武汉大学 2018-2019 第一学期期中考试试题

1、（5 分）已知：$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)=A\neq 0$，问$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=$？为什么？

2、（6 分）设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & ,x>0,x\neq 1,\\ 0 & ,x=0,\\ -1 & ,x=1,\end{cases}$ 试证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,并求$f'(1)$.

3、（8 分）设$f(x)$有的连续二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right]=0$，试确定$f(0)$, $f'(0)$及 $f''(0)$ 之值。

4、（5 分）求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{x(1-x)}{2}+\dfrac{x^2(1-x)^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{x^n(1-x)^n}{2^n}\right]$的表达式。

5、（5 分）设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}(b-\cos x)}=\dfrac{1}{2}$ $(a>0)$，试确定a，b之值。

6、（5 分）设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}-\tan\sqrt[4]{1+x^4}$,求$y'(x)$.

7、（5 分）设 $y=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，$x=e^{2t}+1$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

8、（8 分）对任意两个实数x_1与x_2, $f(x)$满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

且$f'(0)=1, f(x)\neq 0$. 证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导,且$f'(x)=f(x)$.

9、（5 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(e^{x^2}-1)-\cos(\ln(1+x^2))}{x^6}$

10、（5 分）当$x\to x_0$时，设$\alpha_1=o(\alpha)$，$\beta_1=o(\beta)$且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$存在，求证：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$.

11、（6 分）设$f(x)=\sqrt{x}\left[\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\right]$，$x\in[0,+\infty]$, 试证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上有界.

12、（5 分）设n为偶数,且$a\neq 0$,试证.方程$x^n+a^n=(x+a)^n$仅有一个实根$x=0$.

13、（8 分）设$f(x)$对一切实数x满足为$xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x}$，若$f(x)$在$x=c(c\neq 0)$

处有极值时,试判断$f(c)$是极大值还是极小值。

14、（6 分）设$f(x)$在$[0,\dfrac{1}{2}]$上连续,在$(0,\dfrac{1}{2})$内可导,且$f(\dfrac{1}{2})=0$,

证明:至少存在一点$c\in(0,\dfrac{1}{2})$,使$f(c)+\sqrt{1-c^2}\arcsin c\cdot f'(c)=0$

15、（5 分）证明不等式:$(n+1)^{\frac{1-m}{m}}<m\left(\sqrt[m]{n+1}-\sqrt[m]{n}\right)<n^{\frac{1-m}{m}}$ $(n\geq 1,m>1)$

16、（5 分）已知：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，试用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

17、（8 分）在曲线 $y=x^2$ 的 $0\leq x\leq a$ 部分上求一点,使过该点的切线与ox轴及直线 $x=a$的围

成的直角三角形的面积最大。

武汉大学 2018-2019 第一学期期中考试试题解答

1、已知：$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} u(x)v(x)=A\neq 0$，问 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=$？为什么？

解 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=0$

因为：$\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{v(x)u(x)}{u(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{u(x)}\cdot v(x)u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{u(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)$

$=0\cdot A=0$

2、设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & ,x>0,x\neq 1,\\ 0 & ,x=0,\\ -1 & ,x=1,\end{cases}$ 试证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,并求$f'(1)$.

解 证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0)$ 即$f(x)$在$x=0$处连续

(2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{-1}=-1=f(1)$ 即$f(x)$在$x=1$连续,从而$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续

(3) $\boldsymbol{f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{2(x-1)}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=-\dfrac{1}{2}}$

3、设$f(x)$有的连续二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right]=0$，试确定$f(0)$, $f'(0)$及 $f''(0)$ 之值。

解：依泰勒公式：$\sin 3x=3x-\dfrac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

则 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\frac{9}{2}x^3+xf(0)+x^2f'(0)+\frac{x^3}{2}f''(0)+o(x^3)}{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3x+f(0)x+x^2f'(0)}{x^3}+\dfrac{f''(0)-9}{2}\right]=0$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(0)+xf'(0)}{x^2}=\dfrac{-f''(0)+9}{2}$ (*)

由此得 $\lim\limits_{x\to 0}[3+f(0)+xf'(0)]=3+f(0)=0$ 故$f(0)=-3$

代入(*)得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(0)}{x}=\dfrac{-f''(0)+9}{2}$ 由此得$f'(0)=0$ 最后得 $\boldsymbol{\dfrac{f''(0)-9}{2}=0}$ 即 $\boldsymbol{f''(0)=9}$

4、求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{x(1-x)}{2}+\dfrac{x^2(1-x)^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{x^n(1-x)^n}{2^n}\right]$的表达式。

解 令$\left|\dfrac{x(1-x)}{2}\right|<1$，解得：$-1<x<2$

当$-1<x<2$时，$\left|\dfrac{x(1-x)}{2}\right|<1$ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{x^{n+1}(1-x)^{n+1}}{2^{n+1}}}{1-\frac{x(1-x)}{2}}=\dfrac{2}{x^2-x+2}$

