武汉大学 2013-2014 学年第二学期
《复变函数与拉氏变换》期末参考答案 (A 卷)

姓名 ________________ 学号 ________________ 专业 ________________

一. (**本题满分 50 分，每小题 5 分**) 解答下列各题，写清楚理由.

1. 求方程 $z^4-1-i=0$ 的所有的根.
2. 求方程 $\sin z=0$ 的全部解.
3. 求 $(1+i)^i$ 的值.
4. 求 $I=\displaystyle\int_0^i (z-i)e^{-z}\mathrm{d}z$ 的值.
5. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 是条件收敛还是绝对收敛.
6. 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{\cos z}$ 在有限奇点处的留数.
7. 求函数 $f(t)=1-te^t$ 的 Laplace 变换式.
8. 利用留数求 $F(s)=\dfrac{1}{a+s}$ 的 Laplace 逆变换，其中 a 为一实数.
9. 求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$ 在无穷远处留数.
10. 设 C 是任何不通过原点的光滑的简单封闭曲线，试计算 $I=\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$.

二. (**本题满分 8 分**) 验证 $u=2(x-1)y$ 是调和函数，并求解析函数 $f=u+iv$ 使得 $f(2)=-i$.

三. (**本题满分 10 分**) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$ 分别在 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|<+\infty$ 展开成洛朗级数. 进一步，是否可以把 f 在 $0<|z-3|<3$ 展开成洛朗级数？为什么？

四. (**本题满分 12 分，每小题 6 分**) 利用留数计算下列积分：

1. $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{-5-3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.
2. $I_2=\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^5-1}\mathrm{d}z$, 其中 C 为正向圆周： $|z|=2$.

五. (**本题满分 10 分**) 利用 Laplace 变换解变系数的常微分解方程：

$$ty''+(1-2t)y'-2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$$

六. (**本题满分 6 分**) 设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, 其中 $\mathcal{L}$ 为 Laplace 变换. 证明相似性质：

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),\ \ a>0.$$

七. (**本题满分 4 分**) 若函数 $\Phi(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，当 z 为实数时， $\Phi(z)$ 取实值且 $\Phi(0)=0$, $f(x,y)$ 表示 $\Phi(x+iy)$ 的虚部，试证明：

$$\int_0^{2\pi}\frac{t\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\Phi(t),\ \ -1<t<1.$$