2005-2006（一）高等数学期末考试试题 A 卷　2006/01/11

（注意：本试题共有九道大题，满分 100 分，考试时间 100 分钟）

一．填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

1． $x=1$是函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1, \\ 3-x, & x>1. \end{cases}$ 的第_______________类间断点。

2．函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间____________________上单调增加。

３．函数 $y=\sin 2x$ 的微分 $d(\sin 2x)=$__________________________。

４．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(|x|+x\right)\cos x\,dx=$____________________________________。

５．曲线 $y=x^3$ 的拐点为________________________________。

二．选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分。）

１．$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=$________________。

（A）e；　（B）e^{-1}；　（C）1；　（D）0

2.　若函数 $f(x)$在点 x_0 不连续，则 $f(x)$在 x_0 ____________。

（A）必定可导;　（B）必不可导;

（C）不一定可导;　（D）必无定义

３．若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int d\,F(x)=$__________________。

（A）$f(x)$;　（B）$F(x)$;　（C）$f(x)+C$;　（D）$F(x)+C$

４．下列积分中，值等于零的是______________________。

（A）$\int_{-1}^{1}x^2\,dx$;　（B）$\int_{-1}^{2}x^3\,dx$;

（C）$\int_{-1}^{1}dx$;　（D）$\int_{-1}^{1}x^2\sin x\,dx$

５．反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}dx=$____________________。

（A）$-\dfrac{\pi}{4}$;　（B）0;　（C）$\dfrac{\pi}{4}$;　（D）发散

三．求极限（本题共有２道小题，每小题 6 分，满分 12 分。）

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$；

2． $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$。

四．求导数（本题共有２道小题，每小题 6 分，满分 12 分。）

1．设函数 $y=\sqrt[5]{x}+\sqrt[x]{5}$，求 y 的导数 y'。

2．设函数 $y=y(x)$由方程组$\begin{cases} x=3t^2+2t \\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

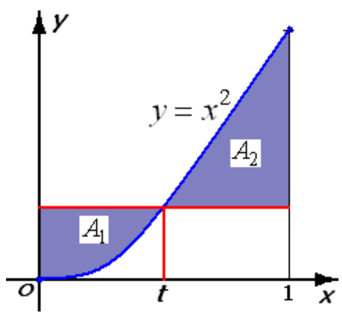
五．计算下列积分（本题共有２道小题，每小题 6 分，满分 12 分。）

1． $\int\dfrac{1}{x(1-x)}dx$；　　　2． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$。

六．（本题满分１０分）　证明不等式 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

七．　（本题满分１０分）设函数 $y=x^2$ 定义在$[0,1]$上，t 为$[0,1]$上任意一点。

问当t为何值时，图中两阴影部分(如图)的面积 A_1 与 A_2 之和具有最小值？



八．（本题满分 8 分）设函数 $f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx。$$

九．（本题满分 6 分）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$f(0)=f(1)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，试证至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$。