武汉大学数学与统计学院 2009－2010 第二学期

《线性代数 C》（文 54 学时，A 卷答案）

一、(10 分) 解：注意 $\mathrm{R}(AA^T)\le 3$，而 AA^T 是 4 阶阵，则 $|AA^T|=0$；$R(B)=5$.

二、(15 分) 解：由 $AX=B+2X$, 得 $(A-2E)X=B$, 其中 E 为单位矩阵.

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

因为 $|A-2E|=-1\ne 0$, 所以 $A-2E$ 可逆. 从而

$$X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

三、（15 分）解：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。用定义或用变换可得：$lm+1\ne 0$。

证明略。

四、(15 分）解：方程组系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&3&0\end{vmatrix}=-1-a.$$

于是：

当 $D\ne 0$ 时，即 $a\ne -1$ 时，由克莱姆法则知方程组有惟一解.

当 $a=-1$ 时，对方程组的增广矩阵施行初等行变换得

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&2&-1&-1\\2&3&0&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&0&b-1\end{array}\right).$$

当 $b\ne 1$ 时，$r(A)=2, r(B)=3, r(A)\ne r(B)$, 线性方程组无解.

当 $b=1$ 时，$r(A)=r(B)=2<3$, 线性方程组有无穷多解，其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}, \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

五、(15 分）解：

1) 计算 $A^T=A$，从而可以证明 **A** 是实对称阵，于是 $(kE-A)$ 是实对称阵，所以可以对角化。

2）计算得 A^2=E，则 **A** 的特征值只取 ± 1. 而 $k\ne\pm 1$，即

$$|kE-A|\ne 0，\text{或} (kE-A) \text{ 是可逆的.}$$

3）（$E-2\alpha\alpha^T$）为正交矩阵的充要条件是 $\alpha^T\alpha$=1.

六、(18 分) 解：

1). 给出二次型的矩阵

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x^TAx,\ \text{得实对称矩阵}\ A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2). 求A 的所有特征值. 由$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$,得

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$$

解方程组$(\lambda_1E-A)x=0$, 得基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

解方程组$(\lambda_3E-A)x=0$, 得基础解系 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

由于α_1, α_2, α_3 两两正交, 将它们单位化,得

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

令$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, T为正交矩阵,

且$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\Lambda$为对角阵. 作正交变换$x=Ty$.

$$f=y^T(T^TAT)y=y^T\Lambda y=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

3） f 既不是正定也不是负定.

七、(12 分)证:

1). A 正定的充分必要条件是 A 的特征值全部为正值. 易知 A^{-1}、A^* 的特征值均为正，从而 A^{-1}、A^* 均正定.

$\mathbf{X}^T$（$A^{-1}+A^*$）$\mathbf{X}=\mathbf{X}^TA^{-1}\mathbf{X}+\mathbf{X}^TA^*\mathbf{X}\geq 0$（$\mathbf{X}\neq 0$）, $A^{-1}+A^*$是对称阵, 即 $A^{-1}+A^*$ 正定.

2). 设$z^T=(x^T,\ y^T)$为$2n$ 维向量, 其中x,y均是n维列向量, 若$z\neq 0$, 则x, y不同时为零向量,于是

$$z^TCz=(x^T,\ y^T)\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^TA^{-1}x+y^TA^*y>0,$$

且C是实对称矩阵, 故C为正定矩阵.