武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数弘毅班期末试题 A

1、（10 分）已知方阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值。

2、（10 分）设 $|A|=\frac{1}{2}$，A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵，计算行列式：$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

3、（10 分）设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=I$，其中 I 为三阶单位矩阵，$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，计算行列式：$|B|$.

4、（10 分）已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1, 2, -3，求行列式 $\left|A^{-1}+3A+2I\right|$ 的值。

5、（10 分）对次数不超过 2 的实系数多项式全体构成的线性空间 P_2，定义线性变换：$\sigma(f(x))=f(x-2)\quad f(x)\in P_2$，利用基 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$ 到基 $\beta_1=1$，$\beta_2=x+2$，$\beta_3=(x+2)^2$ 的过渡矩阵导出 σ 在基 β_1,β_2,β_3 下的对应矩阵。

6、（14 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2+2bx_1x_3-2x_3^2,(b>0)$，其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

（1）求 a,b 的值；（2）利用正交变法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵.

7、（16 分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解。

8、（8 分）符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 表示由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间。设有子空间 $V_1=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$，

$V_2=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T \mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$

（1）将 V_1 和 V_2 用符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的形式表示出来；

（2）求子空间 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基。

9.（6 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 1\end{vmatrix}$.

将它的第 i 行 $(i=1,2,\cdots,n)$ 换成 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$ 而其它行都不变所得的行列式记为 $D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，试证：$D=\sum_{i=1}^{n}D_i$.

10、（6 分）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，C 是 $p\times q$ 矩阵，证明：

$$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$$

武汉大学 2016-2017 第一学期线性代数弘毅班期末试题

A 解答

1、（10 分）已知方阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&-2&3\\0&1&-1&0\\1&-2&2&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. 求 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}$ 的值。

解 因为 $A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}=A_{11}-A_{12}+2A_{13}+2A_{14}$

根据行列式的展开定理知：在 A 中将第一行换成 $1,-1,2,2.$ 便得：

$$A_{11}-A_{12}+2M_{13}-2M_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&2&2\\0&1&-1&0\\1&-2&2&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{4+3}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\1&-2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1.$$

10 分

2、（10 分）设 $\left|A\right|=\dfrac{1}{2}$， A^* 是 4 阶方阵 A 的伴随矩阵，计算 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

解 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2}A^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{2}{3}A^*-2A^*\right|=\left|-\dfrac{4}{3}A^*\right|$

$$=(-\frac{4}{3})^4\left|A^*\right|=(-\frac{4}{3})^4\left|A\right|^3=\frac{2^5}{3^4}=32/81$$ 10 分

3、（10 分）设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=I$，其中 I 为三阶单位矩阵，$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，求 $\left|B\right|$.

解 由 $A^2B-A-B=I\Rightarrow(A^2-I)B-(A+I)=0$

$$\Rightarrow(A+I)[(A-I)B-I]=0，\text{又}(A+I)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\&0&3\end{pmatrix}$$

所以矩阵 $(A+I)$ 为可逆矩阵。故 $(A-I)B=I$，即 $B=(A-I)^{-1}$

而 $(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，故 $\left|B\right|=\dfrac{1}{2}$ 10 分

4、（10 分）已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1,、2、-3，求行列式 $\left|A^{-1}+3A+2I\right|$ 的值。

解： 因为 $A\eta=\lambda\eta$，则 $A^{-1}A\eta=\lambda A^{-1}\eta$ 从而 $\dfrac{1}{\lambda}\eta=A^{-1}\eta$，即 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值，η 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量，知 $\dfrac{1}{\lambda}+3\lambda+2$ 是 $A^{-1}+3A+2I$ 的特征值 5 分

因为 3 阶方阵 **A** 的特征值为 1,、2、-3，所以 3 阶方阵 $A^{-1}+3A+2I$ 的特征值为 6、$\frac{17}{2}$、$-\frac{22}{3}$， 则 $\left|A^{-1}+3A+2I\right|=6\times\frac{17}{2}\times(-\frac{22}{3})=-374$ 10 分

5、(10 分) 对次数不超过 2 的实系数多项式全体构成的线性空间 P_2，**定义线性变换**: $\sigma(f(x))=f(x-2)$ $f(x)\in P_2$，**利用基** $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$ **到基** $\beta_1=1$，$\beta_2=x+2$，$\beta_3=(x+2)^2$ **的过渡矩阵，导出** σ **在基** β_1,β_2,β_3 **下的对应矩阵。**

解 由 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(1,x+2,(x+2)^2)=(1,x+2,x^2+4x+4)$

$$=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T$$

即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 到 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 的过渡矩阵为 $T=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$ 5 分

