

武汉大学 2017-2018 第一学期高等数 B1 期末试题 A 解答

1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x(\tan x + \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3})}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x(\tan x + \sqrt{3}) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x)} = 6 \cdot \frac{(-1)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -24 \quad 9 \text{ 分}$$

2、(9 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\cot \frac{t}{2}\right)'}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\csc^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)} \quad 9 \text{ 分}$$

3、(9 分) 已知 $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{\sin x} \cos^2 t dt = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\text{解: 方程两边关于 } x \text{ 求导得 } e^{y^2} y' + \cos^2 \sin x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\cos^2 \sin x \cdot \cos x}{e^{y^2}} \quad 9 \text{ 分}$$

4、(8 分) 设 $a_n \neq 0$. 试用 $\varepsilon - N$ 语言证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

证明: \Rightarrow : 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 可知, $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 有 $|a_n| < \varepsilon$. 因

$$\text{此 } \left| \frac{1}{a_n} \right| > \frac{1}{\varepsilon} = M. \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

\Leftarrow : 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ 可知, $\forall M > 0$, \exists 正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 有 $\left| \frac{1}{a_n} \right| > M$. 因此

$$|a_n| < \frac{1}{M} = \varepsilon. \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

5、(9 分) 设 $a > 0$, 求 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$.

$$\text{解: 原式} = \left[e^{-ax} \left(-\frac{1}{1+a^2} \cos x - \frac{a}{1+a^2} \sin x \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+a^2} \quad 9 \text{ 分}$$

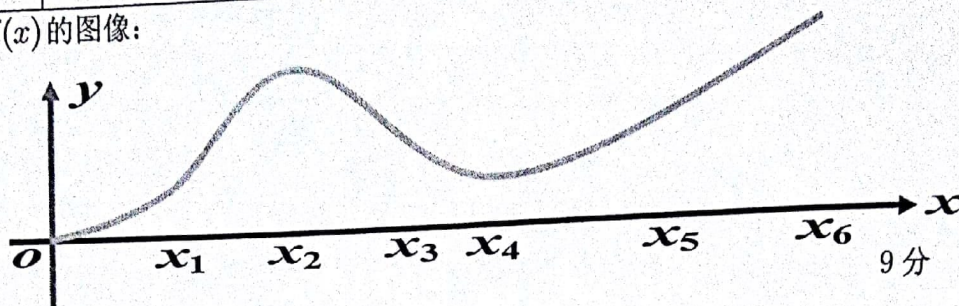
6、(9 分) 根据以下导函数 $y' = f'(x)$ 的图像:



填写关于函数 $f(x)$ 的表格 (其中 $f(0) = 0$):

单增区间	$(0, x_2), (x_4, x_6)$	上凸区间	(x_1, x_3)
单减区间	(x_2, x_4)	下凸区间	$(0, x_1), (x_3, x_6)$
极大值点	x_2	极小值点	x_4

画出函数 $y = f(x)$ 的图像:



7、(9分) 确定常数 a, b , 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{2x} - 1), & x < 0 \\ a + \sin bx, & x \geq 0 \end{cases}$ 处处可导.

解: 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 首先须在 $x = 0$ 连续即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$

$$\text{即 } a = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{2x}}{1} = 2, \text{ 要使 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 可导, 须 } f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$\text{即 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}(e^{2x} - 1) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = 2$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin bx - 2}{x} = b$$

则 $a = b = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导, 从而处处可导.

9分

8、(9分) 求由 $\arctan x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ 所确定的区域的面积.

$$\text{解: } s = \int_0^1 (x - \arctan x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \arctan x \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad 9 \text{ 分}$$

9、(8分) 设 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 求 $\int xf(1-x^2) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: 令 } F(x) &= \int f(x) dx, \text{ 则 } \int xf(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(1-x^2) dx^2 = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) \\ &= -\frac{1}{2} F(1-x^2) = x^2 - \frac{1}{2} x^4 + C \end{aligned} \quad 8 \text{ 分}$$

10、(1) (4分) 求微分方程 $y''' - 2y'' + y' = 0$ 的通解;

(2) (4分) 写出微分方程 $y'' + y = \sin x - \cos 2x$ 的特解实形式.

解: (1) 特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$, 因此特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 因此方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x$ 4分

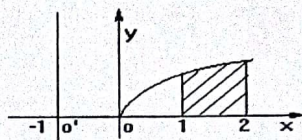
(2) 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$, 所以非齐次方程的特解形式为

$$y = x(A \cos x + B \sin x) + (C \cos 2x + D \sin 2x) \quad . \quad 4 \text{ 分}$$

11、(8 分) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线 $x = -1$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 建立新的坐标系, 原点 o' 在原坐标的坐标点 $o'(-1, 0)$, 则由 $y = \sqrt{x' - 1}$, $x' = 2$, $x' = 3$ 及 x 轴所围成的区域绕 $x' = 0$ 旋转而成体积。

$$\begin{aligned} V_{x=-1} &= 2\pi \int_2^3 xy dx = 2\pi \int_2^3 x \sqrt{x-1} dx \quad \text{设 } t = \sqrt{x-1} \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2(t^2+1)dt = 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} (t^4+t^2)dt \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4). \end{aligned}$$



8 分

12、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(t) dt = a \int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx$ (其中 $a > 1$ 为定常数)。证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 2\xi \int_0^\xi f(x) dx$ 。

证明: 令 $F(x) = e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)$, 则 $F'(x) = e^{1-x^2} [-2x \left(\int_0^x f(t) dt \right) + f(x)]$

$$\begin{aligned} \text{且由积分中值定理有 } F(1) &= \int_0^1 f(t) dt = a \int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \\ &= e^{1-y^2} \left(\int_0^y f(t) dt \right) = F(y) \quad y \in [0, \frac{1}{a}] \end{aligned}$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (y, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

$$\text{即 } f(\xi) = 2\xi \int_0^\xi f(x) dx$$

5 分