理论力学第 7 次作业

2.18

拉格朗日量

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[\left(a\sin\phi\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(a\dot{\phi}\right)^2\right] + mga\cos\phi$$

欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

即

$$ma^2\ddot{\phi} - ma^2\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2 + mga\sin\phi = 0$$

即

$$a\ddot{\phi} - a\sin\phi\cos\phi\,\dot{\theta}^2 + g\sin\phi = 0$$

其中

$$\ddot{\phi} = 0, \qquad \dot{\theta} = \omega$$

所以

$$\sin\phi\,(a\cos\phi\,\omega^2 - g) = 0$$

要存在$\phi \neq 0$的解，则

$$\cos\phi = \frac{g}{q\omega^2} \leq 1$$

所以

$$\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

2.20

令x_m, y_m为物体m的坐标，x_M, y_M为物体M左下顶点的坐标
由三角关系可得

$$y_m - y_M - (x_m - x_M)\tan\alpha = 0$$

另一个约束条件为

$$y_M = 0$$

令

$$f_1 = y_m - y_M - (x_m - x_M)\tan\alpha, \qquad f_2 = y_M$$

物体m的动能

$$T_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)$$

物体M的动能

$$T_M=\frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2)$$

总势能

$$V=mgy_m+Mgy_M$$

拉格朗日量

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2+\dot{y}_m^2)+\frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2)-mgy_m-Mgy_M$$

对于坐标x_m，欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_m}=Q_{x_m}$$

广义力由公式(2.25)给出

$$Q_k=\sum_{\alpha=1}^{m}\left\{\lambda_\alpha\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_k}\right)\right]-\frac{d\lambda_\alpha}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_k}\right\} \tag{2.25}$$

$$Q_{x_m}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_m}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_m}=-\lambda_1\tan\alpha$$

带入之前的欧拉-拉格朗日方程中可得

$$m\ddot{x}_m=-\lambda_1\tan\alpha$$

对于坐标y_m，欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_m}=Q_{y_m}$$

同理

$$Q_{y_m}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_m}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_m}=\lambda_1$$

带入之前的欧拉-拉格朗日方程中可得

$$m\ddot{y}_m-mg=\lambda_1$$

对于坐标x_M，欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_M}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_M}=Q_{x_M}$$

同理

$$Q_{x_M}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_M}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_M}=\lambda_1\tan\alpha$$

带入之前的欧拉-拉格朗日方程中可得

$$M\ddot{x}_M=\lambda_1\tan\alpha$$

对于坐标y_M，欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}_M}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_M}=Q_{y_M}$$

同理

$$Q_{y_M}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_M}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_M}=-\lambda_1+\lambda_2$$
带入之前的欧拉-拉格朗日方程中可得
$$M\ddot{y}_M-Mg=-\lambda_1+\lambda_2$$

由$y_M=0$可得
$$\ddot{y}_M=0$$

结合坐标y_M的欧拉-拉格朗日方程可得
$$\lambda_1-\lambda_2=Mg$$

对三角关系$y_m-y_M-(x_m-x_M)\tan\alpha=0$求两次导可得
$$\ddot{y}_m-\ddot{y}_M-(\ddot{x}_m-\ddot{x}_M)\tan\alpha=0$$

把式中的坐标量的二阶导替换掉可得
$$\frac{\lambda_1}{m}+g-\left(-\frac{\lambda_1}{m}\tan\alpha+\frac{\lambda_1}{M}\tan\alpha\right)\tan\alpha=0$$

整理可得
$$\frac{\lambda_1}{m}(1+\tan^2\alpha)-\frac{\lambda_1}{M}\tan^2\alpha=-g$$

最终可得
$$\lambda_1=\frac{mMg\cos^2\alpha}{m\sin^2\alpha-M}$$
$$\lambda_2=\lambda_1-Mg=\frac{mMg\,cos\,2\alpha+M^2g}{m\sin^2\alpha-M}$$

替换掉之前式子中的λ_1,λ_2可得
$$Q_{x_m}=\frac{mMg\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha-M}$$
$$Q_{y_m}=\frac{mMg\cos^2\alpha}{m\sin^2\alpha-M}$$
$$Q_{x_M}=\frac{mMg\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha-M}$$
$$Q_{y_M}=-Mg$$

基本功为
$$dW=Q_{x_m}dx_m+Q_{y_m}dy_m+Q_{x_M}dx_M+Q_{y_M}dy_M$$
注意到
$$dy_M=0,\qquad dy_m=(dx_m-dx_M)\tan\alpha$$

所以
$$dW=\left(Q_{x_m}+Q_{y_m}\tan\alpha\right)\dot{x}_m dt+\left(Q_{x_m}-Q_{y_m}\tan\alpha\right)\dot{x}_M dt$$

两物体都是从静止开始运动，一次积分可得

$$\dot{x}_m = -\frac{\lambda_1 \tan\alpha}{m} t, \qquad \dot{x}_M = \frac{\lambda_1 \tan\alpha}{M} t$$

所以

$$\begin{aligned} dW &= \left(-\left(Q_{x_m} + Q_{y_m} \tan\alpha\right)\frac{\lambda_1 \tan\alpha}{m} + \left(Q_{x_m} - Q_{y_m} \tan\alpha\right)\frac{\lambda_1 \tan\alpha}{M}\right) t dt \\ &= \frac{g^2 mM(2m\sin 2\alpha - M\sin 4\alpha)}{4(m\sin^2\alpha - M)^2} t dt \end{aligned}$$

