

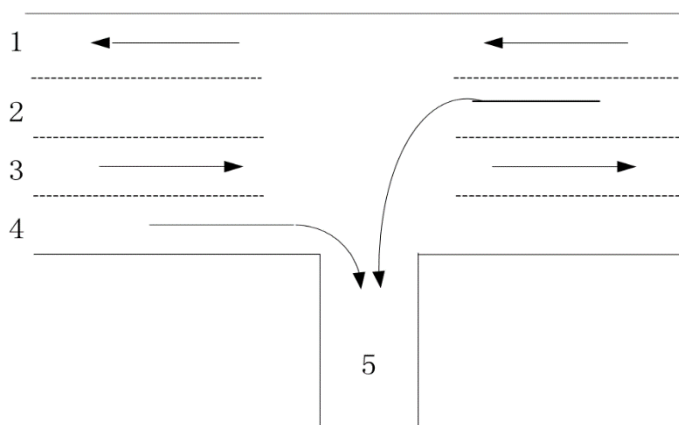
习题二

何泽楷 2017301020154

问题重述

对丁字路口进行建模,使得通行效率最高. 每条车道的车流量见下表

车道	车辆数
1	20
2	12
3	18
4	10



路口图示

分析

车道 1 仅直行, 车道 4 仅右转, 不影响其它车道, 故车道 1, 4 不设红绿灯. 车道 2 左转影响车道 3, 应在 2, 3 车道设置互斥的红绿灯.

解题思路

优化目标为“通行效率”. 设红绿灯周期为 t , 在一个红绿灯周期中, 车道 2 的绿灯时间为 t_g . 定义度量路口通行效率的函数 $f(t_g, t)$ 如下:

$$f(t_g, t) = \frac{12 t_g}{60 t} + \frac{18}{60} \left(\frac{t - t_g}{t} \right)$$

其意义是平均每秒通过路口的车辆数(只考察设置了红绿灯的 2, 3 车道). 为保证路口通过的公平性, 人为规定路口 2 绿灯时间 t_g 占红绿灯周期 t 的比例不超过60%, 不低于40%, 则优化目标为

$$\begin{aligned} \max \quad & f(t_g, t) \\ \text{s. t.} \quad & 0.4t \leq t_g \leq 0.6t, t > 0 \end{aligned}$$

等价问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & -f(t_g, t) \\ \text{s. t.} \quad & 0.4t \leq t_g \leq 0.6t, t > 0 \end{aligned}$$

这是一带约束条件的优化问题,可用 MATLAB 中的 fmincon 函数求解(需要 Optimization Toolbox).

代码

定义优化目标函数 ex02(保存在文件 ex02.m 中),代码如下:

```
function [outputArg1] = ex02(X)
%EX02 function to optimize for Exercise 02
% Average cars per seconds, negate the result to convert maximum opti
m.
% problem to minimum optimization problem
outputArg1 = -(0.2 .* X(:,1) ./ X(:,2) + 0.3 .* (1 - X(:,1)./X(:,2)));
end
```

在脚本文件 ex02_script.m 执行优化函数并显示结果,代码如下:

```
%% ex02_script
% Script for finding optimal result for problem in Exercise 2
clc; clear ex02;
A = [-1,0.4;1,-0.6]; % linear constraint matrix for 0.4t<=t_g<=0.6t, t >
0
% start with t_g=15 secs and t=30 secs
[x, fval] = fmincon('ex02', [15, 30], A, zeros(2,1), ...
    [], [], [0, 0], []);
fprintf("\ngreen light time: %gs, traffic light peroid: %gs\n", x);
fprintf("Optimal cars per seconds: %g\n", -ex02(x));
```

此处使用了 `[x, fval] = fmincon(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB)` 函数接口,表示对给定函数 FUN 从 X0 开始在 $A \cdot X \leq B$, $Aeq \cdot X = Beq$ 的约束下,在 $LB \leq X \leq UB$ 的范围内函数的最小值,返回最小值点 x 和最小值 fval.

运行示例

输入

```
>> ex02_script
```

得到运行结果

```
Local minimum found that satisfies the constraints.
```

```
Optimization completed because the objective function is non-decreasing
in
feasible directions, to within the value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the constraint tol
erance.
```

