1． 求 $x_1+x_3-x_4=0$ 的通解.

解 由于系数矩阵的秩为 1，其基础解系共有 3 个线性无关的解向量，方程可变化为：$x_1=-x_3+x_4$，分别令 $(x_2,x_3,x_4)=(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，可得 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，从而方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3,\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意实数}.$$

2． 求下列齐次线性方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}.$$

解 对系数矩阵实施初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

故原方程组等价于：$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_3+x_5=0\\x_4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=-x_2-x_5\\x_3=-x_5\\x_4=0\end{cases}$，从而原方程组的基础解系为：

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

3． 求解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&4&6\\-1&-2&-1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\8\\-3\end{pmatrix}$.

解 对增广矩阵实施初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&5\\2&4&4&6&8\\-1&-2&-1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&5\\0&0&-2&-2&-2\\0&0&2&2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_2\div 2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&5\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-3r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&2\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故方程组的通解为：$\begin{cases}x_1=2-2k_1-k_2\\x_2=\quad\ \ k_1\\x_3=1\quad\ \ -k_2\\x_4=\quad\quad\ \ k_2\end{cases}$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

4． 已知 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$ 有无穷多解，求 a.

解 由题设条件有

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0,$$

故 $a=1$ 或 $a=-2$．当 $a=1$ 时，显然方程组无解．当 $a=-2$ 时，因

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1+r_2]{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\1&-2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等且小于 3，方程组有无穷多解，满足题意．

5． λ 取何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解．

解　**方法 1**：原方程组系数矩阵的行列式

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\ \lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda-1\\ \lambda&-1&0\\4&5&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故当 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数，故原方程组有唯一解．

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，对原方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-\frac{4}{5}&-1&1\\-\frac{4}{5}&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\times5]{r_1\times5}\left(\begin{array}{ccc|c}10&-4&-5&5\\-4&-5&5&10\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}10&-4&-5&5\\-4&-5&5&10\\0&0&0&9\end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等，故原方程组无解．

当 $\lambda=1$ 时，对原方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&9&-9&-9\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，原方程组有无穷多解，其通解为 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1+k,\\x_3=k.\end{cases}$（$k$ 为任意常数）．或

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(0,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}，k \text{ 为任意常数}．$$

方法 2：直接对原方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&\lambda&-1&1\\ \lambda&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&\lambda&-1&1\\ \lambda+2&\lambda-1&0&3\\-6&5-5\lambda&0&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+5r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&\lambda&-1&1\\ \lambda+2&\lambda-1&0&3\\5\lambda+4&0&0&9\end{array}\right),$$

故当 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数，故原方程组有唯一解．

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等，故原方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\ x_1=1\end{cases}$，原方程组有无穷多解，其通解为：

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(0,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}，\ k\text{ 为任意常数}.$$

6. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的 3 个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，求该方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，则 $R(\boldsymbol{A})=3$，故齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有 $4-R(\boldsymbol{A})=1$ 个基础解系. 依题意，$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$ 为非齐次方程组的一个解，从而 $2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$ 为齐次线性方程组的一个解，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为：

$$\boldsymbol{x}=k\big(2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)\big)+\boldsymbol{\eta}_1=k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}+(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}，\ k\in\mathbb{R}.$$

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

解 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 同理知 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0$，即

$$(k_3+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是基础解系，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故知

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\ k_1+k_2=0,\\ k_2+k_3=0.\end{cases}$$

因为系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

由已知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 3 个线性无关的解向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

也可以这样证明. 因

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

而矩阵 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 可逆，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，从而是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

9. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$．试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证　**方法 1：**（定义法）若有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=0, \tag{1}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,t)$，用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两边，有

$$(k+k_1+k_2+\cdots+k_t)\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$，故 $k+k_1+k_2+\cdots+k_t=0$．

对(1)重新分组为

$$(k+k_1+k_2+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=0. \tag{3}$$

把(2)代入(3)得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=0$．

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是基础解系，它们线性无关，故必有 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_t=0$．
代入(2)式得: $k=0$．因此向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

方法 2：（用秩）经初等变换向量组的秩不变．把第一列的 -1 倍分别加至其余各列，有

$$\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t\right)\xrightarrow[i=2,3,\cdots,t]{c_i-c_1}\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\right).$$

因此

$$R\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t\right)=R\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\right).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是基础解系，它们线性无关，有 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\right)=t$，又 $\boldsymbol{\beta}$ 必不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表出(否则 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$)，故 $R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{\beta}\right)=t+1$．所以

$$R\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t\right)=t+1,$$

即向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

10. 判断下列诊断是否正确，并说明理由：

(1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

(2)设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 也必有无穷多解；

(3)设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多解；

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，

　(A)若 $m>n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

　(B)若 $m<n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，

　(A)若 $r=m$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

　(B)若 $r=n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

　(C)若 $m=n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

　(D)若 $r<n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

解　(1)正确．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组，从而结论成立.

