武汉大学 2006—2007 学年第二学期《高等数学A》（总学时 180）考试 A 试题参考解答

一、解： 1、由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1/n!}{n+2/(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n+2}=+\infty$ 故级数收敛域为：$(-\infty,+\infty)$

令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$ 两边积分，有：$\int_0^x f(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x\dfrac{n+1}{n!}x^n dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=xe^x$

故 $f(x)=(1+x)e^x$

2、$a_0=\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}(1+x)dx=\int_0^2 dx=2$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(1+x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(1+x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\quad(1,2\cdots),$$

二、解：1）由偏导数定义知 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

同理 $f_y(0,0)=0$. 所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在，

2）$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0+t\cos\theta,0+t\sin\theta)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^3\cos^2\theta\sin\theta/t^2}{t}=\cos^2\theta\sin\theta$

故 $f(x,y)$ 沿任意方向的方向导数存在。

3）由 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)^3}}$ 而 $\lim\limits_{\Delta y=\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^3}{\sqrt{(2\Delta x^2)^3}}=\cancel{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$.

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

三、解：由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(e^{-t}\dfrac{dy}{dt}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}=-e^{-2t}\dfrac{dy}{dt}+e^{-2t}\dfrac{d^2y}{dt^2}$

将 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$x=e^t$ 代入原方程得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=te^t$ 由 $r^2-3r+2=0$ 得方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$ 的一般解：$y=c_1e^t+c_2e^{2t}$ 设 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=te^t$ 的特解为 $y^*=(At^2+Bt)e^t$ 由待定系数法得：$A=-\dfrac{1}{2},B=-1$ 故得方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=te^t$ 的一般解：$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+\left(-\dfrac{1}{2}t^2-t\right)e^t$

四、解：1、$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2yze^{-(x^2+y^2+z^2)}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2y(2z^2-1)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial x}=4xy(1-2z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

2、利用积分域的对称性、被积函数的奇偶性和球坐标，$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{dv}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r^3\cos\varphi\sin\varphi e^{-r^2}dr$

$$\int_1^2 r^3e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\int_1^2 r^2e^{-r^2}dr^2=\frac{1}{2}\int_1^4 ue^{-u}du=\frac{1}{2e^4}(2e^3-5)$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi}{2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 故 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{dv}=\dfrac{\pi}{4e^4}(2e^3-5)$

五、解： 1、旋转抛物面位于第一卦限部分上任意一点 (x,y,z) 处的平面方程为：

$2xX+2yY+Z=4-z$ 即 $\dfrac{X}{\frac{4-z}{2x}}+\dfrac{Y}{\frac{4-z}{2y}}+\dfrac{Z}{4-z}=1$

所以四面体的体积为：$V=\dfrac{(4-z)^3}{24xy}$

故令：$F(x,y,z,\lambda)=3\ln(4-z)-\ln x-\ln y+\lambda(x^2+y^2+z-2)$

由$\begin{cases} F_x=-\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0;F_z=-\dfrac{3}{4-z}+\lambda=0 \\ F_y=-\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0;F_\lambda=x^2+y^2+z-2=0 \end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=1$ 因为只有一个驻点，所以$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

为所求； 2、$\dfrac{\partial V}{\partial z}=\dfrac{-3}{4-z}-\dfrac{24}{x}\dfrac{\partial x}{\partial z}$ $\quad\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{-1}{2x}$ $\quad\dfrac{\partial V}{\partial z}|_{(1,1,3)}=-3+12=9$

六、解：1、$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$

2、$S=\oint_L zds=\oint_{x^2+(y-1)^2=1}\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2}[\cos^2 t+(\sin t+1)^2]dt=2\pi$

3、由高斯公式，补充有向平面$\Sigma_1:z=2$方向向上，Ω由$z=2,z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$所围成的闭区域，

$$I=\iint_\Sigma xzdydz+2zydxdz+3xydxdy=\iiint_\Omega(z+2z+0)dv-\iint_{\Sigma_1}xzdydz+2zydxdz+3xydxdy$$

$$=3\iiint_\Omega zdv-3\iint_{x^2+y^2\le2}xydxdy=3\int_0^{2\pi}dt\int_0^2 rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 zdz+0=16\pi$$

或$3\iiint_\Omega zdv-3\iint_{x^2+y^2\le2}xydxdy=3\int_0^2(z\iint_{D_z}d\sigma)dz=6\pi\int_0^2 z^2dz=2\pi z^3|_0^2=16\pi$

七、解：设$Q=7g''(x)$ $\quad P=(g''(x)+9g(x)+2x^2-5x+1)y^2$ 由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

得 $2y(g''(x)+9g(x)+2x^2-5x+1)=7g'''(x)$ 由此得：$\begin{cases} g'''(x)=0 & (1) \\ g''(x)+9g(x)+2x^2-5x+1=0 & (2) \end{cases}$

由（1）得：$g(x)=ax^2+bx+c$ 代入（2）得：~~$a=$ [illegible]~~ $a=-\dfrac{2}{9},b=\dfrac{5}{9},c=-$

所以~~$g(x)=$ [illegible]~~ $\quad g(x)=-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x-\dfrac{5}{81}$

原式$=\int_0^1 7\cdot(-\dfrac{4}{9})dy=-\dfrac{28}{9}$.

八、证明：由$\iint_D(e^y f(y)+y-x)d\sigma=\iint_D e^y f(y)d\sigma+\iint_D(y-x)d\sigma$

设$I=\iint_D e^y f(y)d\sigma+\iint_D(y-x)d\sigma-(e-1)\int_0^1 f(y)dy=\iint_D e^y f(y)d\sigma+\iint_D(y-x)d\sigma-(e-1)\int_0^1 f(x)dx$

$=\iint_D e^y f(y)d\sigma-\iint_D e^y f(x)d\sigma+\iint_D(y-x)d\sigma=\iint_D e^y[f(y)-f(x)]d\sigma+\iint_D(y-x)d\sigma$

因为D关于$y=x$对称，故$\iint_D yd\sigma=\iint_D xd\sigma$，$\iint_D e^y[f(y)-f(x)]d\sigma=\iint_D e^x[f(x)-f(y)]d\sigma$ 所以

$\iint_D(y-x)d\sigma=0$ 故$2I=\iint_D e^y[f(y)-f(x)]d\sigma+\iint_D e^x[f(x)-f(y)]d\sigma=\iint_D(e^y-e^x)[f(y)-f(x)]d\sigma$

由函数$e^x,f(x)$在$[0,1]$上连续单调增加，故$2I\ge0$所以$I\ge0$ 即$\iint_D(e^y f(y)+y-x)d\sigma\ge(e-1)\int_0^1 f(y)dy$

八 证明 因$\iint_D(y-x)dxdy=0$ 即证 $\iint_D e^y f(y)dxdy\ge(e-1)\int_0^1 f(y)dy$.

