4. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可交换的全体 3 阶矩阵.

解 设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}b_{11}+2b_{21}&b_{12}+2b_{22}&b_{13}+2b_{23}\\b_{21}+2b_{31}&b_{22}+2b_{32}&b_{23}+2b_{33}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{11}+b_{12}&2b_{12}+b_{13}\\b_{21}&2b_{21}+b_{22}&2b_{22}+b_{23}\\b_{31}&2b_{31}+b_{32}&2b_{32}+b_{33}\end{pmatrix},$$

要使两者相等，则需要

$$b_{21}=0,\ b_{31}=0,\ b_{11}=b_{22},\ b_{21}=b_{32},\ b_{31}=0,\ b_{23}=b_{12},\ b_{22}=b_{33},\ b_{32}=0,$$

从而矩阵 B 具有形式

$$B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}\ (\ a,\ b,\ c\ \text{为任意常数}).$$

5. 若矩阵 A 与所有的 n 阶矩阵可交换，则 A 一定是数量矩阵，即 $A=aE$.

证 设 $E_{ii}=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 表示第 i 个元素为 1，其余元素全为零的对角矩阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则由 $E_{ii}A=AE_{ii}$，可得 $a_{ij}=0$，$\forall i\neq j$，故 A 是对角矩阵.

设 n 阶矩阵 E_{lm} 表示第 l 行第 m 列元素为 1，其余元素全为 0 的方阵，故此时 $E_{lm}A$ 中第 l 行第 m 列的元素 a_{mm}，其余元素全为 0；AE_{lm} 中第 l 行第 m 列的元素分别为 a_{ll}，其余元素全为 0. 由 $E_{lm}A=AE_{lm}$，得 $a_{ll}=a_{mm}$，由 l，m 的任意性，故对角矩阵 A 的对角线上的元素全部相等，从而 A 一定是数量矩阵.

6. 证明：不存在 n 阶方阵 A 和 B，使得 $AB-BA=E$.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，设 $C=AB=(c_{ij})_{n\times n}$，$D=BA=(d_{ij})_{n\times n}$，则

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{ji},\quad d_{jj}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\cdot a_{kj}=\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\cdot a_{ij},\quad \forall i,j,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}-\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{ji}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=0,$$

从而 $AB-BA$ 主对角线之和为 0，但 E 中对角线元素之和为 n，故 $AB-BA\neq E$.

7. 设 A，B 分别是 n 阶实对称和实反对称矩阵，且 $A^2=B^2$，证明：$A=B=O$.

证 依题设有 $A^{\mathrm T}=A$，$B^{\mathrm T}=-B$，从而 $AA^{\mathrm T}=A^2$，$BB^{\mathrm T}=-B^2$，故 $AA^{\mathrm T}=-BB^{\mathrm T}$. 又因对任意方阵 M，$MM^{\mathrm T}$ 的对角线元素为 $\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^2$，$i=1.2.\cdots,n$，非负，故 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2=0$，从而 $A=B=O$.

8. 设 A 是 3 阶方阵，A^* 是 A 的伴随阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 因 $AA^*=|A|E=\dfrac{1}{2}E$，故 $A^*=\dfrac{1}{2}A^{-1}$，从而

$$\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-\frac{16}{27}.$$

9. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为三维列向量，且$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|=5$，求

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right|.$$

解 方法 1：

$$\begin{aligned}
&\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right|\\
&\xlongequal[c_3+c_1]{c_2+c_1}\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad -2\boldsymbol{\alpha}_3 \quad -2\boldsymbol{\alpha}_2\right|\\
&=4\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2\right|\\
&\xlongequal{c_1+c_2+c_3}4\left|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2\right|\\
&\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}-4\left|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3\right|=-20.
\end{aligned}$$

方法 2：

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right|=\left|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right|\cdot\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=5\times(-4)=-20.$$

11. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$均可逆，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也可逆，并求其逆矩阵.

证 因

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\\
&=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},
\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

12. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为$n\times n$矩阵，且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$可逆，证明：

(1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}$可逆；

(2) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，并求其逆矩阵.

