练习 3．3

1. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,4,-1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,6,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-6,3,4)$．求该向量组的一个极大线性无关组，并用它来表示其余向量．

解 对下面矩阵进行初等行变换，有：

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{\substack{r_2+2r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\leftrightarrow r_4\\r_4+2r_3}]{\substack{r_4-3r_3\\r_3\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_3\div(-3)}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&0&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2\div 3}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0&\frac{16}{9}\\0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\frac{16}{9}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_4$．

2. 已知向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 具有相同秩，并且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a，b 之值．

解 **方法 1：** 先求 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，将矩阵作初等行变换，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$ 故 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&3&1\\0&a-3b&0\end{pmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，所以 $a=3b$．

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$．将 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & \vdots & 3b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-10r_2]{r_2\div(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{1}{6}(2b-1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{5}{3}-\frac{b}{3} \end{pmatrix},$$

由 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，得 $\dfrac{5}{3}-\dfrac{b}{3}=0$，解得 $b=5$，及 $a=3b=15$.

方法 2：$\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且其秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大线性无关组.

由于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的秩，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，从而

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

由此解得 $a=3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关．于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

解之得 $2b-10=0$．于是得 $a=15,\ b=5$.

方法 3：因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有解．对增广矩阵的行施行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & \vdots & 3b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-10r_2]{r_2\div(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{1}{6}(2b-1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{5}{3}-\frac{b}{3} \end{pmatrix},$$

由非齐次线性方程组有解的条件，知 $\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{3}b=0$，解得 $b=5$.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2．由题设知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩也是 2，从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$，解之得 $a=15$．故

$a=15, b=5$.

3．设 4 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问$a$为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关？当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

解　方法 1：记$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，则

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=(a+10)a^3,$$

于是当$a=0$或$a=-10$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

当$a=0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当$a=-10$时，对$\boldsymbol{A}$作初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\div 10]{\substack{r_2\div 10\\r_3\div 10}}\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2+3r_3+4r_4}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\right),$$

由于$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的一个极大线性无关组，且$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

方法 2：记$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

当$a=0$时，$\boldsymbol{A}$的秩为 1，因而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，此时$\boldsymbol{\alpha}_1$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

$a\neq 0$时，再对$\boldsymbol{B}$施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4\right).$$

如果 $a\neq-10$，$\boldsymbol{C}$ 的秩为 4，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关；如果 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{C}$ 的秩为 3，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

由于 $\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 是 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\gamma}_1=-\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_4$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

4. 设向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等，且 $\boldsymbol{A}$ 能由 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 两向量组等价.

解　设向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 只需证明向量组 $\boldsymbol{B}$ 也可由向量 $\boldsymbol{A}$ 线性表示.

设向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩都为 r，且 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个极大无关组，$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{B}$ 的一个极大无关组. 将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合在一起得向量组 $\boldsymbol{C}$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$. 由于向量组 $\boldsymbol{A}$ 可被向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，故向量组 $\boldsymbol{A}$ 必能被 $\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}$ 线性表示. 因此 $\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ir}$ 也是向量 $\boldsymbol{C}$ 的一个极大无关组. 向量组 $\boldsymbol{C}$ 中任意 r 个线性无关的向量都可作为 $\boldsymbol{C}$ 的一个极大无关组，故 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 也是 $\boldsymbol{C}$ 的一个极大无关组，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 能被 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性表示，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，故向量组 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则对于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量，下列说法正确的有：

(1) 必有 r 行线性无关；

(2) 任意 r 行线性无关；

(3) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关组；

(4) 任意一个行向量均可由其它 r 个行向量线性表示.

解　由向量组的秩的定义可知，仅有(1)是正确的，其它均错误.