2011－2012 学年第二学期

遥感学院线性代数期中考试试题答案

1.（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$。

解　从第 2 行开始，每一行乘以（-1）加到上一行，再从第 1 列开始，每列加到后 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2+a_2 & a_1+a_2+a_3 & \cdots & x+\sum_{i=1}^{n} a_i \end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n} a_i).$$

2．（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$. 已知 $|A|=1$，求 $|B|$.

解　由行列式的性质，可得

$$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\right|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2\text{。}$$

3.（10 分）若 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -12 & 134 \end{vmatrix}$，求：

（1）第 4 行元素的余子式之和；　（2）第 4 行元素的代数余子式之和。

解　（1）由余子式和代数余子式关系、展开定理得：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\overset{r_3}{=}(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\overset{r_2+2r_3}{=}7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\cdot 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-28$$

（2）逆用展开定理：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$。

4.（10 分）已知 A,B 都是 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$，其中 I 是 3 阶单位矩阵，

（1）证明 $A-2I$ 是可逆矩阵，并求 $(A-2I)^{-1}$；　（2）若矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A。

解 1）由题设知$(A-2I)(B-4I)=8I$，即$(A-2I)[\frac{1}{8}(B-4I)]=I$ 故$A-2I$ 可逆，且$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4I)$

2）由 1）知$A-2I=[\frac{1}{8}(B-4I)]^{-1}=8[B-4I]^{-1}$，$A=2I+8[B-4I]^{-1}$，又

$$(B-4I)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{pmatrix}，A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}。$$

5．（10 分）设$A=E-\xi\xi^T$，其中E是n阶单位矩阵，ξ是n维非零列向量，ξ^T是ξ的转置，证明：

（1）$A^2=A$的充要条件是$\xi^T\xi=1$；　（2）当$\xi^T\xi=1$时，A是不可逆矩阵。

解　（1）$A^2=(E-\xi\xi^T)(E-2\xi\xi^T)=E-2\xi\xi^T+\xi(\xi^T\xi)\xi^T=E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T$

因此$A^2=A\Leftrightarrow E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T=E-\xi\xi^T\Leftrightarrow(\xi^T\xi-1)\xi\xi^T=0$

因为$\xi\neq0$，所以$\xi\xi^T\neq0$故$A^2=A$的充要条件为$\xi^T\xi=1$

（2）方法一：当$\xi^T\xi=1$时，由$A=E-\xi\xi^T$，有$A\xi=\xi-\xi\xi^T\xi=\xi-\xi=0$，

因为$\xi\neq0$故$Ax=0$有非零解，因此|A|=0,说明 A 不可逆

方法二：当$\xi^T\xi=1$，由$A^2=A\Rightarrow A(E-A)=0$，即 E－A 的每一列均为$Ax=0$的解，

因为$E-A=\xi\xi^T\neq0$,说明$Ax=0$有非零解，故秩(A)<n,因此 A 不可逆

方法三：用反证法。假设 A 可逆，当$\xi^T\xi=1$，有$A^2=A$

于是$A^{-1}A^2=A^{-1}A$，即$A=E$，这与$A=E-\xi\xi^T\neq E$矛盾，故 A 时不可逆矩阵

6．（8 分）设A和B均为n阶矩阵，且满足$A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$。

证　因为$A(A+B-E)=A^2+AB-A=AB$，　$(A+B-E)B=AB+B^2-B=AB$，

由$(A+B-E)$为可逆矩阵，可得：

$r(A(A+B-E))=r(A)=r(AB)$，$r((A+B-E)B)=r(B)=r(AB)$，所以，$r(A)=r(B)$

7．（12 分）设有线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=3\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1\end{cases}$.

讨论λ为何值时,方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

解　经计算系数行列式得$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,于是由克莱姆法则有如下结论：

(1)当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，$r(A)=r(B)=3$,方程组有唯一解；

(2)当$\lambda=1$时，$r(A)=1$，$r(B)=2$，该情形方程组无解；

(3)当$\lambda=-2$时，$r(A)=r(B)=2$,，此时方程组有无限多个解。而

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\\x_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$(c\in R)$.

8．（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$，

（1）问 a,b,c 为何值时，$R(A,B)=R(A)$？　　（2）求矩阵方程 $A\boldsymbol{X}=B$ 的全部解。

解　$AX=B$ 有解，须 $R(A)=R(A\,\vdots\,B)$，对矩阵 $(A\,\vdots\,B)$ 作初等行变换：

$$(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&a-1&b-1&c-1\end{array}\right)$$

由此看出 $R(A)=2$, 欲 $R(A\,\vdots\,B)=2$ 须 $a=1,b=1,c=1$. 所以 当 $a=1,b=1,c=1$ 时 $AX=B$ 有解。

当 $a=b=c=1$ 时，将上面最后一个矩阵进一步化为行简化阵

$$(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-k_1\\k_1\end{pmatrix}$ （k_1为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_2\\1-k_2\\k_2\end{pmatrix}$ （k_2为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_3\\-1-k_3\\k_3\end{pmatrix}$ （k_3为任意常数）

故所求矩阵方程的通解为 $X=\begin{pmatrix}1-k_1&1-k_2&1-k_3\\-k_1&1-k_2&-1-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$ （k,k_2,k_3为任意常数）.

9．（10 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B。

解　解法一　由 $AA^*=A^*A=|A|E$，知 $|A^*|=|A|^{n-1}$，因此有

$8=|A^*|=|A|^3$，于是 $|A|=2$

在等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}=3E$ 两边先右乘 A，再左乘 A^*，得

$(2E-A^*)B=6E$，

$$于是 B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

解法二　$|A|=2$（同解 1）。由 $AA^*=|A|E$，得

$$A=|A|(A^*)^{-1}=2(A^*)^{-1}=2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&\frac{3}{8}&0&\frac{1}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

可见 A-E 为可逆矩阵，于是由 $(A-E)BA^{-1}=3E$，有 $B=3(A-E)^{-1}A$，而

$$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$$因此 B=3\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

10.（10 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，X 为 n 维实向量，证明：方程组 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 与 $A\boldsymbol{X}=O$ 同解。

证　显然 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解均是 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解。

下面证 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解也为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解。事实上，设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的任一解，即 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x_0}=\boldsymbol{o}$，两端左乘 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}$ 得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，即 $(A\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{o}$，向量 $A\boldsymbol{x}_0$ 的长度的平方为零，所以 $A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{o}$，于是 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解。由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性知 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解均是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的解。故齐次线性方程组 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 与 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 同解。