武汉大学 **2014 —2015** 学年度第 一 学期《工程随机数学》参考答案（A）

1. 设电源电压在低于 200V，200~240V 之间和高于 240V 的三种情况下时，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2。设电源电压服从正态分布 $N(220,25^2)$，试求：
（1）该电子元件损坏的概率；
（2）该电子原件损坏时，电源电压在 200~240V 的概率。
解　设 A_1={X<200V}，A_2={200V≤X≤240V}，A_3={X>240V}，B={电子元件损坏}，则

错误！未找到引用源。；$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}=P\left\{\frac{200-220}{25}\le\frac{X-220}{25}\le\frac{240-220}{25}\right\}=\phi(0.8)-\phi(-0.8)=2\phi(0.8)-1\approx 0.576$错误！未找到引用源。；

$P(A_3)=P(A_1)\approx 0.212$错误！未找到引用源。；由题设：$A_1\cup A_2\cup A_3=S$，$A_1$，$A_2$，$A_3$=两两不相容，且错误！未找到引用源。，错误！未找到引用源。。

（1）　由全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.212\times0.1+0.576\times0.001+0.212\times0.2=0.0642$

（2）　由贝叶斯公式 $$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.576\times0.001}{0.0642}\approx 0.009$$

2. 设随机变量 X 在[0,1]上取值，若对[0,1]上的任意 x 和 $y(y\ge x)$，$P\{x<X\le y\}$仅与 $y-x$ 的数值有关，试证 X 服从[0,1]上的均匀分布。
证明　设 $x\in[0,1]$，$x+t\in[0,1]$，$t\ge0$，则由题意知
错误！未找到引用源。，故错误！未找到引用源。，也即错误！未找到引用源。。

由错误！未找到引用源。，可知 $$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x\text{取其它值。}\end{cases}$$

3. 二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay(1-x), & 0\ll x\ll 1,0\ll y\ll x,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

（1）确定常数 A；（2）求关于 X 和关于 Y 的边缘密度函数；（3）求 $f(x|y)$和 $f(y|x)$。
解　（1）由错误！未找到引用源。
错误！未找到引用源。，故 A=24。
（2）错误！未找到引用源。；
错误！未找到引用源。。
（3）当错误！未找到引用源。

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{24y(1-x)}{12x^2(1-x)}=\dfrac{2y}{x^2}, & 0\ll y\ll x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当错误！未找到引用源。

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{24y(1-x)}{12y(1-y)^2}=\dfrac{2y}{x^2}, & 0<x<1,y\ll x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

4. 设随机变量 X 的密度函数为
错误！未找到引用源。。
（1）求 X 的数学期望和方差；（2）求 X 与错误！未找到引用源。的协方差，二者是否相关？（3）X 与错误！未找到引用源。是否相互独立，为什么？

解　（1）错误！未找到引用源。；　　错误！未找到引用源。。

（2） 错误！未找到引用源。，X 与错误！未找到引用源。不相关。

（3） 错误！未找到引用源。有确定的函数关系 $|x| = \begin{cases} x, & x \gg 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 所以 X 与错误！未找到引用源。不相互独立。

或：设 x>0，则错误！未找到引用源。⊂错误！未找到引用源。，错误！未找到引用源。

故 P(错误！未找到引用源。>错误！未找到引用源。

5. 某保险公司的统计数据表明：在盗抢险范围内，索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示 100 个索赔户中的被盗索赔户。

（1） 写出 X 的概率分布；（2）近似计算被盗索赔户在 14~30 户之间的概率。

解 （1）$X \sim b(100,0.2)$，错误！未找到引用源。

（2）$E(X)=100\times0.2=20$，$D(X)= 100\times0.2\times0.8=16$，根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理，

X 近似服从 $N(20,16)$，故有

$$P\{14 \ll X \ll 30\} = P\left\{\frac{14-20}{4} \ll \frac{X-20}{4} \ll \frac{30-20}{4}\right\} = \Phi(2.5) - \Phi(-1.5)$$

错误！未找到引用源。1=0.994+0.933-1=0.927.

