

武汉大学数学与统计学院 2008-2009 第二学期

《线性代数 C》 (A 卷, 文科 54 学时)

学院 _____ 专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____

注: 所有答题均须有详细过程, 内容必须写在答题纸上, 凡写在其它地方一律无效。

一、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维向量, 记三阶矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, -4\alpha_2 + 8\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3).$$

已知 $|A| = 3$, 求 $|B|$.

二、(15 分) 解矩阵方程 $2X = AX + B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

三、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 设向量组

$$\beta_1 = (m-1)\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1 + (m+1)\alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = -\alpha_1 - (m+1)\alpha_2 + (m-1)\alpha_3,$$

试讨论: 1) 当 m 取何值时可使得向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关?

2) 当 m 取何值时可使得向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关?

四、(15 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases}$$

讨论 λ 为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时, 求出其通解。

五、(15 分) 设 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 2、3、4。

1) 能否求得 A^{-1} 的特征值? 若能, 试求出该特征值; 若不能, 则说明理由。

2) A 能否相似于一个对角阵? 若能, 试求出该对角阵; 若不能则说明理由。

3) 已知 $A^2 - 2A + E$, 能否求得 $|B|$? 若能, 试求出 $|B|$; 若不能, 则说明理由。

六、(20 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4-a & 2b-1 \\ a-2b & c & 2-c \\ c-1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c 为常数。

1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

2) 求 A 的全部特征值与特征向量;

3) 求一个正交变换 $X = PY$, 把二次型 f 化为标准形;

4) 在 $\|x\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值和最小值。

七、(10 分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 证明: $R(A) + R(A - E) = n$ 。