2014-2015 高数 B1 期末试题解

一、(8 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}=e$。

二、(8 分）设 $\begin{cases} x=t^3+t \\ y=\frac{3}{4}t^4+t^3+\frac{1}{2}t^2+t \end{cases}$，且 $t=t_0$ 时 $dy=2dx$ 试求 t_0。

解：$\frac{dy}{dt}=3t^3+3t^2+t+1, \frac{dx}{dt}=3t^2+1, \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=t+1$。

由 $t_0+1=2$ 解得 $t_0=1$。

三、(10 分）设 $y=2^{3x}\ln(2x)-\sqrt{1+x^2}$，求 y'。

解：$y'=2^{3x}3\ln 2\ln(2x)+\frac{2^{3x}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

四、(8 分）求微分方程 $y^{(4)}+5y''-36y=0$ 的通解。

解：特征方程 $t^4+5t^2-36=0$。

$(t-2)(t+2)(t-3i)(t+3i)=0$，4 个解 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=3i,\lambda_4=-3i$。

微分方程 $y^{(4)}+5y''-36y=0$ 的通解

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos(3x)+C_4\sin(3x)$$

五、(10 分）设 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，$g(x)=1-x^2$。试讨论复合函数 $f\circ g$ 的连续性。

解：$f\circ g(x)=f(g(x))=\begin{cases} -1, & x<-1 \\ 0, & x=-1 \\ 1, & -1<x<1 \\ 0, & x=1 \\ -1, & x>1 \end{cases}$。

当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -1$ 时，$f\circ g(x)$ 作为初等函数当然连续。

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-} f\circ g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\circ g(x)=-1, \lim\limits_{x\to -1^+} f\circ g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\circ g(x)=1$，所以 $x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f\circ g(x)$ 的跳跃间断点。

六、（8 分）求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$ 。

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-5+11}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx + \frac{11}{2}\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-5x+6}d(x^2-5x+6) + \frac{11}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+6\right| + \frac{11}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C\end{aligned}$$

七、（8 分）验证极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出。

证：$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}\sin x\cos x}{1-\frac{1}{x}\sin x\cos x}=1$ 存在。

$$\frac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} 。$$

$\forall M>0, \forall X>0$，取正整数 k 使得 $k\pi > X$ 。

由于 $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=+\infty$ ，存在 $x_0 > X$ 使得 $\frac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'} > M$ 。

$\frac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}$ 在 $(X,+\infty)$ 内无界。所以，$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}$ 不存在。故 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$ 不能用洛必达法则得出。

八、（8 分）判断积分 $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx \quad (a<b)$ 是否收敛，若收敛求其值。

解：$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \int_a^b \frac{\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}}{(x-a)}dx \overset{\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=t}{=} \int_0^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt$

$= 2\arctan t\Big|_0^{+\infty} = \pi$

收敛。

九、（8 分）判断函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的单调性，并证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$ 。

解：当 $x \neq -1$ 时， $y' = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$，所以 $y = \dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 内严格单调增加。

因为 $|a+b| \leq |a| + |b|$，故

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

十、（8 分）设 $f(x) = [\varphi(x) - \varphi(0)]\ln(1+2x), g(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^3 dt}$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\varphi'(0)=1$，证明： $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to 0$ 时的同阶无穷小。

证：$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续。$g(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt$ 在 $x=0$ 处连续。

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln(1+2x) = 0, \lim\limits_{x \to 0} \int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt = 0$。

根据洛必达法则，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x)}{\int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \frac{\mathrm{x}\ln(1+2x)}{\int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}\ln(1+2x)}{\int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt} = \varphi'(0) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}}{\frac{x}{1+x^3}}$$

$$= \lim_{x \to 0}(1+x^3) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{2(1+x^3)}{1+2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} + 2 = 4 \neq 0$$

故， $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to 0$ 时的同阶无穷小。

十一、（8 分）求微分方程 $xdy + (x-2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$ 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x=1, x=2$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小。

解：$xdy + (x-2y)dx = 0$ 整理为 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x} y = -1$。$P(x) = -\dfrac{2}{x}, Q(x) = -1$。

$$\int P(x)\,\mathrm{dx} = -\ln x^2, \int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{dx}} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}$$

通解

$$y = x^2\left(\frac{1}{x} + C\right)$$

$$y = x + Cx^2$$

旋转体体积

$$V(C)=\pi\int_1^2\left(x+Cx^2\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2+C^2x^4+2Cx^3\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{C^2}{5}x^5+\frac{C}{2}x^4\right]_1^2=\frac{31\pi}{5}C^2+\frac{15\pi}{2}C+\frac{7\pi}{3}$$

$$V'(C)=\frac{62\pi}{5}C+\frac{15\pi}{2}$$

$$V''(C)=\frac{62\pi}{5}>0$$

令$V'(C)=0$唯一解得$C=-\frac{75}{124}$。所要求的解是$y=x-\frac{75}{124}x^2$。

十二、（8 分）设 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。证明：存在一点$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得 $f(\xi)+\tan\xi\cdot f'(\xi)=0$。

证：记$h(x)=\sin xf(x)$。因为 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，所以$h(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导。又$h(0)=0,h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。根据罗尔中值定理，存在$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$h'(\xi)=0$，即$\cos\xi\cdot f(\xi)+\sin\xi\cdot f'(\xi)=0$。再由$\cos\xi\neq 0$即得

$$f(\xi)+\tan\xi\cdot f'(\xi)=0$$