理论力学第 11 次作业

4.1

设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 为三个 n 阶的方阵，矩阵元素分别为

$$a_{ij},b_{jk},c_{kl},\ i,j,k,l=1,2,\cdots,n$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{AB})_{ik}c_{kl}=\left(a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}=a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=a_{ij}(\boldsymbol{BC})_{jl}=a_{ij}\left(b_{jk}c_{kl}\right)=a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

所以矩阵乘法是结合的

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

设 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$ 是同阶的正交矩阵，则有

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{D}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{1}$$

而

$$\widetilde{\boldsymbol{DF}}\boldsymbol{DF}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{DF}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\left(\widetilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{F}=\widetilde{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{1}$$

所以两个正交矩阵的乘积也是正交的。

4.2

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{AB}}\right)_{ij}=(\boldsymbol{AB})_{ji}=a_{jk}b_{ki}$$

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\right)_{ij}=b'_{ik}a'_{kj}=a_{jk}b_{ki}$$

所以

$$\widetilde{\boldsymbol{AB}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{A}}$$

$$((\boldsymbol{AB})^H)_{ij}=\overline{(\boldsymbol{AB})_{ji}}=\overline{a_{jk}b_{ki}}=\overline{a_{jk}}\overline{b_{ki}}$$

$$(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H)_{ij}=b'_{ik}a'_{kj}=\overline{a_{jk}}\overline{b_{ki}}$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^H=\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H$$

4.4

(a)

$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶反对称矩阵，所以

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} =- \boldsymbol{A}$$

所以

$$(\widetilde{\mathbf{1}+\boldsymbol{A}}) = (\mathbf{1}\ - \boldsymbol{A})$$

$$|\mathbf{1}-\boldsymbol{A}| = |\mathbf{1}+\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}$$
$$= 1 + a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 > 0$$

所以 $\mathbf{1} \pm \boldsymbol{A}$ 是非奇异的

(b)

$$\boldsymbol{B} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = (\mathbf{1}+\widetilde{\boldsymbol{A})(\mathbf{1}}-\boldsymbol{A})^{-1} = (\mathbf{1}\widetilde{-\boldsymbol{A}})^{-1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{A}) = (\mathbf{1}+\boldsymbol{A})^{-1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})$$

所以

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B} = (\widetilde{\mathbf{1}-\boldsymbol{A}})^{-1}(\widetilde{\mathbf{1}+\boldsymbol{A}})(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})^{-1}$$
$$= (\mathbf{1}\widetilde{-\boldsymbol{A}})^{-1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})^{-1}$$
$$= (\mathbf{1}+\boldsymbol{A})^{-1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

两边同时左乘$(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})$，右乘$(\mathbf{1}\ -\boldsymbol{A})$，得

$$(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}(\mathbf{1}+\boldsymbol{A}) = (\mathbf{1}-\boldsymbol{A})(\mathbf{1}+\boldsymbol{A}) = 1 - \boldsymbol{A}^2 = (\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})$$

两边同时左乘$(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})^{-1}$，右乘$(\mathbf{1}\ -\boldsymbol{A})^{-1}$，得

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{A})^{-1}(\mathbf{1}+\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})(\mathbf{1}-\boldsymbol{A})^{-1} = \mathbf{1}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵。

4.6

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{XBC}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{BC})^{-1},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XBC}=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{BC})^{-1}\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{BCD}$$

4.8

(a)

令

$$\begin{cases}e_0=0\\ e_1=0\\ e_2=0\end{cases}$$

则有

$$e_3^2=-1$$

但是e_i应该都是实数，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能转化为逆变换 $\boldsymbol{S}$ 的矩阵形式。

(b)

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2+e_0e_3) & 2(e_1e_3-e_0e_2)\\ 2(e_1e_2-e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3+e_0e_1)\\ 2(e_1e_3+e_0e_2) & 2(e_2e_3-e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) & 2(e_1e_3+e_0e_2)\\ 2(e_1e_2+e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3-e_0e_1)\\ 2(e_1e_3-e_0e_2) & 2(e_2e_3+e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2\end{bmatrix}$$

对角线上的元素为 1，其他元素为 0，所以

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{1}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交的。