

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 A（A 卷答题卡）

姓名 _____ 班级 _____			考 生 学 号													
填涂样例	正确填涂！ 错误填涂# \$ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
				4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
				5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
				6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
				7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
				8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
				9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____

二、填空题：

(1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____

符号说明：det(**A**) 指方阵 **A** 的行列式；**A**^{*} 指方阵 **A** 的伴随矩阵；**A**^T 指矩阵 **A** 的转置矩阵；*R*(**A**) 指矩阵 **A** 的秩；**E** 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

- (1) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ，则_____。
- (A) **A** 为正交矩阵. (B) $\frac{1}{3}\mathbf{A}$ 为正交矩阵. (C) $\det(\mathbf{A}) = 1$. (D) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.
- (2) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ ，则 *a* 等于_____。
- (A) 0. (B) 2. (C) -2. (D) 6.
- (3) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 **A**^{*} 的秩为 1，则_____。
- (A) $a = b \neq 0$. (B) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. (C) $a + 2b \neq 0$. (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.
- (4) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间 $\left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 的维数是_____。
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

- (1) 若向量组 $\alpha_1 = (-2, 3, 1)^T, \alpha_2 = (2, t, -1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 线性相关，则常数 *t* = _____。
- (2) 若矩阵 **A** 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ，则 $\det(\mathbf{A}) =$ _____。
- (3) 已知 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$ 为 3 维向量， $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ，则 $\alpha^T\alpha =$ _____。
- (4) 已知 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = 0$ 的基础解系，则向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + t_1\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t_2\alpha_1$ 也可作为 $\mathbf{A}x = 0$ 的基础解系的充要条件是：常数 t_1, t_2 满足条件_____。

三、(12 分) 设 3 阶方阵 **A**，**B** 满足 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ ，

- (1) 证明矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆； (2) 当 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 时，求 **A**。

四、(13 分) a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时, 求出方程组的通解.

五、(12 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta, \gamma$ 线性相关, 而且 β 与 γ 都不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \gamma$ 等价.

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 A（A 卷答题卡）

姓名 _____ 班级 _____			考 生 学 号															
填涂样例	正确填涂 ！ 错误填涂 # \$ %	注 意 事 项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
				4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
				5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
				6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
				7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
				8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
				9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

六、（12 分）设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$ ，求方阵 $B = A^* - 2A + 3E$ 的特征值及 $\det(B^{-1})$ 。

七、（13 分）已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_2x_3$ ($\lambda > 0$) 经过正交变换 $x = Qy$ ，化为标准形 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$ ，求实参数 λ 及正交矩阵 Q 。

八、(8 分) 设 \mathbb{R}^4 的子空间 V 由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, 4)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, 2)^T$ 生成, 求 V 的基与维数.

九、(6分) 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵. 证明: 关于 λ 的方程 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根全大于零.