故有 $(1,x+2,(x+2)^2)=(1,x,x^2)T$，两边作用 σ 有：

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\sigma(1),\sigma(x+2),\sigma((x+2)^2))=(\sigma(1),\sigma(x),\sigma(x^2))T$$

即有 $(1,x+2,(x+2)^2)B=\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T$

$$=(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))T=(1,x,x^2)AT$$

其中由 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))=(1,x-2,x^2-4x+4)$

$$=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}=(1,x,x^2)A$$

所以 $B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$ 10 分

6、(14 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2+2bx_1x_3-2x_3^2,(b>0)$，其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

(1) 求 a,b 的值；(2) 利用正交变法将二次型 f 化为标准型，并写出正交矩阵.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$ 设 A 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，有

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\left|A\right|=-4a-2b^2=-12$

得 $a=1,b=2$ 所以，$\left|A-\lambda I\right|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

从而，$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$. 7 分

$\lambda_1=\lambda_2=2$, 所对应的特征向量有 $X_1=(2,0,1)^T,X_2=(0,1,0)^T$

$\lambda_3=-3$ 所对应的特征向量 $X_3=(1,0,-2)^T$

因为，X_1,X_2,X_3 俩俩正交，单位化得 $Y_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T,Y_2=(0,1,0)^T$,

$Y_3=(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5})^T$ 因此，$Q=(Y_1,Y_2,Y_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$。

二次型的标准型为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$ 14 分

7、（16 分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

解：因为求方程组和方程的公共解，联立方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 的解

有增广矩阵 $(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & a & 0\\1 & 4 & a^2 & 0\\1 & 2 & 1 & a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1-a\\0 & 1 & 0 & a-1\\0 & 0 & a-1 & 1-a\\0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2)\end{pmatrix}=B$ 8 分

当 $(a-1)(a-2)=0$ 时，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，因此有公共解为 $X=k(-1,0,1)^T$，可为任意常数

当 $a=2$ 时 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，有公共解为 $X=(0,1,-1)^T$。 16 分

8、（8 分）符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 表示由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间。设有子空间 $V_1=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$，

$V_2=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T \mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$

（1）将 V_1 和 V_2 用符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的形式表示出来；

（2）求子空间 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基。

解：(1)。解线性齐次方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 得到子空间 V_1 的基础解系统：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

同样道理可以得到子空间 V_2 的基础解系统：$\beta_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\beta_2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ $\beta_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ 所以 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 4 分

（2）显然可以看出，子空间 V_1 和 V_2 的维数都是 3，$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

矩阵经过行初等变换后可以得到：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$

所以可以看出向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$是$V_1+V_2$的一组基，从而$V_1+V_2$的维数是4。

由公式： 维$(V_1)+$维$(V_2)=$维$(V_1\cap V_2)+$维(V_1+V_2)，可知：维$(V_1\cap V_2)=2$，

解方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$可以得到$V_1\cap V_2$的一组基：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\end{pmatrix}^T,\gamma_2=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\end{pmatrix}^T。\qquad 8分$$

9、（6 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n-1}&1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n-1}&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn-1}&1\end{vmatrix}.$

将它的第 i 行$(i=1,2,\cdots,n)$换成$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$而其它行都不变所得的行列式记为$D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，试证：$D=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i$.

证明 以A_{ij}表示a_{ij}的代数余子式，则

$$D_i=x_1A_{i1}+x_2A_{i2}+\cdots+x_{n-1}A_{in-1}+A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{n}D_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n-1}x_jA_{ij})+\sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_jA_{ij})+\sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij})+\sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}$

把行列式D中第j列元素都换成1所得行列式记为$B_j\ (j=1,2,\cdots,n)$则

$B_j=A_{1j}\times1+A_{2j}\times1+\cdots+A_{n-1j}\times1+A_{nj}\times1=\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij}$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij}=B_j=\begin{cases}0 & j\neq n\\D & j=n\end{cases}$

故 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij})=0$，于是 $D=\sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i$. 6 分

10、（6 分）设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times p$矩阵，C是$p\times q$矩阵，证明：

$$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$$

证明首先，由于$R(ABC)+R(B)=R\begin{pmatrix}ABC&O\\O&B\end{pmatrix}$，且

$$\begin{pmatrix}E_m&A\\O&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABC&O\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_q&O\\-C&E_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&AB\\-BC&B\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}O&AB\\-BC&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&-E_q\\E_p&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix},$$

其中$\begin{pmatrix}E_m&A\\O&E_n\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}E_q&O\\-C&E_p\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}O&-E_q\\E_p&O\end{pmatrix}$均可逆，

所以$R\begin{pmatrix}ABC&O\\O&B\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}AB&O\\B&BC\end{pmatrix}\ge R(AB)+R(BC)$

即$R(ABC)+R(B)\ge R(AB)+R(BC)$，故$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$. 6 分