其中 $k_i(i = 1, 2, \cdots m - 1.)$ 均为组合系数. 得 $\left|A(A^{m-1} + k_1A^{m-2} + k_2A^{m-3} + \cdots + k_{m-1}E)\right| = |-E| \neq 0$，从而 $|A| \neq 0.$ 即 A 可逆.

(另证：设 λ 为 A 的任意一个特征值，X 为对应的特征向量，则 $AX=\lambda X$，注意 $EX=X$，两式相加 $(A+E)X=(\lambda+1)X$，两边左乘矩阵 $A+E$，得 $(A+E)^2X=(\lambda+1)(A+E)X=(\lambda+1)^2X$.

重复该过程可得$(A+E)^m X=(\lambda+1)^m X$，而$(A+E)^m=0$，且 $X\neq 0$，所以有$(\lambda+1)^m=0$

故 A 的任一个特征值都为－1，由$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^m\neq 0$，$\therefore A$ 可逆。)

19、设 n 阶实对称矩阵 $A\neq O$, 且其特征值全为非负数， E 为 n 阶单位阵，则行列式 $|A+E|>1$.

设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\lambda_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 因 $A\neq O$，故至少有一个特征值 $\lambda_j>0$. 事实上，如特征值 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，则 $A=Qdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}=Q\cdot O\cdot Q^{-1}=O.$

这与 $A\neq O$ 矛盾. 由 $A=Qdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}$. 及 $E=Qdiag(1,\cdots,1,\cdots,1)Q^{-1}$, 故

$$|A+E|=\left|Qdiag(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)Q^{-1}\right|=|Q||Q|^{-1}\left|diag(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)\right|$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_j+1)\cdots(\lambda_{n-1}+1)(\lambda_n+1)>1$$

二、矩阵及其运算，矩阵的秩

1、设矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

（1）求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)$；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解（1） 因为 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=(A+B)(A+B)-A^2-2AB-B^2=BA-AB$，

而 $BA=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-8&-3\\10&1&4\\2&-5&-2\end{pmatrix}$ （2） $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\3&-1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&1&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&5&4\\4&-2&2\\1&4&1\end{pmatrix}$，

（1）求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$； （2）求 $|\boldsymbol{A}^*|$，这里 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵。

解：（1） $4A^2-B^2-2BA+2AB=(4A^2-2BA)+(2AB-B^2)=(2A-B)2A+(2A-B)B$

$$=(2A-B)(2A+B)$$

$$=\begin{pmatrix}0&-11&0\\-8&4&-4\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&8\\0&0&0\\3&8&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-44&-24&-60\\-5&-25&11\end{pmatrix}.$$

（2） $|\boldsymbol{A}^*|=0$。

3、设三阶方阵 A,B 满足 $AB+E=A^2+B$，且 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 B 及 B^*。

解：由 $AB-B=A^2-E$, $(A-E)B=(A-E)(A+E)$, 又 $|A-E|\neq 0$, 知 $A-E$ 可逆。

可得 $B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$，并可求得 $B^*=\begin{pmatrix}6&0&-3\\0&3&0\\-3&0&6\end{pmatrix}$.

4、已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=I$，其中 I 是3阶单位矩阵，

（1）求矩阵 B；（2）令 $C=4A^2-B^2-2BA+2AB$，计算 C 的伴随矩阵 C^*。

解：（1）由 $A^2-AB=I \Rightarrow A(A-B)=I \Rightarrow |A|=-1\neq 0$ 故 A 可逆，

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\quad B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（2）$C=4A^2-B^2-2BA+2AB=2A(2A+B)-B(B+2A)=(2A+B)(2A-B)$

$$(2A+B)(2A-B)=\begin{pmatrix}4&8&4\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow C^*=|C|C^{-1}=16\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5、已知 A,B 都是3阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$，其中 I 是3阶单位矩阵，1）证明 $A-2I$ 是可逆矩阵，并求 $(A-2I)^{-1}$；2）若矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

解：1）由题设知 $(A-2I)(B-4I)=8I$，即 $(A-2I)[\frac{1}{8}(B-4I)]=I$ 故 $A-2I$ 可逆，且

$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$

2）由 1）知 $A-2I=[\frac{1}{8}(B-4I)]^{-1}=8[B-4I]^{-1}$ $\quad A=2I+8[B-4I]^{-1}$

又 $(B-4I)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

6、设A、B均是同阶方阵，B是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=O$，证明 A、A^2+B^2 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证　因为 $A^2+AB=A(A+B)=-B^2$ 则 $|A(A+B)|=|A||A+B|=|-B^2|=(-1)^n|B^2|\neq 0$

所以 $|A|\neq 0$，因而 A 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。

注意 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$，$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right|=\left|-\boldsymbol{AB}\right|=\left|-\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$，因而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆。

注意 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})BB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，$\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|(A+B)\right|\left|B^{-1}\right|$

因为A、B、$A+B$ 均可逆，故 $|A^{-1}|\neq 0, |B^{-1}|\neq 0.$ $|A+B|\neq 0$，所以有 $|A^{-1}+B^{-1}|\neq 0$，即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。

7、设三阶矩阵 $A=(a_{ij})$，1、若 $A^T=A$ 且 $A^2=0$，证明 $A=0$；并由反例说明一般情况下：$A^2=0$ 得不出 $A=0$；2、如果 A 可逆，将其第二行的 2 倍加到第三行的矩阵为 B，试问 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 是否可逆？

解：1）由于 $A^T=A$，则 $A^TA=A^2=O$，比较此式两端的元素，可得：

$(a_{i1},a_{i2},a_{i3})\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\a_{i3}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}^2\ (i=1,2,3)$　而 a_{ik} 为实数，因而有 $a_{ik}=0\ (i,k=1,2,3)$，即 $A=0$。

反例：如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，则 $A^2=0$，但 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq 0$。

2）方法一：题中给出的初等变换相当于存在可逆阵 P，使得 $PA=B$，即 $P=BA^{-1}$ 及 $P^{-1}=AB^{-1}$ 其中 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$, 从而 $BA^{-1}-AB^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&4&0\end{pmatrix}$ 故知 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 不可逆。

方法二：设 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$, 则 $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1+2b_1&c_2+2b_2&c_3+2b_3\end{pmatrix}$,

$B-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2b_1&2b_2&2b_3\end{pmatrix}, |B-A|=0, (BA^{-1}-AB^{-1})=(BA^{-1}+I)(I-AB^{-1})$