6. 简单随机样本（$X_1, X_2, ..., X_n$）是来自总体 X。假设总体 X 的概率密度为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

其中，σ^2, μ 未知，试求二者的极大似然估计，并讨论二者估计值的无偏性。

解：似然函数为 $L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}]$

取自然对数后为 $Ln[L(\mu, \sigma^2)] = -\frac{n}{2} \ln\ 2\pi\sigma^2) - \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$

分别对 μ, σ^2 求偏导，并令其为零，得方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \mu)^2 = 0 \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $\hat{\mu} = \bar{X},\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ 由于 $E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = \mu$，是无偏估计

$E(\hat{\sigma}^2) = E(\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2) = \frac{n}{n-1} \sigma^2$，不是无偏估计

7. 利用激光雷达对中高层大气温度进行测量（单位：K)，由以往经验知道测量值服从 $\sigma = 3.58$ 的正态分布。雷达每 1 秒完成一次测量，为了降低雷达测量结果的误差，需要在一段时间内对测量结果进行平均。问，至少需要多长时间的观测平均，才能以 90%的可靠性保证平均测量值的误差

在±1K之间？（假定每次测量都是相互独立的，且在观测期间，大气温度保持不变。）

解：设雷达观测值为X_i（i=1，2，3，……），$X_i \sim N(\mu, 3.58^2)$。在 n 秒内雷达观测的均值为：

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \sim N(\mu, \frac{3.58^2}{n})$$

$$P\{|\bar{X} - \mu| \le 1\} \ge 0.9$$

以题意，$P\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{3.58/\sqrt{n}}\right| \le \sqrt{n}/3.58\} \ge 0.9$

$\alpha = 0.1$，查表得：$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.65$

因此，$\sqrt{n}/3.58 \ge Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.65$，得$n \ge 34.89$

考虑到次数 n 必须为整数，n=35.

因此，至少需要在 35 秒的时间段内进行平均，才能保证雷达测量值均值的误差小于 1K 的概率大于 90%。

8. 两部测风雷达 A、B 进行对比验证试验，在同一段时间内，分别独立地对同一区域的大气水平风进行观测，得到如下结果（m/s）：

   A 雷达：22.5，26.2，21.7，24.0，23.0，22.9，23.5，21.7

   B 雷达：20.9，20.5，19.6，21.0，20.2，20.7，22.4，22.3，22.0，20.1

假设对比验证试验期间大气水平风的变化可以忽略，两部雷达测量误差服从正态分布，且方差相同，问：根据此次对比试验结果，两部雷达的观测结果是否有显著的差异（$\alpha = 0.05$）？

解：AB 两部雷达的观测值分别记为 X，Y，均值分别为μ_1, μ_2。依据题意，做假设检验如下：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2; H_1 : \mu_1 \ne \mu_1$$

选取检验统计量$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

由$\alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(16) = 2.1$

得拒绝域为 $T > 2.1 \text{或} T < -2.1$

$$\bar{X} = 23.2, S_1^{\ 2} = 2.1, n_1 = 8$$
$$\bar{Y} = 21.0, S_{21}^{\ 2} = 0.9, n_2 = 10$$
$$S_w = 1.2$$

得观察值$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{23.2 - 21.0}{1.2\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = 3.9 > t_{\frac{\alpha}{2}}(16)$

因此，观察值落入拒绝域，因而拒绝原假设H_0，认为两部雷达观测到的结果存在显著差异。

9. 设随机过程 $x(t)=\eta\cos t+\xi\sin t$，其中 η和ξ 是相互独立的随机变量，且 $E(\eta)=E(\xi)=0, D(\eta)=d(\xi)=\sigma^2$，试讨论该随机过程的平稳性；

解：$E(X(t))=\cos tE(\eta)+\sin tE(\xi)=0$

$$
\begin{aligned}
E(X(t_1)X(t_2)) &= E[(\eta\cos t_1+\xi\sin t_1)E(\eta\cos t_2+\xi\sin t_2)] \\
&= E[\eta^2\cos t_1\cos t_2+\xi^2\sin t_1\sin t_2+\eta\xi(\sin t_1\cos t_2+\cos t_1\sin t_2)] \\
&= \sigma^2(\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2) \\
&= \sigma^2\cos(t_2-t_1)
\end{aligned}
$$

故，此过程为宽平稳随机过程