构造 $I=\iint_D e^y f(y)dxdy-(e-1)\int_0^1 f(y)dy=\iint_D e^y f(y)dxdy-\iint_D e^x f(y)dxdy=\iint_D f(y)(e^y-e^x)d$

积分与积分变量用什么字母无关. 故 $I=\iint_D f(x)(e^x-e^y)dxdy$

从而 $2I=\iint_D f(y)(e^y-e^x)d\sigma+\iint_D f(x)(e^x-e^y)d\sigma=\iint_D(f(y)-f(x))(e^y-e^x)dxdy$

由$e^x,f(x)$在$[0,1]$上连续且单调增加知$(f(y)-f(x))(e^y-e^x)\ge0$ ∴ $I\ge0$ 得证

武汉大学 2007—2008 学年第二学期《高等数学 B2》(180 学时 A 卷)考试试题参考解答

一、解：1、通过直线$\begin{cases}2x+y=0\\4x+2y+3z=6\end{cases}$的平面束方程为：$4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0$ （1）

欲使平面（1）平行于直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$，则

$4+2\lambda+2(2+\lambda)+12=0\Rightarrow\lambda=-5$ 代入（1）得所求平面方程为：$2x+y-z+2=0$

2、ΔABC 的面积为：$S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{BC}|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&4&-3\\4&-5&0\end{matrix}\right\|=\frac{25}{2}$，

又 $S=\frac{h}{2}|\overline{AB}|$，$|\overline{AB}|=\sqrt{0+16+9}=5$，故 $h=5$

3、设 $F=x^2+y^2+z^2-6, F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z$

故得曲面在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为：$\{2,-4,2\}=2\{1,-2,1\}$。

故切平面方程为：$(x-1)-2(y+2)+(z-1)=0$ 即 $x-2y+z=6$

法线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$

4、$z_x=ye^{xy}+\frac{y^2}{x}$ ，$z_{xy}=e^{xy}+yxe^{xy}+\frac{2y}{x}=\frac{xe^{xy}(1+xy)+2y}{x}$

5、$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{a^4}{8}$

6、由已知得：$0\le y\le 1, -\sqrt{1-y^2}\le x\le y-1$，所以有：原式$=\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$

二、解：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{1}{x^2y}=0\\\frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{1}{xy^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 又求二阶导数：

$A=z_{xx}=2x^{-3}y^{-1}, B=z_{xy}=x^{-2}y^{-2}, C=z_{yy}=2y^{-3}x^{-1}$

在点 $(1,1)$ 处，$B^2-AC=-3<0, A=2>0$，故 $z(1,1)=3$ 为所求极小值。

三、解：1、由 $Q=-g(x)$ $P=[e^x+g(x)]y$ 且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得

$g'(x)+g(x)=-e^x$ 解得：$g(x)=e^{-\int dx}[\int(-e^xe^{\int dx}dx+c]=e^{-x}[-\frac{1}{2}e^{2x}+c]$

由 $g(0)=-\frac{1}{2}$，得：$c=0$ 所以 $g(x)=-\frac{1}{2}e^x$

2、$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{1}{2}e^xydx+\frac{1}{2}e^xdy=\int_0^1\frac{1}{2}edy=\frac{1}{2}e$

四、解：级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$，由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}/\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}$

故级数收敛。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}-1$

作函数级数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 此级数的收敛区间为 $|x|<1$，两边积分，有：

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

将上式两边微分得：$s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ $|x|<1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=s(\frac{1}{2})-1=4-1=3$

4

五、解：1、 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x(x,y)=\dfrac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

所以 $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$

2、此方程的特征方程为：$r^3-r^2-2r=0$，解得：$r_1=0,r_2=2,r_3=-1$，即微分方程的通解为：

$y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-x}$，由积分曲线通过点 $(0,-3)$，故得 $c_1+c_2+c_3=-3$，（1）

又在这点处有倾角为 $\arctan 6$ 的切线，故有 $y'|_{x=0}=(2c_2e^{2x}-c_3e^{-x})|_{x=0}=\tan(\arctan 6)$，

即 $2c_2-c_3=6$，（2）

由题设知 $y''|_{x=0}=(4c_2e^{2x}+c_3e^{-x})|_{x=0}=0$，即 $4c_2+c_3=0$ （3）

联立（1）、（2）、(3)解得：$c_1=0,c_2=1,c_3=-4$

则所求积分曲线为：$y=e^{2x}-4e^{-x}$

六、解：补充有向平面 $\Sigma_1: z=1,\Sigma_2: z=2$ 方向分别向下和上，记 Σ 为圆台外侧，法向向外，Ω 是由 $z=1,z=2,z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的闭区域，Σ' 为 Ω 的边界曲面的外侧，则所求流量为：

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}d\vec{s}=(\oiint\limits_{\Sigma'}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2})dydz+zdxdz+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$\oiint\limits_{\Sigma'}dydz+zdxdz+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dv=\int_1^2 e^z dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z dr=2\pi e^2$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}dydz+zdxdz+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-2\pi e$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}dydz+zdxdz+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=4\pi e^2$$

所以 $\Phi=2\pi e(1-e)$

5

武汉大学2008—2009学年第二学期《高等数学B2》试题A参考解答

一、(30分) 试解下列各题：

1、(6分) 求解微分方程 $\frac{dx}{y}+\frac{dy}{e^x}=0$ 满足 $y|_{x=0}=2$ 的特解.

解：由 $\frac{dx}{y}+\frac{dy}{e^x}=0$，得 $e^x dx+ydy=0$，即 $d(e^x+\frac{y^2}{2})=0\Rightarrow e^x+\frac{y^2}{2}=c_1\Rightarrow 2e^x+y^2=c$

而 $y|_{x=0}=2\Rightarrow 2+4=c\Rightarrow c=6$，故 $2e^x+y^2=6$

2、(6分) 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-12$ $F_x(1,-2,1)=2, F_y(1,-2,1)=-8, F_z(1,-2,1)=6$

故曲面在点 $(1,-2,1)$ 处的切平面的法向量为：$n=(2,-8,6)$ 所以切平面方程为：$x-4y+3z-12=0$

3、(6分) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，试讨论此级数在 $x=2$ 处的敛散性.

