武汉大学 2015 —2016 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院________专业___班 学号________姓名____分数___

一、（本题 20 分） 多值函数的计算和积分

设 $f(z)=\sqrt[3]{z}$ 为一单值分支，若 $f(-1)=-1$，求：

1）（10 分） $f(1)$ 和 $f'(1)$。

2）（10 分）积分 $\int_c \sqrt[3]{z}dz$ 的值，其中

（1）c 为从 $z=0$，到 $z=1$ 的直线段；

（2）c 为 $|z|=1$ 的上半圆周，从 $z=-1$，到 $z=1$。

二、（本题 10 分） 指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^{iaz})}$ （a 为实数）的奇点和类型（含∞点）；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数。

三、（本题 10 分） 计算函数 $f(x)=e^{-|t|}\cos t$ 的 Fourier 变换。

四、（本题 15 分） 函数的级数展开

1）（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 点的所有解析区域内展开成幂级数。

2）（5 分）设 $\dfrac{z-1}{z+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n, |z|>1$，则求 c_{-1} 的值，说明它和 $\mathrm{Res}[\dfrac{z-1}{z+1},-1]$ 的关系。

五、（本题 15 分）利用留数定理计算积分

1）（5 分）对函数 $\tan(\theta+i\alpha)$，其中 α 为实数且 $\alpha\neq 0$，若令 $z=e^{2(\theta+i\alpha)}$，证明：

$$\tan(\theta+i\alpha)=\frac{z-1}{i(z+1)}$$

2）（10 分）计算积分 $\int_0^{\pi}\tan(\theta+i\alpha)d\theta$

六、（本题 15 分）关于解析函数和调和函数

1)（10 分）一个解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部和虚部是调和函数，若

$u(x,y)=f_1(x^2-y^2)$，求 $f(z)$。

2)（5 分）证明，如果 $u=u(x,y)$ 是解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部，则

$$\nabla^2(u^p)=p(p-1)u^{p-2}\left|f'(z)\right|^2$$

七、（本题 15 分）利用 Laplace 变换求微分方程 $y''(\mathrm{t})+a^2y(t)=\cos\omega t$ 满足条件 $y(0)=0, y(\frac{\pi}{2a})=-1$ 的解，其中 a >0 为常数。