例 5.12　证明：当$\|x\|=1$时，实二次型$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的最大值等于$\boldsymbol{A}$的最大特征值.

证　因$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为$n$元实二次型，存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，可将$f(x)$化为标准形：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{y}_1^2+\lambda_2\boldsymbol{y}_2^2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{y}_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的特征值．设$\lambda_{i_0}$是$\boldsymbol{A}$的最大特征值，因为

$$\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2+\cdots+\boldsymbol{y}_n^2=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|^2=1,$$

于是$\boldsymbol{f}=\lambda_1\boldsymbol{y}_1^2+\lambda_2\boldsymbol{y}_2^2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{y}_n^2\le\lambda_{i_0}\boldsymbol{y}_1^2+\lambda_{i_0}\boldsymbol{y}_2^2+\cdots+\lambda_{i_0}\boldsymbol{y}_n^2=\lambda_{i_0}$.

现取$\boldsymbol{y}$为第i_0个基本单位向量$\boldsymbol{e}_{i_0}$，则当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_{i_0}$时就有

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_{i_0}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_{i_0}=\lambda_{i_0},$$

即当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_{i_0}$时，$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$确实可以取到最大值$\lambda_{i_0}$.　■

5.5.2 正定二次型

定义 5.5 设有二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，若对$\forall x\neq 0\in\mathbb{R}^n$，有

(1) $f(x)>0$，则称f为正定二次型(positive definite quadratic form)，并称对称矩阵A是正定矩阵(positive definite matrix)；

(2) $f(x)<0$，则称f为负定二次型(negative definite quadratic form)，并称对称矩阵A是负定矩阵(negative definite matrix)；

(3) $f(x)\geq 0$，且至少存在一个$x_0\neq 0$，使$f(x_0)=0$，则称f为半正定二次型(positive semidefinite quadratic form)，并称对称矩阵A是半正定矩阵(positive semidefinite matrix)；

(4) $f(x)\leq 0$，且至少存在一个$x_0\neq 0$，使$f(x_0)=0$，则称f为半负定二次型(negative semidefinite quadratic form)，并称对称矩阵A是半负定矩阵(negative semidefinite matrix).

正定和半正定以及负定和半负定二次型，统称为有定二次型.

例如：

$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2$是正定二次型.

$f_2(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+x_2^2$是半正定二次型.

$f_3(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2-3x_3^2$是负定二次型.

$f_4(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-x_3^2$既不是正定（或负定）二次型，也不是半正定（或半负定）二次型，称为不定二次型.

性质 5. 5　对二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，有

① 实对称阵A正定当且仅当$-A$负定.

② 二次型$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$经任何可逆线性变换$x=Py$后所得的二次型

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=(Py)^{\mathrm{T}}A(Py)=y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)y=y^{\mathrm{T}}By=g(y)$$

的正定性不变.

定理 5.9　设$A = A_{n\times n}$为实对称阵，$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$，则以下几个命题等价：

① A正定，或$f(x) = x^{T}Ax$是正定二次型；

② A的特征值全大于零；

③ A的正惯性指数为n；

④ A合同于单位阵E；

⑤ 存在可逆阵B，使得$A = B^{\mathrm{T}}B$.

用同样的方法可以证明关于半正定判别的定理：

定理 5.10　若A为实对称矩阵，则下列条件等价：

(1) A为半正定矩阵；

(2) A的特征值均大于等于零，且至少有一个等于零；

(3) A的正惯性指数为$R(A) < n$；

(4) $A \simeq \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中 1 有$R(A)$个，$R(A) < n$；

(5) 存在非满秩矩阵P，使得$A = P^{\mathrm{T}}P$. ■

例 5. 17　判定下列二次型是否是有定二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

解　因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2\geq 0,$$

且易找到满足$x_1+x_2=0, x_2-2x_3=0$的非零解，如$(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$等，故原二次型为半正定二次型.

也可以利用二次型矩阵A的特征值来判断. 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-7\lambda+9),$$

故A的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$，$\lambda_3=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$，从而原二次型为半正定二次型.

例 5.18　设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{n\times n}$都正定，证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$也都正定.

证　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$显然对称．对$\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\neq\boldsymbol{0}$，由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{n\times n}$都正定可得

$$\alpha^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\alpha+\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\alpha>0.$$

故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$正定.