解 由阿贝尔定理知，此级数在 $|x-1|<|-1-1|=2$ 即 $-1<x<3$ 时绝对收敛，故此级数在 $x=2$ 处绝对收敛.

4、(6分) 计算 $\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=2-x^2, y=x^2$ 所围成的区域.

解：由对称性，$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2}x^2dy=4\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{8}{15}$.

5、(6分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{2^n}$ 的敛散性. 若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}}{\frac{n^4}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，由比值判别法知原级数的绝对值级数收敛，故原级数绝对收敛.

二、(10分) 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=\sin(y-bz)$ 所确定，a,b 是不全为零的常数，证明：$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$

证明：方程 $x-az=\sin(y-bz)$ 两边同时对 x,y 求偏导得

$1-a\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(y-bz)\cdot(-b\frac{\partial z}{\partial x})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{a-b\cos(y-bz)}$ $-a\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(y-bz)\cdot(1-b\frac{\partial z}{\partial y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\cos(y-bz)}{a-b\cos(y-bz)}$

故 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$

三、(12分) 设 $z=x^2f(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，其中 $f(u)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(\frac{y}{-x^2})f'=2xf-yf'$ 所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\times\frac{1}{x}f'-f'-yf''\times\frac{1}{x}=f'-\frac{y}{x}f''$

四、(10分) 试将函数 $f(x)=x\arctan x$ 展成 x 的幂级数.

解 因为 $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\le x\le 1)$，则得 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$ $(-1\le x\le 1)$

(也可利用 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 求解)

五、(10分) 设 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$

(1) 求 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(1,1,0)$ 处的梯度及方向导数的最大值;

(2) 问：$f(x,y,z)$ 在哪些点的梯度垂直于 x 轴.

解 (1) 由 $f_x(1,1,0)=(3x^2-y^2)_{(1,1,0)}=2$ $f_y(1,1,0)=(-2xy)_{(1,1,0)}=-2$ $f_z(1,1,0)=(-1)_{(1,1,0)}=-1$

故 $\nabla f|_{(1,1,0)}=2i-2j-k$ 所以 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(1,1,0)$ 处方向导数的最大值为：$|\nabla f|_{(1,1,0)}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$

(2) 由 $\nabla f=(3x^2-y^2)i-2xyj-k$，而 $\nabla f\perp x$ 轴，即 $\nabla f\cdot(1,0,0)=0$，由此得：$y=\pm\sqrt{3}x$

所以平面 $y=\pm\sqrt{3}x$ 上的点处的梯度垂直于 x 轴.

六、(10分) 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2xz^2dydz+y(z^2+1)dzdx+(9-z^3)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1$ $(1\le z\le 2)$，取下侧.

解：取平面 Σ_1：$z=2$，取上侧. 则 Σ 与 Σ_1 构成封闭曲面，取外侧. 令 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω，由 Gauss 公式，得

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega dxdydz-\iint_{x^2+y^2\le1}(9-2^3)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{1+r^2}^2 dz-\iint_{x^2+y^2\le1}dxdy=-\frac{\pi}{2}$$

17

5

七、(10 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数，并使曲线积分 $\int_L [3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}]y\,dx+\varphi'(x)dy$ 与路径无关，求函数 $\varphi(x)$。

解 由题意得：$3\varphi'(x)-2\varphi(x)+xe^{2x}=\varphi''(x)$　　即 $\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=xe^{2x}$

特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=2$　　对应齐次方程的通解为：$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$

又因为 $\lambda=2$ 是特征根。故其特解可设为：$y^*=x(Ax+B)e^{2x}$　代入方程并整理得：$A=\dfrac{1}{2}, B=-1$　　即　$y^*=\dfrac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$

故所求函数为：$\varphi(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x(x-2)e^{2x}$

八、(8 分) 将正数 a 分为正数 x,y,z 之和，使得 $u=x^my^nz^p$ 最大。(其中 m,n,p 为已知正数)

解法一 化为无条件极值求解，即求 $u=x^my^n(a-x-y)^p$ 的极值。

令 $\begin{cases}u'_x=mx^{m-1}y^n(a-x-y)^p-px^my^n(a-x-y)^{p-1}=0\\u'_y=nx^my^{n-1}(a-x-y)^p-px^my^n(a-x-y)^{p-1}=0\end{cases}$　即　$\begin{cases}m(a-x-y)-px=0\\n(a-x-y)-py=0\end{cases}$

解之得　$x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$　再由　$x+y+z=a$　求得　$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$。

当 $x=0(x=a)$，或 $y=0(y=a)$ 或 $z=0(z=a)$ 时，u 均为 0，不可能为最大，故将 a 分成的三个正数为 $x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$，$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$。

解法二 利用拉格朗日乘数法求解，作函数 $F(x,y,z)=x^my^nz^p+\lambda(x+y+z-a)$

令 $\begin{cases}F'_x(x,y,z)=mx^{m-1}y^nz^p+\lambda=0 & (1)\\F'_y(x,y,z)=nx^my^{n-1}z^p+\lambda=0 & (2)\\F'_z(x,y,z)=px^my^nz^{p-1}+\lambda=0 & (3)\end{cases}$　及　$x+y+z-a=0$　　(4)

将(1)，(2)，(3)中之 λ 移至等式右端，记为 $(1'),(2'),(3')$，然后由 $(1')\div(2')$ 得

$x=\dfrac{m}{n}y$ $(3')\div(2')$ 得　$y=\dfrac{p}{n}y$ 并将其代入(4)，从而得到所求三个正数为

$x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$，$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$。

解法三 因为 $u=x^my^nz^p>0$，故当 u 最大时 $\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$ 也最大。利用拉格朗日乘数法，作函数

$\Phi(x,y,z)=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda(x+y+z-a)$

令 $\begin{cases}\Phi'_x(x,y,z)=\dfrac{m}{x}+\lambda=0 & (1)\\\Phi'_y(x,y,z)=\dfrac{n}{y}+\lambda=0 & (2)\\\Phi'_z(x,y,z)=\dfrac{p}{z}+\lambda=0 & (3)\end{cases}$　及　$x+y+z-a=0$　　(4)