(2)错误．方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，则 $R(\boldsymbol{A})<n$，但 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 不一定成立，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 不一定有解.

(3)正确．方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多解.

(4)(A)错误．若 $m>n$，但 $R(\boldsymbol{A})<n$ 仍可能成立，此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解.

(B) 正确．若 $m<n$，则 $R(\boldsymbol{A})\le m<n$，从而方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解．

(5) (A) 正确．若 $r=m$，此时 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 为 $m\times(n+1)$ 矩阵，从而 $R(\boldsymbol{A})\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\le m=R(\boldsymbol{A})$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解．

(B) 错误．若 $r=n$，则有 $n\le m$，此时因 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 为 $m\times(n+1)$ 矩阵，从而可能 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})>n=R(\boldsymbol{A})$，此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

(C) 错误．若 $m=n$，但 $r<n$，则可能有 $R(\boldsymbol{A})=r<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 发生，此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

(D) 错误．若 $r<n$，$R(\boldsymbol{A})=r<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 仍可以发生，此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解．

4． 设 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，将分量代入得到方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)\ x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)\ x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+(1+\lambda)\ x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换．

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-2\lambda&-\lambda&0&\lambda^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-3\lambda&0&0&\lambda^2+\lambda\end{array}\right).$$

若 $\lambda\ne0$ 且 $\lambda^2+3\lambda\ne0$，即 $\lambda\ne0$ 且 $\lambda\ne-3$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表达式唯一．

若 $\lambda=0$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一．

若 $\lambda=-3$，则 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

5． 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

求 $|\boldsymbol{A}|$．

解 依题设条件，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

两边取行列式，因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，有$\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\right|\neq 0$，故

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-2.$$

7． 证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$等价．

证 由题设，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，仅须证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示．将$s$个等式相加可得

$$\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s=(s-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s),$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r),$$

再分别用该等式减去题设的每个等式，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_i&=\frac{1}{s-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_s)-\boldsymbol{\beta}_i\\&=\frac{1}{s-1}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{s-1}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\left(\frac{1}{s-1}-1\right)\boldsymbol{\beta}_i+\cdots+\frac{1}{s-1}\boldsymbol{\beta}_s,\quad(i=1,2,\cdots,s)\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，从而两向量组等价．

10． 求向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组．

解 对下列矩阵作初等行变换，

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\-1&3&-2&6&-1\\1&5&-1&10&6\\3&1&b&a&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&6&-4&12&2\\0&4&b-9&a+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&b-11&a-2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-(b-11)r_3]{r_3\div(-7)}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&a-2&3-b\end{pmatrix}.$$

故

（1）当$a=2,b=3$时，向量组的秩为3，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$（或$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$）为一个极大无关组；

（2）当$a\neq 2$时，向量组的秩为4，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$为一个极大无关组；

（3）当$b\neq 3$时，向量组的秩为4，且$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$为一个极大无关组．

11． 确定常数a，使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解　方法 1：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故 $R(\boldsymbol{A})<3$（若 $R(\boldsymbol{A})=3$，则任何 3 维向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出），从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2,$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出但 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，由于

$$(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{\substack{r_2-r_1\\r_3+2r_1}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&3\\0&0&-6&0&0&0\end{array}\right),$$

因 $R(\boldsymbol{B})=2$，$R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha}_2)=3$，故方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 无解，从而 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，与题设矛盾，$a=-2$ 舍去.

因此 $a=1$.

方法 2：对矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&4+2a&3a&0&1-a&1-a^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&3(1-a)&-(a-1)^2\end{array}\right).$$

当 $a=-2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&3\\0&0&-6&0&9&-9\end{array}\right).$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $a\neq-2$.

当 $a=4$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&4\\0&6&6&0&3&-3\\0&0&0&0&9&-9\end{array}\right),$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，因此 $a\neq4$.