记$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，因$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$对称，有$\boldsymbol{C}$对称．由块对角阵的行列式的性质知$\boldsymbol{C}$的$2n$个特征值是由$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值和$\boldsymbol{B}$的$n$个特征值合并组成，故$\boldsymbol{C}$的特征值也全大于零，所以$\boldsymbol{C}$也正定.　■

正定矩阵具有以下一些简单性质:

1. 若A为正定的, 则A^T, A^{-1}, kA（k为正数），A^* 均为正定矩阵.

2.若A, B均为n阶正定矩阵, 则$kA+lB$（k和l为正数）也是正定矩阵.

下面我们介绍一个比较实用的判定对称矩阵是否正定的判定准则.

定理 5.11　实对称阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$正定的充要条件是它的各阶顺序主子式全大于零，即

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{a}_{11}>0,\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23}\\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33}\end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{A}_n=|\boldsymbol{A}|>0.$$

实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为半正定矩阵的充要条件是$\boldsymbol{A}$的各阶主子式非负,但至少有一个主子式等于零.

因对称矩阵$\boldsymbol{A}$为负定$\Leftrightarrow -\boldsymbol{A}$正定，故有

推论　实对称阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$负定的充要条件是它的顺序主子式满足:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{a}_{11}<0,\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \left(-1\right)^k\boldsymbol{A}_k>0,\quad \cdots,\quad \left(-1\right)^n|\boldsymbol{A}|>0.$$

例 5. 19　判别二次型$f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$的正定性.

解　f的矩阵为$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

因为$-5<0$，所以A不可能是正定的，下面我们来看一下这个矩阵A是否是负定矩阵.

$$-A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$-A$的顺序主子式为

$$5>0\,,\quad \begin{vmatrix}5 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}=26>0,|-A|=80>0\,.$$

所以$-A$正定，从而A负定. ■

例 5. 20　判别$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$是否正定.

解　$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，因为$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -30 < 0$，故$f$不正定.

例 5.21　当λ取何值时，$f=\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$为正定二次型？

解　$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，

$A_1=\lambda>0$，且

$A_2=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}>0$，得$\lambda>1$或$\lambda<-1$（舍去），且

$A_3=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}>0$，得$\lambda>2$或$\lambda<-1$（舍去）时正定，

故$\lambda>2$时，f为正定的. ■

利用二次型的正定性讨论多变量函数的极值问题.

设n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点$P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的某个邻域内有二阶连续偏导数，由多元函数的泰勒（Taylor）公式得

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$$
$$=\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+R,$$

简写为矩阵表达式

$$f(P_0+\Delta P)-f(P_0)=x^{\mathrm{T}}\xi+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+R,$$

其中

$$f(P_0)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),$$
$$f(P_0+\Delta P)=f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n),$$

$$x=\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix},\quad \xi=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{P_0},\quad A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}_{P_0},$$

显然 A 为实对称矩阵，由高等数学知，函数 $f(P)$ 在 P_0 处有极值的必要条件是 ξ 为零向量，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P_0}=0, i=1,2,\cdots,n.$$

在此条件下，点 P_0 为 f 的驻点，这时有

$$f(P_0+\Delta P)-f(P_0)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+R.$$

当 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 足够小时，上式右端正负号完全由二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 来决定，故若这二次型的秩为 n，则

（1） 当$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为正定时，$P_0$为 f 的一个极小值点.

（2） 当$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为负定时，$P_0$为 f 的一个极大值点.

（3） 当$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为不定时，$P_0$不是 f 的极值点.

当$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的秩小于 n 时，要决定 f 在点 P_0 的性态，还需研究余项 R，这里就不再讨论了.

当 $n=2$ 时，就得到熟知的二元函数在 P_0 有极值的充分条件，即若

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{P_0}=0,$$

记$a=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{P_0}, b=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{P_0}, c=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{P_0}$，得$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$. 于是当$R(A)=2$时，有

（1） A 正定时，$f(P_0)$为极小值；

（2） A 负定时，$f(P_0)$为极大值；

（3） A 不定时，$f(P_0)$不是极值.

例 5.22　求函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2=0\end{cases}$$

得驻点 $P_1(0,0)$，$P_2(1,1)$. 又因为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$，所以在

P_1 处有 $A_1=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$，$|A_1|\neq 0$，且 A_1 为不定，故 $f(P_1)$ 非极值, 而在 P_2 处，有

$A_2=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$，$|A_2|\neq 0$，且 A_2 负定，故 $f(P_2)$ 为极大值.

例3：若A是正定矩阵，证明 A^{-1} 也是正定矩阵.

