武汉大学数学与统计学院

2010—2011 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题 A

一、（42 分）试解下列各题：

1、计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{\frac{1}{x}}-1]^{\frac{1}{\ln x}}$

2、求解微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解。

3、判断函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的间断点，并说明是可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点还是振荡间断点。

4、求曲线 $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ 的渐近线方程.

5、设 $y=\ln(x^2+3x+2)$，求 $y^{(n)}$

6、讨论函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的单调性和曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的凹凸性，

并求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的极值和曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的拐点。

二、（8 分）设函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数, $f(x)$ 可导,且 $f'(x)\neq 0$， $f(a)=3a$，

$F(x)=f[\frac{1}{a}g^2(4x-a)]$，求 $F'(a)$.

三、（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+b\tan x+c & x\le 0\\ \ln(1+x) & x>0\end{cases}$，试问 a,b,c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在。

四、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}+x\cos^5 x & -1\le x\le 1\\ \dfrac{\arctan x}{x^2} & x>1\end{cases}$，求积分：$\int_{-1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$

五、（12 分）已知一容器的侧面是由曲线 $L: x^2-y^2=1 \quad (-1\le y\le 1)$（单位：$m$），绕着 oy 轴旋转而成，容器中装有其一半容量的水若以每分钟 $\frac{\pi}{3}$ m^3 的速度将水从容器口处抽出，问：

1、需要多少分钟才能抽完？

2、需要做多少功？

六、（10 分）求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线，使得该曲线与切线 l 及直线 $x=0$ 和 $x=2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转的旋转体的体积为最小.

七、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)\ge 0$，又有 $f(c)<0\ (a<c<b)$. 试证：在 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1，ξ_2 使 $f''(\xi_1)>0$, $f''(\xi_2)>0$.

武汉大学数学与统计学院

2010—2011 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、（42 分）试解下列各题：

1、解：原极限$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}(-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^{-1}$或原极限$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln x}}=e^{-1}$

2、解：齐次方程$y'''-y''+2y'-2y=0$的特征方程为$\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda^2+2)=0$，它有复数根为：$\lambda=\pm\sqrt{2}i$，实特征根为：$\lambda=1$，故原方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2\cos\sqrt{2}x+C_3\sin\sqrt{2}x)$

3、解：由 $f(x)=\dfrac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)\,|\,x\,|}$ 知，$x=0;x=1;x=-1$是间断点，

又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\dfrac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)\,|\,x\,|}=-1$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)\,|\,x\,|}=1$ 所以$x=0$是跳跃间断点；$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)\,|\,x\,|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$所以$x=1$是可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\dfrac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)\,|\,x\,|}=-\infty$所以$x=-1$是无穷间断点；没有振荡间断点。

4、解:由$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^2-5}{x-3}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5-x^2+3x}{x-3}=3$

故有斜渐近线:$y=x+3$,又$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-\infty$,所以$x=3$为垂直渐近线.

而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,所以没有水平渐近线。

5、解：$y=\ln(x+1)(x+2)=\ln(x+1)+\ln(x+2)$　$y'=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$　$y^{(n+1)}=(-1)^n n![(1+x)^{-(n+1)}+(2+x)^{-(n+1)}]$

6、解：　定义域为 $(-\infty,+\infty)$　　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

由 $y'=0$ 得驻点$x=0$.　　由 $y''=0$ 得 $x_1=1$ 和 $x_2=-1$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	—	0	+
y	↘	0 极小值	↗

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	—	0	+	0	—
y	$\cap$	$\ln 2$	$\cup$	$\ln 2$	$\cap$

由上表可以看出，单调增区间为$(0,+\infty)$，单调减区间为$(-\infty,0)$，凹区间为$(-1,1)$，凸区间有两个：$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$，极小值为 0，拐点有两个：$(-1,\ln2)$和$(1,\ln2)$

二、（8 分）解：$F'(x)=f'[\frac{1}{a}g^2(4x-a)]\frac{8}{a}g(4x-a)g'(4x-a)$,故

$$F'(a)=f'[\frac{1}{a}g^2(3a)]\frac{8}{a}g(3a)g'(3a)=f'(a)\frac{8}{a}g(3a)g'(3a)=\frac{8}{a}g(3a)=8$$