$|A+B|=2^3|A|=8|A|\neq 0$，由 $|A|\neq 0\Rightarrow |B|\neq 0$，又

$(I-AB^{-1})B=B-A, |I-AB^{-1}||B|=|B-A|=0$，又 $|B|\neq 0\Rightarrow |I-AB^{-1}|=0$

故 $|BA^{-1}-AB^{-1}|=|BA^{-1}+I||I-AB^{-1}|=0$，所以 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 不可逆。

方法三：设 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$, 则 $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1+2b_1&c_2+2b_2&c_3+2b_3\end{pmatrix}$,

设 $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2b_1&2b_2&2b_3\end{pmatrix}$，则 $B=A+C, BA^{-1}-AB^{-1}=(A+C)A^{-1}-(B+C)B^{-1}$

$$=I+CA^{-1}-I+CB^{-1}=C(A^{-1}+B^{-1})$$

由 $|C|=0$ 知：$|BA^{-1}-AB^{-1}|=0$，所以 $BA^{-1}-AB^{-1}$ 不可逆。

8、设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, 当 n 是不小于1的整数时，计算 A^n

解：$A^n=\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(1,\ -1,\ -1)\right)^n=(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

9、已知$A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$，求$A^{2006}$

解：$A=(a,b,c)^T(1,1,1)$，则$A^{2006}=(a+b+c)^{2005}A$

10、已知n阶矩阵A（$n\ge 2$），且A非奇异，求$(A^*)^*$。

解：$(A^*)^*=|A|^{n-1}A$

11、设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & a \end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，$X$ 满足$AX+I=A^2+X$，求a和X。

解：由初等变换求得$a=1$，由$|A-I|\ne 0$，因此$A-I$可逆，且

$$X=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=(A+E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

12、设A是n阶实方阵，（1）当n为奇数且$AA^T=I$及$|A|=1$时，证明：$|I-A|=0$；（2）当m为给定任意正整数且$(A+I)^m=0$时，证明：A可逆。

解：1）$|I-A|=|AA^T-A|=|A||A^T-I|=-|I-A|\Rightarrow|I-A|=0$

2）由$(A+I)^m=A(A^{m-1}+k_1A^{m-2}+\cdots+k_{m-1}A+I)+I=0\Rightarrow|A|\ne 0$即$A$可逆。

13. 设n阶向量$a=(x,0,\cdots,0,x)^T$，矩阵$A=I_n-aa^T$，且$A^{-1}=I_n+xaa^T$，求实数x。

解：$I_n=(I_n-aa^T)(I_n+xaa^T)=I_n-(1-x+2x^3)aa^T$，$1-x+2x^3=(1+x)(1-2x+2x^2)=0$

$\Rightarrow x=-1$

14、设n维行向量$\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，矩阵$A=E-\alpha^T\alpha, B=E+2a^T\alpha,$其中$E$ 为n阶单位矩阵，证明A,B互为逆矩阵。

证：因为 $AB=\left(I-\alpha^T\alpha\right)\left(I+2\alpha^T\alpha\right)=I-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2\alpha^T\left(\alpha\alpha^T\right)\alpha$

$$=I+\alpha^T\alpha-2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\alpha^T\alpha=I+\alpha^T\alpha-\alpha^T\alpha=I.$$

故A,B互为逆矩阵。

15. 当 m为给定任意正整数且$(A+I)^m=O$时，证明：A可逆.

由$(A+E)^m=A^m+k_1A^{m-1}+k_2A^{m-2}+\cdots+k_{m-1}A+E=o$，其中$k_i(i=1,2,\cdots m-1.)$ 均为组合系数. 得$\left|A(A^{m-1}+k_1A^{m-2}+k_2A^{m-3}+\cdots+k_{m-1}E)\right|=\left|-E\right|\ne 0$，从而$\left|A\right|\ne 0.$即$A$可逆.

(另证:设 λ为 A的任意一个特征值，X为对应的特征向量，则$AX=\lambda X$，注意$EX=X$, 两式相加$(A+E)X=(\lambda+1)X$, 两边左乘矩阵$A+E$，得$(A+E)^2X=(\lambda+1)(A+E)X=(\lambda+1)^2X.$

重复该过程可得$(A+E)^mX=(\lambda+1)^mX$，而$(A+E)^m=0$，且$X\ne 0$，所以有$(\lambda+1)^m=0$

故A的任一个特征值都为－1，由$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_1\cdots\lambda_n=(-1)^m\ne 0$，$\therefore A$可逆。）

16. 设A和B为n阶矩阵，且满足$A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$

证：因为$A(A+B-E)=A^2+AB-A=AB$，$(A+B-E)B=AB+B^2-B=AB$，

由$(A+B-E)$为可逆矩阵，可得：

$r(A(A+B-E))=r(A)=r(AB)$，$r((A+B-E)B)=r(B)=r(AB)$，所以，$r(A)=r(B)$

17、设 A 为 n 阶方阵，证明若 $A^2=I$，那么 $r(A+I)+r(A-I)=n$，其中 I 为 n 阶单位阵。

解：$r(A+I)+r(A-I)\ge r(A+I+A-I)=r(A)$ 由 $A^2=I\Rightarrow |A|\ne 0\Rightarrow r(A)=n$

故 $r(A+I)+r(A-I)\ge n$，又 $(A-I)(A+I)=A^2+A-A-I=0$

所以 $n\ge r(A+I)+r(A-I)$，故 $r(A+I)+r(A-I)=n$

18、设矩阵 $A=I-aa^T$，其中 I 是 n 阶单位矩阵，a 是 n 维列向量，a^T 是 a 的转置，证明：$a^Ta=1$ 的充要条件是秩 $r(A)<n$。

解：必要性：∶若 $a^Ta=1$ 则 $a\ne 0$ 且 $Aa=(I-aa^T)a=a-a=0$ 即 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解 a，所以 $r(a)<n$

充分性：设 $r(a)<n$，则 n 元齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解，设为 b，即 $Ab=0$，且 $b\ne 0$，于是有 $b=aa^Tb$ 且 $a^Tb\ne 0$ 所以 $a^Tb=(a^Ta)a^Tb\Rightarrow(a^Ta-1)a^Tb=0$ 故 $a^Ta=1$

三、向量组及其极大线性无关组，向量组的秩

1、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为n维向量组，且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 $\boldsymbol{r}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解：由题设可得 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)C$，其中 $C=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$，

由 $|C|=(-1)^{m-1}(m-1)\ne 0$，知 C 可逆，所以 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 与 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 有相同的秩，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 有相同的秩，从而所求秩为 $\boldsymbol{r}$ 。

2、若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=O$ 成立，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性相关. 试讨论该结论是否正确？

解：由题设能断定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关，但其部分向量组不一定别线性相关. 例如取 $\alpha_1=[1,0],\alpha_2=[0,1],\beta_1=[-1,0],\beta_2=[0,-1]$. 则当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$, 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性相关，但其部分向量组 $\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2$ 却分别线性无关.

