

武汉大学数学与统计学院 2011-2012 第二学期

《线性代数 C》 (A 卷, 文科 54 学时)

学院 _____ 专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____

注: 所有答题均须有详细过程, 内容必须写在答题纸上, 凡写在其它地方一律无效。

一、(10 分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1| = 12, \quad |\alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3| = 8,$$

求四阶行列式 $|\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 (3\beta_1 - 2\beta_2)|$.

二、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{-1} .

三、(15 分) 求向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, -1, 3)^T, \alpha_3 = (-1, 3, 1, 7)^T, \alpha_4 = (1, -3, -1, -7)^T$$

的秩及该向量组的一个极大无关组, 并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

四、(15 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

分别讨论 a, b 取何值时, 该线性方程组有唯一解、无解、有无穷多组解, 并在有无穷多解时求出其通解。

五、(15 分) 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 如果 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ 是 A

的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^3 - 3A + I$, 其中 I 为 3 阶单位矩阵。

(1). 求 B 的全部特征值, 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量;

(2). 求 B 的全部特征向量以及矩阵 B .

六、(20 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2,$$

(1). 写出二次型 f 的矩阵 A ;

(2). 求 A 的全部特征值与特征向量;

(3). 把二次型 f 化为标准形;

(4). 判定二次型 f 是否正定。

七、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 向量 β 满足 $A\beta \neq 0$, 证明:

$$\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \dots, \alpha_k + \beta, \beta$$

线性无关。