—武大本科生课程

“ MLPR第4讲、第5讲”贝叶斯决策

----概率论基础知识回顾及补充

武汉大学计算机学院 李雪飞

Email: snowfly_li@163.com

一. 模式识别的两类研究对象

模式识别的重要目的是要确定某一给定的模式样本属于哪一类。

我们通过对被识别对象的多种观察和测量构成特征向量，并将其作为某一判决规则的输入，依此规则对样本进行分类。在这个过程中，最初获取模式观察值时会遇到两种情况：

1.事物间有确定的因果关系-确定性事件

即某一事件在一定条件下必然会发生或必然不发生。如，根据“三条直线边的闭合和一个直角”这一特征，就完全可以确定是直角三角形，这是确定性现象(Deterministic phenomena)。“第3章 线性判别分析”的模式判别就是基于这类现象，一个模式要么属于这一类，要么属于其他类。

2.事物间没有确定的因果关系-随机事件

在许多实际情况中，由于存在噪声和缺乏测度模式向量的完整信息，有些观察数据具有不确定的特点，有时属于某一类，有时又不属于该类，只有在大量重复的观察下才会呈现出某种规律性。也就是说，对它们观察得到的特征具有统计特性，特征向量不再是一个确定的向量，而是随机向量，其分量是随机变量。

基于随机现象(Random/Stochastic phenomena)的随机模式向量只能利用模式集的统计特性来分类，以使分类器发生分类错误的概率最小，这就是“基于统计决策理论的概率分类法”所要讨论的问题。这时不能说一个模式一定属于某一类，只能说它属于某一类的可能性(概率)有多大。

二. 概率论基础(知识回顾)

1.概率的性质

1)不可能事件$\varnothing$的概率为0,即$P(\varnothing)=0$;

2)$P(\overline{A})=1-P(A)$, 这里$\overline{A}$为A的补事件或A的对立事件;

3)设A,B是两个随机事件, 有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

其中, $P(AB)$为A,B同时发生的概率/联合概率, $P(A\cup B)$为A,B的并事件的概率.

2. 条件概率

设A, B为两个随机事件, $P(B)>0$, 称已知事件B发生条件下事件A发生的条件概率为 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

3.条件概率的三个重要公式

1)概率乘法公式(Product rule,乘积规则)

若P(A)>0,则A,B的联合概率P(AB)=P(A)P(B|A);

若P(B)>0,则A,B的联合概率P(AB)=P(B)P(A|B);

2)全概率公式

设事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互斥,且

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega,\ P(A_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

则对任一事件B,有如下全概率公式:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

直观上看,全概率公式是从“原因”A_i推出“结果”B发生的概率计算公式。

3) 贝叶斯公式(*Bayes Theorem*)

在前面全概率公式的条件下,若再有P(B)>0,则有如下贝叶斯公式:

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

直观上,**贝叶斯公式**是已知“结果”B发生,推出某个“原因”A_i发生的后验概率。

三.模式识别中常用的三个概率

1. 先验概率$P(\omega_i)$

指事先根据大量的统计资料得出的ω_i类样本出现的概率.

先验概率来源于先前的知识和经验,与现在无关,提供的分类信息很少.

2. 后验概率$P(\omega_i|\mathbf{x})$

后验概率与先验概率相对应, 指得到一批观察样本数据后统计出的$\mathbf{x}$属于ω_i类的概率.

3. 条件概率$P(\mathbf{x}|\omega_i)$

指已知属于ω_i的样本$\mathbf{x}$发生某种事件的概率.

分类中常用条件概率密度/类条件概率密度,也称条件概率密度函数/类概率密度函数,统计学中称为似然函数(Likehood function).ω_i类的类概率密度函数表示为$p(\mathbf{x}|\omega_i)$.