3、设三阶阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\boldsymbol{\lambda_1}$、$\boldsymbol{\lambda_2}$、$\boldsymbol{\lambda_3}$，且满足 $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2\ne\lambda_3}$，如果 $\boldsymbol{\lambda_1}$ 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 和 $\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\lambda_3}$ 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha_3}$，证明 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 线性无关。

4、向量空间 R^4 中，已知向量组（1）：a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，向量组（2）：$b_1=(1,1,0,-1)^T,b_2=(-2,0,1,2)^T$ $b_3=(1,5,2,-1)^T,b_4=(0,2,3,4)^T$，1）求向量组（2）的秩；2）试问（1）组能否由（2）组线性表示？（2）组能否由（1）组线性表示？为什么？

解：1）向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 的秩为 3。

2）因为向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 是向量空间 R^4 的一个基，所以向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 可由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示，但 a_1,a_2,a_3,a_4 不能由 b_1,b_2,b_3,b_4 线性表示，否则，a_1,a_2,a_3,a_4 与 b_1,b_2,b_3,b_4 等价，从而秩相等，且等于 4，与 1、的结果茅盾。

5、$\boldsymbol{\alpha_1=(1,0,2,1)}$，$\boldsymbol{\alpha_2=(2,0,1,-1)}$，$\boldsymbol{\alpha_3=(1,1,0,1)}$，$\boldsymbol{\alpha_4=(4,1,3,1)}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$ 的秩和一个极大线性无关组. 并用极大线性无关组表示其余向量。

解　令 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\right)$，　对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换 ：$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，故

$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

6、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$ 且 $R(A)=3$，则 $k=$ ____________.

解：应填 -3. 由于 $|A|=\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$，即 $k=1$，或 $k=-3$，而当 $k=1$ 时 $R(A)=1$ 不合题意舍去，故 $k=-3$.

7、已知向量组 $\beta_1=k(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\ \beta_2=k(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),\ \beta_3=k(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$，

其中 k 为非零实数，给出向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充要条件，并证明之.

证明：如果 $|A|\neq 0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则有 $|B|=|AC|=|A||C|\neq 0$，得 β_1,β_2,β_3 线性无关；

反之如果 β_1,β_2,β_3 线性无关，则由 $|A||C|=|B|\neq 0$，得到 $|A|\neq 0$.

可见，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关是 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充分必要条件.

8、已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)$ 及向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)$，问：当 a 取何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价？

解：设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix}$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+1&a+4\end{pmatrix}$，

使用行初等变换，可将 A 化为 $A\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$B\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

所以，$R(B)=3$，$a+1=0$，即 $a=-1$ 时，$R(A)=2\neq R(B)$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不等价；$a+1\neq 0$，即 $a\neq -1$ 时，$R(A)=R(B)=3$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价。

9、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，E 是 n 阶单位矩阵 $(n\times n)$. 已知 $BA=E$，试判断 A 的列向量组是否线性相关？为什么？

解：由 $r(AB)\le\min\left(r(A),r(B)\right)$ 及 $BA=E_n$ 知 $n\le r(A)$. 另一方面，A 为 n 列矩阵，故又有 $r(A)\le n$. 于是 $r(A)=n$，因而 A 的列向量线性无关.

四、线性方程组

1、设有线性方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{\lambda x_1+x_2+x_3=0}\\\boldsymbol{x_1+\lambda x_2+x_3=3}\\\boldsymbol{x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1}\end{cases}$.

讨论 λ 为何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

解：经计算系数行列式得 $|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，于是由克莱姆法则有如下结论：

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，$r(A)=r(B)=3,$ 方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda = 1$ 时，$r(A)=1$，$r(B)=2$，该情形方程组无解；

(3) 当 $\lambda = -2$ 时，$r(A)=r(B)=2,$，此时方程组有无限多个解。而

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此得 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(c \in R)$.

2、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$，

（1）问 a,b,c 为何值时，$R(A,B)=R(A)$？　　（2）求矩阵方程 $AX=B$ 的全部解。

解：　$AX=B$ 有解，须 $R(A)=R(A \mid B)$，对矩阵 $(A \mid B)$ 作初等行变换：

$$(A \mid B) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

由此看出 $R(A)=2,$ 欲 $R(A \mid B)=2$ 须 $a=1,b=1,c=1$. 所以 当 $a=1,b=1,c=1$ 时 $AX=B$ 有解。当 $a=b=c=1$ 时，将上面最后一个矩阵进一步化为行简化阵

$$(A \mid B) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$　　（k_1为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1-k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$　　（k_2为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_3 \\ -1-k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$　　（k_3为任意常数）

故所求矩阵方程的通解为 $X=\begin{pmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ -k_1 & 1-k_2 & -1-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$　　（k,k_2,k_3为任意常数）.

3、已知 $A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$ 就方程组 $Ax=b$ 无解、有惟一解、有无穷多解诸情形，对 λ 值进行讨论，并在有无穷多解时，求出其通解。

解：由$|A|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$所以方程组有唯一解的充要条件为$|A|\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$，$\lambda=10$时，$r(A)=2, r(\overline{A})=3$ 故方程组无解。$\lambda=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=1<3$ 故方程组有无穷多解，通解为 $(x_1,x_2,x_3)^T = k_1(-2,1,0)+k_2(2,0,1)+(1,0,0)$（$k_1,k_2\in R$）

4、设齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$的系数阵为$A$，若 3 阶非零阵$B$满足$AB=O$，（1）求$|A|$的值；（2）求$\lambda$；（3）求$|B|$的值。

解：（1）由$AB=O$知，矩阵B的各个列向量均为齐次线性方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{o}$的解向量，而$B\neq O$，所以$B$至少有一个列向量为非零向量，从而$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{o}$有非零解，故$|A|=0$，

（2）因为$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5(\lambda-1)$，所以$\lambda=1$.

