理论力学第 3 次作业

1.11

(a)

取坐标为 x,y,ϕ,θ，力平行于圆盘的轴，可以表示为

$$\boldsymbol{F} = F\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} - F\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2$$

其中，圆盘绕垂直于圆盘的中心的轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}ma^2$$

圆盘绕其直径旋转的转动惯量为

$$I_\theta = \frac{1}{4}ma^2$$

所以

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{4}ma^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{8}ma^2\dot{\theta}^2$$

再结合

$$\dot{x} = a\sin\theta\,\dot{\phi},\ \dot{\phi} = \frac{1}{a\sin\theta}\dot{x}$$

所以

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{4\sin^2\theta}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}ma^2\dot{\theta}^2$$

令势能为零，则

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{4\sin^2\theta}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}ma^2\dot{\theta}^2$$

由于(1.39)是非完整的，我们不能直接积分它们并用它们来消除两个自由度。然而，从物理上讲，如果我们知道圆盘的轨迹，即 x 和 y 给出的圆盘中心位置和θ给出的圆盘方向，我们总是可以通过沿着轨迹滚动并计算圆盘的圈数（不必是整数）来找到ϕ这意味着轨迹上

的每个点都有一个唯一的ϕ与其关联（但不是相反），我们可以看到我们忽略了ϕ，并将 x,y,θ 作为自由度。

虚功为

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = (F \sin\theta\, \widehat{\boldsymbol{x}} - F \cos\theta\, \widehat{\boldsymbol{y}}) \cdot (dx\widehat{\boldsymbol{x}} + dy\widehat{\boldsymbol{y}})$$
$$= F \sin\theta\, dx - F \cos\theta\, dx$$

根据定义

$$\delta W = Q_x dx + Q_y dy + Q_\theta d\theta$$

比较可得

$$Q_x = F \sin\theta，Q_y =- F \cos\theta，Q_\theta = 0$$

关于 x 坐标的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x$$

代入 L 与Q_x可得

$$m\left(1 + \frac{1}{2\sin^2\theta}\right)\ddot{x} = F \sin\theta$$

关于 y 坐标的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = Q_y$$

代入 L 与Q_y可得

$$m\ddot{x} =- F \cos\theta$$

关于θ坐标的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

代入 L 与Q_θ可得

$$a^2\ddot{\theta} + \frac{3\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0$$

(b)

设力 $\boldsymbol{F}$ 斜过来的角度为θ，只需把(a)的结果中的 F 替换为 $F\cos\theta$即可。

1.14

质心系动能的柯尼希定理

$$T = T_{\mathrm{c}} + T_{\mathrm{rc}}$$

令

$$M = 2m,\ v = a\dot{\psi}$$

则

$$T_c = \frac{1}{2}Mv^2 = ma^2\dot{\psi}^2$$

两物体相对于质心的坐标为

$$x = \pm\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$y = \pm\frac{l}{2}\sin\theta$$

两物体相对于质心的位矢为

$$r = \pm\frac{l}{2}\cos\theta\,\hat{i} \pm \frac{l}{2}\sin\theta\,\hat{j}$$

所以

$$v = \frac{d}{dt}r = \mp\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\hat{i} \pm \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\hat{j}$$

$$v^2 = v\cdot v = \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2$$

所以

$$T_{rc} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$T = ma^2\dot{\psi}^2 + m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2$$

如果不是平行于 xy 平面的，设与 z 轴的夹角为ϕ，则

$$x = \pm\frac{l}{2}\cos\theta\sin\phi$$

$$y = \pm\frac{l}{2}\sin\theta\sin\phi$$

$$z = \frac{l}{2}\cos\phi$$

$$v_x = \pm\frac{l}{2}\left(-\sin\theta\sin\phi\,\dot{\theta} + \cos\theta\cos\phi\,\dot{\phi}\right)$$

$$v_y = \pm\frac{l}{2}\left(\cos\theta\sin\phi\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi}\right)$$

$$v_z = \pm \frac{l}{2} \sin\phi\, \dot{\phi}$$

$$v^2 = v \cdot v = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y + v_z \cdot v_z = \frac{l^2}{4}\left(\sin^2\phi\, \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right)$$

$$T_{rc} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m v^2 = m \frac{l^2}{4}\left(\sin^2\phi\, \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right)$$