由(1)，(2)得 $x=\dfrac{m}{n}y$，由 (2)，(3) 得 $z=\dfrac{p}{n}y$ 并代入(4)，从而得 $x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$，$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$

武汉大学 2009-2010 学年第二学期《高等数学 B2》试题答案

一、1、解：由 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，得 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})$

$=7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$，$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$，

两式相减得，$46\vec{a}\cdot\vec{b}=23|\vec{b}|^2\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2\Rightarrow\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}$ $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

$=|\vec{b}|^2$，两式相加得，$322\vec{a}\cdot\vec{b}=161|\vec{a}|^2\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2\Rightarrow\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$，由此推得 $\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}$，

即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，所以 $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$，$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$。

2、解：设切点为 (x_0,y_0,z_0)，于是曲面在该点的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$，所给平面的法向量为 $(2,2,-1)$，由条件知 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$，所以切点坐标为 $x_0=2,y_0=1$，

$z_0=\dfrac{x_0^{\,2}}{2}+y_0^{\,2}=3$，所以所求切平面方程为 $2x+2y-z-3=0$。

3、解：利用极坐标，则 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\dfrac{10\sqrt{2}}{9}$

4、方程两端对 x 求偏导，$z_x+e^{z-y-x}+xe^{z-y-x}(z_x-1)=0\Rightarrow z_x=\dfrac{(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}$，

方程两端对 y 求偏导，$z_y-1+xe^{z-y-x}(z_y-1)=0\Rightarrow z_y=1$，从而

$$dz=\frac{(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$$

5、解：$f(x)=\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n+1}}$

6、解：$\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\dfrac{1}{60}$

二、解：做辅助线 CA，由格林公式得 $\int\limits_{L+CA}(x+e^{\sin y})dy-(y-\dfrac{1}{2})dx=2\iint\limits_D dxdy=\dfrac{\pi}{2}+1$。

而 $\int_{CA}(x+e^{\sin y})dy-(y-\dfrac{1}{2})dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{2}dx=1$，所以原式 $=\dfrac{\pi}{2}+1-1=\dfrac{\pi}{2}$。

三、记 Σ_1 为曲面 $z=1(x^2+y^2\le 1)$，取下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy$

10

$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -\pi$，用 Ω 表示 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint_{\Omega}(2+1)dV=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-6\pi\int_0^1(r-r^3)dr=-\frac{3}{2}\pi$$

因此原式 $=-\dfrac{\pi}{2}$。

四、先考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}}=\infty$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散。再考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

再由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x\ge 2), f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\ge e$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调减少，故当 $n\ge 3$ 时，

$u_n>u_{n+1}$，由 Leibniz 定理知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 收敛，故为条件收敛。

五、因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，且在 $x=\pm 1$ 处级数均发散，所以收敛域为 $(-1,1)$. 设

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ ，$x\in(-1,1)$. 则 $\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$，

然后两边对 x 求导，得 $S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$。

六、解：先求 $f(x,y)$ 在 D 内可能取极值的点，令 $f_x'=2x=0, f_y'=-2y=0$，得唯一驻点 $(0,0)$，

$f(x,y)$ 在 D 内没有偏导数不存在的点. 再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上可能取极值的点，

用拉格朗日乘数法，令 $F(x,y)=x^2-y^2+3+\lambda(x^2+$

$\dfrac{y^2}{4}-1)$，则 $F_x'=2x+2\lambda x=0, F_y'=-2y+\dfrac{\lambda}{2}y=0, x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, \Rightarrow x=0, y=\pm 2$，或 $x=\pm 1, y=0$，所以边界上有四个驻点，最后算 $f(0,0)=3, f(0,\pm 2)=-1, f(\pm 1,0)=4$，所以 $f(x,y)$ 在 D 上最大值和最小值分别为 $f_{\max}=4, f_{\min}=-1$。

11

武汉大学试卷纸

专业______ 年级______ 学号______ 姓名______

科目 2010-2011 B 上 参考答案 成绩______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

一．(每题7分，共63分)

1、设所求平面为 $Ax+By+Cz=0$

由题设有 $\begin{cases}6A-3B+2C=0\\4A-B+2C=0\end{cases}$ 解之得 $A=B$，$C=-\frac{3}{2}B$ $B\neq$

故所求平面为 $Bx+By-\frac{3}{2}Bz=0$，$B\neq0$ 即 $2x+2y-3z=0$

2、~~$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))\cdot y+f_2'(xy,yg(x))\cdot yg'(x)$~~

~~$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''(xy,yg(x))\cdot x+f_{12}''(xy,yg(x))\cdot g(x)]y+f_1'(xy,yg(x))$~~

$+[f_{12}''(xy,yg(x))\cdot x+f_{22}''(xy,yg(x))\cdot g(x)]yg'(x)+f_2'(xy,yg(x))$

又 $g(2)=1$，$g'(2)=0$

所以 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=2,y=1}=[2f_{11}''(2,1)+f_{12}''(2,1)]\times1+f_1'(2,1)$

$=2f_{11}''(2,1)+f_{12}''(2,1)+f_1'$

3、对 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别求关于x、y的偏导

$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$ ①

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z}$

$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ②

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases}x=3y\\y=z\end{cases}$ 代入原方程，$y^2=9$，$y=\pm3$

驻点 $(9,3,3)$ 和 $(-9,-3,3)$

13

装订线内请勿答题

武汉大学试卷纸

专业＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

科目＿＿＿＿ 成绩	总分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

装订线内请勿答题

7. $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = 2\int_0^1 (2+x)dx = 5$

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 (2+x)\cos n\pi x\,dx$

$= 4\int_0^1 \cos n\pi x\,dx + 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$

$= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,d\,n\pi x + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x$

$= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x\,dx\right] =$

$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\,d\,n\pi x = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}$

$= \begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1 \end{cases}$

$b_n = 0$.