三、（10 分）解：因为一阶导数连续，故 $f(0-0)=f(0+0)\Rightarrow f(0)=c=0$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^2+b\tan x-0}{x}=b\qquad f_+'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(x+1)-0}{x}=1$$

所以有：$b=1$　故有

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+\sec^2 x & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{1+x} & x>0\end{cases}\quad f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2ax+\sec^2 x-1}{x}=2a\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x(1+x)}=-1\end{cases}$$

当 $2a\neq -1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导不存在。

四、(12 分) 解：$\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x\cos^5 x)dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d(\frac{1}{x})$$

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d(\frac{1}{x})=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

故 $\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x\cos^5 x)dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

五、(12 分) 解：1、$V=\pi\int_{-1}^{0}(1+y^2)dy=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow t=4$　2、$W=\pi g\int_{-1}^{0}(1+y^2)(1-y)dy=\frac{25}{12}\pi g$

六、(10 分) 解:设切点坐标为 $(t,\ \sqrt{t})$，由 $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}$，可知曲线 $y=\sqrt{x}$ 在 $(t,\ \sqrt{t})$ 处的切线方程为 $y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$，或 $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x+t)$. 因此所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^2\left\{\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}(x+t)\right]^2-(\sqrt{x})^2\right\}dx=\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3t}-4+2t\right)$$ 所以，$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{8}{3t^2}+2\right)=0$. 得

驻点 $t=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$，舍去 $t=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. 由于 $\frac{d^2V}{dt^2}\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{16}{3t^2}\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}}>0$，因而函数 V 在 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 处达到极小值，而且也是最小值. 因此所求切线方程为 $y=\cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2\sqrt[4]{\frac{4}{3}}}x+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

七、(6 分)证明：由 $f(a)=f(b)\geq 0$，$f(c)<0$，根据零点值定理知，至少存在一点 $\eta_1\in(a,c)$，使得 $f(\eta_1)=0$，至少存在一点 $\eta_2\in(c,b)$，使得 $f(\eta_2)=0$，再由罗尔定理知，至少存在一点 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得 $f'(\eta)=0$，又在 $[\eta_1,c]$ 与 $[c,\eta_2]$ 上，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\varsigma_1\in(\eta_1,c)$，使得 $f'(\varsigma_1)=\frac{f(c)-f(\eta_1)}{c-\eta_1}<0$，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\varsigma_2\in(c,\eta_2)$，使得 $f'(\varsigma_2)=\frac{f(\eta_2)-f(c)}{\eta_2-c}>0$，再在区间 $[\varsigma_1,\eta]$ ($[\eta,\varsigma_1]$) 与 $[\eta,\varsigma_2]$ ($[\varsigma_2,\eta]$) 上，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi_1\in(\varsigma_1,\eta)$，使得 $f''(\xi_1)=\frac{f'(\eta)-f'(\varsigma_1)}{\eta-\varsigma_1}>0$，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi_2\in(\eta,\varsigma_2)$，使得 $f''(\xi_2)=\frac{f'(\varsigma_2)-f'(\eta)}{\varsigma_2-\eta}>0$，故在 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1，ξ_2 使 $f''(\xi_1)>0$，$f''(\xi_2)>0$

证法2：$f(c)-f(a)=f'(\eta_1)(c-a)<0$　$\therefore f'(\eta_1)<0$　$(a<\eta_1<c)$

$f(b)-f(c)=f'(\eta_2)(b-c)>0$，$\therefore f'(\eta_2)>0$　$(c<\eta_2<b)$

$\therefore \exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)$，使得 $f'(\eta)=0$ $\therefore f'(\eta)-f'(\eta_1)=f'(\xi_1)(\eta-\eta_1)>0$

$\therefore f'(\xi_1)>0$，　$f'(\eta_2)-f'(\eta)=f'(\xi_2)(\eta_2-\eta)>0$　$\therefore f'(\xi_2)>0$.