证明：因为A正定，所以A为对称矩阵，且$r(A)=n$

从而A可逆，且 A^{-1}也是对称矩阵.

下面证明 A^{-1} 正定

方法一： $\boldsymbol{x}^T A^{-1}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, A^{-1}\boldsymbol{x}) \overset{\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}}{=\!=\!=} (A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$

$$= \boldsymbol{y}^T A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y}$$

因为A正定，所以对任意 $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, 有$\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y} > 0$

又因为A可逆，所以 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$

从而对任意 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 有 $\boldsymbol{x}^T A^{-1}\boldsymbol{x} > 0$

故 A^{-1} 正定.

方法二：因为**A**正定，所以**A**合同于**E**，即存在可逆阵**C**，

使得 $C^T AC = E$

于是 $(C^T AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}(C^{-1})^T = E$

取 $D = (C^{-1})^T$, 则有 $D^T A^{-1}D = E$

故 A^{-1} 正定.

方法三：因为**A**正定，所以可逆阵**P**，使得 $A = P^T P$

于是 $A^{-1} = (P^{-1})(P^{-1})^T$

取 $Q = (P^{-1})^T$, 则有 $A^{-1} = Q^T Q$

故 A^{-1} 正定.

方法四：因为**A**正定，所以**A**的特征值 $\lambda_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$,

而 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_i^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 也大于**0**，

故 A^{-1} 正定.

例4: 设有n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2$

$$+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中 a_i 为实数，当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足什么条件时，二次型为正定二次型.

解:显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge 0$，且等号成立当且仅当

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ \quad\vdots \\ x_n+a_nx_1=0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n$$

当 $a_1a_2\cdots a_n \neq (-1)^n$ 时，系数行列式 $\neq 0$, 方程组

只有零解，即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ 此时二次型正定.

例5：设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，$\boldsymbol{r(A)=n}$,证明 $A^T A$ 正定.

证明：首先容易看出 $A^T A$ 为对称矩阵

对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 因为$\boldsymbol{r(A)=n}$，所以 $\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{0}$, 于是

$$\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) > 0$$

故 $A^T A$ 正定.

等价（相抵）变换————保秩。

相似变换————保秩，保特征值，保行列式。

合同变换————保秩，保正、负惯性指数，
保对称性，保正定性。

思考：判断下列命题是否正确：

(1) 若A,B均为n阶正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵；

(2) 若A,B均为n阶正定矩阵，则$A^{-1}+B^{-1}$也是正定矩阵；

(3) 设A,B均为n阶正定矩阵，则AB也是正定矩阵；

(4) 若实矩阵B与正定矩阵A合同，则B也是正定矩阵；

(5) 若A是正定矩阵，则A的对角线上的元素全部大于 0.

习题 5

1．选择题：

(1) 设λ_1与λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，ξ，η是A的分别属于λ_1，λ_2的特征向量，则______.

(A) 对任意$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，$k_1\xi + k_2\eta$都是A的特征向量。

(B) 存在常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，使$k_1\xi + k_2\eta$是A的特征向量。

(C) 当$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$时，$k_1\xi + k_2\eta$不可能是A的特征向量。

(D) 存在唯一的一组常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，使$k_1\xi + k_2\eta$是A的特征向量。

(2) 设λ_1与λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1，α_2，则α_1，$\boldsymbol{A}(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是______.

(A) $\lambda_1 \neq 0$。 (B) $\lambda_2 \neq 0$。 (C) $\lambda_1 = 0$。 (D) $\lambda_2 = 0$。

(3) 设n阶可逆阵A对应于特征值λ的特征向量为$x \neq 0$，P为n阶可逆阵，则$P^{-1}A^{-1}P$的对应于特征值$\frac{1}{\lambda}$的特征向量为______.

(A) $P^{-1}x$； (B) Px； (C) $P^{T}x$； (D) $(P^{T})^{-1}x$。

(4) 设$\boldsymbol{A}$是n阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$是n阶可逆矩阵．已知n维列向量α是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，则矩阵$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$属于特征值$\lambda$的特征向量是______．

（A） $\boldsymbol{P}^{-1}\alpha$ （B） $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\alpha$ （C） $\boldsymbol{P}\alpha$ （D） $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$

(9) 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$0, \pm 1$，则下列命题中不正确的是______.

