武汉大学 **2021 —2022** 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院________专业___班 学号________姓名____分数___

一、计算下列各题（10 分×4=40 分）

1．在复平面上取上半虚轴（包括原点）做割线($-\frac{3\pi}{2}<\arg z\le\frac{\pi}{2}$)，取定 Lnz 在正实轴上取实值的分支，求它在$z=-i$ 处的值。

解：$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+iArgz$

+3

当z在实轴取值时，$Argz=0+2k\pi$

+2

即 $Lnz=\ln|z|+i(0+2k\pi)$ 取实数, 则 $k=0$

+2

所以 $Ln(-i)=\ln|-i|+i(-\frac{\pi}{2}+0)=-\frac{\pi}{2}i$

+3

2. 找出 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(i+z)^2}$的奇点(含无穷远点)，确定其性质，若为极点确定阶数，并计算在奇点处的留数。

解：函数的奇点为 $z(i+z)^2=0$ 的点，则$z=0,\ z=-i$ 为奇点

+1

a) 因为 $[z(z+i)^2]'|_{z=0}=[(z+i)^2+z\cdot 2(z+i)]|_{z=0}=-1\ne 0$
所以 $z=0$ 为 $z(i+z)^2$ 的一阶零点，即为$f(z)$的一阶极点，

+1

该点的留数为 $Res(0)=\lim\limits_{z\to 0}z\cdot\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}=-1$

+2

b) $[z(z+i)^2]'|_{z=-i}=[z^3+2iz^2-z]'|_{z=-i}=[3z^2+4iz-1]|_{z=-i}=0$

$[z(z+i)^2]''|_{z=-i}=[6z+4i]_{z=-i}=-2i\ne 0$

所以 $z=-i$ 为$z(z+i)^2$ 的二阶零点，即$f(z)$的二阶极点

+1

所以 $Res(-i)=\lim\limits_{z\to -i}\left[(z+i)^2\cdot\frac{e^{iZ}}{z(z+i)^2}\right]'=\lim\limits_{z\to -i}\frac{ie^{iz}\cdot z-e^{iz}}{z^2}$

$=\lim\limits_{Z\to -i}\frac{e^{iz}}{z^2}(iz-1)=0$

+2

c) 令 $z=x$, $x\to+\infty$, $|f(z)|\to 0$, 令 $z=-iy$, $y\to+\infty$, $|f(z)|\to\infty$, 所以 ∞ 是本性奇点（孤立奇点），

+1

该点的留数为$Res(\infty)=1$ （全平面奇点留数和为0）

+2

3. 计算积分$I=\oint_l [|z|\bar{z}+\frac{1}{z-0.5i}]\mathrm{d}z$, 其中l是上半单位圆周与实轴上线段[-1,1]组成的正向闭曲线.

解：令$I_1=\oint_l |z|\bar{z}dz$ ， $I_2=\oint_l \frac{1}{z-0.5i}dz$

+1

1） 因为 l 将 $0.5i$ 围绕其中，所以 $I_2=2\pi i$

+3

2） 计算I_1 ，因 $|z|\bar{z}$ 不是解析函数，则我们将围线 l 分为单位圆上半圆周 C_1 和线段l_1: $[-1，1]$ 两段。

+1

在 C_1 上，令 $z=e^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$, $\bar{z}=e^{-i\theta}$, $|z|=1$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$

所以 $\int_{C_1}|z|\bar{z}dz=\int_0^{\pi}e^{-i\theta}\left(ie^{i\theta}\right)d\theta=i\int_0^{\pi}d\theta=\pi i$

+2

在 l_1 上，令 $z=x$, $|z|=|x|$, $\bar{z}=x$, $dz=dx$

所以 $\int_{-1}^{1}|z|\bar{z}dz=\int_{-1}^{1}|x|xdx=\int_{-1}^{0}-x^2dx+\int_0^1 x^2dx=0$

所以 $I_1=\int_{C_1+l_1}|z|\bar{z}dz=\pi i+0=\pi i$

+2

所以 $I=I_1+I_2=\pi i+2\pi i=3\pi i$

+1

4. 求$f(x)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$的Fourier变换，并证明含参数t的广义积分：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\,\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}(\pi/2)\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$$

解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\pi}^{+\pi}\sin t e^{-i\omega t}dt=$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(1-\omega)it}}{(1-\omega)i}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{e^{-(1+\omega)it}}{(1+\omega)i}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=$$
$$\frac{1}{2i}\left[\frac{2isin(1-\omega)\pi}{(1-\omega)i}+\frac{2isin(-1-\omega)\pi}{(1+\omega)i}\right]=\frac{sin\omega\pi}{(1-\omega)i}+\frac{sin\omega\pi}{(1+\omega)i}=\frac{sin\omega\pi}{i}\cdot$$
$$\frac{2}{1-\omega^2}=\frac{2isin\omega\pi}{\omega^2-1}$$

+5

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2isin\omega\pi}{\omega^2-1}(cos\omega t+isin\omega t)d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{isin\omega\pi cos\omega t}{\omega^2-1}d\omega$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin\omega\pi sin\omega t}{\omega^2-1}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega\pi sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$$

又$f(t)$在$\mathrm{t}\in\mathrm{R}$上处处连续

故$\int_0^{+\infty}\frac{sin\omega\pi sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}sint & |t|<\pi\\ 0 & |t|\geq\pi\end{cases}$

+5

二、（15 分）若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，已知 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$, 求 $f(z)$.

