2017级第一学期《高等数学》期中考试试卷 (A类)

一、单项选择题（每小题3分，共15分）：(每题有且只有一个正确的选项。)

1. 当 $x\to 0$ 时，$2x+x^2-\sin x$ 的主部是 （　　）

（A） x；　（B） $2x+x^2$；　（C） $x+x^2$；　（D） $2x-\sin x$。

2. 已知正数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的部分和分别为 S_n 和 T_n，且 $a_n\le b_n$，$n\in\mathbf{Z}^+$，则（　　）

（A）$\{a_n\}$ 收敛时，$\{b_n\}$ 收敛；　（B）$\{b_n\}$ 收敛时，$\{a_n\}$ 收敛；

（C）$\{S_n\}$ 收敛时，$\{T_n\}$ 收敛；　（D）$\{T_n\}$ 收敛时，$\{S_n\}$ 收敛。

3. 已知曲线 C 由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 所确定，那么 C 在点 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 （　　）

（A） $y=-\dfrac{2+\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$；　（B） $y=\dfrac{2-\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$；

（C） $y=\dfrac{2+\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$；　（D） $y=\dfrac{\pi-2}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)+f(x)>0$。对于下列两个命题：

（I） $f(x)$ 至多只有一个零点；

（II）若 $f(x)$ 存在最小值，则 $f(x)>0$ ($x\in\mathbf{R}$)，

正确的选项是 （　　）

（A）仅（I）正确；　（B）仅（II）正确；

（C）（I）和（II）都正确；　（D）（I）和（II）都错误。

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内可导，且 $f(0)=0$。已知下列两个条件：

（I） $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小；

（II） $x\to 0$ 时，$f'(x)$ 是无穷小，

则条件(I)是条件(II)的 （　　）

（A）充分但非必要条件；　（B）必要但非充分条件；

（C）充分且必要条件；　（D）既非充分又非必要条件。

二、填空题（每小题3分，共15分）

6. 函数 $f(x)=x-\arctan x$ 的零点的个数为：__________。

7. 函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}+x\ln^4|x|$ 的第一类间断点是 $x=$__________。

8. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)-a\cdot f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，其中 a 是非零常数，则 $f(x)=$__________。

9. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^4+1}+(x+1)^x$，则 $\mathrm{d}f\big|_{x=0}=$__________。

10. 已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$______________。

三、(每小题 8 分，共 16 分)

11. 用极限定义验证：$\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{x+3}=2$。

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos x-x^2}{x^4}$。

四、(第 13 题 8 分，第 14 题 10 分，共 18 分)

13. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$（$a$ 和 b 是常数）在 $\mathbf{R}$ 上可导，求 a,b 及 $f'(x)$。

14. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+\mathrm{e}^2}$，$g(x)=x+\mathrm{e}^2-x\ln x$。

（1）证明：$x=\mathrm{e}^2$ 是 $g(x)=0$ 的唯一解；

（2）求 $f(x)$ 的最大值；当 $f(x)=a$ 有唯一解时，求 a 的取值范围。

五、(每小题 8 分，共 16 分)

15. 设函数 $f(x)=(x+a)^2\ln(x+a)$（常数 $a>0$），求 $f^{(n)}(a)$（$n=1,2,\ldots$）。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_n^3}{2}$，$n=1,2,\cdots$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

六、(本题 12 分)

17. 全面讨论函数 $y=x^4\mathrm{e}^{-x}$ 的性态，并作出它的图形。

（$y'=(4x^3-x^4)\mathrm{e}^{-x}$，$y''=(12x^2-8x^3+x^4)\mathrm{e}^{-x}$）

七、(本题 8 分)

18. 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f'(a)=f''(a)=0$。

（1）求 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}$；

（2）若 $f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $(\xi-a)^2 f''(\xi)-2f(\xi)=0$。