如,要对一批患者进行一项化验,可以用ω_1代表患病人群,患者的化验结果就是特征向量的值,仍用$\mathbf{x}$表示.由于化验结果不是阴性就是阳性,因此这里的$\mathbf{x}$是一维特征向量,只有两个取值.那么"对一批患者进行一项化验,结果为阳性的概率为95%"可以表示为

$P(\mathbf{x}=$阳性$|\omega_1)=0.95$;也可以先设$\mathbf{x}=$阳性,写成$P(\mathbf{x}|\omega_1)=0.95$.

分类中常用条件概率密度/类条件概率密度,也称条件概率密度函数/类概率密度函数,统计学中称为似然函数(Likehood function).

ω_i类的类概率密度函数表示为$p(\mathbf{x}|\omega_i)$.

例：一个二类问题，ω_1类表示某地区患有某病的人群，ω_2类表示无此病的人群.

那么：

先验概率P(ω_1)表示该地区居民患有此病的概率；

先验概率P(ω_2)表示该地区无此病的概率；

这两个值可以通过大量的统计资料得到.

如果采用某种方法检测是否患病，设$\mathbf{x}$表示″试验反应呈阳性″，那么：

$P(\mathbf{x}|\omega_2)$表示无病的人群做该实验时反应呈阳性（显示有病）的概率；

$P(\omega_2|\mathbf{x})$表示试验反应呈阳性的人中，实际无病者的概率.

从上面的概率可以看出，诊断病情需要多种手段，用一种方法诊断为可能有病时，还要综合其他的结果才能最后确诊.

类似地，也有ω_i类的条件概率和后验概率.

4. 三个概率之间的关系

设有M类模式，根据贝叶斯定理(*Bayes Theorem*)，可以得到后验概率，先验概率和类条件概率密度函数之间的关系为：

$$\boxed{\mathrm{p}(\omega_i|\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|\omega_i)\mathrm{P}(\omega_i)}{\mathrm{P}(\mathbf{x})}}=\frac{p(\mathbf{x}|\omega_i)\mathrm{P}(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{M}p(\mathbf{x}|\omega_i)\mathrm{P}(\omega_i)}$$

1) $p(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{M}p(\mathbf{x},\omega_i)=\sum_{i=1}^{M}p(\mathbf{x}\ \omega_i)$ ---- *Sum rule*(加和规则)

这里$p(\mathbf{x})$为边缘概率(*marginal probability*)，简述为"$\mathbf{x}$的概率"

2) $p(\mathbf{x},\omega_i)=p(\mathbf{x}|\omega_i)\mathrm{P}(\omega_i)$ ---- *Product rule*(乘积规则)

四. 正态分布模式的贝叶斯决策数学基础

正态分布广泛存在于自然、生产及科学技术的众多领域中，对许多实际情况都是一种合适的模型。同时，正态分布又具有很多好的性质，有利于做数学分析，因此受到人们的高度重视。它在19世纪前叶由高斯加以推广，所以又称为高斯分布。

如果特征空间中的某一类样本较多地分布在其均值附近，远离均值点的样本较少，此时用正态分布作为概率模型是合理的。

前面的贝叶斯方法应用范围很广，但事先必须求出$p(\mathbf{x}|\omega_i)$和$P(\omega_i)$才能做出判决，这一工作一般做起来比较繁杂．当$p(\mathbf{x}|\omega_i)$呈现正态分布时，将会使决策简化，这时不再需要求$p(\mathbf{x}|\omega_i)$的具体函数形式，只需要知道它的均值向量$\boldsymbol{\mu}$和协方差矩阵Σ这两个参数即可．

相关知识介绍：

1. 二次型

设向量$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$，矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，则$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$称为二次型．

它表示一个二次齐次多项式，即$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$．二次型中的矩阵$\mathbf{A}$是一对称矩阵．

2. 正定二次型

$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$($\mathbf{x}$分量不全为零), 总有$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$, 则称此二次型是正定的, 而其对应的矩阵**A**称为正定矩阵.

