

《常微分方程》期末考试试卷 (A)

(2020-2021 学年度上学期, 经济与管理学院 金融学专业)

一、求解如下问题 (每题 10 分, 共 80 分)

1. 求方程 $xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}$ 的通解.
2. 求方程 $(2x^2 + 3y^2 - 7)x dx + (3x^2 + 2y^2 - 8)y dy = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解.
3. 求方程 $xy' - 4y = x^3 \sqrt{y}$ 的通解.
4. 求方程 $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 3xy' = x$ 的通解.
5. 求方程 $y' = -2 + xe^{2x+y}$ 的通解.
6. 已知 α 和 β 为常数, 求 α, β 的取值范围, 使得微分方程组 $\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} -2 & \beta & 0 \\ \beta & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} Y$ 满足任意初始条件的解 $Y(x)$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = \vec{0}$.
7. 已知常系数三阶线性齐次微分方程 $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ 的通解为 $\tilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}, x \in (-\infty, +\infty)$, 求此微分方程的具体形式. 并利用待定系数法, 给出其对应非齐次方程 $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = x^2 + 3x + 1 + x e^x$ 特解 $y^*(x)$ 的具体形式 (不必具体求出待定的系数值).
8. 判断微分方程 $y' = -x + \sqrt{x^2 + 2y}$ 是否有奇解? 如果有奇解, 求出奇解.

二、证明 (每题 10 分, 共 20 分)

1. 讨论微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + \cos^2(x + y)}$ 过平面上任意初始点 (x_0, y_0) , 其解的存在性、唯一性以及解的存在区间, 并对其结果予以证明.
2. 若函数 $p_i(x), i = 1, 2, 3$ 满足 $\beta^2 p_1(x) + \beta p_2(x) + p_3(x) = 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 其中 β 为某个非零常数, 证明线性齐次微分方程 $p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$ 必有一解 $y(x) = e^{\beta x}$. 试求微分方程 $(x-2)y'' - xy' + 2y = 0$ 的通解.