武汉大学2014-2015学年第二学期期末
《高等数学C2》试卷(A卷)参考答案

一. 计算$\int_{-1}^{1}\left[\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$.(7分)

解.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}(\arctan x)^2\mathrm{d}\arctan x \quad (4分)\\ &= \frac{2}{3}(\arctan x)^3\Big|_0^1=\frac{\pi^3}{96}. \qquad (3分)\end{aligned}$$

二. 设$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x\sin x^2, & x\geq 0 \end{cases}$. 求$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.(7分)

解.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x^2\mathrm{d}x \qquad (3分)\\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{4}. \qquad (4分)\end{aligned}$$

三. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 并满足条件$\int_0^x f(x-u)e^u\mathrm{d}u=x$. 求$f(x)$.(7分)

解. 令$x-u=v$, 则$u=0$时, $v=x$, $u=x$时, $v=0$, 且$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}v$. 故有,

$$\int_0^x f(x-u)e^u\mathrm{d}u=e^x\int_0^x f(v)e^{-v}\mathrm{d}v=x. \qquad (3分)$$

即

$$\int_0^x f(v)e^{-v}\mathrm{d}v=e^{-x}x.$$

上式两边求导得, $e^{-x}f(x)=e^{-x}(1-x)$. 故$f(x)=1-x$.(4分)

四. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.(6分)

解.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

五. 设$z=\arcsin(x-y),x=3t,y=4t^3$, 求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.(7分)

解.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\qquad(2分)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$$
$$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^2)^2}}.\qquad(5分)$$

六. 设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中f为可微函数, 证明: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.(7分)

证. 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}-\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},\quad(4分)$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.\qquad(3分)$$

七. 从斜边之长为l的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.(7分)

解. 设直角三角形的两直角边之长为分别为x,y, 则周长$S=x+y+l\ \ (0<x<l,0<y<l)$. 构造拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).\qquad(2分)$$

令$L_x=1+2\lambda x=0,L_y=1+2\lambda y=0$. 解得$x=y=-\frac{1}{2\lambda}$. 代入$x^2+^2=l^2$, 得$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2l}$. 于是$x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}}\right)$是惟一可能的极值. 因此在斜边之长为$l$的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰三角形.(5分)

八. 计算$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2, x\ge y^2\}$.(7分)

解.

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}}x\mathrm{d}x \qquad (4分)$$

$$=\int_0^1(2-y^2-y^4)\mathrm{d}y=\frac{22}{15}. \qquad (3分)$$

九. 计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$.(6分)

解. 由$\frac{5}{n(n+1)}=\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}$, (2分)

$$s_n=(5-\frac{5}{2})+(\frac{5}{2}-\frac{5}{3})+\cdots+(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1})=5-\frac{5}{n+1},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=5$.(4分)

十. 讨论级数 a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$; b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n+2}$的敛散性.(8分)

解. (a) 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}\cdot\frac{3!n!3^n}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{3(n+1)}=\frac{1}{3}<1,$$

级数收敛.(4分)

(b) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}\ne 0$, 级数发散. (4分)

十一. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的收敛域与和函数.(9分)

解. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1$, 当$x=\pm1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2n-1}$ 收敛. 故幂级数的收敛域为$[-1,1]$. (4分)

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$, 则$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$. 于是

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x, -1\le x\le 1. \qquad (5分)$$

十二. 求解微分方程$xy'=y-\sqrt{x^2-y^2}=0$.(7分)

解. 令$u=\frac{y}{x}$, 原方程化为$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$(4分). 积分得: $\arcsin u=-\ln|x|+C$. 此得原方程的通解为: $\arcsin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$(3分).

十三. 求微分方程初值问题$x(1+x^2)\mathrm{d}y=(y+x^2y+1)\mathrm{d}x, y(1)=-\frac{\pi}{4}$的解.(7分)

解. 原方程化为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=\frac{1}{x(x^2+1)}.$$

该方程的通解为:

$$\begin{aligned}y=&e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(C+\int\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)\\=&x(C+\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x\\=&Cx-x\arctan x-1.\qquad(5分)\end{aligned}$$

由初值条件. $C=1$. 原初值问题的解为: $y=x-x\arctan x-1$(2分).

十四. 求微分方程$y''-2y'+4y=x$的通解.(8分)

解. 对应的齐次方程的特征方程为: $\lambda^2-2\lambda+4=0$. 特征根为: $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$. 对应齐次方程的通解为:

$$y=C_1e^x\cos\sqrt{3}x+C_2e^x\sin\sqrt{3}x.\qquad(4分)$$

设非齐次方程的特解为: $y^*=ax+b$. 代入方程得: $-2a+4(b+ax)=x$. 解方程$\begin{cases}-2a+4b=0,\\4a=1\end{cases}$得, $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{8}$. 由此, 微分方程的解为:

$$y=C_1e^x\cos\sqrt{3}x+C_2e^x\sin\sqrt{3}x+\frac{1}{8}(2x+1).\qquad(4分)$$