3. 单变量正态分布

单变量正态分布的概率密度函数定义为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<\infty$$

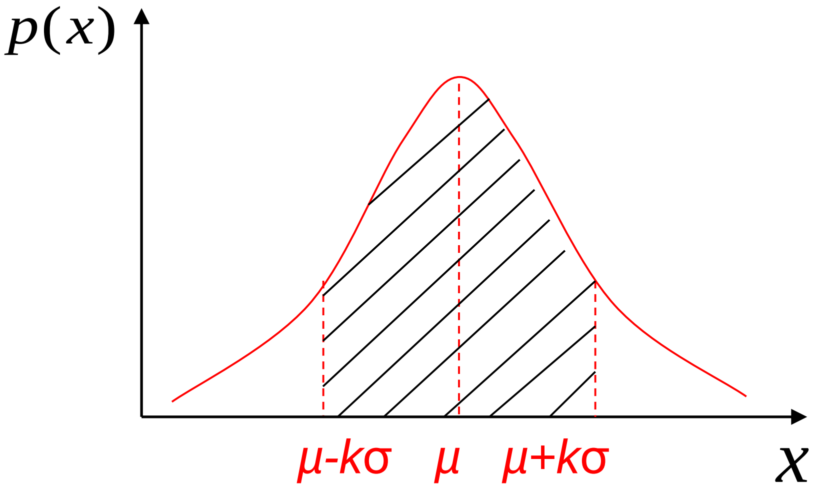
式中, μ为随机变量x的期望/均值; σ^2为x的方差; σ为标准差.

$$\mu=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

$$\sigma^2=E\{(x-\mu)^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)dx$$

μ一定时,曲线的形状由σ确定. σ越大,曲线越"矮胖", 表明总体分布越分散;反之σ越小,曲线越"廋高", 表明总体分布越集中.

4. 3σ原则



$$P\{\mu-k\sigma\le x\le\mu+k\sigma\}=\begin{cases}0.683 & k=1\\ 0.954 & k=2\\ 0.997 & k=3\end{cases}$$

如右图所示,曲线下面的阴影部分的面积为概率P的值. 上式表明从正态总体中抽取的样本绝大部分都落在均值μ附近$\pm3\sigma$的范围内,因此正态分布概率密度曲线完全可以由均值和方差来确定, 常简记为:

$$p(x)\sim N(\mu,\ \sigma^2)$$

服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$的随机变量x取在$\mu\pm3\sigma$范围内的概率几乎达到1,这就是3σ原则. 3σ原则比较定量地说明了正态分布的"两头小, 中间大"的特点.

5. 多变量正态分布

多变量正态分布的概率密度函数与单变量类似, 定义为

$$p(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma\right|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\}$$

式中 : $\mathbf{x}=[x_1, x_2, . . . , x_n]^T$, $\boldsymbol{\mu}=[\mu_1,\mu_2,...,\mu_n]^T$ 为均值向量;

$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2\end{bmatrix}$为协方差矩阵, 是对称正定矩阵, 独立元素

有$n(n+1)/2$个.$\left|\Sigma\right|$为Σ的行列式,Σ^{-1}为Σ的逆矩阵.

多维正态分布的概率密度函数完全由n个均值元素和协方差矩阵的$n(n+1)/2$个独立元素所确定，简记为$p(\mathbf{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.当$\mathbf{x}$的全部分量两两统计独立时，协方差矩阵$\Sigma$全部非对角线上的元素都为零，多变量正态分布概率密度函数可以简化成n个单变量正态分布概率函数的乘积.

以二维正态分布概率密度函数为例，它的等密度线（等高线）投影到x_1ox_2面上为椭圆（见图所示），$\boldsymbol{\mu}$是均值向量，决定椭圆的位置．椭圆的形状由协方差矩阵Σ决定，椭圆在平行于x_1轴的方向上受x_1的方差σ_{11}^2的影响，在平行于x_2轴的方向上受x_2的方差σ_{22}^2的影响，在其他方向上受x_1和x_1的协方差σ_{ij}^2的影响，这里$i, j=1, 2$且$i \neq j$．椭圆的主轴方向由Σ的特征向量决定，主轴的长度与相应的特征值成正比．