$\therefore f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2},\ x\in[-1,1$

8. $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr = \pi\cdot\frac{1}{2}\ln(1$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2$

9. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2})$

$u(x,y) = \int_{(1,1)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int_1^x (1+e^x)dx + \int_1^y e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy$

$= x-1+e^x-e+\int_1^y e^{\frac{x}{y}}dy - \int_1^y e^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y}dy$

$= x-1+e^x-e+\int_1^y e^{\frac{x}{y}}dy + \int_1^y y\,de^{\frac{x}{y}}$

$= x-1+e^x-e+\int_1^y e^{\frac{x}{y}}dy + ye^{\frac{x}{y}}\Big|_1^y - \int_1^y e^{\frac{x}{y}}dy = x-1+$

14

故 x 的通解为. $x-1+\cancel{e}-e+ye^{\frac{x}{y}}+c_1'=c_2'$

即 $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$

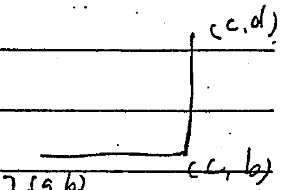
二. ④ $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调减且 $\to 0$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散. 故原级数条件收敛.

三. ① $P(x,y)=\frac{1}{y}+yf(xy)$, $Q(x,y)=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 故. I 与路径 L 无关.

② . 当 $ab=cd$ 时.



$$I=\int_a^c\frac{1}{b}(1+b^2f(bx))dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}(y^2f(cy)-1)dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c f(bx)\,d\,bx+\int_b^d f(cy)\,d\,cy+c\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_{ab}^{cb}f(t)dt+\int_{cb}^{cd}f(t)dt+\frac{cb-cd}{bd}$$

$$=\frac{cd-ad+cb-cd}{bd}=\frac{cb-ad}{bd}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

四. $R=1$. $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\frac{-x}{1+x^2}$

$\therefore f(x)=\int\frac{-x}{1+x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

$f(0)=1$ $\therefore f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ $\quad |x|<1$. 在 $x=0$ 取极大值 $f(0)=1$

五. 设 L: $\begin{cases}x=x_0t\\ y=y_0t\\ z=z_0t\end{cases}$ $0\le t\le 1$. $W=\int_L yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$.

(x_0,y_0,z_0)

$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=t$

$$=\int_0^1 x_0y_0z_0t^2dt+\int_0^1 t^2x_0y_0z_0dt+\int_0^1 t^2x_0y_0z_0dt$$

$(0,0,0)$

$$=x_0y_0z_0$$

设 $L=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

令 $\begin{cases}L_x=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ L_y=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ L_z=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$ 由解之得 $\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt3}\\ y=\frac{b}{\sqrt3}\\ z=\frac{c}{\sqrt3}\end{cases}$ $x_0y_0z_0=\frac{1}{3\sqrt3}abc=\frac{\sqrt3}{9}abc$.

$e^{\frac{x}{y}}+c_1'$

武汉大学 2011-2012 学年第二学期

《高等数学 B2》（A 卷）标准答案

一、(8 分)(每个划线部分 2 分)解：设 $\vec{m}=(x,y,z)$, 则 $\vec{m}\perp\vec{c}$ 意味着 $\underline{2x-2y+z=0}$，$\vec{m}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面意味着

$\underline{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=0$ 得 $z=-2y$, 单位向量 $\vec{m}$ 意味着 $\underline{x^2+y^2+z^2=1}$, 解上述三个方程得 $\underline{\vec{m}=\pm(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}$。

二、(11 分)解：$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0} f(x,y)=f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，......4 分

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=f_y(0,0)$，所以偏导数存在，......4 分

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}(\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，取 $\Delta y=k\Delta x$ 求该极限，可知极限不存在，

所以不可微。......3 分

三、(8 分) 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+aue^{ax+by},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bue^{ax+by}$，　......4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{ax+by}+b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abue^{ax+by}=b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abue^{ax+by}$, ...2 分

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u=0$，由

$u=F(x)+G(y)(F,G$ 任意）可知只有系数 $a=1,b=1$.......2 分

四、（8 分）在 $y=f(x,F(x,y(x))$ 两边同时关于 x 求导，可得 $\frac{dy}{dx}=f_x+f_t(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx})$，......5 分

整理得 $\frac{dy}{dx}=\frac{f_x+f_tF_x}{1-f_tF_y}$......3 分

五、（10 分）解：做 Lagrange 函数 $F(x;y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(a_1x+a_2y+a_3z-1)$，求导得

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\lambda)=2x-a_1\lambda=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda)=2y-a_2\lambda=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda)=2z-a_3\lambda=0 \\ a_1x+a_2y+a_3z=1 \end{cases}$$ ......5 分

$\lambda=\frac{2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, x=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, y=\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, z=\frac{a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，......4 分

所以$F_{\min}=\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。。。。。。1分

六、(8分)解： 原式$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}x^3y^2zdz$......4分$=\dfrac{1}{110}$......4分

七、(8分)解：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}(x+1)^n$的收敛半径为$R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n(x+1)^n$的收敛半径为

$R_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2}$。......4'

故原级数的的收敛半径为$R=\min\{R_1,R_2\}=\dfrac{1}{2}$，收敛区间则为$(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$，......2'

当$x=-\dfrac{3}{2}$时，级数发散，当$x=-\dfrac{1}{2}$时，级数发散，所以收敛域为$(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$。......2'

八、(8分)解：$I=\iint\limits_D|x^2+y^2-4|dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4(4-r^2)rdr......6分=80\pi......2分$

九、(10分)解一：补充平面$S_1:z=1$，法向量向下，形成封闭区域Ω，由Gauss公式得

$\iint\limits_S(2x+z)dydz+zdxdy=-3\iiint_\Omega dxdydz=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-\dfrac{3}{2}\pi$，......5'

再计算平面$z=1$上的曲面积分$\iint\limits_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}dxdy=\pi$，......4'

综合得$I=-\dfrac{\pi}{2}$。......1'

解二：用投影法求解，这里$z_x'=2x,z_y'=2y$。......2'

原式$=\iint\limits_S[(2x+z)(-2x)+z]dxdy=-\iint\limits_S(z-2xz-4x^2)dxdy=\iint\limits_D(x^2+y^2-2x(x^2+y^2)-4x^2)dxdy$......3'

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2-2r^3\cos\theta-4r^2\cos^2\theta)rdr=-\dfrac{\pi}{2}$......5'

十、(11')解：①$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+1-3x^2)=1$，......2'

②曲线L不封闭，添加辅助线L_1:沿y轴由点$B(0,2)$到点$O(0,0)$，

$\int\limits_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\int\limits_{L_1}Q(0,y)dy=\int_2^0-2ydy=4$，......3'

③在封闭区域上运用Green公式，可得

$\int\limits_{L\cup L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\iint\limits_D 1dxdy=\dfrac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\dfrac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{2}$,......4'

因此$I=\int\limits_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\dfrac{\pi}{2}-4$......2'