证 (1)因$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$可逆，且$\boldsymbol{B}$可逆，从而

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}，(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})^{-1}.$$

(2)由(1)可知：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})^{-1}\\
&=(\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^{-1}))(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})^{-1},
\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且

$$\left((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}.$$

14. 解下列矩阵方程：

（2） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；

解　设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$，因

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z & y+w\\ x+z & y+w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z+w & x+y+z+w\\ x+y+z+w & x+y+z+w\end{pmatrix},$$

故 $x+y+z+w=1$，即 $\boldsymbol{X}$ 具有形式：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & 1-x-y-z\end{pmatrix},\quad x,y,z \text{ 为任意实数}.$$

（3） $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}$.

解　由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

方法 1：先求出 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

方法 2：也可用由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 作初等行变换

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}\right)\to\left(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{X}\right),$$

此解法优点是少算一次矩阵乘法，可以适当减少计算量.

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

16. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，存在自然数 k，使得若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且有

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

证　由于 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，故

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

18. 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n;\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1;\\ 0, & R(\boldsymbol{A})\le n-2.\end{cases}$

证　由伴随矩阵性质有，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，此时 $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 方程仅有一个线性无关的解，又 $\boldsymbol{A}^*$ 的每个列向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

当 $R(\boldsymbol{A})\le n-2$ 时，由矩阵的秩的定义，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，即 $\boldsymbol{A}_{ij}=0$，由伴随矩阵的定义，有 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，此时 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

19. 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

证　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，由上题知 $R(\boldsymbol{A}^*)\le 1$，从而 $R((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$，即 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

20. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

证　因 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2$，由题设条件可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

用 $\boldsymbol{A}$ 分别左乘、右乘上式，并注意到 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，得：

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},$$

两式相减得：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

21. 已知 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc}3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ \hdashline & & & 3 & -1\\ & & & -9 & 3\end{array}\right)$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix}$，类似于第 3 题，可得 $\boldsymbol{A}_1^n=\begin{pmatrix}3^n&n3^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-2}\\&3^n&n3^{n-1}\\&&3^n\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\end{pmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}_2^n=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\left((3,-1)(1,-3)^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}3&-1\end{pmatrix}=6^{n-1}\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^n&\\&\boldsymbol{A}_2^n\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:cc}3^n&n3^{n-1}&\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-2}&&\\&3^n&n3^{n-1}&&\\&&3^n&&\\ \hdashline &&&3\cdot 6^{n-1}&-1\cdot 6^{n-1}\\&&&-9\cdot 6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{array}\right).$$

25. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$；

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

证 (1)因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\xi\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$ 为数，$\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 为 n 阶矩阵，故

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}},$$

故

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1)\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},$$

因为 $\boldsymbol{\xi}$ 是非零列向量，所以 $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{T}\neq\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}-1=0$ 即 $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=1$.

(2)**方法 1**：反证法. 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时，由(1)知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 与已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{E}$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

方法 2：当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时，由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，因此 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

方法 3：当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的每一列均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，因为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$，说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $R(\boldsymbol{A})<n$，得证 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

26. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})=n$.

证 因 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，由矩阵秩的性质知

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\geq R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{E})=n,$$

又因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，有 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq n$，从而有

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})=n.$$

27. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证 因 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{E}$，由矩阵秩的性质知

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geq R((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=R(2\boldsymbol{E})=n,$$

显然 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$．又因 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，有 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$，从而有

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n\ .$$

28. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 均可逆，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$．

证 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，可得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\,,$$

从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 均可逆，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$．

此时有 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}$，从而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$．

32. 计算下列矩阵的秩：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}$；

解 对矩阵实施初等变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\cdot(-1)]{\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-b\\0&a-2&1&2\\0&-2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-(a-2)r_2\\ r_4-r_2}]{\substack{r_4\div(-2)\\ r_4\leftrightarrow r_2}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&a-1&2a-2\\0&0&0&2-b\end{pmatrix},$$

