高等数学（下）

主要内容

微分方程

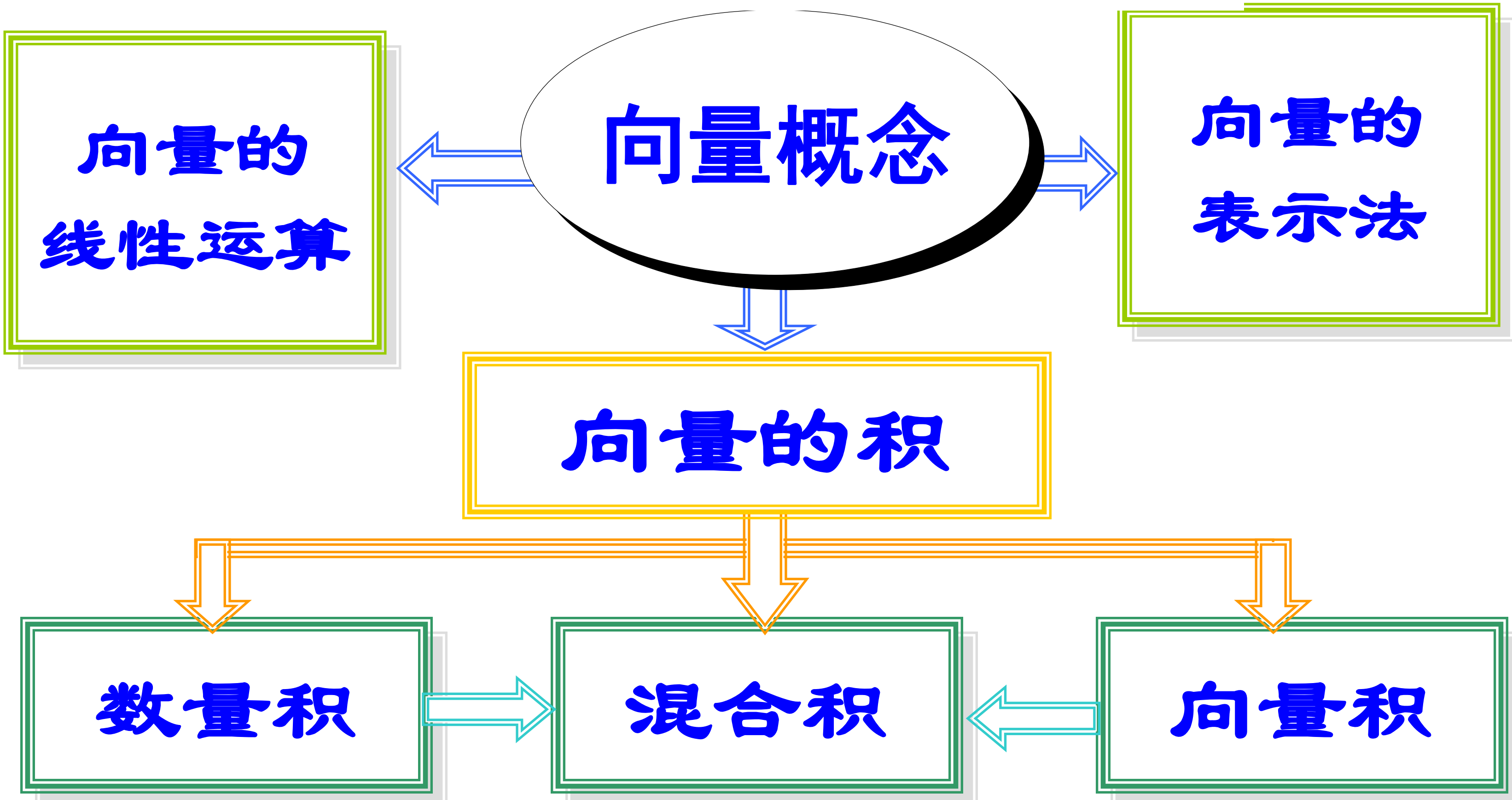
数项与函数项级数

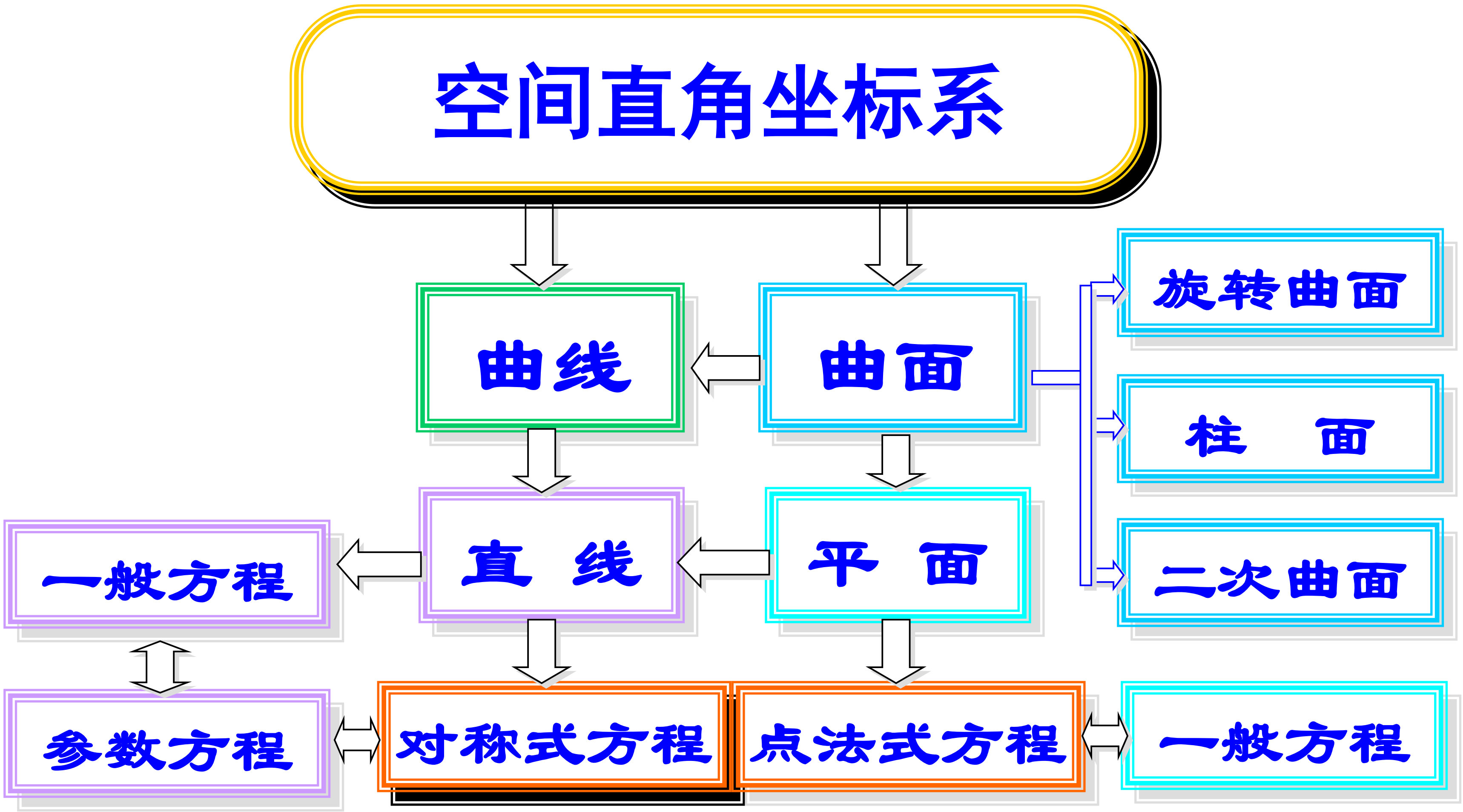
多元函数积分学

多元函数微分学

空间解析几何与向量代数

一、向量代数与空间解析几何





空间直角坐标系
曲线
曲面
旋转曲面
柱　面
二次曲面
直　线
平　面
一般方程
参数方程
对称式方程
点法式方程
一般方程

二、多元函数微分学主要内容

平面点集和区域

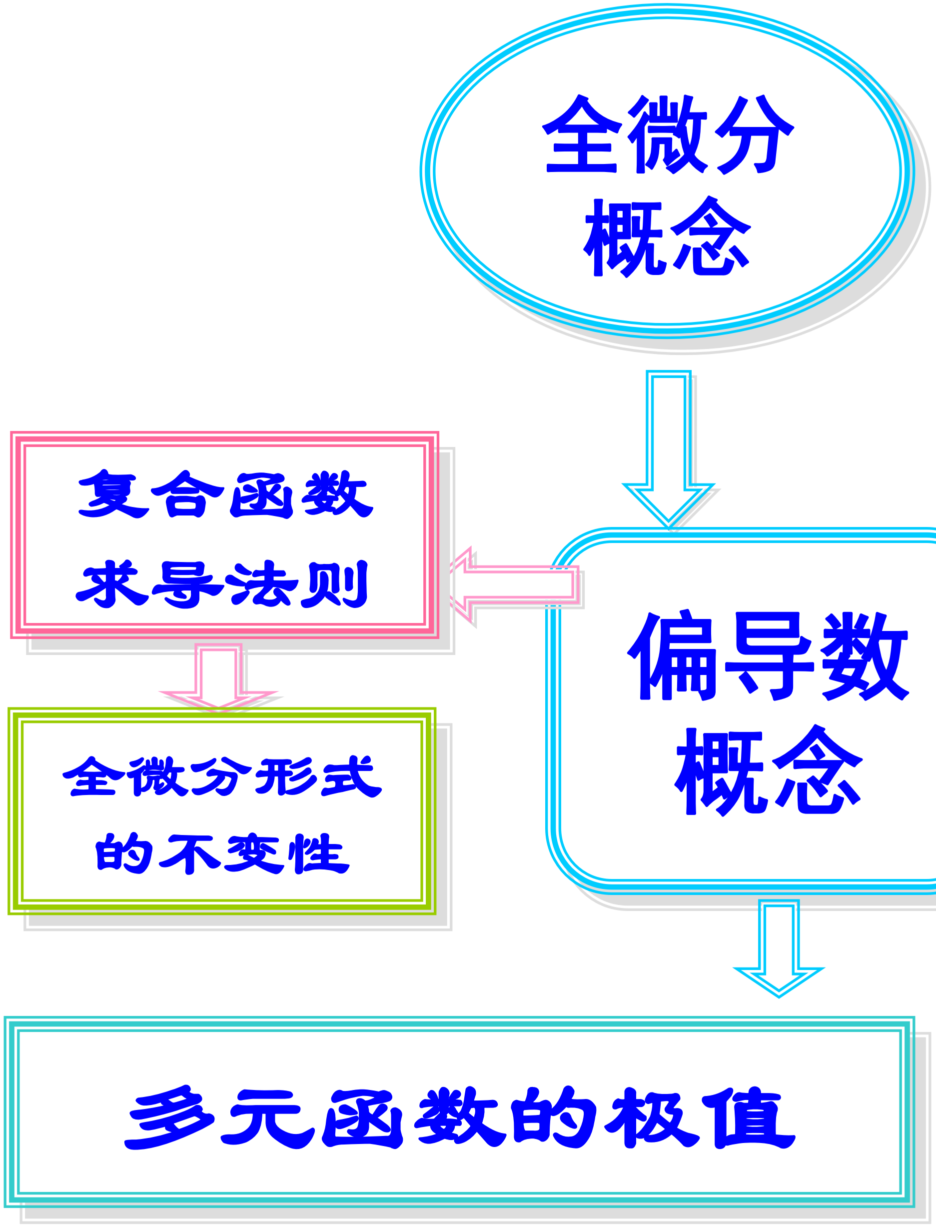
多元函数概念

多元函数的极限

极 限 运 算

多元连续函数的性质

多元函数连续的概念

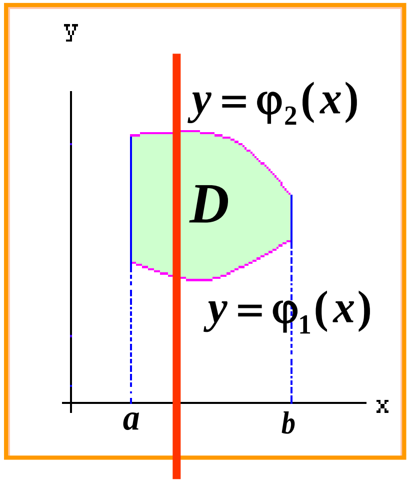


全微分概念
偏导数概念
复合函数求导法则
全微分形式的不变性
高阶偏导数
隐函数求导法则
多元函数的极值

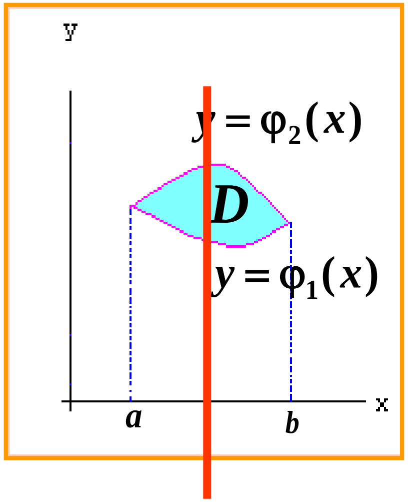
三、二元函数积分学主要内容

1、利用直角坐标系计算二重积分

如果积分区域为： $a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$

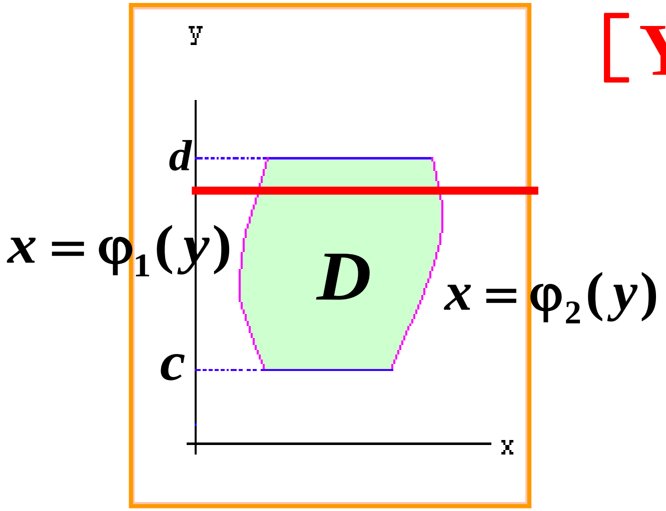