（3）由A,B均为3阶方阵，且$AB=O$，得$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=O$，所以$A^{\mathrm{T}}$的各列均为$B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{o}$的解，而$A^{\mathrm{T}}$为非零矩阵，所以$B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{o}$有非零解，从而知$|B^{\mathrm{T}}|=|B|=0$.（或可由$AB=O$判断$|B|=0$。事实上若$|B|\neq 0$，则$B$可逆。于是由$ABB^{-1}=OB^{-1}$得$A=O$，显然不对，故可知$|B|=0$.）

5、设A为$m\times n$矩阵，X为n维实向量，证明：方程组$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$与$A\boldsymbol{X}=O$同解。

证明：显然$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解均是$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解。

下面证$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解也为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解。事实上，设$\boldsymbol{x}_0$为$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的任一解，即$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x_0}=\boldsymbol{o}$，两端左乘$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}$得$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，即$(A\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{o}$，向量$A\boldsymbol{x}_0$的长度的平方为零，所以$A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{o}$，于是$\boldsymbol{x}_0$为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解。由$\boldsymbol{x}_0$的任意性知$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解均是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$的解。故齐次线性方程组$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$与$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$同解。

6、证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系。

证：由于两个等价的线性无关向量组所含向量个数是相等的。设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$是齐次线性方程组的一个基础解系，则可设等价的线性无关向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$。

另外，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与基础解系等价，知$\alpha_i(i=1,\cdots,r)$可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$线性表出，从而$\alpha_i(i=1,\cdots,r)$也是原齐次线性方程组的解。

又由题设知$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出。从而知齐次线性方程组的所有解也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出。即证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是一个基础解系。

7、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系. 证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是该方程组的一个基础解系.

证：由$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=0+0=0,$ 知$\alpha_1+\alpha_2$是$Ax=0$的解. 同理$\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也都是$Ax=0$的解.

设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0,$ 则有$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，线性无关，故得：$\begin{cases} k_1 \quad +k_3=0 \\ k_1+k_2 \quad =0 \\ \quad k_2+k_3=0, \end{cases}$

由$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$可见$k_1=k_2=k_3=0,$从而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$是方程组$Ax=0$的基础解系.

8、已知四元非齐次方程组系数矩阵的秩为 3，ξ_1,ξ_2,ξ_3是它的三个解，且有

$\xi_1+2\xi_2=\begin{pmatrix}3\\3\\6\\-3\end{pmatrix},2\xi_2+\xi_3=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\0\end{pmatrix}$，求方程组的通解.

证：由$\xi_1+2\xi_2=\begin{pmatrix}3\\3\\6\\-3\end{pmatrix},2\xi_2+\xi_3=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\0\end{pmatrix}$，得$\xi_1-\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-3\end{pmatrix}$．因为四元非齐次方程组系数矩阵的秩为 3，

所以$\xi_1-\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-3\end{pmatrix}$是对应齐次方程组的基础解系．而$\frac{1}{3}\left(\xi_1+2\xi_2\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$

是非齐次方程组的一个解，故得非齐次方程组的通解为$k\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$，　k为任意常数.

9、设有线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$（1）与$\begin{cases}A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n=c_1\\A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n=c_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\cdots+A_{nn}x_n=c_n\end{cases}$（2）

其中A_{ij}为方程组（1）的系数矩阵中元素a_{ij}的代数余子式，证明：线性方程组（1）有唯一解的充分必要条件是线性方程组（2）有唯一解。

证明：设方程组（1）的系数矩阵为A，则方程组（2）的系数矩阵为$(A^*)^{\mathrm{T}}$．若方程组（1）有唯一解，即$|A|\neq 0$，则由$AA^*=A^*A=|A|E$，$|(A^*)^{\mathrm{T}}|=|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以由克莱姆法则知方程组（2）有唯一解.

反之，若方程组（2）有唯一解，则$|(A^*)^{\mathrm{T}}|=|A^*|\neq 0$，从而$A^*$可逆，仍由$AA^*=A^*A=|A|E$得$A=|A|(A^*)^{-1}$，若$|A|=0$，则$A=0$．从而得到$A^*=0$，于是$|A^*|=0$矛盾，故$|A|\neq 0$，所以由克莱姆法则知方程组（1）有唯一解.

五、基底及其过度矩阵

1、设R^3中的两组基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1),$$
$$\beta_1=(1,0,2),\quad \beta_2=(-1,2,-1),\quad \beta_3=(1,0,0),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)，\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)，\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1).$$

且线性变换 T 把基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 映到基 β_1,β_2,β_3.

（1）求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；　　（2）求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵；

（3）求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵；　　（4）求 $T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))$.

解：（1） 设所求过渡矩阵为 A，由关系式 $\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)A$，可得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

（2） 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 A，由关系式 $\left(T\boldsymbol{\alpha}_1,T\boldsymbol{\alpha}_2,T\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)B$，可得

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

记由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 C.

（3）因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$，故由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵

$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，于是 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵

$$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

（4）由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(1,0,2\right)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，由于 T 是线性变换，有

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))=T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,0,2)+(1,0,0)=(2,0,2).$$

2、对线性空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 B： β_1,β_2,β_3, 讨论下面的问题：

(1). 向量组 B 是否能成为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的基？能否用 A 线性表示 B？如果可以，试求出由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P, 其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$； $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2-a\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，且 a 为实数.

(2). 若 $\beta_1=k(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\ \beta_2=k(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),\ \beta_3=k(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3),\ k$ 是非零实数，

（a）给出向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充要条件，并证明之；

（b）给出矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 为正交阵的一个充要条件，并证明之.

解：解：设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，　　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\\boldsymbol{a}&2-\boldsymbol{a}&0\end{pmatrix}$，易知 $a\neq 1$ 时， β_1,β_2,β_3 能成为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的基. 即有

$A=BQ$, 且 $|Q|\neq 0$, 令 $B{=}AQ^{-1}=AP\ \ (P=Q^{-1})$，故能用 A 线性表示 B. 由初等行变换

求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1-\boldsymbol{a} & -1+\boldsymbol{a} & 1\\ \boldsymbol{a} & 2-\boldsymbol{a} & 0\end{pmatrix}$.

2）由题设 $B=AC$，其中 $C=k\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$，且 $|C|=27k^3\neq 0$.

如果 $|A|\neq 0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则有 $|B|=|AC|=|A||C|\neq 0$，得 β_1,β_2,β_3 线性无关；

反之如果 β_1,β_2,β_3 线性无关，则由 $|A||C|=|B|\neq 0$，得到 $|A|\neq 0$.

可见，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关是 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充分必要条件.

如果 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是正交阵, 即 $A^{\mathrm{T}}A=E$,

则 $B^{\mathrm{T}}B=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AC=C^{\mathrm{T}}C=k^2\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}=9k^2E$, 可见 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 时. B 是正交阵.

反之 B 是正交阵时，$BB^{\mathrm{T}}=AC^{\mathrm{T}}CA^{\mathrm{T}}=9k^2AA^{\mathrm{T}}=E$, 即 $AA^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{9k^2}E$, 可见 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 时, A 是正交阵. 综上，B 为正交阵的一个充要条件是 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 且 A 为正交阵.

