武汉大学 2023 – 2024 学年第一学期
高等数学 A1 期末试题 (A 卷)

注意事项:

1. 本试卷共 14 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.
2. 请将答案全部写在**考试答题纸**上, 写在其他位置无效.

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\mathrm{e}^x-\cos\sqrt{x}\right)\ln(1+\sin^3 x)}$.

3. 求不定积分 $I=\displaystyle\int x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ b, & x=0.\end{cases}$$

问 a, b 为何值时, 函数 $f(x)$ 连续?

5. 函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>-1,\quad x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$$

求导数 $f'(0)$.

6. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}}\min\left\{\frac{1}{|x|},\ x^2\right\}\mathrm{d}x$.

7. 求方程 $\begin{cases}x=t+\cos 2t,\\ y=t+\sin 2t,\end{cases}$ 所表示的曲线在 $t=0$ 时的切线方程.

8. 求曲线的弧长, 已知其参数方程为

$$x=\mathrm{e}^t\cos t,\quad y=\mathrm{e}^t\sin t,\quad (0\leqslant t\leqslant 2).$$

9. 判别反常积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+8}$ 的敛散性. 若收敛, 求其值.

10. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围的区域记为 S. 求区域 S 绕直线 $y=2$ 旋转一周而成的立体体积.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分)

11. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, 且 $f'(x)\leqslant 0$, 证明

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在区间 (a,b) 递减.

12. (7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^x \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

13. (10 分) 求微分方程 $y''-7y'+12y=x\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

14. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $b>a>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$af(b)-bf(a)=(b-a)\big[\xi f'(\xi)-f(\xi)\big].$$

2023–2024 学年第一学期《高等数学 A1》参考答案 · 卷 (A)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解: 1^{∞} 型.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{5}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^{x+1}+3^{x+1}-5}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}-5}{5}\cdot\frac{1}{x}\right\}\\ &= \exp\left\{\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x+1}-2}{x}+\frac{3^{x+1}-3}{x}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{\frac{1}{5}(2\cdot\ln 2+3\cdot\ln 3)\right\} = \sqrt[5]{108}.\end{aligned}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos\sqrt{x}-\mathrm{e}^x\right)\ln(1+\sin^3 x)}$.

解: 用泰勒公式. 由

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4),$$

即分子

$$\tfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2} = \tfrac{x^4}{8}+o(x^4),$$

又 $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, 故 $\cos\sqrt{x} = 1-\frac{x}{2}+o(x)$, 以及 $\mathrm{e}^x = 1+x+o(x)$, 知

$$\mathrm{e}^x-\cos\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}x+o(x),$$

又 $x\to 0$ 时, $\ln(1+\sin^3 x)\sim\sin^3 x\sim x^3$, 故分母

$$\left(\cos\sqrt{x}-\mathrm{e}^x\right)\ln(1+\sin^3 x)\sim\tfrac{3}{2}x^4.$$

得原式极限为 $\frac{1}{12}$.

3. 求 $I = \displaystyle\int x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解: 注意到 $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 分部积分法得

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}(x^2) = \frac{x^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C\\ &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

4. 设函数

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{a+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ b, & x=0.\end{cases}$$

问 a, b 为何值时, 函数 $f(x)$ 连续?

解: 注意到

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)&=a-1,\\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)&=0+1=1.\end{aligned}$$

故 $a=2$, $b=1$ 时, 函数 $f(x)$ 连续.

5. 函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>-1,\quad x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$$

求导数 $f'(0)$.

解: 即求 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$, 为 $\frac{0}{0}$ 型, 用洛必达法则.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'}{1}\\ &=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'\right]\\ &=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}\\ &=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}\\ &=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.\end{aligned}$$

故 $f'(0)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

6. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x$.

解: 因 $\min\left\{\dfrac{1}{|x|},x^2\right\}=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{|x|}, & |x|>1,\end{cases}$ 且是偶函数, 故

$$原式=2\int_0^{\mathrm{e}}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x+2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}.$$

7. 求方程 $\begin{cases}x=t+\cos 2t,\\ y=t+\sin 2t,\end{cases}$ 所表示的曲线在 $t=0$ 时的切线方程.

