一、计算下列各题

1．若 $e^z=1-i$，计算 Imz。

2．计算积分 $I=\oint_c \frac{\bar{z}+z}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周|z|=2。

3．利用留数定理计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos 2x} dx$$

4．设$\mathscr{F}[f(x)] = F(\omega)$，证明当$f(x)$为偶函数时，

$$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

计算函数$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi\end{cases}$的 Fourier 变换。

二、1)（5 分）证明，如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，且满足 $au+bv=c$，其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，则 $f(z)$ 为常数。

2）若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是解析函数，且 $u-v=(x-y)(x^2+y^2+4xy)$，求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并满足 $f(0)=0$。

三、（本题 15 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在下列圆环域内展开成 Laurent 级数

(1)　$0<|z-1|<1$　　　　(2)　$|z|>2$

六、指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z}$ 的奇点和类型（含∞点）；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数。

七、（本题 10 分）利用 Laplace 变换求微分方程 $y''(\mathrm{t})+4y(t)=\begin{cases}1, 0<t<4\\0, \quad t>4\end{cases}$ 的解，

且满足条件 $y(0)=3, y'(0)=-2$。