武汉大学 2019—2020 学年 第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

考试类型 闭卷考试 命题 课程组 审核＿＿＿＿＿签发＿＿＿＿＿

电子信息 学院＿＿＿＿＿专业 学号＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿分数＿＿＿＿

一、（本题10分）写出下列物理问题的定解问题

1.（5 分）一长度为π的弦绳，其两端固定，把它拉成$A\sin 2x$的形状之后，由静止状态被释放而作自由振动，写出此波动问题的定解问题。

2.（5 分）散热片的横截面为矩形，边长分别为 a 和 b。它的一边处于较高的温度U，而其它三边放于冷却介质中，并保持低的温度 u_0，写出该横截面上的稳定温度满足的定解问题。

二、（本题 10 分）定解问题 $\begin{cases} u_t - Du_{xx} = A \quad (0<x<l, t>0) \\ u\big|_{x=0} = t, u\big|_{x=l} = 1 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$，若经$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$变换后所得$v$的边界条件是齐次的，求辅助函数$w(x,t)$，并写出边界条件齐次化后$v$满足的定解问题。

三、（本题10分）1、写出一维无界波动问题$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0\,(-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$的通解——达朗贝尔公式。若其解只有右行波，而没有左行波，则初始条件应满足怎样的关系。

2、利用达朗贝尔公式求解一维无界波动问题 $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0\,(-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u\big|_{t=0} = \sin x \\ u_t\big|_{t=0} = 2x \end{cases}$

四、（本题 15 分）证明和计算下列各题

1、（5 分）在热传导方程$U_t - D\nabla^2 U(x,y,z,t)=0$中令$U=e^{-Dk^2t}u(x,y,z)$，证明$u(x,y,z)$满足亥姆霍兹方程$\nabla^2 u(x,y,z)+k^2u(x,y,z)=0$。

2、（10分）一长为a，宽为b的矩形薄膜，其边缘固定，初始位移为$u(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y)$，初始速度为零。试：1）写出此矩形薄膜波动的定解问题。2）将泛定方程对时间和空间分离变量$u=v(x,y)T(t)$，得到亥姆霍兹方程$\nabla^2 v(x,y)+\lambda v(x,y)=0$。若令$v(x,y)=X(x)Y(y)$，写出$X(x)$和$Y(y)$满足的本征值问题，及本征值和本征函数，并求出$\lambda$。3) 关于$T(t)$满足的方程和解。

五、（本题 15 分）利用分离变量法求解定解问题 $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<\pi,t>0) \\ u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=\pi}=0 \\ u\big|_{t=0}=2\cos 2x+4\cos 4x \\ u_t\big|_{t=0}=3\cos 3x \end{cases}$

六、（本题20分）1、（5分）计算积分 $I=\int_{-1}^{1}xP_{l-1}(x)P_l(x)dx$ 。

2、（15分）有一半径为 a 的均匀球，其表面的电势分布为 $A(\cos^2\theta+1)$，若球内、外无电荷，

试：1）写出此物理问题的定解问题，并求球内、外的电势分布；

2）求空间电势的最大值，及 $u(0,0)$ 和 $u(2a,\pi)$ 两点之间的电势差。

注意：第七、八两题中，电子信息学院学生完成第七题，弘毅学堂学生完成第八题。

七、（本题 20 分）1、（5 分）计算积分 $\int x^2J_1(x)dx$，并将结果用最低阶的贝塞尔函数的组合来表示。

2、（15 分）柱坐标系中的热传导问题：有一无穷长的圆柱体，半径为 1，若柱表面的温度为 0，初始温度分布为 $f(\rho)=(1-\rho^2)T_0$，试：1）写出此物理问题的定解问题；2）定解问题的本征值和本征值函数；3）关于 $T(t)$ 满足的方程和解；4）写出定解问题的通解，并求柱内的温度分布变化。

八、（本题 20 分）1、（10 分）设 a 为常数，利用积分变换方法求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t+au_x=f(x,t) \quad (-\infty<x<\infty,t>0) \\ u\big|_{t=0}=\phi(x) \end{cases}$$

2、（10 分）求解非齐次热传导问题 $\begin{cases} u_t-Du_{xx}=\sin 2\pi x \quad (0<x<1,t>0) \\ u(x,t)\big|_{x=0}=0,u(x,t)\big|_{x=1}=0, \\ u(x,t)\big|_{t=0}=0 \end{cases}$

参考公式

(1)Legendre多项式 $P_l(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^k\dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$

(2) Legendre 多项式的递推公式 $(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$，$(l\neq 0)$

(3) Legendre 多项式的正交关系 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)=\dfrac{2}{2l+1}\delta_{kl}$

(4) Bessel 函数的递推关系 $\dfrac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

(5) 广义 Fourier 展开 $f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_n(k_m^n\rho)$ $\qquad C_m=\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{2}J_{n+1}^2(x_m^n)}\int_0^a\rho J_n(k_m^n\rho)f(\rho)d\rho$