一、

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(x-k)$

二、

解 $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，向量组的秩为 3,　　　7 分

极大线性无关组为α_1、α_2、α_3　　$\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3$　　$\alpha_5 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$　　　10 分

三、

解 对 A 作初等变换，由$r(A)=2$，可求得$a=1$，再由$AX+E=A^2+X$，得

$$(A-E)X=(A-E)(A+E)$$

由于$|A-E|\neq 0$，因此 $A-E$可逆 ，且$X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$。

四、

解: 由于系数行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = b(1-a)$，所以当$b\neq 0$且$a\neq 1$时，由克莱姆法则可知方程组有解。

当$b=0$时，增广矩阵为$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，方程组无解。

当$a=1$时，增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{bmatrix}$ 故当$a=1, b=\frac{1}{2}$时方程组有解，

当$a=1, b\neq\frac{1}{2}$时方程组无解。