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq4$ 时，秩 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&0&2a+4&3a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&3a+6&4a+2\end{array}\right),$$

由题设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 $a=1$ 或 $a=-2$.

综上所述，满足题设条件的 a 为：$a=1$.

12. 设有向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$，及 $\boldsymbol{\beta}=(1,b,-1)^{\mathrm{T}}$，问 a,b 为何值时：

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组(A)线性表示；

(3) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组(A)线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

解 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，相当于对应的非齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解的问题，可转换为方程组求解的情形进行讨论.

方法 1：设有一组数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，该方程组的系数行列式

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=-a-4,$$

故

(1) 当 $a\neq-4$ 时，$\left|\boldsymbol{A}\right|\neq0$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式唯一.

(2) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作行初等变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2+2r_1\\ r_3-5r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&b\\0&0&1&2b+1\\0&0&-1&-1-5b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&1&b\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&-3b\end{array}\right),$$

此时若 $b\neq0$，则方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

若 $b=0$，$R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，进一步对上面矩阵进行初等行变换，可得：

$$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_1-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k\text{ 为任意实数.}$$

方法 2：直接对下面矩阵作初等行变换，有

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2-\frac{a}{2}r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_3-5r_1}}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1-5b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+(1+\frac{a}{2})r_3]{r_3\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & 0 & 1-\frac{ab}{2}+(1+5b)(1+\frac{a}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{array}\right),$$

故当$-2-\dfrac{a}{2}\neq 0$，即$a\neq -4$时，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组(A)线性表示，且表示式唯一；

当$-2-\dfrac{a}{2}=0$，即$a=-4$时，进一步有

$$\bar{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{array}\right),$$

从而当$b=0$时，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示（表示法略去）；$b\neq 0$时，则方程组无解，即$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

18. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，求一个秩为 2 的方阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

解 设$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$，依题设有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$，即求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解向量，从中选 3 个解向量构成矩阵$\boldsymbol{B}$，使其秩为 2. 由于该方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$等价于方程$x_1+x_2+2x_3=0$，易求得方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个线性无关的解向量为：$\boldsymbol{x}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，故可取$\boldsymbol{B}$为：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行是$(a,b,c),a,b,c$不全为零，矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$（$k$为常数），且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解.

解 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$知，$\boldsymbol{B}$的每一列均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，且$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq 3$.

(1) 若$k\neq 9$，则$R(\boldsymbol{B})=2$，于是$R(\boldsymbol{A})\leq 1$，显然$R(\boldsymbol{A})\geq 1$，故$R(\boldsymbol{A})=1$. 可见此时$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含解向量的个数为$3-R(\boldsymbol{A})=2$，矩阵$B$的第 1 列、第 3 列线性无关，可作为其基础解系，故$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为：$\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$为任意常数.

(2) 若$k=9$，则$R(\boldsymbol{B})=1$，从而$1\leq R(\boldsymbol{A})\leq 2$.

若$R(\boldsymbol{A})=2$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为：$\boldsymbol{x}=k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$k_1\in\mathbb{R}$为任意常数.

若$R(\boldsymbol{A})=1$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的同解方程组为：$ax_1+bx_2+cx_3=0$，不妨设$a\neq 0$，则其通解为$\boldsymbol{x}=k_1(-\dfrac{b}{a},1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-\dfrac{c}{a},0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$为任意常数.

20． 设四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(I)与(II)的公共解.

解 由已知，方程组(I)的系数矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，故(I)的通解为

$$k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

方法 1：令 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，解得：

$$k_1=-k\,,\quad k_2=k_3=k_4=k\,,\quad k \text{ 为任意常数},$$

故其公共解为

$$-k(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\,,\quad k \text{ 为任意常数}.$$

方法 2：将(II)的通解代入方程组(I)，则有

$$\begin{cases} -k_2+k_1+2k_2=0 \\ k_1+2k_2-k_2=0 \end{cases},$$

得 $k_1=-k_2$．故向量 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组(I)(II)．即方程组(I)，(II)有公共解，所有公共解是 $k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$（k 为任意常数）.

21． 已知齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases} \qquad \text{和} \qquad (\mathrm{II})\quad \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

解 方程组(II)的未知量个数大于方程个数，故方程组(II)有无穷多解．因为方程组(I)与(II)同解，所以方程组(I)的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组(I)的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

从而 $a=2$．此时，方程组(I)的系数矩阵通过初等行变换可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(I)的一个基础解系.

