武汉大学 2019—2020 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院 通信工程 专业 卓2 班 学号 2018302120092 姓名 张晨飞 分数 ____

一、（本题 10 分）计算下列各题

1、若函数 $f(z)=e^{iz^2}$，其中 $z=x+iy$，计算 $|f(z)|$ 和 $\arg f(z)$。

2、讨论函数 $f(z)=\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 的多值性，并计算 $z=1$ 时的值。

二、（本题 10 分）计算积分 $\int_C(\bar{z}+\sin z)dz$，其中：

1、C 为 $|z|=1$ 的上半圆周，从 -1 到 1；2、C 为 $|z|=1$ 的单位圆周。

三、（本题 10 分）计算函数 $f(t)=\begin{cases}1 & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ 的 Fourier 变换。利用此结果，证明：

1）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}$，　　2）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$。

四、（本题 10 分） 1、计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz$。

2、设 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$，且 $\lim\limits_{z\to\infty}z[f(z)-A]$ 存在。

1）指出函数在 ∞ 点的奇点类型；

2）证明：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\lim\limits_{z\to\infty}z[f(z)-A]$。

五、（本题 15 分） 计算和证明下列各题

1、若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，且满足 $3u(x,y)+2v(x,y)=1$，

求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。

2、函数 $f(z)=x^2+xyi$ 的可导性和解析性，若可导，计算可导点的导数。

六、（本题 15 分）已知函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

1、将函数 $f(z)$ 在下列圆环域内展开成 Laurent 级数

1) $0<|z-1|<1$，　　2) $2<|z|<\infty$。

2、指出函数 $f(z)$ 的奇点和类型（含 ∞ 点）；并计算函数在所有奇点留数的和。

七、（本题 15 分）设函数 $f(x,\beta)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-\beta^2}{1-2\beta\cos x+\beta^2}$ $(0<\beta<1)$

1、讨论函数 $f(x,\beta)$ 在 $\beta\to 1$（即 $\lim\limits_{\beta\to 1}f(x,\beta)$）的值；

2、计算积分 $I(\beta)=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1}{1-2\beta\cos x+\beta^2}dx$；

3、计算 $\lim\limits_{\beta\to 1}\dfrac{1-\beta^2}{2\pi}I(\beta)=\lim\limits_{\beta\to 1}f(x,\beta)$；说明在 $x\in[-\pi,\pi]$，$\beta\to 1$ 时 $f(x,\beta)$ 是 $\delta(x)$ 函数。

$\lim\limits_{\beta\to 1}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\beta)dx$

注意：第八、九两题中，电子信息学院学生完成第八题，弘毅学堂学生完成第九题。

八、（本题 15 分）微分方程 $\begin{cases} y''(t)+\lambda y(t)=f(t)\\ y(0)=0, y'(0)=0\end{cases}$，其中 λ 为实数。

1、利用 Laplace 变换求解此微分方程；并根据卷积定理，将方程的解用积分形式表示。

2、当 $f(t)=\delta(t)$ 和 $f(t)=e^{-t}$ 时，求方程的解（可以直接求解，不一定要利用积分形式求解）。

$te^{\alpha t}=\dfrac{1}{p-\alpha}$

九、（本题 15 分）设函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 的幂级数展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$。

1、求该幂级数的收敛半径 R；

2、证明：对 $n=0,1,2,\ldots$，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}d\xi=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\quad 其中|z|<r<R；$$

3、若用 Fibonacci 数列 $\{c_n\}$，其中 $c_0=1,c_1=1,c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ $(n=2,,3,4\cdots)$ 作为幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的系数，证明：$f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$。