理论力学第 8 次作业

3.10

设彗星碰撞前速度为v_0，动能为E_0
轨道的偏心率 e 与能量 E 的关系为

$$e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{Mk^2}}$$

椭圆 $E<0$，抛物线 $E=0$

由题意得

$$1-\alpha=e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{Mk^2}}$$

解得

$$E=\frac{(\alpha^2-2\alpha)Mk^2}{2l^2}\approx-\frac{\alpha Mk^2}{l^2}$$

只改变了远日点的动能，所以

$$\Delta E_k=0-E=-E=\frac{\alpha Mk^2}{l^2}$$

由完全非弹性碰撞得

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}(M+m)v'^2-\frac{1}{2}Mv^2$$

$$\approx\frac{1}{2}M\left(v'^2-v^2\right)$$

$$\approx\frac{1}{2}M\left[\left(\frac{mv_0}{M}+v\right)^2-v^2\right]=\frac{1}{2}M\left(\frac{m^2v_0^2}{M^2}+\frac{2mvv_0}{M}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m}{M}E_0$$

$$\therefore\frac{1}{2}\frac{m}{M}E_0=\frac{\alpha Mk^2}{l^2}$$

即

$$E_0=\frac{2\alpha M^2k^2}{ml^2}$$

3.11

互相环绕时

$$G\frac{m^2}{(2r)^2}=m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 r$$

即

$$G\frac{m\cdot\frac{m}{4}}{r^2}= m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 r$$

与中心天体$\frac{m}{4}$等价

互相下坠时可以将轨道看做极扁的椭圆，$\frac{m}{4}$固定在一个焦点

$$\left(\frac{T}{\tau}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}r}{r}\right)^3=\frac{1}{8}$$

即

$$T=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tau$$

所需时间为

$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

3.12

3.17

在同一轨道上时：

$$\frac{1}{r_1}=C[1+e\cos(\theta_1)]$$

$$\frac{1}{r_2}=C[1+e\cos(\theta_2)]$$

r_1变大，r_2变小。根据 $l=mr^2\dot{\theta}$为定值，当$r_1=r_2$时，夹角达到最大

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2\text{，}\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \pi$$

此时，两个天体合起来扫过了半个椭圆的面积，所以经过了 $t = \frac{T}{4}$的时间

平近点角

$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

偏近点角ψ

$$\psi - e\sin\psi = \omega t = \frac{\pi}{2}$$

极坐标角θ可以用ψ表示

$$\cos\theta = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$

解得$\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则所求偏离三点一线的最大角为

$$2\theta - \pi$$

3.19

a

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r}e^{-\frac{r}{a}}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V^{'}$$

$$V^{'} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}e^{-\frac{r}{a}} = \frac{l^2 e^{\frac{r}{a}} - 2mkr}{2mr^2 e^{\frac{r}{a}}}$$

b

$$f = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k}{r^2}e^{-\frac{r}{a}} + \frac{k}{ar}e^{-\frac{r}{a}} = \frac{k}{r}e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)$$

$$u = u_0 + a\cos\beta\theta,\ u_0 = \frac{1}{\rho}$$

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f}\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0} =$$

$$\frac{\omega_\theta}{\omega_r}=\frac{2a}{\rho}=\frac{2\pi}{\frac{\pi\rho}{a}}$$

3.23

$$t=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{t^2}{a^3}=\frac{4\pi^2 m}{k}=\frac{4\pi^2 m}{GMm}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\frac{m_{日}}{m_{地}}=\frac{\frac{(1.49\times10^8)^3}{365^2}}{\frac{\left(3.8\times10^5\right)^3}{27.3^2}}=337246.6$$

3.24

$$\dot r=\frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}$$

有

$$r=a(1-e\cos\psi)$$

所以

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\omega}{1-e\cos\psi}$$

$$\omega dt=(1-e\cos\psi)d\psi$$

$$\omega t=\psi-e\sin\psi$$