3、给定 R^3 的两组基 $a_1=(1,0,1),a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$ 与 $b_1=(1,0,0),b_2=(1,1,0),b_3=(1,1,1)$，定义线性变换 $T(a_i)=b_i,i=1,2,3$，试求：

（1）求由基 a_1,a_2,a_3 到基 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵；（2）求线性变换 T 在基 b_1,b_2,b_3 下的矩阵。

解：（1）取 R^3 的另一组基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$，则由基 e_1,e_2,e_3 到基 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵 P 及 Q 分别为 $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

再由 $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)D$ 可解得由基 a_1,a_2,a_3 到基 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵：

$$D=P^{-1}Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

（2）$T(b_1,b_2,b_3)=T(a_1,a_2,a_3)D=(b_1,b_2,b_3)D$，故 T 在基 b_1,b_2,b_3 下的矩阵仍为 D

4、已知 η_1,η_2,η_3 是 3 维线性空间 V 的一个基，且 $\begin{cases}\alpha_1=\eta_1+\eta_2+\eta_3\\ \alpha_2=\eta_1+2\eta_2+2\eta_3\\ \alpha_3=\eta_1+2\eta_2+3\eta_3\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1=\eta_2+\eta_3\\ \beta_2=\eta_1+\eta_3\\ \beta_3=\eta_1+\eta_2\end{cases}$，1、求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；2、求向量 $\xi=2\eta_1-2\eta_2-3\eta_3$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标。

解:1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)B$　由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为：$A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

2) 向量$\xi = 2\eta_1 - 2\eta_2 - 3\eta_3$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

5、设$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$为线性空间$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$的 5 个元素，求它们的秩，和一个基。

6、设n阶矩阵A, B满足条件$A + B = AB$，其中$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且$a_1 = (1,0,1)$

$a_2 = (2,1,0), a_3 = (1,1,1)$，1、求矩阵$A$；2、求秩$r(A^* B^*)$，其中$A^*, B^*$分别为$A, B$的伴随矩阵；3、设$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$，求$\beta_1, \beta_2, \beta_3$；4、设线性变换$T$为：$T(\alpha_i) = \beta_i \ (i = 1,2,3)$，求$T$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的变换矩阵$C$

1）由题设有$A(B - I) = B$，而$|B - I| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$可逆，易算得：

$(B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$因而有$A = B(B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2）由A, B均可逆，故A^*, B^*也均可逆，所以$r(A^* B^*) = 3$；

3）$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 = (5,2,1), \boldsymbol{\beta}_2 = -3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,-3), \boldsymbol{\beta}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,2,2)$

4）由$T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\beta}_i \ (i = 1,2,3)$，可得：$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)B$

故T在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的变换矩阵为：$C = B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7、给定R^3的两个基$\begin{cases} \xi_1 = (1,\ 0,\ 1), \\ \xi_2 = (2,\ 1,\ 0), \\ \xi_3 = (1,\ 1,\ 1). \end{cases}$和 $\begin{cases} \eta_1 = (1,\ 2,\ -1), \\ \eta_2 = (2,\ 2,\ -1), \\ \eta_3 = (2, -1, -1). \end{cases}$若定义线性变换 T 为：

$\mathrm{T}(\xi_i) = \eta_i$，$(i = 1,\ 2,\ 3)$，试求：1）求两基间的过渡矩阵；

2）求 T 在基ξ_1, ξ_2, ξ_3下的矩阵及向量$\beta = (3, 4, -2)$在该基下的坐标。

解：1）$B = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & 3 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$； 2） $C = B$，且$\beta = (-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$

8、在四维实向量构成的线性空间 R^4 中, 已知：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}；\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\\boldsymbol{a}\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2-\boldsymbol{a}\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

1、 求 a 使 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 R^4 的基；

2、 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 P；

3、设线性变换 T 为：$\mathrm{T}(\alpha_i)=\beta_i$ ，$(i=1,2,3,4)$，求 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的变换矩阵 C.

解：1、$a\neq 1$；

2、设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，则 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&0\\a&2-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，则 $P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&-2&-2&1\\-1-a&a-1&1&0\\a-1&1-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

3 由 $\mathrm{T}(\alpha_i)=\beta_i$ ，$(i=1,2,3,4)$，求 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的变换矩阵 C=P。

六、矩阵的相似矩阵

1、设二阶方阵 A 满足方程 $A^2-3A+2I=0$，求 A 所有可能的特征值。

解：$\lambda_1=1,\lambda_2=2$

2、设 A 是三阶实对称矩阵，其对应的二次型的正负惯性指数均为1，且满足 $|I+A|=|I-A|=0$，计算 $|2I+3A|$。

解：由题设知，A 的特征值为：$1,-1,0$，$2I+3A$ 的特征值为：$5,-1,2$，故 $|2I+3A|=-10$

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&k&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，讨论下列问题：

1）当 $k=1$ 时，是否存在正交阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵？如果存在正交阵 Q，则 Q 是否唯一？

2）当 $k=0$ 时，A 能否与对角阵相似（说明理由）？

解：1）当 $k=1$ 时，A 是实矩阵，则 A 必有三个线性无关的特征向量，从而可以对角化，也必存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵，但 Q 不惟一。

2）因 $|\boldsymbol{\lambda}I-A|=(\boldsymbol{\lambda}-1)^2(\boldsymbol{\lambda}+1)$，$A$ 得特征值 $\boldsymbol{\lambda}_1=1$（二重），$\boldsymbol{\lambda}_2=-1$。解方程组 $(\boldsymbol{\lambda}_1I-A)x=0$，因 $r(\boldsymbol{\lambda}_1I-A)=2$，故 $(\boldsymbol{\lambda}_1I-A)x=0$ 的基础解系只含有一个解向量，从而不相似于对角阵。

4、设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&-1\\x^2&0&0\end{pmatrix}$，$x$ 为实数，试讨论 x 为何值时，矩阵 A 可与对角阵相似？

解：$|A-\lambda I|=(\lambda-1)(x^2-\lambda^2)\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm x$

1) 当 $x\neq 0$ 且 $x\neq\pm 1$ 时，A 有三个不同的特征值，此时 A 可对角化。

2）当 $x=\pm1$ 时，则 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=-1$，对 $\lambda_{1,2}=1$，$r(A-I)=1,r(A+I)=2$，故 A 有三个线性无关的特征向量，所以 A 可对角化。

3）当 $x=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=0\Rightarrow r(A-0I)=r(A)=2,r(A-I)=2$，故 A 只有二个线性无关的特征向量，所以 A 不能对角化。