十一、(10') $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nxdx-\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\right)$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}$，……4'　　　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2(1-\frac{\pi^2}{3})$，……2'

所以$1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$, ……2'

取 $x=0$, 得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$……2'

武汉大学数学与统计学院

2012-2013 学年二学期《高等数学 B2》期末试卷(A 卷)参考解答

一、(9 分)解：首先$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\sqrt{3}$，而$\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$ 可知$\vec{c}\parallel\vec{a}\times\vec{b}$，所以$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$的夹角为 0 或$\pi$，所以$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}})=\sqrt{3}\times 3\times(\pm 1)=\pm 3\sqrt{3}$

二、(9 分)解 π 法向量为$\vec{n}=\{A,B,6\}$，l 方向向量为$\vec{S}=\{2,-4,3\}$，l 与π 垂直，$\vec{n}//\vec{S}$，故 $\frac{A}{2}=\frac{B}{-4}=\frac{6}{3}$，

解得：$A=4,\qquad B=-8$

三、(9 分)解 (1) $xdx-ydy=dz-\varphi'(x+y-z)\cdot(dx+dy-dz)$，　$dz=\dfrac{(x+\varphi')dx+(\varphi'-y)dy}{\varphi'+1}$，

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+y}{1+\varphi'(x+y-z)}$，　$u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{1+\varphi'(x+y-z)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\varphi''(1-\frac{\partial z}{\partial x})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1-\frac{x+\varphi'}{1+\varphi'})}{(1+\varphi')^2}=\frac{-\varphi''(1-x)\cancel{2\varphi'}}{(1+\varphi')^3}$$

四、(9 分)解：因为$\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2,x\ge y\\ y^2,x\le y\end{cases},(x,y)\in D$，于是用 $y=x$ 将区域分成两块：

$$I=\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2}e^{y^2}dxdy=2\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e-1$$

五、(9 分) $\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}zdz=\dfrac{2}{3}$

六、(9 分)解 由$\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得$\varphi'(x)y=2xy[\varphi(x)+1]$，　$\ln[\varphi(x)+1]=x^2+C_1$，

即$\varphi(x)=e^{x^2+C_1}-1=Ce^{x^2}-1$ ，所以有 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}$

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(Ce^{x^2}-1)ydy+Cxy^2e^{x^2}dx=\int_0^1(Ce-1)ydy=\dfrac{1}{2}(Ce-1)$．故有$(Ce-1)=1$，即$C=\dfrac{2}{e}$

所以有 $\varphi(x)=2e^{x^2-1}-1$

七、(9 分)解：　$dS=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$，因为积分区域关于 xoz 平面对称，xy 关于 y 是奇函数，所以

$$I=\iint_{\Sigma}(xy+z)dS=\iint_{\Sigma}zdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

八、(7 分)解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 4^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore$收敛半径为$R=4$ ，当$x=-4$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n}$发散；

当$x=4$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 4}{n}$收敛，收敛域为$(-4,4]$，设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 4^n}x^{n+1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n\cdot 4^n}$

$=x\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n\cdot 4^n}]'dt=\frac{x}{4}\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{t}{4})^{n-1}]dt=\frac{x}{4}\int_0^x\frac{1}{1+\frac{t}{4}}dt=x\ln(1+\frac{x}{4}),x\in(-4,4]$

九、(9分)解：设切点$P(x_0,y_0,z_0)$,由已知条件得：$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}:=\lambda$ ，得到 $x_0=\frac{1}{2}\lambda,y_0=\lambda,z_0=\lambda,$ 代入曲面方程解得 $\lambda=\pm2,\quad x_0=\pm1,y_0=\pm2,z_0=\pm2.$ 切平面方程为 $(x\pm1)+4(y\pm2)+6(z\pm2)=0$，即 $x+4y+6z=\pm21$

十、(7分)解：$\iint\limits_S 2x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ S: z=1-x^2-y^2\quad(z\ge0)$不封闭

补充S_1：$z=0\ (x^2+y^2\le1)$下侧，则 $S+S_1$封闭，取外侧.

$I=\iint\limits_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1})[2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$

由高斯公式，得 $\oiint\limits_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\mathrm{d}z=2\pi$ 而$\iint\limits_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$

因此 $\quad I=2\pi-3\pi=-\pi$

十一、(8分)解：由曲面S的方程为 $2x^2+y^2+z^2=1$，给定的方向 $\vec{l}^0=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)$

方向导数函数 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt2(x-y)$

设$L=\sqrt2(x-y)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$， 令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\sqrt2+4\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-\sqrt2+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2\lambda z=0\\ 2x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$,解之得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt2}{4\lambda}\\ y=\frac{\sqrt2}{2\lambda}\\ z=0\end{cases}$

$\lambda=\pm\frac{\sqrt3}{2}$ ，$\lambda=\frac{\sqrt3}{2}$，得S上的点为$(-\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{3},0)$，此时$\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt3$

$\lambda=-\frac{\sqrt3}{2}$，得S上的点为$(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3},0)$，此时$\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt3$，所以，所求的S上的点为$(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3},0)$

十二、(6分)解：因为$\{a_n\}$单调下降且有下界0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ge0$. 若$a=0$，由莱布尼茨法则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，与假设矛盾，所以$a>0$. 因此由根值判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\frac{1}{a+1}<1$，所以原级数收敛。

武汉大学 2013-2014 学年第二学期期末考试

高等数学 B2 试题解答

一、(8 分) 利用二重积分的性质，比较积分 $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \left[\ln(x^2+y^2)\right]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，

其中 $D: e\le x^2+y^2\le 2e$.

解 $\because 1\le \ln(x^2+y^2)\le 1+\ln 2,$ ……4 分

$\ln(x^2+y^2)\le\left[\ln(x^2+y^2)\right]^2, \therefore I_1<I_2$ ……4 分

二、(8 分) 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$， ……4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……4 分

三、(8 分) 求过点 $M(1,-2,3)$ 的平面，使它与平面 $\pi: x+y-z-3=0$ 垂直，且与直线 $L: x=y=z$ 平行.

解 因为已知直线与已知平面不平行，故所求平面得法向量为

$\vec{n}=(1,1,-1)\times(1,1,1)=(2,-2,0)$， ……4 分

故平面方程为 $(x-1)-(y+2)=0$，即 $x-y-3=0$。 ……4 分

四、(8 分) 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz=\arctan(x+y+z)$ 所确定的隐函数，求全微分 $\mathrm{d}z$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的值..

