武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期弘毅班《高等数学 A1》期末考试试题 A

一、（48 分）试解下列各题：

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\cos n}{(1-\dfrac{x}{n})^{-n}}$

2、求微分方程 $y''+y=x+\sin x$ 的特解，使得该特解在原点处与直线 $y=\dfrac{3}{2}x$ 相切。

3、求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点，并判别其类型。

4、设 $f(x)=\begin{cases} e^x\cos x+b, x\le 0 \\ \sin ax, x>0 \end{cases}$ ，确定 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，求 $y'(0)$.

6、设 $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^{2t}ue^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$, 讨论导函数 $f^{(2011)}(x)$ 的极值点以及取得极大、极小值情况。

二、（8 分）已知 $u=g(\sin y)$，其中 $g'(v)$ 存在，$y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2}$, $a\neq 0)$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

三、（12分）设函数 $y=\ln\cos x \quad x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

(1) 求函数的单调区间和函数图形的的凸性区间；

(2) 在曲线上求曲率半径为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的坐标。

四、（14 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x^3} & x>1 \\ x(x^3-e^{-x^2}) & -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & x<-1 \end{cases}$, 求积分: $\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

五、（12 分）设曲线 $y=x^2\ (0\le x\le 1)$ 和直线 $y=1$, $x=0$ 围成平面图形 D.

（ 1 ） 求 D 的面积；

（ 2） 求 绕直线 $x=1$ 旋转而成的旋转体的体积.

六、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，

求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$

武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期弘毅班《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、（48 分）试解下列各题：

1、解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cos n}{(1-\frac{x}{n})^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{n}\cos n]\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{x}{n})^{-\frac{n}{x}}]^{-x}=e^{-x}$

2、解：对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为 $y_1=x$，$y''+y=\sin x$ 的一个特解为 $y_2=-\dfrac{x}{2}\cos x$，原方程的通解为

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-\dfrac{x}{2}\cos x$，利用初值条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 可求得 $C_1=0,C_2=1$，于是 $y=\sin x+x-\dfrac{x}{2}\cos x$

3、解： $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$　　$x=-1$ 为第一类可去间断点

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$　　$x=1$ 为第二类无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$　　$x=0$ 为第一类跳跃间断点

4、解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x\cos x+b)=1+b,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin ax=0$

$f(0)=1+b$，所以 $1+b=0$，即 $b=-1$，又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\cos x+b-(1+b)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\cos x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x(\cos x-\sin x)}{1}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$，$\therefore$ 当 $a=1,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$

5、解：　方程两边对 x 求导, 得 $\dfrac{1}{x^2+y}(2x+y')=3x^2y+x^3y'+\cos x$

当 $x=0$ 时，由原方程得 $y=1$，代入上式得 $y'(0)=1$

6、解：由 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\int_1^{2t}ue^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$，而 $f'(x)=\displaystyle\int_1^{2x}ue^u\mathrm{d}u$，$f''(x)=2xe^{2x}$，

$f'''(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}=2^{3-2}[(3-2)+2x]e^{2x}$，以此类推有 $f^{(n)}(x)=2^{n-2}[(n-2)+2x]e^{2x}$

故 $f^{(2011)}(x)=2^{2011-2}[(2011-2)+2x]e^{2x}=2^{2009}(2009+2x)e^{2x}$，

令 $f^{(2012)}(x)=2^{2010}[(2010+2x]e^{2x}=0\Rightarrow x=-1005$，又 $f^{(2013)}(x)=2^{2011}[(2011+2x]e^{2x}$

而 $f^{(2013)}(-1005)=2^{2011}e^{-2010}>0$，故 $x=-1005$ 为极小值点，极小值为

$f^{(2011)}(-1005)=-2^{2009}e^{-2010}$

二、（8 分）解 由 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g'(\sin y)\cdot\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}$，而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{\frac{b}{a}a\cos t}{-\frac{a}{b}b\sin t}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$，

故 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-g'(\sin y)\cdot\cos y\cdot\dfrac{b^2x}{a^2y}$

三、（12分）解：1），在内，$y'>0$，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内，$y'<0$，故 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 是单调减少

区间，是单调增加区间；而由 $y'' = -\sec^2 x < 0 \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，得 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，函数的图形是上凸（凹）的。

2）$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = |\cos x|$，由 $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $x = \pm\frac{\pi}{6}$，故曲率半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点是 $(\pm\frac{\pi}{6}, \ln\frac{\sqrt{3}}{2})$

四、(14 分）解：$f(x) = \begin{cases} \arctan x / x^3 & x > 1 \\ x(x^3 - e^{-x^2}) & -1 \le x \le 1 \\ 1/1+x^2 & x < -1 \end{cases}$

当 $x < -1$，$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x + \frac{\pi}{2}$

当 $-1 \le x \le 1$，$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_{-1}^{x} t(t^3 - e^{-t^2})dt = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-1}$

当 $x > 1$，$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_{-1}^{1} t(t^3 - e^{-t^2})dt + \int_{1}^{x} \frac{\arctan t}{t^3}dt$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\int_{1}^{x} \arctan t d(\frac{1}{t^2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2t^2}\arctan t \,|_1^x + \frac{1}{2}\int_{1}^{x} \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2x^2}\arctan x + \frac{1}{2}\int_{1}^{x} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1+t^2)})dt = \frac{\pi}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + 1)\arctan x - \frac{1}{2x}$

故 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} \arctan x + \frac{\pi}{2} & x < -1 \\ \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-1} & -1 \le x \le 1 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2} + 1)\arctan x - \frac{1}{2x} & x > 1 \end{cases}$

五、(12 分）解：$A = \int_0^1 (1 - x^2)dx = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \qquad dV = \pi dy - \pi(1 - \sqrt{y})^2 dy$

$V = \pi\int_0^1 dy - \pi\int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 dy = \pi - \pi\int_0^1 (1 + y - 2\sqrt{y})dy = \frac{5\pi}{6}$

另解 平移坐标 $x = u + 1, y = v$ 曲线方程为 $v = (u+1)^2, u = \sqrt{v} - 1$

$V = \pi - \pi\int_0^1 (\sqrt{v} - 1)^2 dv = \pi - \pi\int_0^1 (v + 1 - 2\sqrt{v})dv = \frac{5\pi}{6}$

六、（6 分）证明 由麦克劳林公式得 $f(x) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3$ ξ 在 0 与 x 之间，

$x \in [-1, 1]$，在上式中分别取 $x = -1, 1$，得 $1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\xi_1) \quad 0 < \xi_1 < 1$

$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\xi_2) \quad -1 < \xi_2 < 0$，两式相加，有 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\xi_2, \xi_1]$ 取得最大值 M 最小值 m，从而有 $m \le \frac{1}{2}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \le M$，再由闭区间上连续函数的介质定理知，至少存在一点 $x_0 \in [\xi_2, \xi_1] \subset (-1, 1)$，使得