5、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化。

解：A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+8-3a)$，若 $\lambda=1$ 是 $f(\lambda)$ 的二重根，则 $\lambda=1$ 是 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 的零点，即 $\lambda=1^2-6+8-3a\Rightarrow a=1$，若 $\lambda=1$ 不是 $f(\lambda)$ 的二重根，则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 为完全平方，从而 $8-3a=9\Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$，当 $a=1$ 时，A 的特征值为：$1,1,5$，易知，$\lambda=1$（二重）对应的矩阵 $I-A$ 的秩为1，故 A 的属于 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量有两个，所以 A 有3个线性无关的特征向量，因此 A 相似于对角距阵 $diag(1,1,5)$，当 $a=\dfrac{-1}{3}$ 时，A 的特征值为 $1,3,3$，易知，$\lambda=3$（二重）对应的矩阵 $3I-A$ 的秩为2，故 A 的属于 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量只有一个，所以 A 只有2个线性无关的特征向量，说明 A 不能相似对角距阵。

6、设 A 为三阶方阵，且 $A^2\neq O$，$A^3=O$，

1）能否求得 A 的的特征值？若能，试求出该特征值，若不能，则说明理由。

2）A 能否相似于一个对角阵？若能，试求出该对角阵，若不能则说明理由。

3）已知 $B=A^3-5A^2+3E$，能否求得 $|B|$？若能，试求出 $|B|$，若不能，则说明理由。

解：1）能；设 A 的特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,3)$，则 A^3 的特征值为 $\lambda_i^3\ (i=1,2,3)$，

由 $A^3=O$ 知 $\lambda_i^3=0\ (i=1,2,3)$，从而 $\lambda_i=0\ (i=1,2,3)$。

2）不能；易知 A 非零，但 $|A|=0$，于是由 $(A-0\cdot I)X=AX=O$ 可求得全部线性无关的特征向量的个数为 $3-r<3$（因为 $r>0$，其中 r 为 A 的秩），故 A 不存在3个线性无关的特征向量，从而不存在任何对角阵和 A 相似。

3）能；易知 $B=A^3-5A^2+3E$ 的特征值为 $\lambda_i=\lambda_i^3-5\lambda_i^2+3=3\ (i=1,2,3)$，从而 $|B|=9$。

7、设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值. 若向量 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,1)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

1）求 A 的另一特征值和对应的特征向量；2）求矩阵 A.

解　1）因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，故 A 的属于特值 6 的线性无关的特征向量有 2 个. 由题设可得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$（c_1,c_2 不全为零）为 A 的属于特征值 6 的全部特征向量.

另由 $r(A)=2$ 可知，$|A|=0$. 所以 A 的另一种特征值 $\lambda_3=0$. 设所对应的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有 $\alpha_1^T\alpha=0,\alpha_2^T\alpha=0$，即 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$ 解得此方程组的基础解系为 $\alpha=(-1,1,1)^T$，即 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的全部特征向量为 $c\alpha=c(-1,1,1)^T$，（c 为不为零的任意常数）.

2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $A=P\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

8、已知 1，1，－1 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，向量 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(2,\ 2,\ 1)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量，

1） 能否求得 A 的属于 λ_3＝−1 的特征向量？若能，试求出该特征向量，若不能，则说明理由。

2）能否由此求得实对称阵 A？若能，试求之，若不能则说明理由。

解：(1)能；A 的属于 λ_3＝−1 的特征向量为：$\alpha_3=(1,-1,0)^T$

(2) 能；实对称阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

9、设 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值. 证明: $AB=BA$ 的充要条件是 A 的特征向量也是 B 的特征向量.

证：必要性：设 λ 是 A 的特征值，x 是对应的特征向量．则 $Ax=\lambda x$，故 $ABx=BAx=\lambda Bx$

即 $Bx\in V_\lambda$．而 V_λ 是一维子空间，故 $Bx=kx$，即 x 也是 B 的特征向量.

充分性：A,B 有 n 个相同的线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$．取 $P=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)$

则有 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$，　$B=P\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}P^{-1}$，由此即得 $AB=BA$.

10、设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，试确定 $\boldsymbol{a,b}$；并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P^{-1}AP=B}$.

解　1、因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C^{-1}AC}|=|\boldsymbol{C^{-1}}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|$，所以有

$|\boldsymbol{B}|=2b=|\boldsymbol{A}|=2(3a-4)$ 又因为 1 是 B 的特征值，故 1 也是 A 的特征值，则

$$|\boldsymbol{E-A}|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&1-a&-2\\0&-2&-2\end{vmatrix}=-2(2a-6)=0\quad \text{联立解}\begin{cases}3a-4=b\\2a-6=0\end{cases}\ \text{得}\ a=3,b=5.$$

2、因为 B 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$，且 $\boldsymbol{A\sim B}$，故 A 的特征值也是 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5$，以下求 A 的特征向量.

解 $(\lambda_1\boldsymbol{E-A})\boldsymbol{X=O}$，得 A 对应于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ -1,\ 1)^T$，

解 $(\lambda_2\boldsymbol{E-A})\boldsymbol{X=O}$，得 A 对应于 $\lambda_2=2$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 0)^T$，

解 $(\lambda_3\boldsymbol{E-A})\boldsymbol{X=O}$，得 A 对应于 $\lambda_3=5$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\ 1,\ 1)^T$.

令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 P 可逆，且 $\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

11、设三阶方阵 A 的特征值为−1、2、3，给出三次多项式为 $f(x)=2x^3-5x+2$，

求矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 所有的特征值及其行列式 $|f(\boldsymbol{A})|$ 的值.

解：因三阶方阵 A 的特征值为三个不同的值−1、2、3，故存在可逆阵 P，使得 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P$，

那么 $f(A)=2A^3-5A+2E=P^{-1}\begin{pmatrix} f(-1) & & \\ & f(2) & \\ & & f(3) \end{pmatrix}P=P^{-1}\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 8 & \\ & & 41 \end{pmatrix}P$.

故矩阵 f（A）所有的特征值为 $5,8,41$，

行列式 $\left|f(A)\right|=\left|P^{-1}\right|\begin{vmatrix} 5 & & \\ & 8 & \\ & & 41 \end{vmatrix}\left|P\right|=1640$.

七、二次型及其标准形

1、求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩。

解： $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow r(f)=2$$

2、判定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 的正定性。

解： f 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，顺序主子式为 $a_{11}=1>0,\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0,\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=1>0$ 故 f 为正定二次型。

3、已知实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2zx$，

（1）用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵；

（2）求 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值.