解 $yzdx+xzdy+xydz=\dfrac{dx+dy+dz}{1+(x+y+z)^2}$， ……4 分

$\mathrm{d}z=\dfrac{yz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dx+\dfrac{xz[1+(x+y+z)^2]-1}{1-xy[1+(x+y+z)^2]}dy$，故 $dz\big|_{(0,1,-1)}=-2dx-dy$ ……4 分

五、(10 分) 计算曲线积分 $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，式中 L 是从原点 $O(0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ ($a>0$) 到点 $A(2\pi a,0)$ 的弧段.

解 $O(0,0)$ 对应 $t=0$，$A(2\pi a,0)$ 对应 $t=2\pi$。

原式 $=\int_0^{2\pi} a\ (1+\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t+a(t-\sin t)a\sin t\,\mathrm{d}t$ ……6 分

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos^2 t-\sin^2 t+t\sin t)\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi} t\ \sin t\,\mathrm{d}t=-2\pi a^2 \qquad \cdots\cdots 4\text{分}$$

六、(10 分)设Ω是由曲面$z^2=x^2+y^2, z=2$所围的闭区域，试计算$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$.

解 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV=\int_0^2 z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} dxdy$ ……6 分

$=\int_0^2 \pi z^4 dz=\dfrac{32}{5}\pi$ ……4 分

七、(10 分)计算曲面积分$\iint_S (x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

解 添加平面$S_1: x^2+y^2\le 1(z=0)$的下侧，记$S+S_1$所围的区域为V，则利用高斯公式得,

原式$=3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dV-\iint\limits_{S_1} y^2dxdy-0$ ……6 分

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta d\rho=\dfrac{29}{20}\pi$ ……4 分

八、(8 分)求曲线$x=\sin^2 t$，$y=\sin t\cos t$，$z=\cos^2 t$在对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的切线和法平面方程.

解 点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 当$t=\dfrac{\pi}{4}$时, $\vec{\tau}=(x',y',z')\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=(1,0,-1)$。……4 分

切线 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$, 法平面, $x-z=0$……4 分

九、(8 分)设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi,\end{cases}$,

将它展开成 Fourier 级数，并求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和。

解 所给函数在点$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$处不连续，在其他点处连续，所以由收敛定理可知$f(x)$的 Fourier 级数收敛，在$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$处级数收敛于$\dfrac{-1+1}{2}=0$，当$x\ne k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$时收敛于$f(x)$.

计算 Fourier 系数如下:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\ , \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

因此$f(x)$的 Fourier 展开式为

$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x(x\ne k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，取$x=\dfrac{\pi}{2}$可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$。……3 分

十、（9 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数并利用其求 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。

解 由 $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-x)^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},x\in[-1,1)$ 因此当 $x\neq 0$ 时，有

$\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$， ……5 分

当 $x=0$ 时，$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}=-1=f(0)$，所以 $f(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$，$x\in[-1,1]$

$\int_0^x f(t)dt=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}\quad x\in[-1,1]$ ……4 分

十一、（6 分）设 $a_n\geq 0(n=1,2,\ldots)$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

证明：因为数列 $\{na_n\}$ 有界，则 $\exists M>0$，使得 $0\leq na_n\leq M$，因此 $0\leq a_n\leq\dfrac{M}{n}$， ……3 分

于是 $0\leq a_n^2\leq\dfrac{M^2}{n^2}$，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。 ……3 分

十二、（7 分）求二元函数 $f(x,y)=\cos^2x+\cos^2y$ 在限制条件 $x-y=\dfrac{\pi}{4}$ 下的极值.

解 设 $F(x,y,\lambda)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(x-y-\dfrac{\pi}{4})$，求驻点。由 $F_x=-2\sin x\cos x+\lambda=0$,

$F_y=-2\sin y\cos y-\lambda=0,\ x-y=\dfrac{\pi}{4}$ 可得驻点为 $(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2})$。 ……4 分

极大值为 $z(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2})=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为偶数；极小值为 $z(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2})=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$k$ 为奇数。 ……3 分

武汉大学2014-2015学年第二学期期末考试高等数学B2答案

一、（8分）设$\bar{p}=2\bar{a}+\bar{b},\bar{q}=k\bar{a}+\bar{b}$，其中$|\bar{a}|=1,|\bar{b}|=2$，且$\bar{a}\perp\bar{b}$，问：

(1) k为何值时，$\bar{p}\perp\bar{q}$？ (2) k为何值时，以$\bar{p},\bar{q}$为边的平行四边形面积为6?

解 (1) 因$\bar{p}\perp\bar{q}$，故$\bar{p}\cdot\bar{q}=0$， 即 $(2\bar{a}+\bar{b})\cdot(k\bar{a}+\bar{b})=0$

$$2k|\bar{a}|^2+(2+k)\bar{a}\cdot\bar{b}+|\bar{b}|^2=0$$

按 $|\bar{a}|^2=1,\ \bar{a}\cdot\bar{b}=0,\ |\bar{b}|^2=4,$ 有$2k+4=0,$ 得 $k=-2$ 4分

(2) $|\bar{p}\times\bar{q}|=6,$而 $|\bar{p}\times\bar{q}|=|(2\bar{a}+\bar{b})\times(k\bar{a}+\bar{b})|=|(2-k)\bar{a}\times\bar{b}|=2|2-k|$

故 $|2-k|=3,$ 得$k=5$ 或$k=-1.$ 4分

二.(8 分) 求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 沿曲线$x=t,y=2t^2,z=-2t^4$在点$M(1,2,-2)$的切线方向上的方向导数

解：曲线在点M处对应$t=1$，在M点的切线方向为$(1,4t,-8t)=(1,4,-8)$，方向余弦为

$\bar{l}=(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})$ ， 4分

$$gradu\big|_M=\left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_M=\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right)$$

故方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}=-\dfrac{16}{243}$， 4分

三、(6分)函数$z=z(x,y)$由方程$z=f(x+y+z)$所确定，其中f二阶可导，且$f'(u)\neq 1$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 $z_x=(1+z_x)f'$，$z_x=\dfrac{f'}{1-f'}=-1+\dfrac{1}{1-f'}$ (4分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(1+z_x)f''}{(1-f')^2}=\frac{f''}{(1-f')^3} \qquad (2分)$$

四、（8分）设$u=f(x+y+z,xyz)$具有一阶连续偏导数，其中$z=z(x,y)$由方程$x^2+2ze^{y^2}=\sin z$所确定，求$\mathrm{d}u$.

