武汉大学 2017-2018 学年第一学期
《复变函数与拉氏变换》期末考试试题 (A 卷)

姓名 ________ 学号 ________ 专业 ________

一、（本题满分 50 分，每小题 5 分）解答下列各题，写清楚理由.

1. 如果函数 f 在区域 D 内解析且恒取实值，则 f 一定为常数函数吗？为什么？
2. 求 $(1+i)^i$ 的值，并指出主值. $(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln 2 + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$
3. 求 $I = \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,dz$ 的值.
4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(6+5i)^n}{8^n}$ 是条件收敛还是绝对收敛. $\left|\frac{6+5i}{8}\right| < 1$. 绝对收敛
5. 求函数 $f(z) = \cos\frac{1}{1-z}$ 在奇点 $z=1$ 处的留数.
6. 求函数 $f(t) = t\sin t$ 的 Laplace 变换式. $\mathcal{L}[f(t)] = -(\mathcal{L}[\sin t])' = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$.
7. 利用留数求 $F(s) = \frac{1}{5+s}$ 的 Laplace 逆变换. $\frac{1}{5+s} = \mathcal{L}[e^{-5t}u(t)]$.
8. 问：$|z-2| + |z+2| < 7$ 表示什么区域？ $\sum \mathrm{Res}(F(s)e^{st}, s_k)$
9. 求复数 $z = \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$ 的共轭复数，模和幅角.
10. 求方程 $\sin\frac{1}{z} = 0$ 的全部解.

二、（本题满分 8 分）验证 $v = 2xy$ 是调和函数，并求解析函数 $f = u + iv$.

三、（本题满分 10 分）将函数 $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$ 分别在 $0 < |z| < 1$ 和 $1 < |z| < +\infty$ 展开成洛朗级数. 进一步，是否可以把 f 在 $0 < |z-3| < 3$ 展开成洛朗级数？为什么？

四、（本题满分 16 分，每小题 8 分）利用留数计算下列积分：

1. $J = \int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\,d\theta$.
2. $K = \oint_C \frac{1}{z^{15}+1}\,dz$，其中 C 为正向圆周：$|z| = 2$. 0

五、（本题满分 16 分，每小题 8 分）解下列方程：

1. 利用 Laplace 变换解常微分解方程：

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

2. 利用 Laplace 变换解积分微分解方程：

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1.$$