2012-2013 线性代数C

A卷 文科54学时

一. (1). $|A| = (3-2)\times(4-2)\times(5-2)\times(4-3)\times(5-3)\times(5-4) = 1\times2\times3\times1\times2\times1 = 12$

(2). $A_{41}+2A_{44} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

$= -(4-3)\times(5-3)\times(5-4) + 2\times(3-2)\times(4-2)\times(4-3)$

$= -1\times2\times1 + 2\times1\times2\times1 = 2$

二. (1). $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ -1) = \begin{pmatrix} 1\times1 & 1\times2 & 1\times(-1) \\ -1\times1 & -1\times2 & -1\times(-1) \\ 1\times1 & 1\times2 & 1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(2). △

$A^n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdots(1\ 2\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 2\ -1)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(-2)^{n-1}(1\ 2\ -1)$

$= (-2)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

三. (1). $(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2). $AC + (C^TB)^T + A = AC + B^TC + A = (A+B^T)C + A = 0 \quad (A+B^T)C = -A$

$(A+B^T \vdots -A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{19}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$ $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{19}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

四. $\overline{A} = (A \vdots B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{array}\right)$

(1). 当 $r(A) = r(\overline{A}) = n$ 时, 有唯一解, 即 $a \neq 1$

(2). 当 $r(A) \neq r(\overline{A})$ 时, 无解, 即 $a=1,\ b\neq 1$

(3). 当 $r(A) = r(\overline{A}) < n$ 时, 有无穷多组解, 即 $a=1,\ b=1$

此时 $\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c为任意常数

五. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3$ 极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ $\quad \alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\alpha_4$

六、(1) 因为A与B相似，所以 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

即 $\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-b&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}$

即 $(\lambda-2)(\lambda^2-a\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-b)\lambda-b]$

比较λ同次幂的系数，得 $a=0,\ b=1$

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

特征值为2，1，-1　线性无关特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$　$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

七、(1) 因为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵A的属于特征值1的特征向量

设矩阵A的属于特征值2的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

因为实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量是正交的

所以 $x_1+x_2+x_3=0$　线性无关特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　$P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&5&-1\\-1&-1&5\end{pmatrix}$

(2) $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$

八、(1) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$　(2) $\left(\frac{A}{I}\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{成对的行列初等变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(3) f不正定

九、(1) 当 $AX=0$ 时，$A^TAX=A^T0=0$

故 $AX=0$ 的解是 A^TAX 的解

(2) 当 $A^TAX=0$ 时，设 $AX=\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$

$(AX)^T(AX)=X^TA^TAX=X^T0=0$

$(AX)^T(AX)=\beta^T\beta=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2$

则 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$，$AX=\beta=0$

故 $A^TAX=0$ 的解是 $AX=0$ 的解

综上所述，$A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解

十、假设 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性相关

因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关

所以 η^* 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示

所以 η^* 为 $AX=0$ 的解

与 η^* 为 $AX=b\,(b\neq0)$ 的解矛盾

所以 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关