［X—型］

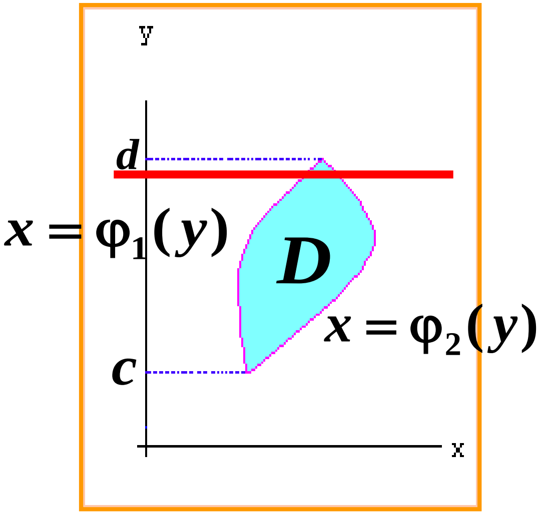


$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

如果积分区域为： $c \le y \le d, \quad \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y).$

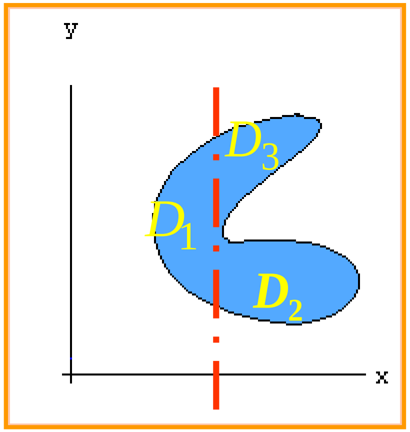


［Y—型］



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

若区域如图，则必须分划.



在分划后的三个区域上分别使用积分公式

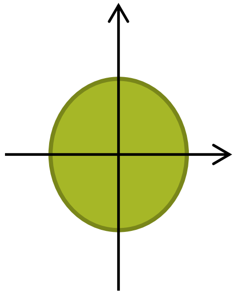
$$\iint_{D} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} .$$

注 二重积分化累次积分的步骤

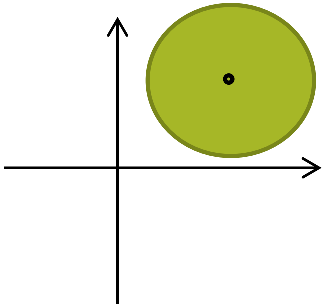
①画出区域 ②选序 ③定限

2、利用极坐标系计算二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}{=} \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\boxed{rdrd\theta.}$$



