高等数学（下）练习题

注：本练习题未提供答案，请在作业本上独立完成

一、　求下列各题

a) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^{2x}[f(t)-f(t-2x)]dt$

b) $\dfrac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\ln x dx$

c) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\cos x+(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

e) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$

f) $z(x,y)=\int_1^{x^2+y} xe^{-t^2}dt$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

二、判断下列积分的敛散性

a) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1+\sin^2 x}{x\sqrt{x^3-1}}dx$；

b) $\int_e^{\frac{1}{e}}\dfrac{\ln^2 x}{x(x-1)^3}dx$

三、　若空间三点 A（1，2，0），B（2，0，1），C（2，3，－2）

a) $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 α；　(2)求过点 A、B、C 的平面 π 方程；

b) 过 C 且垂直于平面 π 的直线 L 方程。

四、　求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ 2x+z=3 \end{cases}$ 在平面 $z=0$ 上的投影方程

五、 （1）求数列$\mathop{Lim}\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(n!)^2}$的极限；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

（3） **求极限**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n})$

六、 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}, & \mathrm{x}^2+y^2\neq 0\\ 0, & \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$点的连续性和可微性。

七、 若 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^\alpha\sin x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\alpha>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ⑴讨论 $f(x,y)$在点（0，0）的极限与连续性；⑵求 $f(x,y)$在点（0，0）的偏导数。

八、 若$z=x^2+y^2-xy+x-y$，求z在点（1，0）的偏导数与全微分。

九、 若 $z=f(x^2-y^2,xy)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数；求 $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$

十、 设$z=f(x,y)$由方程$z-y+\sin x+x^2e^{y+z}=0$确定的隐函数，求全微分dz。

十一、 设平面图形 D 由$x^2+y^2\leq 2x$与$y\geq x$所确定，求图形 D 绕y轴旋转一周所得旋转体的体积。

十二、 求抛物线$y=-x^2+4x-3$及其在点（0，-3）和（3，0）处切线所围图形的面积。

十三、 计算：

（1）$\iint\limits_D|x+y-1|dxdy$，$D$：$0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$；

（2）$\iint\limits_D\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}dxdy,D:x^2+y^2\leq 1$，且$x+y\geq 1$；

(3) $\iint\limits_D xydxdy, D=\{(x,y): x\ge 0, x^2+y^2\ge 1, x^2+y^2\le 2y\}$

十四、 交换二次积分$\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$的次序，并计算$I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy$。

十五、 设 $f(x,y)$ 在 区 域 D 上 连 续 ， 交 换 二 次 积 分

$$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$$ 顺序。

十六、 设 D 为 xy 平 面 ， 求 $\iint\limits_D \max(x,y)e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ ， 其 中 函 数

$$\max(x,y)=\begin{cases} y, & y\ge x \\ x, & <y \end{cases}$$

十七、 求$\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$，其中$D$为$x=-1, y=1, x=y$所围区域。

十八、 判定级数的收敛性或求出幂级数的收敛域。

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ ；

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n$，其中$a>0, b>0$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n n^2}$；

e) 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$的敛散性，其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a_n, b, a$均为正数。

f) 设a_n和b_n均大于零，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，试问：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$与

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 是否有相同的敛散性？试讨论 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}, b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{-\ (^{n}}{n}$ 的情形

g) 讨论：当 a 为何值时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{a}{n})^n\ (a>0)$ 收敛和发散

h) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛。

十九、 将函数 $(x+1)\ln(x+2)$ 展开为 x 的幂级数，并确定其收敛域。

二十、 求下列微分方程或差分方程的通解。

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

b) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^{2x}+\sin x$

c) $y\frac{dy}{dx}+y^2=\sin x$

d) $y_{x+1}-5y_x=5x$

二十一、 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$

二十二、 某工厂生产两种产品，总成本为 $C=Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+10$，两种产品的需求函数为 $Q_1=26-P_1, Q_2=10-\frac{1}{4}P_2$。其中 P_1, P_2 为价格；要使利润最大，确定两种产品的价格，并求最大利润。

二十三、 设 $f(x)$ 有连续导数，证

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f'(x^2+y^2)dxdy=\pi[f(a^2)-f(0)]$$