(A) $\boldsymbol{A}$为不可逆矩阵

(B) $\boldsymbol{A}$的主对角线元素之和为零

(C) 1 与-1所对应的特征向量相互正交

(D) $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$的基础解系仅一个向量

(10) 设A，B为n阶矩阵，且A与B相似，E为n阶单位矩阵，则下列结论正确的是______.

(A) 存在正交阵P，使有$P^{-1}AP=B$.

(B) A与B有相同的特征值和特征向量.

(C) A与B相似于同一个对角矩阵.

(D) 对于任意常数t，$tE-A$与$tE-B$相似.

§5.1 方阵的特征值与特征向量

定义 5.1 设A是n阶方阵，若存在数λ和非零列向量x，使得

$$Ax = \lambda x, \tag{5-1}$$

则称数λ为A的特征值(eigenvalue 或 characteristic value)，称非零向量x为A的对应于（或属于）特征值λ的一个特征向量(eigenvector 或 characteristic vector)，同样也称λ为对应于特征向量x的特征值.

注意特征值和特征向量针对方阵，并且特征向量一定是非零向量.

（5-1）式也可写成

$$(\lambda E - A)x = 0. \tag{5-2}$$

λ是n阶矩阵A的特征值$\Leftrightarrow (\lambda E - A)x = 0$有非零解

$\Leftrightarrow R(\lambda E - A) < n$

$\Leftrightarrow \left|\lambda E - A\right| = 0.$

ξ是A的属于特征值λ的一个特征向量$\Leftrightarrow \xi$是$(\lambda E - A)x = 0$的非零解.

所以计算矩阵的特征值对应的特征向量的问题转化为求齐次线性方程组的非零解的问题.

定理 5.1 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$分别是A的属于互不相等的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的特征向量，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$线性无关.

推论 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$n$阶方阵$A$的不同特征值，而$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$（$i=1,2,\cdots,m$）分别是$A$的对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的$r_i$个线性无关的特征向量，则向量组

$$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{2r_2},\cdots,\xi_{m1},\cdots,\xi_{mr_m}$$

也线性无关.

矩阵的特征值和特征向量的几个简单性质：

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是n阶矩阵，称 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的迹(trace).

定理 5.2　设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（重根按重数计算），则

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$;

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

推论　方阵$\boldsymbol{A}$可逆当且仅当它的特征值全不为 0.

特征值有如下性质：

性质 5.1　设λ是$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的特征值，则

① 若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\dfrac{1}{\lambda}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

② λ^2是$\boldsymbol{A}^2$的特征值，进一步地，有

若λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(\boldsymbol{A})$的特征值，其中

$$\varphi(\lambda)=a_0\lambda+a_1\lambda+\cdots+a_s\lambda^s,\quad \varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_s\boldsymbol{A}^s.$$

③ 若$\lambda\neq 0$，则$\dfrac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$是$\boldsymbol{A}^*$的特征值.

④ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值与$\boldsymbol{A}$的特征值相同.

§5.2 相似矩阵

定义 5.2 设A,B都是n阶方阵，若存在可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = B, \tag{5-8}$$

则称A相似于B，记作$A \sim B$.

性质 5.2 若$A \sim B$，则有

（1）$|A| = |B|$，从而A与B的可逆性相同.

（2）当A或B可逆时，则有$A^{-1} \sim B^{-1}$.

（3）$A^n \sim B^n$，$kA \sim kB$，其中n为正整数，k为任意实数.

（4）$f(A) \sim f(B)$，其中$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$为任意多项式.

定理 5.3 若$A \sim B$，则A与B的特征多项式相同，从而A与B的特征值也相同.

推论 若n阶方阵A与对角矩阵$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$相似，则$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的所有$n$个特征值.

若$P^{-1}AP=B$，则A与B的特征向量之间的关系，有如下结论：

η是A的对应于λ的特征向量$\Leftrightarrow$ $P^{-1}\eta$是B的对应于λ的特征向量.

事实上，有

$$A\eta=\lambda\eta \Leftrightarrow P^{-1}A\eta=\lambda P^{-1}\eta \quad \Leftrightarrow P^{-1}A(PP^{-1})\eta=\lambda\left(P^{-1}\eta\right)$$

$$\Leftrightarrow B\left(P^{-1}\eta\right)=\lambda\left(P^{-1}\eta\right). \qquad (\eta\neq 0 \text{时} P^{-1}\eta\neq 0)$$

定理 5.4　n阶方阵A相似于对角阵（即A可对角化）的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

推论　若n阶矩阵A有n个互不相等的特征值，则A可对角化.　■

λ_0作为$|\lambda E-A|=0$的根出现的重数，称为λ_0的代数重数(algebraic multiplicity). 若λ_0是矩阵A的特征值，则$(\lambda_0 E-A)x=0$的解空间的维数称为λ_0的几何重数(geometric multiplicity).

