一、计算下列各题

1．若 $e^z=1-i$，计算 Imz。

解：$z=Ln(1-i)=\ln\sqrt{2}+i[\arg(1-i)+2k\pi]=\ln\sqrt{2}+i[-\frac{\pi}{4}+2k\pi]$

$Imz=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

2．计算积分 $\mathrm{I}=\oint_c\frac{\bar{z}+z}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周|z|=2。

解：圆周 C 的参数方程为 $z=2e^{i\theta}\quad 0\le\theta<2\pi$

积分 $\mathrm{I}=\oint_c\frac{\bar{z}+z}{|z|}dz=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}+2e^{i\theta}}{2}i2e^{i\theta}d\theta=4\pi i$

3．利用留数定理计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos 2x}dx$$

解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos 2x}dx\overset{2x=t}{=}\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos t}\frac{dt}{2}$

$=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos t}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

4．设 $\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega)$，证明当 $f(x)$ 为偶函数时，

$$F(\omega)=2\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$

计算函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, |x|\le\pi\\ 0, \quad |x|>\pi\end{cases}$ 的 Fourier 变换。

证明: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=2\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x e^{-i\omega x}dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(1-\omega)x}+e^{-i(1+\omega)x}}{2}dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(1-\omega)x}+e^{-i(1+\omega)x}}{2}dx=\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\pi+\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)\pi$

二、1)（5 分）证明，如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，且满足 $au+bv=c$，

其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，则 $f(z)$ 为常数。

证明：1）若a=0，则$bv=c$，v为实常数，由于$f(z)=u+iv$是解析函数，满足C-R方程，可以知道u为实常数，$f(z)$为常数。

2）若$a\neq 0$，则$u=\dfrac{c-bv}{a}$，由C-R方程

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}$$

所以 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-(\dfrac{b}{a})^2\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 即$[1+(\dfrac{b}{a})^2]\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

由于a、b和c为实常数，故$\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

可以知道u和v为常数，$f(z)$为常数。

2）若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是解析函数，且$u-v=(x-y)(x^2+y^2+4xy)$，求解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并满足$f(0)=0$。

答：$u=3x^2y-y^3+c \qquad v=3y^2x-x^3+c$

三、（本题15分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$在下列圆环域内展开成Laurent级数

(1) $0<|z-1|<1$ (2) $|z|>2$

解： $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$

(1) $0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z}(\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}})=\dfrac{1}{z}[\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{2}{z})^2-\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{z})^2]$

六、指出函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z}$的奇点和类型（含∞点）；若是弧立奇点，计算各弧

立奇点的留数。

答：$z=0$ 为三阶极点，$z=k\pi \quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为一阶极点，$z=\infty$ 为非孤立奇点。

$$\mathrm{Re}\, s[\frac{1}{z^2\sin z},0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(z^3\frac{1}{z^2\sin z})=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\ k\pi]=\left.\frac{1}{(z^2\sin z)'}\right|_{z=k\pi}=\left.\frac{1}{2z\sin z+z^2\cos z}\right|_{z=k\pi}=\frac{(-1)^k}{(k\pi)^2}$$

七、（本题 10 分）利用 Laplace 变换求微分方程 $y''(\mathrm{t})+4y(t)=\begin{cases}1, 0<t<4\\ 0, \quad t>4\end{cases}$ 的解，

且满足条件 $y(0)=3, y'(0)=-2$ 。

解　设 $L[y(t)]=Y(p)$

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+4Y(p)=\int_0^4 e^{-pt}dt$$

$$p^2Y(p)-3p+2+4Y(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-4p})$$

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-4p})+3p-2$$

$$(p^2+4)Y(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-4p})+3p-2$$

$$Y(p)=\frac{1}{4}(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4})(1-e^{-4p})+\frac{3p-2}{p^2+4}$$

$$y(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)-\frac{1}{4}[u(t-4)-\cos 2(t-4)u(t-4)]+3\cos 2t-\sin 2t$$