武汉大学数学与统计学院

2020--2021 学年第一学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)

考试时间：2021 年 1 月 8 日 14:30—16:30

符号说明： $\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

一、单项选择题（每题 3 分，共 12 分）

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1 & a & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 a 的值为______.

(A) 0　　(B) 0 或-1　　(C) -1　　(D) -1 或 1

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则 $\boldsymbol{A}^*=$______.

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(B) $-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(C) $\boldsymbol{A}$　　(D) $-\boldsymbol{A}$

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$，$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$n\geq 3$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值中，必然______.

(A) 有 n 个特征值等于 1　　(B) 有 $n-1$ 个特征值等于 1

(C) 有 1 个特征值等于 1　　(D) 没有 1 个特征值等于 1

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且秩相等，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则______.

(A) $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$，　　(B) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$，

(C) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$，　　(D) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

(1) 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|2\boldsymbol{A}^*|=$________.

(2) D 中第 2 行元素的代数余子式的和 $\sum_{j=1}^{4}A_{2j}=$______，其中

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

(3) 已知实二次型 $f(x_{1,}x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^1+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则实常数 a 的取值范围为______.

(4) $2n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=$______，其中 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & b\\ 0 & \cdots & b & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ b & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

三、计算题(每题 10 分，共 60 分)

(1) 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

(2) 求矩阵$\boldsymbol{X}$使 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BA}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) 设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1 \\ x_1-2x_2+b_3x_3+b_4x_4=d_2 \\ c_1x_1+c_2x_2+2x_3-3x_4=d_3 \end{cases}$ 有 3 个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求该方程组的通解(其中a_i,b_j,c_k,d_t为已知常数).

(4) 设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=b \end{cases}$，问$a$，$b$各取何值时，线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解.

(5) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，化为标准形$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数$\lambda$及正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

(6) 在 4 维实向量构成的向量空间$\mathbb{R}^4$中，求a使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$为$\mathbb{R}^4$的基，并求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2-a \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明题(每题 8 分，共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是欧氏空间V的标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

也是V的标准正交基.

(2) 设$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$是$n$元实二次型，存在$n$维实列向量$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，使$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_1>0$，$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_2<0$，

证明：存在n维列实向量$\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{O}$，使$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_0 = 0$.

武汉大学数学与统计学院

2020--2021 学年第一学期线性代数 B 期末考试试卷(A 卷)答案

一、选择题

(1) (A)　(2) (B)　(3) (B)　(4) (D)

二、填空题

(1) $\left|2\boldsymbol{A}^*\right| = 2^{2n-1}$；　(2) 0；　(3) $|a| < \sqrt{\dfrac{7}{2}}$；　(4) $(a^2-b^2)^n$

三、计算题

(1) 各列加到第 1 列，提出公因式，有

$$D_n = (\sum_{i=1}^{n} x_i - m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i - r_1} (\sum_{i=1}^{n} x_i - m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \qquad 8 分$$

$$= (-1)^{n-1} m^{n-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i - m) \qquad 2 分$$

(2) 由题设条件有：$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$，即　3 分

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}，可解得 \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}. \qquad 7 分$$

(3) 由题设条件知 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 3 个解，因此

$$\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 3 分$$

是对应的齐次线性方程组的线性无关解向量，因此，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) \le 2$．又 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \ne 0$，$R(\boldsymbol{A}) \ge 2$，因此 $R(\boldsymbol{A}) = 2$．　3 分

因此 $\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2$ 为其导出组的基础解系．由此可得线性方程组的通解：

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad k_1, k_2 为任意常数 \qquad 4 分$$

(4) 对增广矩阵施行初等行变换：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&3&0\\2&1&3&5&1\\3&2&a&7&1\\1&-1&3&-1&b\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&3&0\\0&1&-1&1&-1\\0&0&a-4&-1&0\\0&0&0&-2&b-2\end{pmatrix}$$ 3 分

故当 $a\neq 4$ 时，方程组有唯一解；

当 $a=4$， $b\neq 2$ 时，方程组无解；

当 $a=4$， $b=2$ 时， $R(\boldsymbol{A})=R(\bar{\boldsymbol{A}})=3<4$，方程组有无穷多组解. 3 分

此时增广矩阵可继续进行行变换为

$$\bar{\boldsymbol{A}}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故其通解为

$$k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}，k\text{为任意常数}$$ 4 分

(5) 二次型 f 的对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{pmatrix}$，依题设有特征值 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$， $\lambda_3=5$，由特征值的性质，有

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=2(9-\lambda^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3，\ \lambda>0，\text{得}\lambda=2.$$ 4 分

可求得 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$， $\lambda_3=5$ 的线性无关的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 3 分

对应的单位正交特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$ 3 分

于是正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 中的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$ 3 分

(6) 解： $a\neq 1$. 3 分

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$， $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&0\\a&2-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$ 4 分

因 $\left|\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&0\\a&2-a&0&0\\1&1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&2-a\\1&1\end{vmatrix}=2-2a\neq 0$，故 $a\neq 1$.

设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P}$，由

$$\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&-1&-1&1\\0&1&1&1&-1&1&1&0\\0&0&1&1&a&2-a&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_4]{r_1-r_2,\,r_2-r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-2&-2&1\\0&1&0&0&-1-a&a-1&1&0\\0&0&1&0&a-1&1-a&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\end{array}\right)$$

得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2&-2&1\\-1-a&a-1&1&0\\a-1&1-a&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$ 9 分

四、证明题

(1) 证法一：因为

$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\dfrac{1}{9}(4(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)-2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)-2(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3))=0$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=0$， 4 分

$$\left|\boldsymbol{\beta}_1\right|^2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=\frac{1}{9}(4(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+4(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3))=1,\quad \left|\boldsymbol{\beta}_2\right|^2=\left|\boldsymbol{\beta}_3\right|^2=1,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 V 的标准正交基. 4 分

证法二：由题设条件有

$$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix},$$ 4 分

设 $\boldsymbol{K}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，可验证 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{K}$ 为正交矩阵. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是标准正交基，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是标准正交基. 4 分

(2) 依题设 f 是不定二次型，设 f 的正惯性指数为 p，f 的秩为 r，则 $0<p<r$， 2 分

f 可经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为规范形

$$f={y_1}^2+\cdots+{y_p}^2-{y_{p+1}}^2-\cdots-{y_r}^2$$ 4 分

取 $\boldsymbol{y}_0=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{x}_0=Q\boldsymbol{Y}_0\neq\boldsymbol{0}$，使

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = 1+0\cdots+0-1+0\cdots+0=0\,.$$ 2 分