当$\left|\dfrac{x(1-x)}{2}\right|\geq 1$时，极限不存在 因此$f(x)=\dfrac{2}{x^2-x+2}$，$-1<x<2$

5、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}(b-\cos x)}=\dfrac{1}{2}$ $(a>0)$，试确定a，b之值。

解 因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}(b-\cos x)}=1/2$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}(b-\cos x)}{x^2}=2$

则$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}(b-\cos x)}{x^2}=a(b-1)=0$ 得$b=1$

代回原式$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}(1-\cos x)}=\dfrac{2}{a}=1/2$ 故知$a=4$，$b=1$为所求

6、设 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}-\tan\sqrt[4]{1+x^4}$,求$y'(x)$.

解 令 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，$y=\dfrac{1}{2}\arctan u+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+u}{1-u}-\tan u$

$$y'(x)=f'_u\cdot u'_x=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{4}(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1})-\sec^2 u\right]\cdot\frac{x^3}{(1+x^4)^{3/4}}$$

$$=\left[\frac{-1}{x^4}-\sec^2(\sqrt[4]{1+x^4})\right]\cdot\frac{x^3}{(1+x^4)^{3/4}}$$

7、设 $y=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，$x=e^{2t}+1$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $y=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{2t}{x-t})^x=te^{2t}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{2t}(1+2t)}{2e^{2t}}=\dfrac{1}{2}+t$

8、对任意两个实数x_1与x_2, $f(x)$满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$
且$f'(0)=1, f(x)\neq 0$. 证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导,且$f'(x)=f(x)$.

证明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}$

又$\because f(0)=f^2(0)\therefore f(0)=1$代入上式得

$f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)f(x)$

$\therefore f'(x)=f(x)$

9、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(e^{x^2}-1)-\cos(\ln(1+x^2))}{x^6}$

解 令$f(u)=\cos u$， 则$f'(u)=\sin u$，$u_2=e^{x^2}-1$，$u_1=\ln(1+x^2)$

$\cos u_2-\cos u_1=\sin\xi(u_2-u_1)$($\xi$介于$u_2$与$u_1$之间)

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(e^x-1)-\cos(\ln(1+x^2))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\xi}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-\ln(1+x^2)}{x^4}$

因$e^{x^2}-1\sim x^2\sim\ln(1+x^2)$,而$\xi$介于$e^{x^2}-1$与$\ln(1+x^2)$
之间,故当$x\to 0,\xi\to 0$且$\xi\sim x^2$从而$\sin\xi\sim x^2$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\xi}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)e^{x^2}-1}{2x^2(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{2(1+x^2)}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2(1+x^2)x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

10、当$x \to x_0$时，设$\alpha_1 = o(\alpha)$，$\beta_1 = o(\beta)$且$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$存在，求证：$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$.

证明：设$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A$　　　$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha}}{1+\dfrac{\beta_1}{\beta}}$

由已知$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\alpha} = 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta_1}{\beta} = 0$　故$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha}}{1+\dfrac{\beta_1}{\beta}} = A \cdot 1 = A$

11、设$f(x) = \sqrt{x}\left[\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\right]$，$x \in [0, +\infty]$，试证明$f(x)$在$[0, +\infty)$上有界.

解　显然$f(x)$在$[0,\ +\infty)$上连续，且$f(0) = 0$

又$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

故存在$R > 0$，使当$x \ge R$时，$f(x)$有界，比如$|f(x)| \le 1$

另$f(x)$在闭区间$[0,\ R]$上连续，故必取最大值M及最小值m

故$f(x)$在$x \in [0,\ +\infty)$上有界

12、设n为偶数,且$a \ne 0$,试证.方程$x^n + a^n = (x+a)^n$仅有一个实根$x = 0$.

证明:显然$x = 0$是方程$x^n + a^n = (x+a)^n$的实根，令$F(x) = x^n + a^n - (x+a)^n$

则$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续,可导，若$F(x) = 0$有两个实根$x_1 < x_2$，即$F(x_1) = F(x_2) = 0$

又$F(x)$在$[x_1, x_2]$上连续,可导，则$F(x)$在$[x_1, x_2]$上满足罗尔定理条件　　　　即$\xi^{n-1} = (\xi+a)^{n-1}$

则至少存在$\xi \in (x_1, x_2)$,使$F'(\xi) = 0$，而$F'(x) = nx^{n-1} - n(x+a)^{n-1}$

因n为偶数,则$n-1$为奇数，故$\xi = \xi + a$即$a = 0$与题设$a \ne 0$矛盾，

故$F(x) = 0$最多有一个实根

综上述,方程$x^n + a^n = (x+a)^n$仅有一个实根$x = 0$

13、设$f(x)$对一切实数x满足为$xf''(x) + 3x\left[f'(x)\right]^2 = 1 - e^{-x}$，若$f(x)$在$x = c(c \ne 0)$处有极值时,试判断$f(c)$是极大值还是极小值。