将 $x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_3=1$ 代入方程组(II)可得 $b=1,c=2$ 或 $b=0$，$c=1$.

当 $b=1$，$c=2$ 时，对方程组(II)的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

显然此时方程组(I)与(II)同解.

当$b=0$，$c=1$时，对方程组(II)的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

显然此时方程组(I)与(II)的解不相同.

综上所述，当$a=2$，$b=1$，$c=2$时，方程组(I)与(II)同解.

22. 设 4 元齐次线性方程组(I)和(II)，已知$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$是(I)的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$是(II)的一个基础解系，求(I)和(II)公共解.

解 **方法 1**：依题意，即寻找$x_1,x_2,x_3,-x_4,-x_5$，使得$x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3=-x_4\boldsymbol{\eta}_1-x_5\boldsymbol{\eta}_2$成立（对$x_4,x_5$取负号的原因是不想改变下面矩阵中最后两列的符号），由

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&0&1&1&1\\1&1&1&0&-1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&0&1&1&1\\0&2&1&0&-2\\0&1&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-2&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_4\\r_1+r_2}]{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&4&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&3&1\end{pmatrix},$$

此时$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=k(-1,-4,2,1,-3)^{\mathrm{T}}$，故公共解为：

$$k(-\boldsymbol{\xi}_1-4\boldsymbol{\xi}_2+2\boldsymbol{\xi}_3)=k(-\boldsymbol{\eta}_1+3\boldsymbol{\eta}_2)=k(3,2,-3,-1)^{\mathrm{T}}，k\text{ 为任意实数}.$$

方法 2：因为$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$是方程组(II)的通解，若$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$能用$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$线性表示，即$R\left(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2\right)=R\left(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\right)$，则$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$也是方程组(I)的解，从而可以利用秩来计算. 对下面矩阵施行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&k_2\\0&0&1&k_1+k_2\\1&1&1&-k_2\\1&0&0&k_1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-r_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&k_2\\0&0&1&k_1+k_2\\0&1&1&-k_2-k_1\\0&1&0&k_1-k_2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&k_2\\0&1&0&k_1-k_2\\0&1&1&-k_2-k_1\\0&0&1&k_1+k_2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&k_1\\0&1&0&k_1-k_2\\0&1&0&-2k_2-2k_1\\0&0&1&k_1+k_2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&k_1\\0&1&0&k_1-k_2\\0&0&0&-k_2-3k_1\\0&0&1&k_1+k_2\end{array}\right),$$

于是当$3k_1+k_2=0$时，$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$也是(I)的解. 从而(I)和(II)的公共解为：

$$k(-\boldsymbol{\eta}_1+3\boldsymbol{\eta}_2)=k(3,2,-3,-1)^{\mathrm{T}}，\text{其中 }k\text{ 可取任意常数}.$$

23. 设(I)和(II)都是 3 元非齐次线性方程组，

(I)的通解为：$\boldsymbol{\xi}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$可取任意常数；

(II)的通解为：$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}$，其中$\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$k$为任意实数.

求(I)和(II)的公共解.

解 因公共解具有$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}$的形式，即它也是(I)的解，从而存在$k_1,k_2$使得

$$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\xi}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2 .$$

于是$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}_1$可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，即

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}_1)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),$$

对下面矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}_1)$进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&1&k-1\\1&2&k+1\\0&1&2k+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&k-1\\0&1&2\\0&1&2k+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&k-1\\0&1&2\\0&0&2k-1\end{pmatrix},$$

得$k=\dfrac{1}{2}$，从而(I)和(II)有公共解$\boldsymbol{\xi}_2+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\xi}_2+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 3\right)^{\mathrm{T}}$.

24. 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，存在正整数k，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$，但$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，试证：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

证 用线性无关的定义证明.

