武汉大学数学与统计学院2008-2009第二学期
《线性代数》C类 试卷解答

一.(10分).

$$|B| = \left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}\right| = |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3\times(-4) = -12$$

二.(15分). 由 $2X = AX+B$，得 $(2E-A)X = B$，又 $|2E-A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$，

所以 $2E-A$ 可逆，且有

$$X = (2E-A)^{-1}B = \frac{1}{|2E-A|}(2E-A)^{*}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

三.(15分). 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$. 即

$$[(m-1)k_1 + k_2 - k_3]\alpha_1 + [3k_1 + (m+1)k_2 - (m+1)k_3]\alpha_2 + [k_1 + k_2 + (m-1)k_3]\alpha_3 = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，必有 $\begin{cases} (m-1)k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ 3k_1 + (m+1)k_2 - (m+1)k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + (m-1)k_3 = 0 \end{cases}$

$D = m(m^2-4)$. 于是

当 $m \neq 0$，$m \neq \pm 2$ 时，方程组仅有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，此时 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 无关.
当 $m=0$ 或 $m = \pm 2$ 时. 方程组有非零解，$\beta_1\beta_2\beta_3$ 线性相关.

四.(15分) $|A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. 由克莱姆法则.

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，方程组有唯一解

(2) 当 $\lambda = 1$ 时，

$$(A\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(A)=1,\ R(A,b)=2$$

方程组无解.

当$\lambda=-2$时，

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2$，$R(A,b)=2$．无穷多解.

由此得，
$$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2.\\x_3=x_3\end{cases}\quad 即\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}.\quad (c\in R)$$

五.（15分）

1) 能；A^{-1}的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$

2) 能；因A有三个不同的特征值，故存在对角阵Λ和A相似．且$\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$.

3) 能；A^2-2A+E的特征值为$\lambda^2-2\lambda+1$；1, 4, 9，从而$|B|=36$

六.（20分）1) A为实对称阵．$a_{ij}=a_{ji}$，求得$a=3, b=1, c=2$，则二次型的矩阵

$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，$f=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

2) $|\lambda E-A|=0$．$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$．相应地特征向量为

$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，再将其单位化．故有正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$ 求得标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$

由$\|X\|=\|Y\|=1$，及$\lambda_{min}\le f\le\lambda_{max}$．则$f_{max}=4$ $f_{min}=1$.

七.（10分）．$R(A)+R(A-E)\geq R(A)+R(E-A)\geq R(A+E-A)=R(E)=n$

又 $A(A-E)=A^2-A=A-A=0$．

$\therefore R(A)+R(A-E)\le n$．即证命题．（利用$\overbrace{AB=0}^{AB为n阶矩阵}$，则$R(A)+R(B)\le n$）.