武汉大学 2014-2015 学年第二学期
《复变函数与积分变换》期末考试标准答案 (A 卷)

一. (**本题满分 50 分，每小题 5 分**) 解答下列各题，写清楚理由.

1. 求 $(1+i)^6$ 的值.

[解] $(1+i)^6 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i$.

2. 将实形式的直线方程 $2x+3y=1$ 用复形式的方程来表示.

[解] 令 $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ 代入实形式的方程 $2x+3y=1$ 得 $(1-\frac{3}{2}i)z + (1+\frac{3}{2}i)\overline{z} = 1$.

3. 判断函数 $f(z) = e^{\overline{z}}$ 在 $z=0$ 处是否解析？

[解] 不解析. 用 Cauchy-Riemann 方程说明.

4. 求 i^{-i} 的值及其主值.

[解] $i^{-i} = e^{-i\mathrm{Ln} i} = e^{-i(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i)} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. 其主值为 $e^{\frac{\pi}{2}}$.

5. 求方程 $1-e^{-z}=0$ 的全部解.

[解] 方程 $1-e^{-z}=0$ 的全部解为 $z = -\mathrm{Ln}1 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^i (z-i)e^{-z}\mathrm{d}z$.

[解] 利用分部积分法， $I = -\int_0^i (z-i)\mathrm{d}e^{-z} = -[(z-i)e^{-z}]_0^i + \int_0^i e^{-z}\mathrm{d}z = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

7. 指出 $z=0$ 是 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ 什么奇点？如果是极点，指出它的级.

[解] $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点. 用 Laurent 展式说明.

8. 求函数 $f(t) = e^{2t} + 5u(t)$ 的 Laplace 变换式，其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数.

[解] $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-2} - \frac{5}{s}$.

9. 利用留数求 $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ 的 Laplace 逆变换.

[解] $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathrm{Res}(\frac{se^{st}}{s^2+1}, i) + \mathrm{Res}(\frac{se^{st}}{s^2+1}, -i) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t$, $t > 0$.

10. 复级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$ 是否收敛？

[解] 不收敛. 因为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散， $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数发散.

二. (**本题满分 8 分**) 验证 $v = 2xy$ 是调和函数，并求解析函数 $f = u + iv$ 使得 $f(0) = 0$.

[解] 容易计算得到 $\Delta v = 0$, 因而 v 是调和函数. 注意到 $f'(z) = v_y + iv_x = 2x + 2iy = 2z$, 于是 $f(z) = z^2 + C$. 由于 $f(0) = 0$, 那么 $C = 0$. 因此， $f(z) = z^2$.

三. (**本题满分 10 分**) 将函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}$ 分别在 $0 < |z| < 2$, $2 < |z-2| < +\infty$ 展开成洛朗级数.

[解] 当 $0 < |z| < 2$ 时,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}},$$

其两边求导得

$$\frac{1}{(z-2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k+1}}z^{k-1}.$$

因此,

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k+1}}z^{k-2},\ \ 0<|z|<2.$$

当 $2<|z-2|<+\infty$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^3}\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{(z-2)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{(z-2)^{k+3}}.$$

四. (**本题满分 18 分,每小题 6 分**) 计算下列积分:

1. 利用留数计算 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

[解]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}(\frac{ze^{iz}}{1+z^2},i)=2\pi i\left.\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i}=\frac{i\pi}{e}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{e}.$$

2. $I=\displaystyle\oint_L\frac{z^{15}}{(1+z^2)^2(2+z^4)^3}\mathrm{d}z$, 其中 L 为正向圆周 $|z|=3$.

[解] 记被积函数为 f, 则

$$I=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right)=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right)=2\pi i.$$

3. 设 L 是不经过 $i,-i$ 的正向简单闭曲线,试就 $i,-i$ 跟 L 的各种不同位置,计算积分 $I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L\frac{z}{1+z^2}\mathrm{d}z.$

[解] 当 $i,-i$ 在 L 内部时, $I=1$; 当 $i,-i$ 在 L 外部时, $I=0$; 当 $i,-i$ 中一在 L 外部另一在外部时, $I=\frac{1}{2}$.

五. (**本题满分 14 分,第 1 小题 10 分,第 2 小题 4 分**) 解下列方程:

1. 利用 Laplace 变换解常系数的常微分解方程:

$$y''+2y'-3y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

[解] 对方程两边作 Laplace 变换,并记 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$. 于是,

$$\mathcal{L}[y''(t)]+2\mathcal{L}[y']-3\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s},$$

即

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2[sY(s)-y(0)]-3Y(s)=0,$$

其中利用了 Laplace 变换的微分性质. 代入初始条件得

$$Y(s)=-\frac{1}{s(s+3)},$$

取 Laplace 逆变换得 $y(t)=\frac{e^{-3t}-1}{3}$.

2. 利用 Laplace 变换解积分微分解方程：

$$y'(t)+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=1.$$

[解] 对方程两边作 Laplace 变换，并记 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$. 于是，

$$\mathcal{L}[y'(t)]+\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}\Longrightarrow sY(s)-y(0)-\frac{Y(s)}{s}=\frac{1}{s}\Longrightarrow Y(s)=\frac{y(0)s+1}{(s+1)(s-1)}.$$

取 Laplace 逆变换得

$$y(t)=\frac{1+y(0)}{2}e^{t}-\frac{1-y(0)}{2}e^{-t},$$

其中 $y(0)$ 是任意常数.

本题也也可以把原方程两边求导变成常微分解方程 (但有一条件 $y'(0)=1$), 再利用 Laplace 变换解.