一、计算下列各题

1．已知 $f\left(\frac{1}{z+i}\right)=\overline{z}$，则求极限 $\lim\limits_{z\to i} f(z)$。$\lim\limits_{z\to i} f(z)=2i$

2．解方程: $(1+z)^n=(1-z)^n$。

解：因 $1-z\neq 0$，故 $(\frac{1+z}{1-z})^n=1$ $\quad \frac{1+z}{1-z}=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $\quad (k=0,1,\cdots,n-1)$

故 $z=\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}=\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}}=itg\frac{k\pi}{n}$ $\quad (k=0,1,\cdots,n-1)$

二、设函数 $f(z)=x^2-y^2+ixy$，试确定 $f(z)$ 在何处可导，何处解析，并求可导点处的导数。

若 $f(z)=x^2-y^2+iv(x,y)$，求 $v(x,y)$，使 $f(z)$ 为解析函数。

解：在 $z=(0,0)$ 处可导，处处不解析。由 $f'(z)\big|_{(0,0)}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}=(2x+iy)\big|_{(0,0)}=0$

2） $f'(z)=\frac{\partial f(z)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x+2iy=2z$

$f(z)=z^2+c \qquad v(x,y)=2ixy+c'$

三、计算积分 $\int_C |z||dz|$，若 C 为：（1）$|z|=2$，（2）$0\le \operatorname{Re} z\le 2, \operatorname{Im} z=0$。

解：（1）若 C 为：$|z|=2$，则 $z=2e^{i\theta}$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$，$|z|=2$ $\quad |dz|=2d\theta$

$\int_C |z||dz|=\int_0^{2\pi}4d\theta=8\pi$

（2）若 C 为：$0\le \operatorname{Re} z\le 2, \operatorname{Im} z=0$，则 $z=2x$ $\quad 0\le x\le 2$，$|z|=2$ $\quad |dz|=2dx$

$\int_C |z||dz|=\int_0^{2}4dx=8$

四、指出函数 $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 的奇点和类型；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数，并计算积分 $\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，其中 C 是正向圆周 $|z|=2$。

z=0 为本性奇点 z=1 为一阶极点。$\operatorname{Res}[f(z),1]=-e \qquad \operatorname{Res}[f(z),0]=1$

五、设 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 为定义在单值分支中的解析函数，若 $f(0)=0$。求：

1. $f(2i)$ 和 $f'(2)$。.

2. 函数 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 级数。

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{n}$ 的和函数。

解：因 $f(0)=Ln1=2k\pi i$ (k=0, ±1, …)，若 $f(0)=0$，则为 $k=0$ 的单值解析分支。

1. $f(2i)=\ln 5 \qquad f'(2)=\frac{4}{3}$

2. $f(z)=Ln(1-z^2)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2(n+1)}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}$

3. 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}=-Ln(1-z^2)$，令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n}=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos 2\theta)$$

六、留数定理计算积分和 Fourier 变换

1．若 $\varepsilon>0,\omega>0$，利用留数定理计算积分

$$I(\omega,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}e^{i\omega x}dx$$

并求 $\lim_{\varepsilon\to 0}I(\omega,\varepsilon)$。

2. 若 $I(\omega,\varepsilon)$ 是参变数函数 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ 的 Fourier 变换，比较 $\lim_{\varepsilon\to 0}I(\omega,\varepsilon)$ 和 $\delta(x)$ 函数的 Fourier 变换关系，可以把 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ 视为 δ 型序列函数，写出 $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ 和 $\delta(x)$ 的关系。

3. 计算函数 $f(x)=e^{-\varepsilon x}H(x)$ 的 Fourier 变换，其中 $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 为阶跃函数，并求 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\mathscr{F}[e^{-\varepsilon x}H(x)]\}$ 的值。

解：1. $I(\omega,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon e^{i\omega x}}{\varepsilon^2+x^2}dx=\pi e^{-\omega\alpha}$

$\lim_{\varepsilon\to 0}I(\omega,\varepsilon)=\pi$

2. $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}=\pi\,\delta(x)$。

3. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\{\mathscr{F}[e^{-\varepsilon x}H(x)]\}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{1}{\varepsilon+j\omega}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{\varepsilon-j\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}-\dfrac{j\omega}{\varepsilon^2+\omega^2})$

$=\pi\delta(\omega)-j\dfrac{1}{\omega}=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

七、利用 Laplace 变换求微分方程

将电阻 R，电感 L 和电容 C 串联到电源 $\varepsilon(t)$ 上，设电路中的电流为 $i(t)$，则有 $L\dfrac{di(t)}{dt}+i(t)R+\dfrac{q(t)}{C}=\varepsilon(t)$，因为 $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$，因此，

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=\varepsilon(t)$$

若初始条件 $q(0)=0,i(0)=q'(0)=0$，求回路中的电荷和电流。如果（1）$\varepsilon(t)=1$；（2）$\varepsilon(t)=\delta(t)$。

解：设 $\mathscr{L}[q(t)]=Q(p)$，对方程两边取 LT，得到

$$Lp^2Q(p)+RpQ(p)+\frac{Q(p)}{C}=\mathscr{L}[\varepsilon(t)]$$

整理得到，$Q(p)=\dfrac{1}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}}\mathscr{L}[\varepsilon(t)]=\dfrac{1}{L}\dfrac{1}{p^2+\dfrac{R}{L}p+\dfrac{1}{LC}}\mathscr{L}[\varepsilon(t)]$

$$=\frac{1}{L}\frac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\mathscr{L}[\varepsilon(t)]$$

令 $\omega^2=\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}$ 则 $\dfrac{1}{(p+\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\mathscr{L}[\dfrac{1}{\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t]$

$$Q(p)=\mathscr{L}[\frac{1}{\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t]\mathscr{L}[\varepsilon(t)]$$

故 $q(t)=\dfrac{1}{L\omega}(e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t)*\varepsilon(t)\ \ \mathscr{L}[\varepsilon(t)]$