

常微分方程

主要内容

(前序课程：高数、线性代数)

- ① 初等积分法 【初等解法】
- ② 基本定理 【解的存在与唯一性等】
- ③ 一阶线性微分方程组 【概念-理论-解法】
- ④ n 阶线性微分方程 【概念-理论-解法】

理论求解

关于《常微分方程》的复习

课程内容

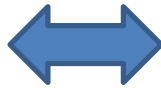
— 理论

- 佩亚诺（Peano）存在性定理、皮卡（Picard）存在性定理
- 比较定理、延拓（延展）定理，解的存在区间
- 线性齐次方程【解空间、基本解组】和线性非齐次微分方程解
- 一阶微分方程
- 一阶微分方程组【线性、非线性】
- 高阶方程【线性、非线性】

— 求解方法

- 初等积分法【变量分离、可以化为变量分离的方程、线性、贝努利方程、全微分方程、【积分因子】，隐式方程（参数法、微分法）】
- 一阶线性（常系数）微分方程组的求解【特征方程-特征根-特征向量】
- 高阶线性（常系数）微分方程的求解【特征方程-特征根】；
- 非齐次方程（组）求解：常数变异法、待定系数法
- 部分变系数微分方程（组）求解：变换、幂级数解法

— 技巧

- 初等变（代）换（非线性 \rightarrow 线性；高阶方程 \rightarrow 低阶方程（降阶解法）；变系数 \rightarrow 常系数（欧拉方程）；贝努利方程）
- 非齐次线性方程特解：常数变异法，待定系数法，叠加原理
- 存在区间（利用解的存在唯一性定理、比较定理、延拓定理、具体求解）
- 全书内容：相互关联（特殊  一般）
- 善于观察（特解、变换等等）

— 涉及概念

- 积分因子、初值问题、解的存在唯一性、延拓（延展）、奇解、通解、特解（通解结构）、基本解组、解矩阵
- 基于问题驱动的建模（微分方程模型）

— 特殊类型微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad : \text{变量分离方程}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad : \text{右端齐次方程}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad : \text{线性方程}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n (n \neq 0, 1) \quad : \text{伯努利 (Bernoulli) 方程}$$

$$y = xy' + f(y'), f''(x) \neq 0 \quad : \text{克莱罗 (Clairaut) 方程}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad : \text{全微分方程}$$

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), p(x) \neq 0$$

黎卡提 (Riccati) 方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

高阶常系数方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

欧拉 (Euler) 方程

(代换: $x = e^t \Rightarrow$ 高阶常系数方程)

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x) \quad \text{常系数线性微分方程组}$$

$$x \frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x) \quad A \text{ 为常系数矩阵}$$

$$(\text{代换: } x = e^t \Rightarrow \frac{dY}{dt} = A \cdot Y + F(e^t))$$

谢谢！

2020.12.10