解：（1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 其特征多项式为

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$ 由 $\left|A-\lambda E\right|$═0 得 A 的特征值

$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$。

当 $\lambda_1=1,$ 时，解方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=0$， 可得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，可得基础解系 $\boldsymbol{\xi_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=4$ 时，解方程组 $(A-4E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，可得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，即为所求之正交阵。

且在正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 之下，原二次型 f 化为标准形 $f=x'^2+2y'^2+4z'^2$。

（2）注意到，正交变换不改变向量的长度，故 $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow x'^2+y'^2+z'^2=1$，

于是 $\max f(x,y,z)=\max f(x',y'z')=\max(x'^2+2y'^2+4z'^2)\le 4\max(x'^2+y'^2+z'^2)=4$

另一方面，取 $(x',y'z')^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 f 在此点的值为 4，于是，f 在单位球面上的最大值是 4。类似地，f 在单位球面上的最小值是 1，如取 $(x',y'z')^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$。

4、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

(1). 写出二次型 f 的矩阵 A；

(2). 求 A 的全部特征值与特征向量；

（3）求一个正交变换 $x=Py$，把二次型 f 化为标准形；

（4）在 $\|x\|=1$ 的条件下，求二次型 f 的最大值和最小值。

(5)判定二次型 $\boldsymbol{f}$ 是否正定。

解：（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$；

（2）由 $\boldsymbol{f(\lambda)}=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+2)=0,$ 得 $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=1,\ \ \lambda_3=-2,}$

对 $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=1,}$ 解线性方程组 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{o}\Rightarrow \boldsymbol{x_1-x_2-x_3=0,}$

基础解系为：$\boldsymbol{\xi_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}}$，其全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2 \quad (k_1,k_2$ 不全为零)；对 $\boldsymbol{\lambda_3=-2,}$

解线性方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{o}\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x_1+x_2+x_3=0} \\ \boldsymbol{x_1-x_2+2x_3=0} \end{cases}$，基础解系为：$\boldsymbol{\xi_3=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}}$，其全部特征向量为 $k_3\xi_3 \quad (k_3\neq 0)$；

（3）正交规范化得：$\boldsymbol{\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ \ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)}$；$\boldsymbol{\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}}$，则所求正交变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \mathbf{0} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$，变换之下的标准形为：$\boldsymbol{f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2}$；

（4） $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$　　由$\|x\|=\|y\|=1, f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_3^2=1-3y_3^2$

$\Rightarrow -2\le 1-3y_3^2\le 1$又$0\le y_3^2\le 1$即$f$的最大值为1，最小值为$-2$，比如令$y=(0,0,1)^T$，有$\min f=-2$，令$y=(1,0,0)^T$，有$\max f=1$，

（5）二次型$\boldsymbol{f}$不正定。

5、设二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，试求该二次型的矩阵，并指出$a$取何值时$f$正定？

解：$A=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{\lambda} & -1\\ \boldsymbol{\lambda} & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$因为$A$的顺序主子式为：

$$|1|=1,\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\lambda} & 4\end{vmatrix}=(2+\boldsymbol{\lambda})(2-\boldsymbol{\lambda}),\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{\lambda} & -1\\ \boldsymbol{\lambda} & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-4(\boldsymbol{\lambda}-1)(\boldsymbol{\lambda}+1)$$

而f正定的充要条件是A所有的顺序主子式都大于零，即$\begin{cases}(2-\boldsymbol{\lambda})(2+\boldsymbol{\lambda})>0\\ -4(\boldsymbol{\lambda}-1)(\boldsymbol{\lambda}+1)>0\end{cases}$

解不等式组得：$-2<\boldsymbol{\lambda}<1$，故当$-2<\boldsymbol{\lambda}<1$时$f$为正定二次型。

6、设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$，（1）求出二次型$f$的矩阵$A$的全部特征值；（2）求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$成为对角阵；（3）计算$|A^m|$（$m$是正整数）

解：1）$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}, |\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$所以$A$的全部特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$

对应$\lambda_1=-1$的特征向量为：$a_1=(1,1,1)^T$，对应$\lambda_{2,3}=2$的特征向量为$a_2=(-1,1,0)^T, a_3=(-1,0,1)^T$

2）令$P=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，即为所求可逆阵，此时$P^{-1}AP=diag(-1,2,2)$

3）$|A^m|=|P\Lambda^m P^{-1}|=(-1)^m 4^m$

7、设A是二阶实对称矩阵，I是二阶单位矩阵，已知齐次线性方程组$(2I-A)x=0$与$(2I+A)x=0$的基础解系都只有一个解向量，分别为$(1,1)^T$与$(1,-1)^T$，1）求矩阵A；2）写出二次型x^TAx的一个标准形，并指出二次曲线$x^TAx=4$的形状。

解：1）由题设A的特征值为$2,-2$对应的特征向量分别为：$(1,1)^T,(1,-1)^T$令$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$则有

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & \\ & -2\end{pmatrix}$从而$A=PAP^{-1}=\begin{pmatrix} & 2\\ 2 & \end{pmatrix}$

2）因A的特征值为$2,-2$，故二次型x^TAx可经正交变换$x=Qy$化为标准型$2y_1^2-2y_2^2$，相应二次曲线$x^TAx=4$化为$2y_1^2-2y_2^2=4$，其为双曲线。

8、已知正交变换$X=Py$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3+2\alpha x_1x_2$，化为$f=y_1^2+2y_3^2$。(1)．求$f$中的系数$\alpha,\beta$。(2)．求正交阵 P，使$B=P^{-1}AP$。

[提示与分析](1)．利用相似矩阵性质：$|A|=|B|$及$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$可求$\alpha,\beta$。(2)求 A 的特征向量从而求出 P。

解 (1)．利用相似矩阵的性质$|A|=|B|$，$|A|=-(\alpha-\beta)^2,|B|=0$，$|A|=|B|$，$\alpha=\beta$再由$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，

$$\alpha=\beta,\ |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & \alpha & 1\\ \alpha & 1-\lambda & \alpha\\ 1 & \alpha & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\left[\lambda^3-3\lambda^2+2(1-\alpha^2)\lambda\right]$$

$|B-\lambda E|=-\left(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda\right)$由$|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，比较系数得$\alpha=0=\beta$。

(2)．$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$A$的特征值为$0,+1,2$相应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$且是两两正交的，单位化后得

正交阵$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$。

9、设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$，其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

1）求a,b的值；

2）利用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解：1）二次型f的矩阵为$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$. 设其特征值为$\lambda_i\left(i=1,2,3\right)$. 则有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得$a=1,b=2$.