定理 5.5*　n阶方阵A相似于对角阵的充分必要条件是：A的每个特征值的几何重数和代数重数相等，即k_i重特征值λ_i有k_i个线性无关的特征向量，也就是$R(\lambda_i E-A)=n-k_i$.　■

§5.3　实对称矩阵的对角化

性质 5.3　实对称阵的特征值必为实数.

性质 5.4　实对称阵A的属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 5.6　设A为 n阶实对称矩阵，则必有正交矩阵P，使

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{5-9}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$A$的所有特征值. 此时称$A$正交相似(orthogonally similar)于一个对角矩阵.　■

推论　设A为 n 阶实对称矩阵，λ_0是A的特征多项式的k重根，则$R(\lambda_0 E - A) = n - k$，从而对应于特征值$\lambda_0$恰好有$k$个线性无关的特征向量.　■

利用正交矩阵把n阶实对称矩阵A化为对角矩阵的一般步骤是：

① 设$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，其中$\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$，$\lambda_i$的代数重数为$k_i$.

② 对应于每个特征值λ_i，求出$(\lambda_i \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系：$\xi_{i1},\cdots,\xi_{i,k_i}$，再把它们正交化并单位化，得到$k_i$个两两正交的单位向量$\boldsymbol{p}_{i1},\cdots,\boldsymbol{p}_{i,k_i}$.

③ 把②中求出的n个两两正交的单位向量合在一起，以它们的列向量构成正交矩阵$\boldsymbol{P}$，譬如令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_{11},\cdots,\boldsymbol{p}_{1,k_1},\cdots,\boldsymbol{p}_{s1},\cdots,\boldsymbol{p}_{s,k_s})$，由定理 5.1 的推论知$\boldsymbol{P}$是正交阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}\boldsymbol{k}_1 \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}\boldsymbol{k}_s \end{array}.$$

注意上面的对角矩阵中的主对角线上的特征值的排列次序和正交矩阵P中列向量的排列次序要对应一致.

5.4.1　二次型及其标准形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^{\mathrm{T}}Ax, \tag{5-11}$$

其中A是对称矩阵.

二次型（5-11）也记为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax. \tag{5-12}$$

易见二次型f与对称矩阵A确立了一一对应关系，即任给一个二次型f就唯一确定了一个对称矩阵A；反之，任给一个对称矩阵A，也唯一确定了一个二次型f．称二次型f唯一确定的对称矩阵A为二次型f的矩阵，也称二次型f是对称矩阵A的二次型．矩阵A的秩称为二次型f的秩.

$$x = Cy, \tag{5-14}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

设有一个n元二次型$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$，引进新的一组变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$，并把. $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$用线性变换（5-14）表示. 代入$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，得到$y_1, \cdots, y_n$的一个二次型$g(y_1, \cdots, y_n)$，即

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = g(y_1, \cdots, y_n),$$

称二次型经过可逆线性变换后得到的仅包含平方项的二次型为二次型的标准形(standard （或 canonical） form of a quadratic form). 而形如：$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$的二次型称为二次型的规范标准形(normal form of a quadratic form)（简称为规范形）. 标准二次型的矩阵是对角矩阵.

定义 5.4　两个n阶矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$（有教材也记为：$\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{B}$）.

由定义易证矩阵间的合同关系也满足自反性，对称性和传递性。

5.4.2　正交变换法

根据合同矩阵的定义，二次型经可逆变换化为标准形，实际上是寻找合同矩阵，将对称矩阵对角化．由定理 5.6 知，任给一个实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，总存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$，即$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$．将此结果应用于二次型，即有

定理 5.7　对于n元二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将该二次型化为标准形：

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是对称阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{P}$的列向量组$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$是标准正交向量组，且$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）.　■

推论 任给二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总存在可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使得$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$为规范形.