故：当 $a\ne1$ 且 $b\ne2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=4$；

当 $a\ne1$ 且 $b=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$；

当 $a=1$ 且 $b\ne2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$．

当 $a=1$ 且 $b=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$；

33. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 a，证明：

(1) $a\ne0$；

(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和等于 $\dfrac{1}{a}$；

(3) $\boldsymbol{A}^m$（m 为正整数）的每一行的元素之和为 a^m．

证 (1) 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式中每一列均加到第一列，从而第一列有公因子 a，由行列式的性质可得 $\left|\boldsymbol{A}\right|=a\left|\boldsymbol{B}\right|\ne0$，故 $a\ne0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{E}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 为单位矩阵，由题设条件有

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n=(a,a,\cdots,a)^{\mathrm{T}}\,,$$

因 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，即 $A^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，从而

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j=e_j,j=1,2,\cdots,n\,.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_n=e_1+e_2+\cdots+e_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则$a(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n)=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n=(\frac{1}{a},\frac{1}{a},\cdots,\frac{1}{a})^{\mathrm{T}}.$$

(3) 由$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n=(a,a,\cdots,a)^{\mathrm{T}}$，即$\boldsymbol{A}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=a(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，从而可得

$$\boldsymbol{A}^2(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\left(a(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\right)=a\boldsymbol{A}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=a^2(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

重复上述过程，有$\boldsymbol{A}^m(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=a^m(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，即$\boldsymbol{A}^m$（$m$ 为正整数)的每一行的元素之和为a^m.

34. 求解线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$.

解 对增广矩阵进行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c}\boldsymbol{\lambda}&1&1&1&1\\1&\boldsymbol{\lambda}&1&1&\boldsymbol{\lambda}\\1&1&\boldsymbol{\lambda}&1&\boldsymbol{\lambda}^2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-\boldsymbol{\lambda}r_1]{\substack{r_3\leftrightarrow r_1\\r_2-r_1}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&\boldsymbol{\lambda}&1&\boldsymbol{\lambda}^2\\0&\boldsymbol{\lambda}-1&1-\boldsymbol{\lambda}&0&\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}^2\\0&1-\boldsymbol{\lambda}&1-\boldsymbol{\lambda}^2&1-\boldsymbol{\lambda}&1-\boldsymbol{\lambda}^3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&\boldsymbol{\lambda}&1&\boldsymbol{\lambda}^2\\0&\boldsymbol{\lambda}-1&1-\boldsymbol{\lambda}&0&\boldsymbol{\lambda}(1-\boldsymbol{\lambda})\\0&0&(1-\boldsymbol{\lambda})(2+\boldsymbol{\lambda})&1-\boldsymbol{\lambda}&(1+\boldsymbol{\lambda})^2(1-\boldsymbol{\lambda})\end{array}\right),$$

故当$\lambda\neq1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3<4$，此时方程有无穷多解，此时可以继续进行初等行变换：

$$\xrightarrow[r_3\div(1-\boldsymbol{\lambda})]{r_2\div(\boldsymbol{\lambda}-1)}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&\boldsymbol{\lambda}&1&\boldsymbol{\lambda}^2\\0&1&-1&0&-\boldsymbol{\lambda}\\0&0&2+\boldsymbol{\lambda}&1&(1+\boldsymbol{\lambda})^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&0&-\boldsymbol{\lambda}-1\\0&1&-1&0&-\boldsymbol{\lambda}\\0&0&2+\boldsymbol{\lambda}&1&(1+\boldsymbol{\lambda})^2\end{array}\right),$$

故方程组等价于：

$$\begin{cases}x_1-x_3=-\boldsymbol{\lambda}-1\\x_2-x_3=-\boldsymbol{\lambda}\\(2+\boldsymbol{\lambda})x_3+x_4=(1+\boldsymbol{\lambda})^2\end{cases},$$

从而方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=k-\boldsymbol{\lambda}-1\\x_2=k-\boldsymbol{\lambda}\\x_3=k\\x_4=-(\lambda+2)k+(\lambda+1)^2\end{cases}，k\text{ 为任意常数}.$$

当$\lambda=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=1<4$，此时方程有无穷多解，此时方程组等价于：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

从而方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 1 - k_1 - k_2 - k_3 \\ x_2 = \quad k_1 \\ x_3 = \quad\quad k_2 \\ x_4 = \quad\quad\quad k_3 \end{cases}, \quad k_1, k_2, k_3 \text{为任意常数}.$$