所以

$$W(t) = \frac{g^2 mM(2m\sin 2\alpha - M\sin 4\alpha)}{4(m\sin^2\alpha - M)^2}\int_0^t t dt = \frac{g^2 mM(2m\sin 2\alpha - M\sin 4\alpha)}{4(m\sin^2\alpha - M)^2}\cdot\frac{t^2}{2}$$

为了求运动常数，我们将首先用独立坐标表示拉格朗日。我们选择它们作为系统质心的x坐标

$$x = \frac{m x_m + M x_M}{m + M}$$

令$x_r = x_m - x$，可得

$$x_m = x_r + x, \qquad x_M = x - \frac{m}{M} x_r$$

所以

$$y_m = \frac{M + m}{M} x_r \tan\alpha, \qquad \dot{y}_m = \frac{M + m}{M} \dot{x}_r \tan\alpha$$

$$m\dot{x}_m^2 + M\dot{x}_M^2 = m(\dot{x} + \dot{x}_r)^2 + M\left(\dot{x} - \frac{m}{M}\dot{x}_r\right)^2 = (m + M)\dot{x}^2 + \frac{mM + m^2}{M}\dot{x}_r^2$$

拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{mM + m^2}{2M}\dot{x}_r^2 + m\frac{(m + M)^2}{2M^2}\tan^2\alpha\,\dot{x}_r^2 - mg\frac{m + M}{M}x_r\tan\alpha$$

可以发现，L不显含坐标x，所以x的共轭动量是守恒的

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m + M)\dot{x}$$

由于质心的共轭动量是系统的总动量，所以上式表示系统在x方向的总动量是守恒的。

还可以发现，L不显含时间t，所以系统的能量函数（在此为机械能）是守恒的。

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r^2}\dot{x}_r^2 - L \\ &= \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + \frac{mM + m^2}{2M}\dot{x}_r^2 + m\frac{(m + M)^2}{2M^2}\tan^2\alpha\,\dot{x}_r^2 + mg\frac{m + M}{M}x_r\tan\alpha \end{aligned}$$

2.21

(a)

m粒子的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

坐标x,y与ξ,η之间的关系为

$$x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t\,,\qquad y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t$$
$$\xi=-x\sin\omega t+y\cos\omega t\,,\qquad \eta=x\cos\omega t-y\sin\omega t$$

因此

$$\dot{x}=\dot{\xi}\cos\omega t-\omega\xi\sin\omega t-\dot{\eta}\sin\omega t-\omega\eta\cos\omega t$$
$$\dot{y}=\dot{\xi}\sin\omega t+\omega\xi\cos\omega t+\dot{\eta}\cos\omega t-\omega\eta\sin\omega t$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=(\dot{\eta}-\xi\omega)^2+\left(\dot{\xi}+\eta\omega\right)^2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left((\dot{\eta}-\xi\omega)^2+\left(\dot{\xi}+\eta\omega\right)^2\right)$$

弹簧上的势能为

$$V_1=\frac{1}{2}k(\eta-r_0)^2,\qquad V_2=\frac{1}{2}k\xi^2$$

系统的总能量为

$$E=T+V=\frac{1}{2}m\left((\dot{\eta}-\xi\omega)^2+\left(\dot{\xi}+\eta\omega\right)^2\right)+\frac{1}{2}k(\eta-r_0)^2+\frac{1}{2}k\xi^2$$

系统的拉格朗日量为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left((\dot{\eta}-\xi\omega)^2+\left(\dot{\xi}+\eta\omega\right)^2\right)-\frac{1}{2}k(\eta-r_0)^2-\frac{1}{2}k\xi^2$$

把坐标ξ,η用x,y表示，可得

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}k(x\cos\omega t-y\sin\omega t-r_0)^2+\frac{1}{2}k(y\cos\omega t-x\sin\omega t)^2$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k(x\cos\omega t-y\sin\omega t-r_0)^2-\frac{1}{2}k(y\cos\omega t-x\sin\omega t)^2$$

由于拉格朗日量显含时间，动力学项是广义速度的二次齐次函数，所以能量不守恒。

(b)

实验室系中的雅克比积分为

$$h=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\dot{y}-L$$

由于拉格朗日中的动力学项是广义速度$\dot{x},\dot{y}$的二次齐次函数，所以$h = E$
由于E不是守恒的，所以h也不是守恒的。

(c)

在旋转坐标系中，雅克比积分为

$$h' = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\dot{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\dot{\eta} - L$$

代入L可得

$$h' = \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2 + \eta\omega\right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 - \xi\omega)^2 + m\omega\left((\dot{\eta} - \xi\omega)\xi - \left(\dot{\xi} + \eta\omega\right)\eta\right) + \frac{1}{2}k(\eta - r_0)^2 + \frac{1}{2}k\xi^2$$

由公式(2.54)

$$\frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

因为

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

所以

$$\frac{dh'}{dt} = 0$$

即h'是守恒的。
比较两个雅克比积分可得

$$h' = h + m\omega\left((\dot{\eta} - \xi\omega)\xi - \left(\dot{\xi} + \eta\omega\right)\eta\right)$$