武汉大学2017-2018学年第一学期

《高等数学A1》期中考试试卷

1、（计算题,每题7分，共28分）

(1) 求 $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}+(1+x)^{\frac{1}{2-x}}\right]$.　　(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n-1]{\mathrm{e}}-\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)$.　　(4) 设 $y=\dfrac{4x^2}{2x-1}$，求 n 阶导数 $y^{(n)}$.

2、（8分）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=1+\mathrm{e}^y\sin t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

3、（8分）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$　$(n\in N)$，试讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性，若有间断点，则进行分类（须注明理由）.

4、（8分）设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3+3y-3x=2$ 确定，试讨论并求出 $f(x)$ 的极大值和极小值。

5、（8分）设函数 $f(x)$ 可导，且满足 $xf'(x)=f'(-x)+1$，$f\left(0\right)=0$，求

（1） $f'(x)$；（2） 函数 $f(x)$ 的极值.

6、（8分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

7、（8分）设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求常数 c.

8、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f''(x)<0$，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调减少.

9、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，对任意 $x\in(0,1)$，有 $f(x)\neq0$，证明存在 $c\in(0,1)$，使 $\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.　　（$n$ 是正整数）

10、（4分）设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，

（1）证明此方程存在唯一正实根；（2）如果把该正实根记为 x_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

11、（4分）构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的函数，使其在指定的 n 个不同的点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的导数不存在，说明理由.

武汉大学2017-2018学年第一学期

《高等数学 A1》期中考试试卷答案

1、(计算题,每题 7 分，共 28 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}+(1+x)^{\frac{1}{2-x}}\right]$.

解： $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}+(1+x)^{\frac{1}{2-x}}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{x(x+1)-2}{x^2-1}+(1+x)^{\frac{1}{2-x}}\right]$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x+2}{x+1}+(1+x)^{\frac{1}{2-x}}\right]=\frac{3}{2}+2^1=\frac{7}{2}$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解： $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}$

因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$，故原极限为 $e^{-1/2}$。

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n-1]{\mathrm{e}}-\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)$.

解： 令 $t=\dfrac{1}{n}$，则原极限为

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n-1]{\mathrm{e}}-\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}(\mathrm{e}^{\frac{t}{1-t}}-\mathrm{e}^t)=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{1-t}}-1)=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\cdot\frac{t^2}{1-t}=1。$$

(4) 设 $y=\dfrac{4x^2}{2x-1}$，求 n 阶导数 $y^{(n)}$.

解： $y=\dfrac{4x^2}{2x-1}=\dfrac{4x^2-1+1}{2x-1}=2x+1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$，故

$y'=2+\dfrac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(x-\frac{1}{2})^{-2}$，

$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\cdots\cdot(-n)(x-\frac{1}{2})^{-(n+1)}=\dfrac{(-1)^n n!}{2}(x-\frac{1}{2})^{-n-1}$，$n\ge2$.

2、(8 分) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=1+\mathrm{e}^y\sin t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解： $\dfrac{dx}{dt}=\cot t$，对第二式两边同时对 t 求导得

$$y'(t)=\mathrm{e}^y\cos t+e^y\cdot y'(t)\cdot\sin t,$$

得 $y'(t)=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{e^y\sin t}{1-e^y\sin t}=-1+\frac{1}{1-e^y\sin t},$$

进一步可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^y\cos t+e^y\cdot y'(t)\cdot\sin t}{(1-e^y\sin t)^2}\cdot\tan t=\frac{e^y\sin t}{(1-e^y\sin t)^3}.$$

另解:也可将方程化为: $y=1+e^{x+y}$, 从而对隐函数求导, 可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}}=\frac{y-1}{2-y},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{e^{x+y}}{(1-e^{x+y})^3}=\frac{y-1}{(2-y)^3}.$$

3、(8 分)设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}\quad (n\in N)$,试讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性,若有间断点,则进行分类(须注明理由).

解: 可求得

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ 2, & x=1\\ \frac{1}{x}, & |x|<1, x\neq 0\\ 0, & x=-1\\ 1, & x<-1\end{cases},$$

故 $x=1, x=-1$ 均为函数的第一类间断点, $x=0$ 为第二类间断点.

4、(8 分)设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3+3y-3x=2$ 确定,试讨论并求出 $f(x)$ 的极大值和极小值。

解: 对等式两边对 x 求导可得 $3x^2+3y^2\cdot y'+3y'-3=0$, 故 $y'(x)=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$.

令 $y'(x)=0$ 可得 $x=\pm1$, 易求得 $y(-1)=0$ 为极小值, $y(1)=1$ 为极大值。

或对上式两边继续求导得 $2x+2y\cdot(y')^2+(y^2+1)y''=0$,从而 $y''(1)=-1$, $y''(-1)=1$,从而可判断极大值极小值。

5、(8 分)设函数 $f(x)$ 可导,且满足 $xf'(x)=f'(-x)+1$, $f(0)=0$,求

(1) $f'(x)$;(2) 函数 $f(x)$ 的极值.

解: (1) $\begin{cases}xf'(x)=f'(-x)+1\\ -xf'(-x)=f'(x)+1\end{cases}$, 解得 $f'(x)=\dfrac{x-1}{1+x^2}$.

(2) 注意 $f(0)=0$, 得 $f(x)-f(0)=\int_0^x\dfrac{t-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 即 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x$.

由 $f'(x)=\dfrac{x-1}{1+x^2}$,得函数 $f(x)$ 的驻点 $x_0=1$,而 $f''(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2}$,所以 $f''(1)>0$,即:

$f(1)=\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 极小值.

6、(8 分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,求 $f'(x)$。

解: 因

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

故 $f'(0)$ 不存在。当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{(1+e^{\frac{1}{x}})-x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}=\frac{1+(1+\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}。$$

7、（8 分）设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求常数 c.

解： 由中值定理，有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e，$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot 2c+c}=e^{2c}，$$

故 $2c=1$，得 $c=\frac{1}{2}$。

8、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$， $f''(x)<0$，证明：$\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调减少.

证： 设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g'(x)=xf''(x)<0$，且 $g(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调减，即 $g(x)\le g(0)=0$，$\forall x\in[0,a]$。从而 $F'(x)\le 0$，$\forall x\in[0,a]$，得 $F(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调减少.

9、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，对任意 $x\in(0,1)$，有 $f(x)\neq 0$，证明存在 $c\in(0,1)$，使 $\frac{nf'(c)}{f(c)}=\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.　　　（$n$ 是正整数）

证： 构造函数 $F(x)=f^n(x)\cdot f(1-x)$，利用拉格朗日中值定理即可得证。

10、（4 分）设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，

（1）证明此方程存在唯一正实根；（2）如果把该正实根记为 x_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证： （1）设 $f(x)=x^n+nx-1$，在闭区间 $[0,1]$ 上用连续函数的零点定理可证函数在 $[0,1]$ 存在一个解。由于 $f'(x)=nx^{n-1}+n>0$，从而函数在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，至多有一个实数根。结合两者可得原方程存在唯一正实根。

（2）因 $x_n^n+nx_n-1=0$，有 $0<x_n<\frac{1}{n}$，由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

11、（4 分）构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的函数，使其在指定的 n 个不同的点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的导数不存在，说明理由.

解： 构造函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|$ 即可。