武汉大学 **2018 —2019** 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试题评分参考

一、（本题 10 分）

解：1．**（5 分）** $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+iy}}=e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}}$

$\mathrm{Re}[f(z)]=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos(\frac{y}{x^2+y^2})$；$|f(z)|=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$；$\arg f(z)=-\frac{y}{x^2+y^2}$。

2. **（5 分）** $2^{-i}=e^{-iLn2}=e^{-i[\ln 2+i(\arg 2+2k\pi)]}=e^{2k\pi-i\ln 2}$

$$=e^{2k\pi}[\cos(\ln 2)-i\sin(\ln 2)]\quad (k=0,\pm1,\pm2;\ldots)$$

二、（本题 10 分）

解：1、**（5 分）** $F(z)=af(z)-ibf(z)+c$。

2、**（5 分）** 在（0,0）处可导，处处不解析。

由 $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=(u_x+iv_x)\big|_{(0,0)}=(y^2+i2xy)\big|_{(0,0)}=0$

三、（本题 10 分）

解：1、**（5 分）** $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sin te^{-j\omega t}dt$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2j}\int_0^{\infty}[e^{-t(\beta-j+j\omega)}-e^{-t(\beta+j+j\omega)}]dt$$

$$=\frac{1}{2j}[\frac{1}{(\beta+j\omega)-j}-\frac{1}{(\beta+j\omega)+j}]=\frac{1}{(\beta+j\omega)^2+1}$$

2、**（5 分）** $\mathscr{F}[e^{-\beta t}H(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{(\beta+j\omega)}$

$$\mathscr{F}[\sin t]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}\sin te^{-j\omega t}dt=j\pi\left[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right]$$

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t}H(t)\sin t]=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\beta+j\omega)}*j\pi\left[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta+j\tau}j\pi[\delta(\omega-\tau+1)-\delta(\omega-\tau-1)]d\tau$$

$$=\frac{j}{2}[\frac{1}{\beta+j(\omega+1)}-\frac{1}{\beta+j(\omega-1)}]=\frac{1}{(\beta+j\omega)^2+1}$$

四、（本题 10 分）

解：1、**(3 分)** $\sin z = 0$，$z = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 是 1 阶极点，$z = \infty$ 是非孤立奇点。

2、**(3 分)** $\mathrm{Res}[f(z), 0] = \lim\limits_{z \to 0} z \cdot \dfrac{1}{\sin z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{\cos z} = 1$

$$\mathrm{Res}[\frac{f(z)}{z}, 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}[z^2 \frac{1}{z \sin z}] = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}\Big|_{z=0}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \frac{z \sin z}{2\sin z \cos z}\Big|_{z=0} = 0$$

3、1）**(2 分)** 展开区域为 $0 < |z| < \pi$。

2）**(2 分)** 方法一：因为 $z = 0$ 是 1 阶极点，故

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = c_{-1}\dfrac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$，所以有

$c_n = 0 \quad (n = -\infty, \mathrm{L} \ -2)$，$c_{-1} = \mathrm{Res}[f(z), 0] = 1$，

$c_0 = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{d}{dz}[z \dfrac{1}{\sin z}] = 0$，$c_1 = \dfrac{1}{2!} \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{d^2}{dz^2}[z \dfrac{1}{\sin z}] = \dfrac{1}{6}$

方法二：$f(z) = \dfrac{1}{\sin z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = c_{-1}\dfrac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$

$$1 = \sin z \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = [z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots][c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots]$$

化简组合 $1 = c_{-1} + c_0 z + (c_1 - \dfrac{1}{3!}c_{-1})z^2 + \ldots$，比较系数得到。

方法三：$\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots]} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{[1 - (\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \ldots)]}$

$$= \frac{1}{z}[1 + (\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \ldots) + (\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \ldots)^2 + \ldots]$$

五、(本题 15 分)

解：1、**(5 分)** 由 $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n - 1)z^n = \sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^n = [\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - 1] - [\sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1]$$