解: 当 $t=0$ 时 $x=1,y=0$, 切点坐标是 $(1,0)$,

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(t+\sin 2t)'_t}{(t+\cos 2t)'_t}=\frac{1+2\cos 2t}{1-2\sin 2t},$$

$$y'|_{x=1}=\left.\frac{1+2\cos 2t}{1-2\sin 2t}\right|_{t=0}=3,$$

所求切线方程是 $y=3(x-1)$, 即 $3x-y=3$.

8. 求曲线的弧长, 已知其参数方程为

$$x = \mathrm{e}^t \cos t, \quad y = \mathrm{e}^t \sin t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 2).$$

解: 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t).$$

从而

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{2t}(\sin t + \cos t)^2 \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{2t},\end{aligned}$$

故所求弧长为

$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$$

9. 判别反常积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 8}$ 的敛散性. 若收敛, 求其值.

解: 函数 $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$ 在积分区间有瑕点 $x = 4$.

分别考察 $I_1 = \displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 8}$, $I_2 = \displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 8}$, $I_3 = \displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 8}$ 的敛散性.

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|x-2| - \ln|x-4|\Big]_3^4 = -\infty,\end{aligned}$$

积分 I_1 发散, 故所给反常积分发散.

10. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 所围的区域记为 S. 求区域 S 绕直线 $y = 2$ 旋转一周而成的立体体积.

解: 截面法. $y = x^2$ 与 $y = 1$ 相交于 $(-1, 1)$, $(1, 1)$. 任取 $x \in [-1, 1]$, 区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 对应的体积元素为

$$\mathrm{d}V = \left(\pi\left(2 - x^2\right)^2 - \pi(1)^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(3 - 4x^2 + x^4\right)\mathrm{d}x$$

故体积为

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-1}^1 \left(3 - 4x^2 + x^4\right)\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 \left(3 - 4x^2 + x^4\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left(3x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{56\pi}{15}.\end{aligned}$$

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f'(x) \leqslant 0$, 证明

$$F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在区间 (a, b) 递减.

证: 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, b]$ 可导, 且

$$F'(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\left(f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right).$$

由积分中值定理有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(x-a), \quad a \leqslant \xi \leqslant x.$$

从而

$$F'(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\Big(f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)\Big) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}.$$

又 $f'(x) \leqslant 0$, 故 $f(x)$ 递减, 则 $f(x) - f(\xi) \leqslant 0$, 故 $F'(x) \leqslant 0$, 得证 $F(x)$ 在 (a,b) 递减.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x) > 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^x \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

解: 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最小值 m 和最大值 M. 又 $f(x) > 0$, 则 $M > 0$, $m > 0$, 而 e^x 非负, 则有

$$\sqrt[n]{m}\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^x \sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt[n]{M}\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^x \sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1.$$

13. 求微分方程 $y'' - 7y' + 12y = x\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, 有两个实根 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. 故对应齐次方程的通解为

$$Y = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{4x}.$$

由于 $\lambda_1 = 3$ 是特征方程的单根, 故设原方程有特解为

$$y^* = x(b_0x + b_1)\mathrm{e}^{3x},$$

代入原方程得

$$-2b_0x + 2b_0 - b_1 = x,$$

故 $-2b_0 = 1$, $2b_0 - b_1 = 0$, 得 $b_0 = -\dfrac{1}{2}$, $b_1 = -1$. 即特解为

$$y^* = x(-\frac{x}{2} - 1)\mathrm{e}^{3x} = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{3x}.$$

原方程的通解为

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{3x}.$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $b > a > 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使

$$af(b) - bf(a) = (b-a)\left[\xi f'(\xi) - f(\xi)\right].$$

解: 令 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

注意到 $b > a > 0$, 由题设知, $F(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且在 (a,b) 上 $g'(x) \neq 0$.

由柯西中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{\frac{1}{\xi^2}} = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

即

$$af(b) - bf(a) = (b-a)\big[\xi f'(\xi) - f(\xi)\big].$$