

一、计算下列各题

1. 计算复数 $(-1)^i$ 的主值。

2. 已知 $f(z^3+1)=|z|$ ，则求 $f(0)$ 。

3. 指出函数 $f(z)=\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$ (a, b 为实数, 且 $a \neq b$) 的奇点和类型 (含 ∞ 点);

若是孤立奇点, 计算各孤立奇点的留数。

4. 计算积分 $\int_c \bar{z} dz$, 设

1) c 为从原点 $z=0$, 到 $z=1+i$ 的直线段;

2) c 为 $|z|=1$ 。

5. 计算函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ 的 Fourier 变换。

二、设 $r > 0$ 且 $|r| \neq 1$ ，利用留数定理计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{r - \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} d\theta = \begin{cases} 0 & (|r| < 1) \\ \frac{2\pi}{r} & (|r| > 1) \end{cases}$$

三、1) (5 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数。

2) (10 分) 将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ 在下列圆环域内展开成 Laurent 级数

$$(1) \quad 0 < |z - 2| < 1 \qquad (2) \quad |z| > 3$$

六、1) (3 分) 求调和函数 $u = u(ax + by)$, a 、 b 为常数。

2) (7 分) 已知 $u = 2(x-1)y$, 求解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 并满足

$$f(0) = 0。$$

七、（本题 10 分）利用 Laplace 变换求微分方程 $y''(t) + a^2 y(t) = f(t)$ 满足条件 $y(0) = b, y'(0) = c$ 的解，其中 a, b, c 为常数。

如果 $f(t) = t$ ，写出其解。