$= \dfrac{1}{1-2z} - \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{z}{(1-2z)(1-z)}$ 收敛半径 $R = \dfrac{1}{2}$。

2、 (1) **(5 分)** $0<|z-1|<1$， $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{z}$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)+1}==\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

(2) **(5 分)** $1<|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n-\frac{1}{z}$$

六、(本题 15 分) 计算下列积分

解：1、**(8 分)** $z=0$是可去奇点， $z=1$是 1 阶极点，

$$\oint_{|z|=1/2}\frac{\sin^2 z}{(e^z-1)^2(z-1)}dz=2\pi i\ \mathrm{Res}[f(z),0]=0$$

$$\oint_C\frac{\sin^2 z}{(e^z-1)^2(z-1)}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),1]=2\pi i\lim_{z\to 1}[(z-1)\frac{\sin^2 z}{(e^z-1)^2(z-1)}]=\frac{2\pi i\sin^2 1}{(e-1)^2}$$

2、**(7 分)** 积分路径 C： $|z|=1$的上半圆周的参数方程为 $z=z(\theta)=e^{i\theta}$ $\quad 0\le\theta\le\pi$

则 $\bar{z}=e^{-i\theta},|z|=1$， $\quad dz=ie^{i\theta}d\theta$，

$$\int_C(\frac{\bar{z}}{|z|}+\cos z)dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta+\int_{-1}^{1}\cos z dz=-\pi i+[\sin 1-\sin(-1)]$$

$$=-\pi i+2\sin 1$$

七、 (本题 15 分)

解：1、**(10 分)** $\int_0^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2+1}dx=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+1}dx]$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i\,\mathrm{Res}(\frac{e^{itz}}{z^2+1},i)]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i\frac{e^{itz}}{2z}\Big|_i]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\pi e^{-t}]=\frac{\pi e^{-t}}{2}$$

2、**(5 分)** $\mathscr{L}[f(x,t)]=\frac{1}{1+x^2}\frac{p}{p^2+x^2}$。

八、(本题 15 分)

解：1、**(5 分)** 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(p)$， $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$， 对微分方程两边取 LT， 有

$$p^2Y(p)+2aY(p)+a^2Y(p)=F(p)$$

化简得到 $Y(p)=\dfrac{F(p)}{(p+a)^2}$

两边取 Laplace 逆变换，得到 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(p)]=\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{F(p)}{(p+a)^2}]$

$$=f(t)*te^{-at}=\int_0^t f(\tau)(t-\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$$

2、**（5 分）** 当 $f(t)=\delta(t)$，有 $p^2Y(p)+2aY(p)+a^2Y(p)=1$

$$Y(p)=\frac{1}{(p+a)^2}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(p)]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(p+a)^2}]=te^{-at}$$

或者 $y(t)=\delta(t)*te^{-at}=\int_0^t \delta(\tau)(t-\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau=te^{-at}$

（5 分） 当 $f(t)=1$ 时，有 $p^2Y(p)+2apY(p)+a^2Y(p)=\dfrac{1}{p}$

$$Y(p)=\frac{1}{p(p+a)^2}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(p)]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p(p+a)^2}]=\mathrm{Res}[\frac{1}{p(p+a)^2}e^{pt},0]+\mathrm{Res}[\frac{1}{p(p+a)^2}e^{pt},-a]$$

$$=1+[\frac{e^{pt}}{p}]'\Big|_{p=-a}=1+[\frac{te^{pt}}{p}-\frac{e^{pt}}{p^2}]\Big|_{p=-a}=\frac{1}{a^2}+[-\frac{te^{-at}}{a}-\frac{e^{-at}}{a^2}]$$

或者 $y(t)=1*te^{-at}=\int_0^t \tau e^{-a\tau}d\tau=-\dfrac{1}{a}\int_0^t \tau de^{-a\tau}$

$$=-\frac{\tau}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}d\tau=-\frac{te^{-at}}{a}-\frac{e^{-a\tau}}{a^2}\Big|_0^t=-\frac{te^{-at}}{a}-\frac{e^{-at}}{a^2}+\frac{1}{a^2}$$