2003～2004 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 B 卷（216 学时）

专业班级____________________学号________________ 姓名__________

一、填空题：（5×4 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} 2x+a & x\le 0 \\ e^{x}(\sin x+\cos x) & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$______

2、极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-1}{x\ln x}=$______。

3、星形线 $x=2\cos^{3}\theta$，$y=2\sin^{3}\theta$ 在点$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$处的曲率半径为__________.

4、曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})\quad (x>0)$ 的渐近线方程为______

5、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n}$ 的收敛半径为 3,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n}(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径 $R=$_____

二、选择题：（5×4 分）

1、设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点, 则______。

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　B. $[\varphi(x)]^{2}$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2、设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ 则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为______

A. 2　　B. −1　　C. 1　　D. −2

3、设 $I_{1}=\int_{0}^{\pi/4}\dfrac{\tan x}{x}dx,\quad I_{2}=\int_{0}^{\pi/4}\dfrac{x}{\tan x}dx,$ 则______.

A、 $I_{1}>I_{2}>1$；　B、$1>I_{1}>I_{2}$；　C、$I_{2}>I_{1}>1$；　D、$1>I_{2}>I_{1}$.

4、对于常数 $k>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{n^{2}}\right)$________

A、绝对收敛　　**B**、条件收敛　　**C**、发散　　**D**、收敛性与 k 的取值相关

5、设函数 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^{2}(x)$, 则 $f^{(n)}(x)=$______$(n>2)$.

A、$n!f^{n+1}(x)$　　**B**、$nf^{n+1}(x)$　　**C**、$f^{2n}(x)$　　**D**、$n!f^{2n}(x)$

三、计算下列各题：（6×5 分）

1、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$

2、设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(n)}$

3、求不定积分：$\int\dfrac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$ ；

4、对广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^k}$ 求解下列问题：

1）、当 k 为何值时,该积分收敛或发散？

2）、在收敛的情况下，k 取何值时，该积分取最小值？

5、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 的下凸区间.

6、设 $p(x)$ 是一个多项式，且方程 $p'(x)=0$ 没有实零点. 试证明方程 $p(x)=0$ 既无相异实根，也无重实根.

四、(8 分)设 $f''(1)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$，求 $\varphi(x)$ 在 x=1 某个邻域内的导数，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 x=1 处的连续性。

五、(7 分) 求曲线 $y=\ln x$（$2\le x\le 6$）的一条切线，使得该切线与直线 $x=2, x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积 A 为最小。

六、(8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，又 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，证明：

（1）$F'(x)\ge 2$；（2）$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

七、（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx.$$