<stopping criteria details>

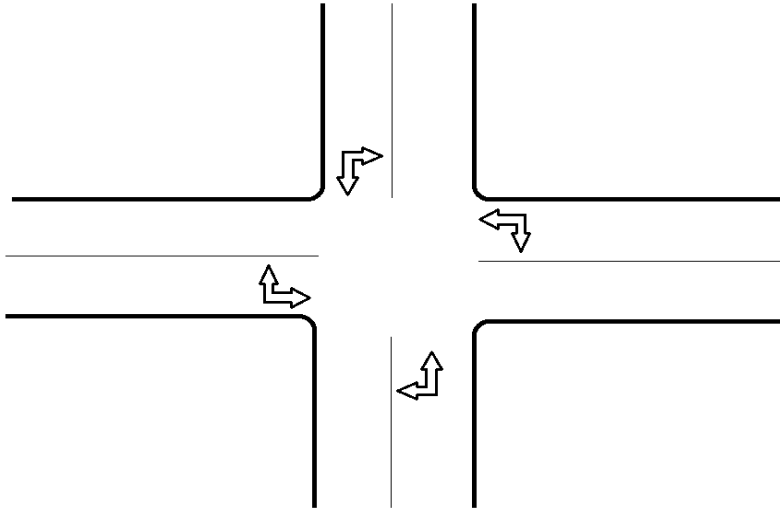
green light time: 12.5363s, Traffic light peroid: 31.3408s

Optimal cars per seconds: 0.26

结果表明对车道 2 设置绿灯的最优时长为13s, 总的红绿灯周期为31s, 在此情况下路口通行效率为每秒0.26辆.

拓展

将问题拓展至如下十字路口.



十字路口图示

一个方向的左转车流会影响其它所有方向的直行和左转车(对向同时左转可能有一定的危险), 故要对每个来向的左转车流设灯控制, 此来向的直行车流随左转车流同时通行. 右转车不影响其它车辆通行, 不设灯控制, 也未在图示中画出. 设东西南北四个方向的车流量分别为 n_E, n_W, n_S, n_N (单位: 辆/秒), 相应的绿灯时间为 t_E, t_W, t_S, t_N (单位: 秒), 同时设车辆需要 $t_0 = 2.3s$ 的时间通过路口, 则一个周期的时间为 $T = t_E + t_W + t_S + t_N$, 则单位时间内平均车流量为

$$f(t_E, t_W, t_S, t_N) = \sum_{D \in \{N, W, S, N\}} \frac{n_D(t_D - t_0)}{T}$$

同样, 出于公平性将每个方向的绿灯时间限定在总时间的20%以上, 则优化目标为

$$\begin{aligned} \min \quad & -f(t_E, t_W, t_S, t_N) \\ \text{s.t.} \quad & 0.2T \leq t_D, \quad \sum_D t_D = T, \quad t_D > t_0, \quad D \in \{E, N, W, S\}. \end{aligned}$$

使用 MATLAB 的 Optimization Toolbox 中的 `linprog` 函数求解以上线性规划问题, 代码如下(保存在 `ex02_crossroads_script.m` 中):

```

%% ex02 crossroads
clc; clear;
fprintf("\nThe crossroad part begins:");
N = [20, 12, 18, 10] / 60; % cars from four directions(ENWS) per second
t_0 = 2.3; % time needed for a car to go through the crossroad
f = [-N 1]; f(end) = -t_0 * sum(N);
m = length(f);
aeq = zeros(m); aeq(end, end) = 1; aeq(1, 1:m-1) = ones(1, m-1);
T_ub = 120; % upper bound for T, set arbitrarily
beq = zeros(m, 1); beq(end) = 1; beq(1) = T_ub;
percent_low = 0.2;
A = percent_low * ones(m);
A = A - diag(diag(A));
A = A + (percent_low-1) * eye(m);
A(end, :) = zeros(1, m); A(:, end) = zeros(1, m);
[x_1, fval_1] = linprog(f, A, zeros(1,m), aeq, beq, ...
    zeros(1, m), T_ub*ones(1,m));
fprintf("Green light time(in sec): %g, %g, %g, %g\n", x_1(1:4));
fprintf("with respect to car flow: %g, %g, %g, %g\n", N);
T = sum(x_1(1:4));
fprintf("Traffic light peroid: %gs\n", T);
fprintf("Optimal cars per second: %g\n", -fval_1/T);

```

代码中人为设定了 T 的上界为120(单位:秒), 假设了四个方向的车流量为 $N = [20, 12, 18, 10] / 60$ (单位:辆/秒), 运行示例如下:

输入

```
>> ex02_crossroads_script
```

得到输出结果

```
The crossroad part begins:
Optimal solution found.
```

```
Green light time(in sec): 48, 24, 24, 24
with respect to car flow: 0.333333, 0.2, 0.3, 0.166667
Traffic light peroid: 120s
Optimal cars per second: 0.285833
```

结果表明设置使通行效率最佳的红绿灯的时间设置为 48, 24, 24, 24 秒(对应于车流量 N), 在此情况下每秒通过的车数为 0.285833 辆.

模型的问题

该模型中各变量是车道车流量的线性函数, 使用线性优化得到的结果容易出现“赢者通吃”的现象, 即车流量最大的车道通行时间最长, 这样做在实际中是否合理需要进

一步讨论. 另外此模型可能不能很好地反映其它实际因素, 如车流不均匀性, 同时通过的车之间的相互影响, 车辆在绿灯后需要一定时间才能启动等, 仍需进一步改进.