2）由$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，得$A$的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，解方程组$(2E-A)X=0$，得其基础解系$\xi_1=(2,0,1)^T,\xi_2=(0,1,0)^T$.

对于$\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组$(-3E-A)X=0$，得基础解系$\xi_3=(1,0,-2)^T$.

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3已是正交向量组，为得到规范正交向量组，只需将ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化，由此得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T.$$

令矩阵$Q=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.则$Q$为正交矩阵. 且在正交变换$X=QY$下，二次型的标准形为$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

10、已知二次型为 $f(x_1,x_2\ x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\quad(a>0)$.

且通过正交变换可化f为标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$。

1.求参数a； 2.写出该二次型的矩阵，并求它的秩；

3.写出化标准形所用的正交矩阵P； 4.证明该二次型正定.

解 1. $a=2$；

2.二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，秩$R(A)=3$；

3. 正交变换可化f为标准形$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$。且所用的正交矩阵为 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$；

4.证明：因为矩阵A的特征值皆大于零（$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$），所以该二次型正定.

11、设A为3阶实对称阵，满足条件$A^2+2A=0$且A的秩$R(A)=2$，

（1）求A的全部特征值； （2）求A的二次型的标准形；

（3）当k为何值时，$A+kE$为正定矩阵？

解：（1）设λ是A的特征值，则λ必满足 $\lambda^2+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-2$或$\lambda=0$。

即A的特征值只可能是-2和0。

（或由$A(A+2E)=0$.两边取行列式得：$|A||A+2E|=0\Rightarrow|A+2E|=0$或$|A|=0$

由$|A+2E|=0$知-2是A的特征值；由$|A|=0$知0是A的特征值。从而，A的特征值只可能是-2和0,）

又因为A为实对称阵，故A可经正交变换化为对角阵Λ，而$R(A)=2$，故$R(\Lambda)=2$。于是Λ的对角元素中恰有两个-2，一个0。由此知A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$。

（2） A的二次型的一个标准形为 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2}$

（3）易知$A+kE$也对称，由(1)知A的特征值为-2，-2，0$\Rightarrow A+kE$的特征值为$-2+k,-2+k,k$，由此可得，当$k>2$时，$A+kE$的特征值全为正；即$A+kE$为正定矩阵。

（或因A为实对称阵，故必正交相似于对角阵，即存在正交阵Q，使$Q^{-1}AQ=\Lambda=diag(-2,-2,0)\Rightarrow$ $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}\Rightarrow A+kE=Q(\Lambda+kE)Q^{-1}=Q(\Lambda+kE)Q^{\mathrm{T}}\Rightarrow A+kE$与$\Lambda+kE$合同$\Rightarrow$二者的二次型合同。当$k>2$时，$A+kE$的二次型标准形系数全为正，从而它是正定二次型，即$A+kE$正定。）

12、设二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，$a,b,c$为常数，则

(1). 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的具体形式；

(2). 求A的全部特征值与特征向量；

(3). 求一个正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，把二次型$\boldsymbol{f}$化为标准形；

(4). 在$\|\boldsymbol{x}\|=\mathbf{1}$的条件下，求二次型$\boldsymbol{f}$的最大值和最小值。

解：（1）由于矩阵$\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$为对称阵，可求得$a=1,b=2,c=5$，则二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，所以二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1+5x_2+3x_3-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3;$$

（2）首先由特征多项式$|A-\lambda E|=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$可求得特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9.$

然后求得相应的特征向量为$p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

（3）再将其单位化，得单位正交向量组

$$e_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, e2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.,$$

故有正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，求得二次型的标准形为$f=4y_2^2+9y_3^2..$

（4）由正交变换保持向量的长度不变，则$\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{Y}\|=\mathbf{1}$，并注意到$\mathbf{0}\le\mathbf{4}\boldsymbol{y}_2^2+\mathbf{9}\boldsymbol{y}_3^2\le\mathbf{9}$，则$\boldsymbol{f}$的最大值为 9，最小值为 0。

八、习题

1、设三阶实数矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：1） $A_{ij}=a_{ij}\ (i,j=1,2,3)\ A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式；2） $a_{33}=-1$ 。试求 1） $|A|=|a_{ij}|_{3\times3}$ ；2）方程组 $Ax=b$ 的解。其中 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

解：1）由 $|A|=\sum_{i=1}^{3}a_{3j}A_{3j}=a_{31}^2+a_{32}^2+1\neq0$，故 A 可逆，于是 $\frac{1}{|A|}=|A^{-1}|=|\frac{A^*}{|A|}|=\frac{|A^*|}{|A|^3}=\frac{|A^T|}{|A|^3}=\frac{|A|}{|A|^3}=\frac{1}{|A|^2}$

从而 $|A|=1$

2）有 1）得 $a_{31}=a_{32}=0$ ，又 A^{-1} 存在，故 $x=A^{-1}b=A^{*}b=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&0\\A_{12}&A_{22}&0\\A_{13}&A_{23}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

2、设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶方阵 A 的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其对应的三个线性无关的特征向量，试求 $A-\lambda_1 I$ 的全部特征值及其特征向量。

解：由题设知 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ i=1,2,3$ ，而 $(A-\lambda_1 I)\alpha_i=A\alpha_i-\lambda_1\alpha_i=(\lambda_i-\lambda_1)\alpha_i$ ，故 $A-\lambda_1 I$ 的全部特征值为 $0,\lambda_2-\lambda_1,\lambda_3-\lambda_1$ 及其特征向量为： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

3、 已知三阶矩阵 A 的特征值分别为： $1,-1,4$ ，求 $|A^*+I|$

解：由 $|A|=1\times(-1)\times4=-4$ ，又 A^* 的特征值为： $\frac{|A|}{\lambda_i}\ i=1,2,3$ ，所以 A^*+I 特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_i}+1\ i=1,2,3$

即： $-4,4,0$ ， 故 $|A^*+I|=0\times(-4)\times4=0$

4、 若可逆方阵 A 的各行元素之和为 a ，问 A^{-1} 的各行元素之和为多少？证明你的结论。

解： A^{-1} 的各行元素之和为 $\frac{1}{a}$

因为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 且 A 可逆，所以 $a\neq0$ ，故有 $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-1}\\a^{-1}\\\vdots\\a^{-1}\end{pmatrix}$

5、设 A,B 都是 n 阶正定矩阵，证明 A 一定能合同于 B

证明：由 A,B 都是 n 阶正定矩阵，故存在可逆矩阵 P,Q 使得： $P^TAP=I=Q^TBQ$

即令 $C=PQ^{-1}\Rightarrow C^TAC=B$ 所以 A 一定能合同于 B