解：$\mathrm{d}u=(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)f_1+(yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z)f_2$

$2x\,\mathrm{d}x+2e^{y^2}\,\mathrm{d}z+4yze^{y^2}\,\mathrm{d}y=\cos z\,\mathrm{d}z$ 4分

消去$\mathrm{d}z$得：$$\mathrm{d}u=\left[f_1+yzf_2+(f_1+xyf_2)\frac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}x+\left[f_1+xzf_2+(f_1+xyf_2)\frac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}y$$ 4分

五、（8分）求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$M(1,2,0)$处的切平面和法线方程。

解：设$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则$F_x=2y,F_y=2x,F_z=1-e^z$， 4分

故法向量 $\bar{n}|_M=\{F_x,F_y,F_z\}|_M=\{4,2,0\}$ ，所以切平面方程为

$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$ 即$2x+y=4$，

法线方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{0}$或者 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}\\ z=0\end{cases}$ 4 分

六、（10 分）设$z=x^3+\alpha x^2+2\gamma xy+\beta y^2+\alpha\beta^{-1}(\gamma x+\beta y)$，试证：当$\alpha\beta\neq\gamma^2$时，函数$z$有一个且仅有一个极值，又若$\beta<0$，则该极值必为极大值。

证明 由$\begin{cases}z_x=3x^2+2\alpha x+2\gamma y+\alpha\gamma\beta^{-1}=0\\ z_y=2\gamma x+2\beta y+\alpha=0\end{cases}$，解得$x=0$或$x=\dfrac{-2}{3\beta}(\alpha\beta-\gamma^2)=\mu$ 5 分

$$D=\begin{pmatrix}z_{xx} & z_{xy}\\ z_{yx} & z_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2\alpha & 2\gamma\\ 2\gamma & 2\beta\end{pmatrix},D|_{x=0}=4(\alpha\beta-\gamma^2),D|_{x=\mu}=4(\gamma^2-\alpha\beta)$$

在$\alpha\beta\neq\gamma^2$的条件下，以上二式中必有且仅有一式大于零，这说明函数z有且仅有一个极值。因为$z_{yy}=2\beta$，所以当$\beta<0$时，必为极大值。 5 分

七、(8 分)设$f(x,y)$连续，且满足$f(x,y)=x\sqrt{y}+\iint\limits_D f(u,v)dudv$，其中$D$为曲线$y=x^2,x=y^2$所围成的区域，求$f(x,y)$.

解： 设 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，则$A=\iint\limits_D (x\sqrt{y}+A)dxdy$，而

$\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}dy=\dfrac{6}{55}$ 4 分

而$\iint\limits_D Adxdy=A\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\dfrac{1}{3}A$，所以$A=\dfrac{6}{55}+\dfrac{A}{3}\Rightarrow A=\dfrac{9}{55}$ ，

故$f(x,y)=x\sqrt{y}+\dfrac{9}{55}$ 4 分

八、(8 分) 设Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$围成的空间区域，S是Ω的整个边界的外侧，求曲面积分$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$.

解：由 Gauss 公式可知

$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_\Omega(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z})dxdydz=3\iiint\limits_\Omega dxdydz$ 4 分

用球坐标$x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi$，可得

$$\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi dr=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3,$$

所以$\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=3\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3=(2-\sqrt{2})\pi R^3$ 4 分

九、（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解:令 $t=x^2$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^n$的收敛半径为$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，当$t=\pm1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$收敛，所以原级数的收敛域为$[-1,1]$。 5 分

令$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x),S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，故$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},|x|\le 1$，

$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，$|x|\le 1$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x$，$|x|\le 1$

5 分

十、（10 分）确定常数λ，使得在右半平面$x>0$的单连通区域内，曲线积分

$$\int_L 2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\mathrm{d}x-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

与路径无关，并在上述条件下，求积分$\int_{(1,0)}^{(3,3)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$之值。

解　记$t=x^4+y^2$，$P=2xyt^{\lambda},Q=-x^2t^{\lambda}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=2xt^{\lambda}+2xy\lambda t^{\lambda-1}\cdot 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xt^{\lambda}-x^2\lambda t^{\lambda-1}\cdot 4x^3$,

由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得$2xt^{\lambda}+2xy\lambda t^{\lambda-1}\cdot 2y=-2xt^{\lambda}-x^2\lambda t^{\lambda-1}\cdot 4x^3$，即$\lambda=-1$，

故当$\lambda=-1$时，积分$\int_L\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$与路径无关。　　6 分

取L_1：$y=0,x$从 1 到 3，$L_2:x=3,y$从 0 到 3，则

$$\int_L\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{L_1}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+\int_{L_2}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=0+\int_0^3\frac{-9}{81+y^2}dy=-\arctan\frac{y}{9}\Big|_0^3=-\arctan\frac{1}{3}$$　4 分

十一、（10 分）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=4z\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$围成的立体.

解一：旋转曲面方程为$z=\frac{x^2+y^2}{4}$，用柱坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$将三重积分化为

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{z}}(r^2+z)rdr$$　5 分

$$=2\pi\int_0^4\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}z\right)_0^{2\sqrt{z}}dz=2\pi\int_0^4 6z^2dz=256\pi$$　5 分

或者解二：旋转曲面方程为$z=\frac{x^2+y^2}{4}$，用柱坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$将三重积分化为

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 rdr\int_{\frac{r^2}{4}}^4(r^2+z)dz$$　5 分

$$=2\pi\int_0^4(4r^3+8r-\frac{9}{32}r^5)dr=256\pi$$　5 分

十二、（6 分）设级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在[0, 1]上收敛，证明：当$a_0=a_1=0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛。

证明　因为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在 x=1 点收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛。

那么，存在 M>0，使得$|a_n| \le \mathrm{M}$　　　　3 分

而$f\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + \cdots$当$a_0 = a_1 = 0$时，有

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + \cdots$，当$n \ge 2$以后，$f\left(\frac{1}{n}\right)$是绝对收敛的，所以

$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{|a_2|}{n^2} + \frac{|a_3|}{n^3} \cdots + \frac{|a_k|}{n^k} + \cdots \le \mathrm{M}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots\right) \sim \frac{\mathrm{M}}{n^2}$故级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛　3 分