武汉大学 2017-2018 学年第二学期
《复变函数与积分变换》期末考试标准答案 (A 卷)

一. (**本题满分 45 分，每小题 5 分**) 解答下列各题，写清楚理由.

1. 已知 $(1-i)^n-(1+i)^n=0$, 求整数 n 的值.

解： 计算得 $2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4})-2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=0$, 从而 $\sin\frac{n\pi}{4}=0$. 因此， $n=4k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

2. 问 $|z-2|+|z+2|<6$ 确定什么样的区域？是单连通域还是多连通域？

解： $|z-2|+|z+2|<6$ 确定了椭圆 $|z-2|+|z+2|=6$ 所围的内部. 它是单连通域.

3. 求方程 $\sin z=0$ 的全部解.

[解] $\sin z=0$ 等价于 $e^{2iz}=1$. 从而， $2iz=\mathrm{L}n1=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$. 因此， $z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. 求 $i^{\sqrt{2}}$ 的值，并指出其主值.

解： $i^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}i}=e^{(2k+\frac{1}{2})\sqrt{2}\pi i}$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 其主值为 $e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi i}$.

5. 求 $I=\displaystyle\int_0^i(z-i)e^{-z}dz$ 的值.

解： $I=-\int_0^i(z-i)de^{-z}=1-\cos1+i(\sin1-1)$.

6. 设 $f(z)=\dfrac{2z}{1+z^2}$. 求 f 在无穷远处留数.

解：

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0\right)=-\mathrm{Res}\left(\frac{2}{z(1+z^2)},0\right)=-2.$$

7. 设 C 是任何不通过原点的光滑的简单封闭曲线，试计算 $I=\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$.

解： 当 $z=0$ 在 C 外时，根据柯西 - 古萨定理， $I=0$; 当 $z=0$ 在 C 内时，利用高阶导数的柯西积分公式得 $I=0$. 总之， $I=0$.

8. 求 $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ 的 Laplace 逆变换.

解： 注意到 $F(s)=\dfrac{3}{5}\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s+3}$, 则 $\mathcal{L}^{-1}[F]=\dfrac{3}{5}e^{2t}+\dfrac{2}{5}e^{-3t}$.

9. 求 $f(t)=t^3e^{3t}$ 的 Laplace 变换式.

解： 利用 $\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$ 及 Laplace 变换像函数的微分性质,

$$\mathcal{L}[f]=(-1)^3(\frac{1}{s-3})'''=\frac{6}{(s-3)^4}.$$

二. (**本题满分 18 分，每小题 6 分**) 计算下列积分:

1. 计算积分 $I=\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\oint_{C_1+C_2}\frac{\cos z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z$, $C_1:|z|=1$ 取顺时针方向， $C_2:|z|=3$ 取逆时针方向，其中 $|\alpha|\neq1,3$.

解: 当 $|\alpha|<1$ 或 $|\alpha|>3$ 时，利用柯西定理， $I=0$; 当 $1<|\alpha|<3$ 在 L 外部时，利用高阶导数公式,

$$I=\frac{2!}{2\pi i}\oint_{C_1+C_2}\frac{\cos z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z=-\cos\alpha.$$

2. $J=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L\frac{z^2e^{\frac{1}{z}}}{2+z^2}\mathrm{d}z$, 其中 L 为正向圆周 $|z|=5$.

解: 记被积函数为 f, 则

$$J=-\mathrm{Res}(f,\infty)=\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right]=\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(2z^2+1)},0\right)=1.$$

3. 利用留数计算 $K=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x$.

解: 令 $f(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$, 则

$$K=2\pi i\left[(f,i)+(f,3i)\right]=2\pi i\left[\frac{1-i}{16i}+\frac{7+3i}{48i}\right]=\frac{5}{12}\pi.$$

三. (**本题满分 10 分**) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ 分别在 $0<|z|<1$ 和 $0<|z-1|<1$ 展开成洛朗级数. 进一步，是否可以把 f 在 $0<|z-3|<3$ 展开成洛朗级数？为什么？

解: 当 $0<|z|<1$ 时， $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 两边求导得 $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$, $|z|<1$. 因此,

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n,\ 0<|z|<1.$$

当 $0<|z_1|<1$ 时， $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, 从而

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1.$$

最后，由于 f 在 $0<|z-3|<3$ 有一奇点 $z=1$, 那么 f 在 $0<|z-3|<3$ 不能展开成洛朗级数.

四. (**本题满分 7 分**) 求 k 值使得 $u(x,y)=x^3+kx^2y-3xy^2-2y^3$ 为调和函数，再求 $v(x,y)$ 使得 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析且满足 $f(0)=0$.

解: $u_x=3x^2+2kxy-3y^2,\ u_{xx}=6x+2ky,\ u_y=kx^2-6xy-6y^2,\ u_{yy}=-6x-12y$. 于是，使得 $u(x,y)=x^3+kx^2y-3xy^2-2y^3$ 为调和函数，充要条件为 $\Delta u=(6x+2ky)+(-6x-12y)=0$. 因此， $k=6$.

另一方面， $f'=u_x-iu_y=3(1-2i)z^2$, 于是 $f(z)=\int 3(1-2i)z^2\mathrm{d}z=(1-2i)z^3+C$. 因为 $f(0)=0$, 所以 $C=0$. 于是 $f(z)=(1-2i)z^3$, 这蕴含 $v(x,y)=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3$.

五. (**本题满分 10 分**) 利用 Laplace 变换解常微分解方程:

$$y''-y=4\sin t+5\cos 2t,\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2.$$

解　两边取 Laplace 变换，并记 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, 得

$$s^2Y(s)+s+2-Y(s)=\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+4}.$$

解得

$$Y(s)=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}.$$

再利用 Laplace 逆变换得

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(s))=-2\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1})-\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4})=-2\sin t-\cos 2t.$$

六.　(**本题满分 10 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 4 分**) 解答下列各题：

1. 如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且 $\arg f(z)$ 在区域 D 内是一个常数，证明： $f(z)$ 是常数函数.

证明： $\arg f(z)=C$ 蕴含 $\frac{v}{u}=\tan C=C_1$. 于是 $v=C_1u$, 进而 $v_x=C_1u_x$, $v_y=C_1u_y$. 又成立 C-R 方程 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. 联立以上四式可得 $u_x=v_y=u_y=v_x=0$, 这蕴含 u,v 是实常数，从而 $f(z)$ 是常数函数.

2. 利用卷积定理证明：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a}(at\cos at+\sin at).$$

证明：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at*\cos at=\int_0^t\cos a\tau\cos a(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

计算得

$$\int_0^t\cos a\tau\cos a(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t\cos at+\frac{1}{2a}\sin at.$$

联合上两式知结论成立.