练习 4.1

1. 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，并把 $\boldsymbol{b}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(-9,-8,-3)^{\mathrm{T}}$ 用这组基线性表示.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$，解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，对下面矩阵实施初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&-2&2&14\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-2)]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&5&-9\\0&3&0&9&11\\0&0&1&-1&-7\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div 3]{r_1-\frac{2}{3}r_2-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&2&\frac{14}{3}\\0&1&0&3&\frac{11}{3}\\0&0&1&-1&-7\end{array}\right),$$

根据上述变换可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，且 $\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{b}_2=\dfrac{14}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{11}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-7\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 求 $\mathbb{R}^4$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)$，解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$，对下列矩阵实施初等行变换

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\1&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\0&-1&0&1&0\\0&3&0&-1&0\\0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-r_2\\r_2\times(-1)}]{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&-1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_4\leftrightarrow r_3\\r_4\div 2}]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&-1&-2&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+r_4\\r_3+2r_4\\r_3\times(-1)}]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在给定基下的坐标为 $(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 中两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$. 已知从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&0&3\\4&-1&-6\end{pmatrix},$$

求基向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，依题设有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$，故

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&0&3\\4&-1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\2&-1&-3\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,-3)^{\mathrm{T}}$.

4．在 $\mathbb{R}^3$ 中，取两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)^{\mathrm{T}}$，试求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与坐标变换公式.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，求过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$，对下面矩阵实施初等行变换

$$\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&1&-4&-7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&3&5&1\\0&1&-1&5&8&1\\0&0&-1&-4&-12&-8\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_2-3r_3]{\substack{r_3\times(-1)\\r_2+r_3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{array}\right),$$

故所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$.

对任意 $\mathbb{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若其在两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{By}=(\boldsymbol{AK})\boldsymbol{y},$$

从而有坐标变换公式为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ky}$ 及 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}$.

5．设 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标.

解 **方法 1**：设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$，因

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{AK},$$

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在 $\boldsymbol{B}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

方法 2：设所求坐标为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，依定义有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=(x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+x_2\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

由条件有：$x_1+x_2+x_3=1$，$x_1+x_2-x_3=2$，$x_2=1$，故所求坐标为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\left(\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

6．向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个基分别为

（I）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；

（II）$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$.

(1) 由基（II）到基（I）的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$；

(2) 在基（I）与基（II）下有相同坐标的全体向量.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，求 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{A}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{K}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BK}$。由 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$，易得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4，\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3，\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4，\ \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}_4，$$

即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix},$$

故过渡矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{pmatrix}。$$

(2) 设向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下有相同的坐标 $\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Bx}$，因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BK}$，故 $\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{x}$，解方程 $(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对下面矩阵实施初等行变换：

$$(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{x}=k(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，从而所求向量为 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{Ax}=k\boldsymbol{\alpha}_4$，$k\in\mathbb{R}$。

练习 4.2

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 正交，试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，依题意有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即 $\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y+z=0\end{cases}$，可解得 $(x,y,z)^{\mathrm{T}}=k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，故可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一组基，试用施密特正交化方法，构造 $\mathbb{R}^3$ 的一个规范正交基.

解 由施密特正交化方法，有

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

单位化，可得一组规范正交基为：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

5. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，求证 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

证 因

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H},$$

故 $\boldsymbol{H}$ 对称.

因

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{H}$ 是正交矩阵. 综合可知 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求证：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

证 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$. 可得 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$，$|\boldsymbol{B}|=\pm1$. 由 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$，从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，若 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 是正交矩阵.

证 由条件有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，且显然有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，故

$$\begin{aligned}&\left((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\&=((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\right)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\&=((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\right)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\&=((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\right)=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 是正交矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关。

证 若存在实数 k_1,k_2,m_1,m_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+m_1\boldsymbol{\beta}_1+m_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0},\qquad(*)$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，由定义易得向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也正交，从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 与向量 $m_1\boldsymbol{\beta}_1+m_2\boldsymbol{\beta}_2$ 正交，从而由(*)式知 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$m_1\boldsymbol{\beta}_1+m_2\boldsymbol{\beta}_2$ 必均为零向量（否则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$m_1\boldsymbol{\beta}_1+m_2\boldsymbol{\beta}_2$ 两者均为非零向量，从而两者线性相关，与它们正交相矛盾），从而 $k_1=k_2=m_1=m_2=0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，结论成立.