武汉大学数学与统计学院

2007—2008 第一学期《高等数学 A》期末考试试题

（216 学时）

一、（$8\times 7'$）试解下列各题：

1、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$

2、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$

3、计算 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

4、设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{1-x}e^{t(2-t)}\mathrm{d}t$ ，计算积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

5、计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$

6、求曲线 $x^2+2xy^2+3y^4=6$ 在点 $M(1,-1)$ 处的切线与法线方程。

7、$\begin{cases} x=\displaystyle\int_1^{t^2}u\ln u\mathrm{d}u \\ y=\displaystyle\int_{t^2}^{1}u^2\ln u\mathrm{d}u \end{cases}$ （$t>1$），求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

8、设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(n)}$

二、（15 分）已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 求：

1、函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间，极大、极小值；

2、函数图形的凸性区间、拐点、渐近线 。

三、（10 分）设 $g(x)$ 是 $[1,2]$ 上的连续函数，$f(x)=\displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t$

1、用定义证明 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内可导；

2、证明 $f(x)$ 在 $x=1$ 处右连续；

四、（10 分）1、设平面图形 A 由抛物线 $y=x^2$ ，直线 $x=8$ 及 x 轴所围成，求平面图形 A 绕 x 轴旋转一周所形成的立体体积；

2、在抛物线 $y=x^2$ $(0\le x\le 8)$ 上求一点，使得过此点所作切线与直线 $x=8$ 及 x 轴所围图形面积最大。

五、（9 分）当 $x\ge 0$，对 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上应用拉格朗日中值定理有：

$$f(b)-f(0)=f'(\xi)b \quad \xi\in(0,b)$$

对于函数 $f(x)=\arcsin x$，求极限 $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{\xi}{b}$

武汉大学数学与统计学院

2007—2008 第一学期《高等数学 A》期末考试试题参考答案

一、试解下列各题：（$8\times7'$）

1、解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2$$

2、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{-(1+x)\sin x}=1$

3、解：原式 $\underline{\underline{t=\sqrt{x}}}\int\dfrac{2t^2}{1+t}\mathrm{dt}=2\int\dfrac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{dt}=2\int(t-1)\mathrm{dt}+2\int\dfrac{1}{1+t}\mathrm{dt}$

$$=(t-1)^2+2\ln(t+1)+c=(\sqrt{x}-1)^2+2\ln(\sqrt{x}+1)+c$$

4、解：$\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\big|_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 xe^{1-x^2}dx=e(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2})\big|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$

5、解：$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\big|_0^{+\infty}=1$

6、解：$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0$，把 $(1,-1)$ 代入上式，得 $2+2-4y'(1)-12y'(1)=0$，

即 $y'(1)=\dfrac{1}{4}$。于是在 $M(1,-1)$ 处曲线的切线方程为 $y+1=\dfrac{1}{4}(x-1)$ 即 $x-4y-5=0$；

在 $M(1,-1)$ 处曲线的法线方程为 $y+1=-4(x-1)$，即 $4x+y-3=0$。

7、解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-t^4\ln t^2\cdot2t}{t^2\ln t^2\cdot2t}=-t^2\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{d(-t^2)}{dx}=-2t\dfrac{dt}{dx}=-2t\dfrac{1}{4t^3\ln t}=-\dfrac{1}{2t^2\ln t}$

8、解：由 $y=-1+\dfrac{2}{1+x}=2(x+1)^{-1}-1\quad ,y'=2\cdot(-1)\cdot(1+x)^{-2}$

$y''=2\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3},\cdots,y^{(n)}=(-1)^n\cdot2\cdot n!\cdot(1+x)^{-(n+1)}$

二、（15 分）解：定义域为：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ 令 $y'=0\Rightarrow$ 驻点 $x=0,3$

$y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$ 令 $y''=0\Rightarrow x=0$

χ	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+		+		—		+
y''	—		+		+		+
y	单增		单增		单减	极小值点	单增
$y=f(x)$	上凸	拐点 $(0,0)$	下凸		下凸		下凸

1）故单调增加区间为：$(-\infty,1)$、$(3,+\infty)$ 单调减少区间为：$(1,3)$

极小值为：$f(3)=\dfrac{27}{4}$，无极大值。

2）下凸区间为：$(0,1);(1,+\infty)$　　上凸区间为：$(-\infty,0)$

拐点为：$(0,0)$ 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$，故 $x=1$ 为函数图形的铅直渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x]=2$

故 $y=x+2$ 为函数图形的斜渐近线。

三、（10 分）解：1、$\forall x\in(1,2)$ 有：$\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\dfrac{\int_x^{x+\triangle x}g(t)dt}{\triangle x}=g(\xi)\quad \xi\in[x,x+\triangle x]$

$$\lim_{\triangle x\to0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to0}\frac{\int_x^{x+\triangle x}g(t)dt}{\triangle x}=\lim_{\xi\to x}g(\xi)=g(x)$$

即 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内可导，且 $f'(x)=g(x)$

2、$\lim\limits_{\triangle x\to0^+}[f(1+\triangle x)-f(1)]=\lim\limits_{\triangle x\to0^+}\int_1^{1+\triangle x}g(t)dt=\lim\limits_{\xi\to1}g(\xi)\lim\limits_{\triangle x\to0^+}\triangle x=0$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处右连续。

四、（10 分）解：1）$V=\pi\int_0^8 x^4dx=\dfrac{8^5}{5}\pi$

2）过曲线上点 (x,y) 的切线方程为：$Y-y=Y'(X-x)$ ，即 $Y-x^2=2x(X-x)$

此切线与 $X=8$ $\;Y=0$ 的交点的纵坐标与横坐标为：$Y=2x(8-x)+x^2$，$X=\dfrac{x}{2}$

则所求面积为：$S=\dfrac{1}{2}(8-\dfrac{x}{2})[2x(8-x)+x^2]$ $\quad S'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-16x+64$ 令

$S'(x)=0$ 得：

$x=\dfrac{16}{3}$ 和 $x=16$ （舍去）

故当 $x=\dfrac{16}{3}$ 时，S 取得最大值，所以所求点为：$(\dfrac{16}{3},\dfrac{256}{9})$

五、（9 分）解：$f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,b]$ 上应用拉格朗日中值定理有：

$\arcsin b=\dfrac{b}{\sqrt{1-\xi^2}}\quad \xi\in(0,b)$ 所以 $\xi^2=1-(\dfrac{b}{\arcsin b})^2\quad \xi\in(0,b)$

因此 $\lim\limits_{b\to0}\dfrac{\xi^2}{b^2}=\lim\limits_{b\to0}\dfrac{1-(\dfrac{b}{\arcsin b})^2}{b^2}=\lim\limits_{b\to0}\dfrac{(\arcsin b)^2-b^2}{b^2(\arcsin b)^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2-\sin^2 t}{t^4}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2-\sin^2 t}{t^4}=\lim_{t\to0}\frac{2-2\cos 2t}{12t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2t^2}{6t^2}=\frac{1}{3}$$

故 $\lim\limits_{b\to0}\dfrac{\xi}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$