武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试高等数学 A1（A 卷）解答

一、（10 分）求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$.

证 $s_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$

$s_n<\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$ $\quad\therefore\quad$ $s_n>\dfrac{1}{(2n)^2}+\dfrac{1}{(2n)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{1}{4n}$ 6 分

即有 $\dfrac{1}{4n}<s_n<\dfrac{1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]=0$ 4 分

二、（10 分）设 $y=2^{3x}\cdot\ln(2x)-\sqrt{1+x^2}$，求$y'$.

解 $y'=3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2\cdot\ln(2x)+\dfrac{2^{3x}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 10 分

三、（8 分）设 $\begin{cases}x=t^3+t\\ y=\dfrac{3}{4}t^4+t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t\end{cases}$ 且$t=t_0$时，$dy=2dx$，试求t_0.

解 $y'=3t^3+3t^2+t+1=(t+1)(3t^2+1)$ $\quad x'=3t^2+1$ 4 分

$\dfrac{dy}{dx}=t+1$ 从而 $t_0+1=2$ $\quad t_0=1$ 4 分

四、（8 分）求微分方程 $y''+9y=12\cos 3x$ 的通解。

解 特征方程$r^2+9=0$的根为：$r_{1,2}=\pm 3i$

对应的齐次方程的通解为 $y_C=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ 4 分

设特解为$y_p=x(A\cos 3x+B\sin 3x)$，代入方程得 $y_p=2x\sin 3x$

故所求通解为 $y=y_C+y_p=C_1\cos 3x+(C_2+2x)\sin 3x$ 4 分

（本题的特解也可以由观察法得到）

五、（8 分）验证极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{\sin x\cos x}{x}}{1-\dfrac{1}{x}\sin x\cos x}=1$ 4 分

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ 不存在

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 存在，不能用洛必达法则得出. 4 分

六、（8 分）求 $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b)$.

解　原式 $=\int_a^b \dfrac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$ 　　4 分

令　$x-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}\sin t$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\frac{b-a}{2}\cos t}\cdot\dfrac{b-a}{2}\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt=\pi$ 　　4 分

七、(8 分) 试证：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ ，并由此计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$。

证明　令　$a+b-x=t$，右 $=\int_b^a f(t)(-dt)=\int_a^b f(x)dx=$ 左 　　4 分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)\left[\pi-2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)\right]}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{x(\pi-2x)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{x(\pi-2x)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x})dx=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln 2}{\pi}$$ 　　4 分

八、(8 分) 设 $f(x)=[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x), g(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\varphi'(0)=1$，证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x^3}}{2x}=\dfrac{1}{2}$ 　　4 分

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{g(x)}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\cdot\dfrac{\ln(2x+1)}{x}=2\cdot\varphi'(0)\cdot 2=4$

$\therefore f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小$(x\to 0)$ 　　4 分

九、(8 分) 判断函数　$y=\dfrac{x}{1+x}$的单调性,并证明$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

解　函数$y=\dfrac{x}{1+x}$的定义域$(-\infty,-1)$及$(-1,+\infty)$

$y'=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ 　　故在$(-\infty,\ -1)$及$(-1,\ +\infty)$内$y=\dfrac{x}{1+x}$单调增 　4 分

令显然 $x_1=|a+b|, x_2=|a|+|b|$ 　$x_1\le x_2$

$\therefore$ 　$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$ 　　4 分

十、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $f(\frac{\pi}{2})=0$，证明 存在一点

$\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$，使 $f(\xi)+\tan\xi\cdot f'(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=f(x)\sin x$， 4 分

则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，又因 $f(\frac{\pi}{2})=0$，则 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$，即 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上满足罗尔定理的条件，则至少存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $F'(\xi)=0$，而 $F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，

即 $f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$ $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\cos\xi\neq 0$

即 $f(\xi)+tg\xi\cdot f'(\xi)=0$ 4 分

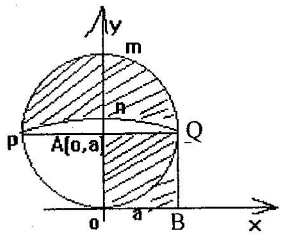
十一、（8 分）位于 x 轴上区间 $[0,l]$ 上长为 l，密度为 $\rho(x)$ 的杆绕 $x=a$ 旋转的转动惯量为 $I=\int_0^l (x-a)^2\rho(x)dx$，试求这个转动惯量为最小时的 a 值。

解 由 $\frac{dI}{da}=-2\int_0^l (x-a)\rho(x)dx=0.$ 4 分

$$\int_0^l x\rho(x)dx=a\int_0^l \rho(x)dx \quad a=\frac{\int_0^l x\rho(x)dx}{\int_0^l \rho(x)dx}=\frac{M_y}{M}=\bar{x}$$

而 $\frac{d^2I}{da^2}=2\int_0^l \rho(x)dx=2M>0$，故 $a=\bar{x}$ 时这个转动惯量取得极小值。 4 分

十二、（8 分）如图所示，设以 $(0,a)$ 为中心的 a 为半径的圆弧 PmQ 与以 $(0,0)$ 为中心的 $\sqrt{2}a$ 为半径的圆弧 pnQ 所围成的平面图形的面积为 S，试证明 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。



证明 设极点 0, $\overline{OA}=a$ 圆 $r=2a\sin\theta$，圆 $r=\sqrt{2}a$

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}4a^2\sin^2\theta\, d\theta-\frac{\pi}{4}2a^2=a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)d\theta-\frac{\pi}{2}a^2 \qquad 4\text{ 分}$$

$$=a^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1-1)\right]-\frac{\pi}{2}a^2=a^2$$

$S_{正方形}=a^2$ 所以 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。 4 分