证 按定理 5. 7，有$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，

设二次型的秩为r，则特征值中恰好r个不为零，不妨设为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$不等于零，$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$，令

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}，\text{其中} k_i=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r \\ 1, & i>r \end{cases}$$

则$\boldsymbol{K}$可逆，变换$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$把$f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})$化为

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{K}\boldsymbol{z},$$

而$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{K}=\operatorname{diag}\left(\dfrac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\dfrac{\lambda_2}{|\lambda_2|},\cdots,\dfrac{\lambda_r}{|\lambda_r|},0,\cdots,0\right)$,

记$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}$，即知可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$把原二次型$f$化成了规范形

$$f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})=\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}z_1^2+\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|}z_2^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|}z_r^2. \qquad \blacksquare$$

定理 5. 9　设$A = A_{n\times n}$为实对称阵，$f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$，则以下几个命题等价：

① A正定，或$f(x) = x^T A x$是正定二次型；

② A的特征值全大于零；

③ A的正惯性指数为n；

④ A合同于单位阵E；

⑤ 存在可逆阵B，使得$A = B^{\mathrm{T}} B$.

用同样的方法可以证明关于半正定判别的定理：

定理 5. 10　若A为实对称矩阵，则下列条件等价：

（1） A为半正定矩阵；

（2） A的特征值均大于等于零，且至少有一个等于零；

（3） A的正惯性指数为$R(A) < n$；

（4） $A \simeq \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中 1 有$R(A)$个，$R(A) < n$；

（5） 存在非满秩矩阵P，使得$A = P^{\mathrm{T}} P$. ■

下面我们介绍一个比较实用的判定对称矩阵是否正定的判定准则.

定理 5.11　实对称阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定的充要条件是它的各阶顺序主子式全大于零，即

$$A_1=a_{11}>0,\quad A_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad A_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad\cdots,\quad A_n=|A|>0.$$

实对称矩阵A为半正定矩阵的充要条件是A的各阶主子式非负,但至少有一个主子式等于零.

因对称矩阵A为负定$\Leftrightarrow -A$正定，故有

推论　实对称阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$负定的充要条件是它的顺序主子式满足:

$$A_1=a_{11}<0,\quad A_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad\cdots,\quad\left(-1\right)^k A_k>0,\quad\cdots,\quad\left(-1\right)^n|A|>0.$$

武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试线性代数 B

一、（10 分）已知$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{k}_1 & 2 & 1 & 2 \\ \boldsymbol{k}_2 & 2 & 2 & 2 \\ \boldsymbol{k}_3 & 1 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{k}_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18$，试计算$\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}$，$\boldsymbol{A}_{32} + \boldsymbol{A}_{42}$的值。

二、(12 分)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-2,3,-1,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,2,-2,-3)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (5,0,7,-5,-4)^T,$ $\boldsymbol{\alpha}_4 = (3,-1,5,-3,-1)^T$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 - (\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2)$；

（2）求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$.

五、（16 分）设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$,其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

1、a,b的值；

2、用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设n阶矩阵A,B满足条件$A+B=AB$，其中$B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，且

$a_1=(1,0,1)$，$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵A；

2、求秩$r(A^*B^*)$，其中A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵；

3、设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

七、（10 分）设A、B均是同阶方阵，B是可逆矩阵，且满足$A^2+AB+B^2=0$，证明A、A^2+B^2以及$A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设B是$m\times n$阶矩阵，其m个行向量是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：对任一m阶可逆矩阵C, CB的行向量组也是$Ax=0$的基础

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

1、（10 分）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right| = m, \left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right| = n$,计算四阶行列式$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\left(\beta_1+\beta_2\right)\right|$.

2、(10 分)已知 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 阶矩阵$B$满足方程 $A^2B-A-B=E$,

试求矩阵B.

3、（10 分）已知向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面，试判断向量 $\alpha=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3, \beta=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3, \gamma=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面。

4、（10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

5、(12 分)设有向量组$\alpha_1=\left(1,3,3,1\right)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=\left(1,4,1,2\right)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=\left(1,0,2,1\right)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=\left(1,7,2,k\right)^{\mathrm{T}}$

（1）问k为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的

6、（10 分）设A是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得 B；再将 B 的第二歹

列上得矩阵 C;然后再将矩阵 C的第一列乘以 2 得到矩阵 D; 求满足$AX=D$的可

7、（10 分）若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$可以对角化，设与$A$相似的对角矩阵为$\Lambda$；（1

a的值及对角矩阵Λ，可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

8、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$R^3$的

基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$且$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=($

试求：（1） 基β_1,β_2,β_3；（2） 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下有相同坐标的全体向量

9、（8 分）设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*,证明：若$|A|=O$,则$|A^*|=O$；

10、（10 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值, 判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被17整除.

二、（10 分）什么样的矩阵X满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10 分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}B^T(CB^{-1} + E)^T$.

