武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数 B 期末试题 A

1. （10 分）已知方阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值。

2. （10 分）设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求矩阵 A .

3. （10 分）设 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵，计算行列式：$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

4. （10 分）设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$. 求矩阵 B.

5. （8 分）已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1,、2、−3，求行列式 $\left|A^{-1}+3A+2I\right|$ 的值。

6、(8 分) 证明 秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

7. （8 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$，

的秩为 2，求参数 t 为的值。

8、（16 分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

9、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2+2bx_1x_3-2x_3^2,(b>0)$， 其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为−12.

（1）求 a,b 的值；（2）利用正交变法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵.

10、（10 分）设有向量组

$\alpha_1=(1,1,-3,2)^T$，$\alpha_2=(3,-2,-4,1)^T$ $\alpha_3=(4,-1,-7,3)^T$，$\alpha_4=(2,2,3,4)^T$

（1）求矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的秩 $R(\mathbf{A})$.

（2）求此向量组的一个极大线性无关组. 并将其余的向量用极大线性无关组表出

武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数 B 期末试题 A 解答

1. （10 分）已知方阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&-2&3\\0&1&-1&0\\1&-2&2&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值。

解 因为 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}=A_{11}-A_{12}+2A_{13}+2A_{14}$

根据行列式的展开定理知：在 A 中将第一行换成 $1,-1,2,2.$ 便得：

$$A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&2&2\\0&1&-1&0\\1&-2&2&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\1&-2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1.$$

2. （10 分）设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}4&-2&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵 A .

解 由 $AA^*=|A|E$，故 $A=|A|(A^*)^{-1}$，又 $|A^*|=|A|^3$，$(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&\\&A_2^{-1}\end{pmatrix}$

$$A_1^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},A_2^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix},\ |A^*|=\begin{vmatrix}4&-2\\-3&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-4&0\\0&-1\end{vmatrix}=-8,$$

所以 $|A|=-2$ ，故 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

3. （10 分）设 $|A|=\dfrac{1}{2}$，A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵，计算行列式：$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

解 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}A^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{2}{3}A^*-2A^*\right|=\left|-\dfrac{4}{3}A^*\right|$

$$=(-\frac{4}{3})^4|A^*|=(-\frac{4}{3})^4|A|^3=\frac{2^5}{3^4}=32/81$$

4. （10 分）设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$. 求矩阵 B.

解 由题设 $AB = A + 2B$，得 $(A-2I)B = A$ 因为 $|A-2I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

所以 $A-2I$ 可逆，且 $B = (A-2I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. （8 分）已知 3 阶方阵 **A** 的特征值为 1,、2、−3，求行列式 $|A^{-1}+3A+2I|$ 的值。

解：因为 $A\eta = \lambda\eta$，则 $A^{-1}A\eta = \lambda A^{-1}\eta$ 从而 $\frac{1}{\lambda}\eta = A^{-1}\eta$

即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值，η 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量；

知，$\frac{1}{\lambda}+3\lambda+2$ 是 $A^{-1}+3A+2I$ 的特征值 因为 3 阶方阵 **A** 的特征值为 1,、2、−3，

所以 3 阶方阵 $A^{-1}+3A+2E$ 的特征值为 6、$\frac{17}{2}$、$-\frac{22}{3}$，

则 $|A^{-1}+3A+2I| = 6 \times \frac{17}{2} \times (-\frac{22}{3}) = -374$

6、（8 分）证明 秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证：设矩阵 $R(\underset{m\times n}{A}) = r$，则矩阵 A 必与矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 等价，所以必存在两个可逆矩阵 $\underset{m\times m}{P}, \underset{n\times n}{Q}$ 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q$，而 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 可以分解为 r 个只有一个元素 1 其余元素全为零的 $m\times n$ 阶矩阵之和的形式：

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= E_1 + E_2 + \cdots + E_r$$

故 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q = \sum_{i=1}^{r} PE_iQ$，由 $R(PE_iQ) = 1\,(i = 1, 2, \cdots, r)$，

所以秩为 r 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

7. （8 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + tx_3^2$，

的秩为 2，求参数t为的值。

解 由二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&1\\2&1&t\end{pmatrix}$，故$R(A)=2$，有$|A|=\begin{vmatrix}1&3&2\\3&1&1\\2&1&t\end{vmatrix}=0$即$t=\dfrac{7}{8}$

8、（16 分）设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求a的值及所有公共解.

解：因为求方程组和方程的公共解，联立方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 的解

有增广矩阵$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}=B$

当$(a-1)(a-2)=0$时，即$a=1$或$a=2$.

当$a=1$时$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因此有公共解为$X=k(-1,0,1)^T$，可为任意常数

当$a=2$时 $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，有公共解为$X=(0,1,-1)^T$。

9、（10 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2+2bx_1x_3-2x_3^2,(b>0)$， 其中$A$的特征值之和为 1，特征值之积为−12.

（1）求a,b的值；

（2）利用正交变法将二次型f化为标准型，并写出正交矩阵.

解：（1）$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$设 A 的特征值为$\lambda_i(i=1,2,3)$，有

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4a-2b^2=-12$

得 $a=1,b=2$　所以，$\left|A-\lambda I\right|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

从而，$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

$\lambda_1=\lambda_2=2$, 所对应的特征向量有 $X_1=(2,0,1)^T$, $X_2=(0,1,0)^T$
$\lambda_3=-3$ 所对应的特征向量 $X_3=(1,0,-2)^T$

因为，X_1,X_2,X_3 俩俩正交，单位化得 $Y_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T,Y_2=(0,1,0)^T$,

$Y_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T$　因此，$Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ 。

二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

10、（10 分）设有向量组

$\alpha_1=\left(1,1,-3,2\right)^T$，$\alpha_2=\left(3,-2,-4,1\right)^T$ $\alpha_3=\left(4,-1,-7,3\right)^T$，$\alpha_4=\left(2,2,3,4\right)^T$

（1）求矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的秩 $R(\mathbf{A})$.

（2）求此向量组的一个极大线性无关组. 并将其余的向量用极大线性无关组表出

解　对 $\mathbf{A}$ 作初等行变换变成行阶梯形矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ -3 & -4 & -7 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ 0 & 5 & 5 & 9\\ 0 & -5 & -5 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是，得　(1) $R(\mathbf{A})=3$

（2）　所给向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.　$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$