武汉大学数学与统计学院 2019-2020 第二学期
《线性代数 B》期中考试试卷

一、（5 分）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$

$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，计算四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2|$.

二、（6 分）设 A 是 n 阶可逆矩阵，$|A|=a$，A 的每行元素之和为 b.

试求：(1). A^{-1} 的行元素之和；(2). $|A|$ 的代数余子式：$A_{1k}+A_{2k}+\cdots+A_{nk}$。

三、（5 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$

四、（8 分）计算向量组 $\alpha_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\alpha_2=(2,1,2,-2,-3)^T$，$\alpha_3=(5,0,7,-5,-4)^T$，

$\alpha_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

五、（14 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

（1）求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$；　　（2）求 $|A^*|$，这里 A^* 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵。

六、（14 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

（1）问 a,b,c 为何值时，$R(A,B)=R(A)$？　　（2）求矩阵方程 $A\boldsymbol{X}=B$ 的全部解。

七、（14 分）已知 A,B 为三阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 E 是三阶单位矩阵.

（1）证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；　　(2) 若 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

八、（14 分）已知 $\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1),\alpha_4=(1,2,4,a+8),\ \beta=(1,1,b+3,5)$

(1) a,b 为何值时，β 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合?

(2) a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 惟一的线性表示式?并写出该表示式。

九、（10 分）(10 分)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量组，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{bmatrix}$$

试证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是对任意 n 维列向量 b，方程组 $AX=b$ 均有解。

十、（10 分）设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta,\gamma$ 线性相关，证明：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma$ 不等价，则 β 与 γ 中有且仅有一个可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。