四、（10 分）计算 n 阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$的值.

五、（12 分）求向量组$\alpha_1 = (1,3,3,1)$, $\alpha_2 = (1,4,1,2)$, $\alpha_3 = (1,0,2,1)$, $\alpha_4 = (1,7,2,2)$的秩无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$ 满足$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

（1）求$\boldsymbol{A}$.（2）计算行列式$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|$的值；

（3）判断$\boldsymbol{A}$是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若向量$\alpha$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$的坐标。

九、（10 分）设二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$通过正交变换$x=Py$化成标准型$f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$，求出$a,b$的值及所用的正交变换。

十、（14 分）讨论a,b为何值时，方程$ax_1+x_2+x_3=4$与方程组$\begin{cases}x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+3bx_2+x_3=9\end{cases}$无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

1、（10 分）设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，问$A$是否可逆？如可逆求$A^{-1}$，如不可逆，求$A$的伴随矩阵$A^*$.

2、（10 分）已知矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$可交换. 试求$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$的值.

3、（10 分）向量α在基$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,1)$下的坐标$\alpha=(4,5,4,3)$，求α在基$\beta_1=(1,2,2)$，$\beta_2=(1,0,2)$，$\beta_3=(2,0,2)$下的坐标。

4、（12 分）设 3 阶方阵A的特征值分别为$1,-1,0$,方阵$B=2A^2-3A-4E$,

1）试求矩阵B的特征值及与B相似的对角矩阵；

2）验证B可逆, 并求B^{-1}的特征值及行列式$|B^{-1}|$之值。

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$, $\alpha_2=(1,2,0,1)$, $\alpha_3=(-1,1-3,0)$, $\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

6、（10 分）设二次型$f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$其中$k$为参数，确定$k$的取值范围使$f$为正定的。

7、（10 分）设A是$m\times 4$矩阵且A的秩为2，B是$m\times 1$的非零矩阵，若a_1,a_2,a_3是方程组$AX=B$的解向量，且设$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},a_1+a_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},a_2+a_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\3\end{bmatrix}a_2+a_3=(1,0,4,3)^{\mathrm{T}}$，求方程组$AX=B$的通解.

8、（12 分）已知（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3+x_4=1\\2x_1+x_2+bx_3+x_4=4\\2x_1+2x_2+3x_3+cx_4=1\end{cases}$与（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\-x_2+2x_3-x_4=2\\x_3+2x_4=-1\end{cases}$同解，试确定$a,b,c$之值.

9、（10 分）用正交变换化二次型$f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$为标准形，并写出所用正交变换及$f$的标准形。

10、（6 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$R^n$中$n-1$线性无关的向量，$\beta_i$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$(i=1,2)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

1、（10 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，问$\boldsymbol{A}$是否可逆？如可逆求$\boldsymbol{A}^{-1}$，如不可逆，求$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$.

2、（10 分）已知矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可交换. 试求$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{vmatrix}$的值.

3、（10 分）向量α在基$\alpha_1=(1,1,1)$， $\alpha_2=(0,1,1)$， $\alpha_3=(1,-1,1)$下的坐标$\alpha=(4,5,4,3)$，求α在基$\beta_1=(1,2,2)$， $\beta_2=(1,0,2)$， $\beta_3=(2,0,2)$下的坐标。

4、（12 分）设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$1,-1,0$,方阵$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$,

1）试求矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值及与$\boldsymbol{B}$相似的对角矩阵；

2）验证$\boldsymbol{B}$可逆, 并求$\boldsymbol{B}^{-1}$的特征值及行列式$\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|$之值。

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$, $\alpha_2=(1,2,0,1)$, $\alpha_3=(-1,1-3,0)$, $\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

6、（10 分）设二次型$f = x_1^2 + 2x_2^2 + \left(1-k\right)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$其中$k$为参数，确定$k$的取值范围使$f$为正定的。

7、(10 分)设A是$m\times 4$矩阵且A的秩为2，B是$m\times 1$的非零矩阵，若a_1,a_2,a_3是方程组$AX=B$的解向量，且设

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},a_1+a_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},a_2+a_3=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\3\end{bmatrix}a_2+a_3=(1,0,4,3)^{\mathrm{T}}$$

，求方程组$AX=B$的通解.

8、（12 分）已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与方程组

（Ⅱ）$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ 同解，试确定 a,b,c 之值.

