武汉大学 2015-2016 学年第一学期期末考试

线性代数 B（A 卷答题卡）

姓名＿＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿＿

考生学号

填涂样例	正确填涂 ▬ 错误填涂 [✕][—][●]	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、(8 分) 设 A、P 均为 3 阶矩阵，且 $P^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若 $P=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$，$Q=(\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$，求 Q^TAQ.

二、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+I=A^2+X$，其中 I 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

三、(10 分) 若 3 阶方阵 A 与对角矩阵 $B=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$ 相似，计算矩阵 $C=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)$

四、(8 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，求 a.

五、(12 分) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,3,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,5,6)$ 的一个极大无关组，并把其余的向量用该极大无关组线性表出.

六、(10 分)若 2 阶实矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的两个特征值都是 λ_0，且 $b\neq 0$，证明：矩 $C=\begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda_0-a & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $C^{-1}AC=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

七、(8 分)若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$（式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$），适合 $|A|<0$. 求证：必存在向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\alpha'A\alpha<0$.

八、(8 分)若 $n\times r$ 矩阵 A 的秩为 r，其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系，B 为 r 阶可逆方阵，证明 AB 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系.

九、(16 分)对线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3. \end{cases}$ (1) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等，问方程组是否有解，为什么？(2)若 $a_1=a_3=b$，$a_2=a_4=-b$ （$b\neq 0$），且已知方程的两个解 $\xi_1=(1,1,-1)^{\mathrm T}$，$\xi_2=(-1,1,1)^{\mathrm T}$，试给出方程组的通解.

十、(10 分)设二次曲面的方程 $axy+2xz+2byz=1$ ） $a>0$ 经正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$，化成 $\xi^2+\eta^2-2\zeta^2=1$，求 a 、b 的值及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.