高等数学练习（下）

一、求数列$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(n!)^2}$的极限。

二、讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在 $(0,0)$点的连续性和可微性。

三、设$z=f(x,y)$由方程$z-y+\sin x+x^2e^{y+z}=0$确定的隐函数，求全微分dz。

四、设平面图形**D**由$x^2+y^2\leq 2x$与$y\geq x$所确定，求图形**D**绕y轴旋转一周所得旋转体的体积。

五、设 **D** 为 xy 平面，求 $\iint\limits_D \max(x,y)e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中函数

$$\max(x,y)=\begin{cases}y, & y\geq x\\ x, & y<x\end{cases}$$

六、判定级数的收敛性或求出幂级数的收敛域。

（**1**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　　（**2**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n$，其中$a>0,b>0$.

七、将函数$(x+1)\ln(x+2)$展开为x的幂级数，并确定其收敛域。

八、求下列微分方程或差分方程的通解。

（**1**）$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^{2x}$

（**2**）$y\frac{dy}{dx}+y^2=\sin x$

（**3**）$y_{x+1}-5y_x=5x$

1、若空间三点 **A**（**1**，**2**，**0**），**B**（**2**，**0**，**1**），**C**（**2**，**3**，－2）

⑴ $\overline{AB}$与$\overline{AC}$的夹角α；　⑵求过点 A、B、C 的平面π方程；

⑶求过 C 且垂直于平面π的直线 L 方程。

2、若 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$；

⑴讨论 $f(x,y)$ 在点（0，0）的极限与连续性；

⑵讨论 $f(x,y)$ 在点（0，0）的全微分及偏导数是否存在，若存在，求出来。

3、⑴若 $z=x^2+y^2-xy+x-y$，求 z 在点（1，0）的偏导数与全微分。

4、若 $z=f(x^2-y^2,xy)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数；求 $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$。

5、计算：⑴ $\iint\limits_D |x+y-1|\,dxdy$，$D$：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$；

⑵ $\iint\limits_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}dxdy, D: x^2+y^2\le 1$，且 $x+y\ge 1$。

6、交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ 的次序，并计算 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy$。

7、求下列幂级数的收敛域：⑴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；　　⑵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n n^2}$

8、求连续可导函数 $f(x)$，使它满足：$f(x)+\int_0^x (t^2-x^2)f(t)dt=x^2$。

9、某工厂生产两种产品，总成本为 $C=Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+10$，两种产品的需求函数为 $Q_1=26-P_1, Q_2=10-\frac{1}{4}P_2$。其中 P_1,P_2 为价格；要使利润最大，确定两种产品的价格，并求最大利润。

---

1. 求 $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy$，其中 D 为 $x=-1, y=1, x=y$ 所围区域。

2. 将函数 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 展开为 x 的幂级数,并确定其成立区间.

3. 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$

4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$ 的收敛区间及其和函数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

5. 设 $z=f(x+2y, x\cos y)$，且函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在（0，0）点的值。

6. 求函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_1x_1^{\ 2}+a_2x_1^2+...+a_nx_n^2$ 在条件 $x_1+x_2+...+x_n=c$

($x_i>0,i=1,2,...,n)$ 下的最小值（其中 a_i 为常数，且 $a_i>0$，$i=1,2,...,n$ ）

（1） 已知 $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(-1,4,3)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b},\vec{a}\times\vec{b},\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),P_{\vec{b}}\vec{a}$ **.**

（2） 求曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\2x+z=3\end{cases}$ 在平面 $z=0$ 上的投影方程。

（3） 设 $z=f(xy,\dfrac{y}{x})$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

（4） 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$ 顺序。

（5） 设 $f(x)$ 有连续导数，证明：$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f'(x^2+y^2)dxdy=\pi[f(a^2)-f(0)]$ 。

（6） 在周长为 $2S$ 的三角形中，求面积最大时的三角形边长 x、y、z 及其面积（提示：周长为 $2S$，边长为 x、y、z 时，三角形面积 $A=\sqrt{S(S-x)(S-y)(S-z)}$ ）。

（7） 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{b}{a_n})^n$ 的敛散性，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 a_n,b,a 均为正数。

（8） 设 a_n 和 b_n 均大于零，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$，试问：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 是否有相同的敛散性？试讨论 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}},b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{(-1)^n}{n}$ 的情形。

（9） 讨论：当 a 为何值时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\dfrac{a}{n})^n$ $(a>0)$ 收敛和发散。