9、（10 分）用正交变换化二次型$f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$为标准形，并写出所用正交变换及$f$的标准形。

10、（6 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$\boldsymbol{R}^n$中$\boldsymbol{n}-1$线性无关的向量，$\beta_{\boldsymbol{i}}$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$\left(\boldsymbol{i}=1,2\right)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值，用行列式的性质，判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被$17$整除.

二、（10 分）什么样的矩阵$\boldsymbol{X}$满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$，求

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})^{T}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{T}\boldsymbol{A}]^{-1}$.

四、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$ 的值.

五、（12 分）求向量组$\alpha_1=(1,3,3,1)$，$\alpha_2=(1,4,1,2)$，$\alpha_3=(1,0,2,1)$，$\alpha_4=(1,7,2,2)$的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是齐次方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$\boldsymbol{AX}=0$的解，求证：$\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_r$线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$ 满足$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$，

(1) 求$\boldsymbol{A}$.

（2）计算行列式$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}|$的值；

（3）判断$\boldsymbol{A}$是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若向量$\alpha$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3\}$的坐标。

九、（10 分）设二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$通过正交变换$x = Py$化成标准型$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2$，求出$a, b$的值及所用的正交变换。

十、(14 分) 讨论a,b为何值时，方程$ax_1+x_2+x_3=4$与方程组$\begin{cases} x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+3bx_2+x_3=9 \end{cases}$

无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

1、（10 分）若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $\left|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1\right| = \boldsymbol{m}$，$\left|\alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3\right| = \boldsymbol{n}$，计算四阶行列式 $\left|\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \left(\beta_1 + \beta_2\right)\right|$.

2、(10 分)已知 3 阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$满足方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,

试求矩阵$\boldsymbol{B}$.

3、（10分）已知向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，试判断向量$\alpha = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \beta = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \gamma = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$是否共面。

4、（10 分）设$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\beta$的通解.

5、(12 分)设有向量组$\alpha_1=(1,3,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,4,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,7,2,\boldsymbol{k})^{\mathrm{T}}$

（1）问$\boldsymbol{k}$为何值时，该向量组线性相关？（2）在线性相关时求出该向量组的一个极大线性无关组并将其余向量用该极大线性无关组线性表示。

6、（10 分）设A是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得矩阵 B；再将 B 的第二列加到第三列上得矩阵 C；然后再将矩阵 C 的第一列乘以 2 得到矩阵 D;求满足$AX = D$ 的可逆矩阵X.

7、（10 分）若矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$可以对角化，设与$\boldsymbol{A}$相似的对角矩阵为$\Lambda$；（1）

试求常数$\boldsymbol{a}$的值及对角矩阵Λ，可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$.

8、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$\boldsymbol{R}^3$的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$且

$\alpha_1=(1,0,0)^T, \alpha_2=(1,1,0)^T, \alpha_3=(1,1,1)^T$,

试求：（1） 基β_1,β_2,β_3；（2） 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下有相同坐标的全体向量.

9、（8 分）设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*,证明：若$\left|A\right| = O$,则$\left|A^*\right| = O$；

10、（10 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中

a为参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。

武汉大学 2018-2019 学年第二学期期末考试线性代数 B（A 卷）

一、（10 分）已知$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{k}_1 & 2 & 1 & 2 \\ \boldsymbol{k}_2 & 2 & 2 & 2 \\ \boldsymbol{k}_3 & 1 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{k}_4 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 18$，试计算$\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}$，$\boldsymbol{A}_{32} + \boldsymbol{A}_{42}$的值。

二、（12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三、（14 分）设矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

（1）求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2)$；

（2）求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

四、（15 分）设有线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1\end{cases}$.

讨论λ为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出其通解.

五、（16 分）设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\left(b>0\right)$,其中二次型的矩阵$A$的特征值之和为 1，特征值之积为$-12$.

1、a,b的值；

2、用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵。

六、（15 分）设n阶矩阵A,B满足条件$A+B=AB$，其中$B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且

$a_1=(1,0,1)$，$a_2=(2,1,0),a_3=(1,1,1)$，

1、求矩阵A；

2、求秩$r(A^*B^*)$，其中A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵；

3、设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，求$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；

七、（10 分）设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$均是同阶方阵，$\boldsymbol{B}$是可逆矩阵，且满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=0$，证明$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$以及$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵。

八、（8 分）设B是$m\times n$阶矩阵，其m个行向量是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：对任一m阶可逆矩阵C，CB的行向量组也是$Ax=0$的基础解系。