解：

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析, 有

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

+2

由

$$u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$$

得

$$u_x-v_x=x^2+4xy+y^2+(x-y)(2x+4y)$$
$$=3x^2+6xy-3y^2$$

+2

$$u_y-v_y=-x^2-4xy-y^2+(x-y)(4x+2y)$$
$$=3x^2-6xy-3y^2$$

+2

继而得

$$\begin{cases}u_x=6xy\\u_y=3x^2-3y^2\end{cases}\qquad\begin{cases}v_x=-3x^2+3y^2\\v_y=6xy\end{cases}$$

+2

得

$$u(x,y)=3x^2y-y^3+c1$$

+2

$$v(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + c2$$

+2

所以

$$f(z) = \left(3x^2y - y^3\right) + i\left(-x^3 + 3xy^2\right) + c\Big|_{x=z,y=0}$$

即

$$f(z) = -iz^3 + c$$

+3

三、（15 分）将函数$f(z) = \frac{z+1}{(z^2-z-6)}$在$z = 0$为中心的所有解析区域内展开为罗朗级数.

解：$f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-3)} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{z-3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}$，奇点为 z=−2 和 z=3, 以z=0为中心展开有3个解析区域。

+3

$$1^o\ |z| < 2, f(z) = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

+4

$$2^o\ 2 < |z| < 3, f(z) = -\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

+4

$$3^o\ |z| > 3, f(z) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

$$= \frac{4}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n + \frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

+4

四、（15 分）利用留数定理计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx\ (a \geq 0)$.

解：

函数$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$是偶函数，在实轴上无奇点，在上半平面除奇点$z=i$（为单极点）外处处解析。当$|z| \to \infty$ 时，$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ 一致趋于0。

+5

又

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i\right] = \lim_{z\to i}\frac{e^{iaz}}{z+i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

+2

则

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx$$

+2

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz\right\}$$

+2

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi iRes\left[\frac{e^{iaz}}{z^2+1},i\right]\right\}$$

+2

$$=\frac{\pi e^{-a}}{2}$$

+2

(注：本题若将下半平面奇点留数也计算在内，则后面3步的分均不得)

五、（15 分）用Laplace变换法求解二阶常微分方程定解问题

$$\begin{cases} T''(t)+a^2T(t)=f(t)，\ a>0 \\ T(0)=C_0 \\ T'(0)=0 \end{cases}$$

请写出$T(t)$的含卷积表达式，计算

(1) $f(t)=t$, 和(2) $f(t)=\begin{cases} F, 0\le t\le T \\ 0, \quad t>T \end{cases}$时$T(t)$的解。

解：

$$T''(t)+a^2T(t)=f(t)$$

对方程两边作Laplace变换得：

$$p^2Y(p)-T'(0)-pT(0)+a^2Y(p)=L[f(t)]$$

即

+3

将 $T(0)=C_0$，$T'(0)=0$代入得

$$(p^2+a^2)Y(p)=L[f(t)]+PC_0$$

即

$$Y(p)=\frac{L[f(t)]+PC_0}{p^2+a^2}$$

+3

所以

$$T(t)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}[\frac{1}{p^2+a^2}\cdot(L[f(t)]+C_0)]$$
$$=L^{-1}[\frac{1}{p^2+a^2}]*L^{-1}[L[f(t)]+C_0)]$$
$$=\frac{1}{a}\sin at*f(t)+C_0\cos at$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^t f(\tau)\sin a(t-\tau)\,d\tau+C_0\cos at$$

+3

(1) 当$f(t)=t$时，

$$T(t)=\frac{1}{a}\sin at*t+C_0\cos at$$
$$=\int_0^t\frac{1}{a}\tau\sin a(t-\tau)\,d\tau+C_0\cos at$$
$$=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}\tau\cos a(t-\tau)-\frac{1}{a^2}\sin a(t-\tau)\right]_0^t+C_0\cos at$$
$$=\ C_0\cos at+\frac{t}{a^2}-\frac{1}{a^3}\sin at$$

+3

（2） 当$f(t)=\begin{cases}F,0\le t\le T\\ 0,\ t\ge T\end{cases}$时

$t>T$时，$f(t)*\sin at=F\int_0^t\sin a(t-\tau)\,d\tau=\frac{F}{a}\cos a(t-\tau)\Big|_0^T$

$$=\frac{F}{a}[\cos a(t-T)-\cos at]$$

$0\le t\le T$时，$f(t)*\sin at=\int_0^t F\sin a(t-\tau)\,d\tau=\frac{F}{a}\cos a(t-\tau)\Big|_0^t$

$$=\frac{F}{a}(1-\cos at)$$

故

$$T(t)=\begin{cases}\frac{F}{a^2}(1-\cos at)+C_0\cos at & 0\le t\le T\\ \frac{F}{a^2}[\cos a(t-T)-\cos at]+C_0\cos at & t>T\end{cases}$$

+3