练习 5．1

1． 求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(2)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad (3)\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

解 (2) 矩阵的特征多项式为：

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

故特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$．

当$\lambda_1=2$时，解$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为$k_1(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1\neq 0$为任意实数．

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为$k_2(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$k_2\neq 0$为任意实数．

(3) 矩阵的特征多项式为：

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

故特征值为$\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda_1=-1$．

当$\lambda_1=-1$时，解$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & -1 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为$k_3(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，k_3不为 0．

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为$k_1(1,4,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,4)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$不同时为 0．

2． 设方阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1\neq\lambda_2$，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$，证明：

(1) $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(2) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

证 (1)(反证法)若 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,它所对应的特征值为 λ,则由定义有:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\lambda(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2).$$

由已知又有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1-\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$.

两式相减得 $(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\xi}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{O}$.

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$,知 $\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2$ 不全为 0,于是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性相关,这与不同特征值的特征向量线性无关相矛盾.所以,$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(2) 设存在 k_1,k_2,使得 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{O}$,则有

$$\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)\right)=\boldsymbol{A}(k_1+k_2)\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{A}(k_2\boldsymbol{\xi}_2)=(k_1+k_2)\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1-k_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{O},$$

因 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关,故 $(k_1+k_2)\lambda_1=0$,$k_2\lambda_2=0$.

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故两者中至少有一个不为零.若 $\lambda_2\neq0$,则 $k_2=0$,从而由 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{O}$ 知 $k_1=0$.若 $\lambda_1\neq0$,则 $k_1+k_2=0$,代入 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{O}$ 得 $k_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{O}$,从而得 $k_2=0$ 进而知 $k_1=0$.

故 $k_1=0$,$k_2=0$.$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

3. 设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ,对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,从而有

$$(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=(\lambda^2-3\lambda+2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O},$$

因特征向量 $\boldsymbol{x}$ 不为零向量,故 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&b\\2&3&4\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ 的特征值之和是 3,特征值之积为 -24,求 a,b.

解 由特征值的性质,有 $|\boldsymbol{A}|=-24$,$a+3-1=3$,又 $|\boldsymbol{A}|=-7a+5b-2$,可得 $a=1$,$b=-3$.

5. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,4,\cdots,2n$,求行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$ 的值.

解 依题设,若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\lambda-3$ 为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值,从而 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值有:$-1,1,3,5,\cdots,2n-3$,故

$$|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=(-1)\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)=-(2n-3)!!.$$

6. 已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$,且 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,$\lambda=-2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵,故可设第 4 个特征值为 λ_4,则有 $1+1-2+\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}a_{ii}$,得 $\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}a_{ii}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为:

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\left(\lambda-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}\right).$$

7. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$,试求:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；(2) $\left|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right|$，$\left|\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值.

解 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．依题设，有 $\left|\boldsymbol{A}\right|=1\cdot(-1)\cdot 2=-2$，从而

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，即为 $1,-1,\dfrac{1}{2}$；$\boldsymbol{A}^*=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，从而 $\dfrac{\left|\boldsymbol{A}\right|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，即为 $-2,2,-1$.

(2) λ^2-2 为 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}$ 的特征值，从而 $-1,-1,2$ 为 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}$ 的特征值，得

$$\left|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right|=(-1)\cdot(-1)\cdot 2=2;$$

$(1-2\left|\boldsymbol{A}\right|)\cdot\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，即 $5,-5,\dfrac{5}{2}$，从而有：

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|=5\cdot(-5)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{125}{2}.$$

8. 证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为零.

证 若 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵，即 $\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，从而 $\left|0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$，即 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

反之，若 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为其特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 有非零解，得 $\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵.

9. 判断下列命题是否正确：

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值一定存在无穷多个特征向量；

(2) 由于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，故它们也有相同的特征向量；

(3) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全为 0，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(4) 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,\pm1$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系仅一个向量.

解 (1) 正确．若 $\boldsymbol{x}$ 是特征值 λ 对应的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=\lambda(k\boldsymbol{x})$，故 $k\boldsymbol{x}$（$k\neq 0$）也是特征值 λ 对应的特征向量.

(2) 错误．虽然 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$，但无法由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 推导出 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，故该结论不一定成立，可以通过举例说明该命题错误，如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 是 $\lambda=1$ 对应的特征向量，但 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 不是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 的 $\lambda=1$ 对应的特征向量.

(3) 错误．仅能得到 $\left|\boldsymbol{A}\right|=0$，无法得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$．例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

(4) 正确．由题设可得 $R(\boldsymbol{A})=2$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系仅一个向量.