武汉大学2015-2016学年第二学期末
《高等数学C2》试卷(A卷)参考答案

一. 计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{x}{1+\tan^2 x}+\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x+\sin^2 x}\right]\mathrm{d}x$.(7分)

解.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{x}{1+\tan^2 x}+\frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x+\sin^2 x}\right]\mathrm{d}x\\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2 x)(2+\tan^2 x)}\mathrm{d}\tan x\ \ (4分)\\
=&2\int_0^1\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
=&2\left[\arctan t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.\qquad (3\ 分)
\end{aligned}$$

二. 计算$\int_0^5\sqrt{x^2-6x+9}\mathrm{d}x$.(7分)

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^5\sqrt{x^2-6x+9}\mathrm{d}x&=\int_0^5|x-3|\mathrm{d}x\\
&=\int_0^3(3-x)\mathrm{d}x+\int_3^5(x-3)\mathrm{d}x \qquad (4分)\\
&=\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^5=\frac{13}{2}. \qquad (3分)
\end{aligned}$$

三. 设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上连续的偶函数, 证明$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数. (7分)

证. 令$u=-t$, 则$t=0$时, $u=0$, $t=-x$时, $u=x$, 且$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$(3分).

故有,

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x).p$$

因此, $F(x)$为偶函数(4分).

四. 计算$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.(6分)

解.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \qquad (3分)$$
$$=\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]_1^{\infty}=1-\frac{\pi}{4}. \qquad (3分)$$

五. 设$z=xe^{-xy}+\sin(xy)$, 求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}$. (7分)

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)e^{-xy}+y\cos(xy) \qquad (4分)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}+x\cos(xy). \qquad (5分)$$

六. 设函数$z=z(x,y)$由方程$e^z=3x+2y-1-z$确定, 求$\mathrm{d}z,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (7分)

解. 令$F(x,y,z)=3x+2y-1-z-e^z$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=\frac{3}{1+e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=\frac{2}{1+e^z}. \quad (4分)$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{3}{1+e^z}\mathrm{d}x+\frac{2}{1+e^z}\mathrm{d}y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{3}{1+e^z}=-\frac{6e^z}{(1+e^z)^3}. \quad (3分)$$

七. 在椭圆$x^2+9y^2=4$的第一象限部分上求一点, 使椭圆在该点的切线位于两坐标轴之间的一段长度为最短, 并求最短长度. (7分)

解. 设椭圆上的点为(x_0,y_0), 则过该的切线方程为$y-y_0=-\frac{x_0}{9y_0}(x-x_0)$, 即$x_0x+9y_0y=4$. 切线与坐标轴的交点为$(\frac{4}{x_0},0),(0,\frac{4}{9y_0})$. 切线位于坐标轴间线段长度的平方为$S=\frac{16}{x_0^2}+\frac{16}{81y_0^2}$(3分).构造拉格朗日函数

$$L(x,y)=\frac{16}{x^2}+\frac{16}{81y^2}+\lambda(x^2+9y^2-4).$$

令$L'_x=-\frac{32}{x^3}+2\lambda x=0, L'_y=-\frac{32}{81y^3}+18\lambda y=0$. 解得$y=\frac{1}{3\sqrt{3}}x$. 代入$x^2+9y^2=4$, 得$x=\sqrt{3}, y=\frac{1}{3}$. $(\sqrt{3},\frac{1}{3})$是惟一可能的极值. 因此, 切线位于两坐标轴之间的一段的最短长度为$\frac{8}{3}$.(5分)

八. 计算二重积分$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由抛物线$y=\sqrt{x}$及$y=x^2$所围成的区域. (7分)

解. 两抛物线$y=\sqrt{x}$, $y=x^2$的交点为$(0,0)$与$(1,1)$. 故

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}\mathrm{d}y \qquad (3分)$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x\, y^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1(x^{\frac{7}{4}}-x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{4x^{\frac{11}{4}}}{11}-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{6}{55}. \qquad (4 分)$$

九. 计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2}$.(6分)

解. 由$\frac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}$, (2分)

$$s_n=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}=1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2},$$

$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{5}{4}$.(4分)

十. 讨论级数 a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$; b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{2n+3}$的敛散性.(8分)

解. (a) 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2}=\frac{e}{2}>1,$$

级数发散.(4分)

(b) 令$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{2x+3}$，则$f'(x)=-\frac{2x+4\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}(3+2x)^2}<0, x\geq 1$. 因此,$u_n=\frac{\sqrt{n}+1}{2n+3}$调单调下降. 又由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 级数收敛. 但$|(-1)^{n+1}u_n|>\frac{1}{2n}$, 调和级数发散. 故原级数条件收敛. (4分)

十一. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2nx^{2n-1}$的收敛域与和函数, 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{2^{2n-1}}$的值.(9分)

解. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n}x^2=x^2$, 当$|x|<1$时, 级数收敛. 当$x=1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2n$发散. 当$x=-1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2}2n$也发散. 故幂级数的收敛域为$(-1,1)$. (4分)

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2nx^{2n-1}$, 则$F(x)=\int_0^x s(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}$. 于是, $s(x)=F'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{2^{2n-1}}=s(\frac{1}{2})=\frac{16}{25}$. (5分)

十二. 求解微分方程$x(1-y)y'+y=0$.(7分)

解. 分离变量得, $\frac{1-y}{y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.(3分) 积分得, $\ln|y|-y=-\ln|x|+C_1$. 故方程的通解为$e^y=Cxy$.(4分)

十三. 求微分方程初值问题$y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{1}{x(1+x^2)}, y(1)=\frac{1}{2}$的解.(7 分)

解. 该方程的通解为:

$$
\begin{aligned}
y=&e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}(C+\int\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)\\
=&\frac{1}{1+x^2}(C+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x)=\frac{C}{1+x^2}-\frac{\ln x}{1+x^2}. \qquad (5\text{ 分})
\end{aligned}
$$

由初值条件. $C=1$. 原初值问题的解为: $y=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\ln x}{1+x^2}$.(2分)

十四. 求微分方程$y''-2y'+4y=\sin x$的通解.(8分)

解. 对应的齐次方程的特征方程为: $\lambda^2-2\lambda+4=0$. 特征根为:

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$. 对应齐次方程的通解为:

$$Y = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x. \qquad (4分)$$

设非齐次方程的特解为: $y^* = a\cos x + b\sin x$. 代入方程得: $(3a - 2b)\cos x + (2a + 3b)\sin x = \sin x$. 解方程 $\begin{cases} 3a - 2b = 0, \\ 2a + 3b = 1 \end{cases}$ 得, $a = \frac{2}{13}, b = \frac{3}{13}$.

由此, 微分方程的解为:

$$y = Y + y^* = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x + \frac{1}{13}(2\cos x + 3\sin x). \quad (4分)$$