解　若$f(x)$在$x = c$处有极值,则$f'(c) = 0$　因$c \ne 0$时,则由题设有$f''(c) = \dfrac{1-e^{-c}}{c}$

若$c > 0$，则$e^{-c} < 1$，$f''(c) > 0$，　若$c < 0$，则$e^{-c} > 1$，$f''(c) > 0$

故$f(x)$在$x = c$处取得极小值$f(c)$

14、设$f(x)$在$[0, \frac{1}{2}]$上连续,在$(0, \frac{1}{2})$内可导,且$f(\frac{1}{2}) = 0$,

证明:至少存在一点$c \in (0, \frac{1}{2})$,使$f(c) + \sqrt{1-c^2}\arcsin c \cdot f'(c) = 0$ 证明:令$F(x) = f(x) \cdot \arcsin x$

则$F(x)$在$[0, \frac{1}{2}]$连续,在$(0, \frac{1}{2})$内可导，因$f(\frac{1}{2}) = 0$，则$F(0) = F(\frac{1}{2}) = 0$

即$F(x)$在$(0, \frac{1}{2})$满足罗尔定理的条件，则至少存在$c \in (0, \frac{1}{2})$,使$F'(c) = 0$

而$F'(x)=f'(x)\arcsin x+\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$，即$f'(c)\arcsin c+\dfrac{f(c)}{\sqrt{1-c^2}}=0$

即$f(c)+\sqrt{1-c^2}\cdot\arcsin c\cdot f'(c)=0\quad c\in(0,\dfrac{1}{2})$

15、证明不等式$:(n+1)^{\frac{1-m}{m}}<m\left(\sqrt[m]{n+1}-\sqrt[m]{n}\right)<n^{\frac{1-m}{m}}\ (n\geq 1,m>1)$

证明$:$令$f(t)=t^{\frac{1}{m}}(m>1)$则$f(t)$在$[1,+\infty]$连续,可导，且$f'(t)=\dfrac{1}{m}\cdot t^{\frac{1-m}{m}}$

当$n\geq 1$时，对$f(t)$在$[n,n+1]$上应用拉格朗日中值定理

则至少存在$\xi\in(n,n+1)$,使$f(n+1)-f(n)=f'(\xi)\cdot 1$

即　$\sqrt[m]{n+1}-\sqrt[m]{n}=\dfrac{1}{m}\cdot\xi^{\frac{1-m}{m}}$　　　　*

又$n<\xi<n+1$,且$m>1$,即$\dfrac{1-m}{m}<0$，则$(n+1)^{\frac{1-m}{m}}<\xi^{\frac{1-m}{m}}<n^{\frac{1-m}{m}}$

由*知,$(n+1)^{\frac{1-m}{m}}<m(\sqrt[m]{n+1}-\sqrt[m]{n})<n^{\frac{1-m}{m}}$

16、已知$:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，试用极限定义证明$:\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

证明 由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使当$0<(x-x_0(<\delta_1$

时，有$f(x)>0$

取$\varepsilon_2=\sqrt{A}\varepsilon$，存在$\delta_2>0$，使当 $0<(x-x_0(<\delta_2$时，有$(f(x)-A(<\sqrt{A}\varepsilon$

取$\delta=\min\{\delta_1，\delta_2\}$，

则当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}\right|=\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}<\varepsilon$

因此$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$

17、在曲线$y=x^2$的$0\leq x\leq a$部分上求一点,使过该点的切线与ox轴及直线$x=a$的围成的直角三角形的面积最大。

解 设所求点为$P(x，y)$,则切线方程为：$Y-x^2=2x(X-x)$，切线与ox轴的截距为

$a_1=x-\dfrac{x_2}{2x}=\dfrac{x}{2}$　　　Δ底边长为$a-\dfrac{x}{2}$

切线与$x=a$相交的交点纵坐标为

$b=Y\big|_{x=a}=x^2+2x(a-x)=x(2a-x)$

$S=\dfrac{1}{2}(a-\dfrac{x}{2})\cdot x(2a-x)=\dfrac{x}{4}(2a-x)^2$

所求三角形的面积为:

$S'(x)=\dfrac{1}{4}(2a-x)^2+\dfrac{x}{4}\cdot 2(x-2a)$

$\quad=\dfrac{1}{4}(2a-x)[2a-x-2x]=\dfrac{1}{4}(2a-x)(2a-3x)$

在$(0，a)$内有唯一驻点$x_0=\dfrac{2}{3}a$

$S''(x)=\dfrac{1}{4}(6x-8a)$　　$S''(\dfrac{2}{3}a)<0$，故当$x=\dfrac{2}{3}a$时,S取得唯一的极大值也是最大值

此时$y=\dfrac{4}{9}a^2$　　所求点为$(\dfrac{2}{3}a，\dfrac{4}{9}a^2)$