

武汉大学 2021-2022 学年第一学期《线性代数 B》期中考试试卷

一、单项选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 设 A, B 均为 n 阶方阵, 下列命题正确的是_____.

- (A) $AB = O \Leftrightarrow A = O$ 或 $B = O$ (B) $AB \neq O \Leftrightarrow A \neq O$ 且 $B \neq O$
 (C) $AB = O \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$ (D) $AB \neq O \Rightarrow |A| \neq 0$ 且 $|B| \neq 0$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则必有_____

- (A) $AP_1P_2 = B$ (B) $AP_2P_1 = B$ (C) $P_1P_2A = B$ (D) $P_2P_1A = B$

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则_____.

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.
 (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

(4) 当 $A =$ _____时, $\xi_1 = (0, 1, -1)^T$ 和 $\xi_2 = (1, 0, 2)^T$ 构成 $Ax = 0$ 的基础解系.

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组, 则下列结论正确的是_____.

- (A) 当 $Ax = 0$ 仅有零解时, $Ax = b$ 有唯一解;
 (B) 当 $Ax = 0$ 有非零解时, $Ax = b$ 有无穷多解;
 (C) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时, $Ax = 0$ 仅有零解;
 (D) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时, $Ax = 0$ 有非零解.

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的第 4 行元素的代数余子式之和 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} =$ _____.

(2) 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 6$, 则 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x + \alpha & 4y + \beta & 4z + \gamma \end{vmatrix} =$ _____.

(3) 设 A, B 为 n 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^*B^{-1}| =$ _____.

(4) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 且 $R(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, c 表任意常数, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解为 $x =$ _____.

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix};$$

四、(10 分) 解下列矩阵方程:

$$X = AX + B, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

五、(10 分) 设 3 维列向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda+1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时:

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表达式唯一;
- (2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表达式不唯一;
- (3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

六、(10 分) 求向量组 $a_1 = (1, -1, 1, 3)^T$, $a_2 = (-1, 3, 5, 1)^T$, $a_3 = (3, -2, -1, b)^T$, $a_4 = (-2, 6, 10, a)^T$, $a_5 = (4, -1, 6, 10)^T$ 的秩和一个极大无关组.

七、(10 分) 设四元齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T.$$

求方程组 (I) 与 (II) 的公共解.

八、(10 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $A + B = AB$, 证明: $A - E$ 与 $B - E$ 均可逆, 且 $AB = BA$.

九、(10 分) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量线性无关.