设有常数$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$,使得

$$\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

两边左乘$\boldsymbol{A}^{k-1}$，则有

$$\boldsymbol{A}^{k-1}\left(\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\right)=\boldsymbol{0},$$

即

$$\lambda_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{2(k-1)}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0} .$$

因$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，可知$\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2(k-1)}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，代入上式可得$\lambda_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 由题设$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda_0=0$. 将$\lambda_0=0$代入$(*)$，有

$$\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0} .$$

两边左乘$\boldsymbol{A}^{k-2}$，则有

$$\boldsymbol{A}^{k-2}\left(\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\right)=\boldsymbol{0}，\text{即}\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{A}^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0} .$$

同样，由$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\boldsymbol{A}^{2(k-1)}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，可得$\lambda_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 由题设$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda_1=0$. 类似地可证明$\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$，因此向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

25. 已知 4 阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解 本题考查线性方程组解的性质和解的结构、齐次线性方程组的基础解系及非齐次线性方程组的通解等.

方法 1： 由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，及$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$,即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，及$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$知

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3，\quad R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=3 .$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，且其通解为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$，其中 $k\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解，$\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，因 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$，故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{\xi}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．又

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\eta}^*=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，故方程组的通解为：

$$\boldsymbol{x}=k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}，其中 k\in\mathbb{R} 是任意常数.$$

方法 2：令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 为

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3+\boldsymbol{\alpha}_4x_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}.$$

因 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，故

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3+\boldsymbol{\alpha}_4x_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

由已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，上式成立当且仅当

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3\\-x_1+x_3=0\\x_4-1=0\end{cases},$$

上述方程组的解为：

$$x_1=k，\ x_2=-2k+3，\ x_3=k，\ x_4=1，其中 k\in\mathbb{R} 是任意常数.$$

即方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\-2k+3\\k\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}，其中 k\in\mathbb{R} 是任意常数.$$

26. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$．

解 方程组的通解为：$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}，有\begin{cases}x_1=3k_2\\x_2=k_1+2k_2\\x_3=2k_1+k_2\\x_4=3k_1\end{cases},$$

将该式中消去 k_1,k_2，可得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

注意该题答案不唯一，例如：$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 也满足要求.

28. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 r ，$\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，\text{其中 } k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1.$$

证　因 $R(\boldsymbol{A}) = r$，故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有 $n-r$ 个线性无关的解向量. 由题设可得 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$，$\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}_{n-r} - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，且可以证明它们线性无关，从而

$$\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，\ \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，\ \cdots，\ \boldsymbol{\eta}_{n-r} - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 故方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的任一解可表示为:

$$\boldsymbol{x} = k_1(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) + k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) + \cdots + k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r} - \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}) + \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$$

$$= k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + (1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}，$$

令 $k_{n-r+1} = 1 - k_1 - k_2 - \cdots - k_{n-r}$，易知结论成立.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = 0$，$\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 中任何一个非零列向量都构成齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

证　因 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = 0$，故 $R(\boldsymbol{A}) \le n-1$，又 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$，故 $R(\boldsymbol{A}) \ge n-1$（否则由伴随矩阵的定义，可得 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$，矛盾），从而 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$，得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的解向量有 $n - R(\boldsymbol{A}) = n - (n-1) = 1$ 个，而 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}^*$ 的任一列均为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 中任何一个非零列向量均构成齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

34. 已知 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中，前 $n-1$ 个向量线性相关，后 $n-1$ 个向量无关，又 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$，矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ 是 n 阶方阵，求证：方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 必有无穷多解，且其任一解 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 中必有 $c_n = 1$.

证　只需证明 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的所有解的形式为 $(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, 1)$ 即可. 由于

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A\alpha}，\text{其中 } \boldsymbol{\alpha} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}，$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解向量，又由题设知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性相关，$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 也线性无关，$\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性表示，故 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$，而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解，所以

$$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}) = n-1，$$

即 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n-1 < n$，故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 由于 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} = \boldsymbol{0}$，即

$$\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n\right)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_{n-1}\\0\end{pmatrix}=0\,,$$

故 $\boldsymbol{\eta}=(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\alpha}=k(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^{\mathrm{T}}+(1,1,\cdots,1,1)^{\mathrm{T}}=(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},1)\,,$$

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解中必有 $c_n=1$.

37. 证明：$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

证　若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$ ，则必有 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\eta})=\boldsymbol{0}$ ，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$ ，等式两边左乘 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}$ ，得 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=0$ ，即 $(\boldsymbol{A\eta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\eta})=0$ ，$\boldsymbol{A\eta}$ 是一个向量，设 $\boldsymbol{A\eta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ ，则 $(\boldsymbol{A\eta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\eta}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2=0$ ，得 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$ ，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

故 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ，依上题知，$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.