

# 武汉大学计算机学院

## 2015-2016 学年度第二学期期末考试

### 《组合数学》(A 卷)

1. (20 分, 每小题 5 分)

- (a) 在 1000 到 9999 之间有多少个各位数字不同的奇数?
- (b) 不含数字 2 和 7, 各位数字不同且大于 5400 的 4 位数有多少个?
- (c) 由  $a, b, c, d, e$  和 1, 2, 3, 4, 5 可以构成多少个不同的排列, 其中任何两个数字都不相邻?
- (d) 将  $2n$  个不同的球放入  $n$  个不同的盒子, 每盒两个球, 有多少种不同的放法?

2. (10 分) 解下列递推关系

$$\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 6n - 5, n \geq 2 \\ a_0 = 5, a_1 = 13 \end{cases}$$

3. (25 分)

(a) 求由  $a, b, c$  这 3 个字母所组成的 18-组合的个数, 其中在每个 18-组合中,  $a, b$  的个数至少为 3, 至多为 10,  $c$  的个数至少为 2. (10 分)

(b) 由数字 1, 2, 3, 4 可组成多少个含奇数个 1, 偶数个 2 且至少含 1 个 3 的  $n$  位数? (10 分)

(c) 求方程  $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2, x_3 \geq 0$  整数解的个数. (5 分)

4. (10 分) 从 1 到 2000 的整数中, 能被 2 或 3 整除但不能被 12 整除的数有多少个?

5. (10 分, 每小题 5 分)

(a) 用红、蓝两种颜色对一个  $3 \times 9$  的棋盘中的方格随意染色, 证明: 必有两列方格, 它们的着色是一样的。

(b) 证明  $R(a, 2) = a$ 。

6. (15 分) 用三颗红色、两颗蓝色和两颗黄色的珠子能做成多少种项链?

7. (10 分) 证明

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(b) \quad \binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + 3\binom{n}{3}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2 = n\binom{2n-1}{n-1} \quad (7 \text{ 分})$$