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}}{=} \iint\limits_D f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\boxed{rdrd\theta.}$$



$\theta-$型区域:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \mathrm{r}dr.$$

$r-$型区域:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rd\theta.$$

四、数项与函数项级数

$$\sum u_n \qquad \sum u_n(x)$$

- 敛散性
- 敛散性判别法
- 应用（求和、函数的幂级数展开）

主要内容

1、级数 $\sum u_n \quad (\sum u_n(x))$

级数收敛(发散) $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n \quad (\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x))$ 存在(不存在).

级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \quad (\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0)$

收敛级数的基本性质

数项级数敛散性判别法 $\sum u_n$

<table>
<tr><th>正 项 级 数</th><th>一般项级数</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3. 按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.比较法
5.比值法
6.根值法
7.积分判别法</td><td>4.绝对收敛
5.交错级数
(莱布尼兹判别法)</td></tr>
</table>

2、正项级数及其敛散性判别法

(1) 比较判别法

(2) 比较判别法的极限形式

设$u_n \to 0, v_n \to 0$ 若u_n与v_n 是同阶无穷小

则$\sum u_n$与$\sum v_n$同敛散

特别 若$u_n \sim v_n$ （等价无穷小）

则$\sum u_n$与$\sum v_n$同敛散

(3) 比值判别法

(4) 根值判别法

(5) 积分判别法

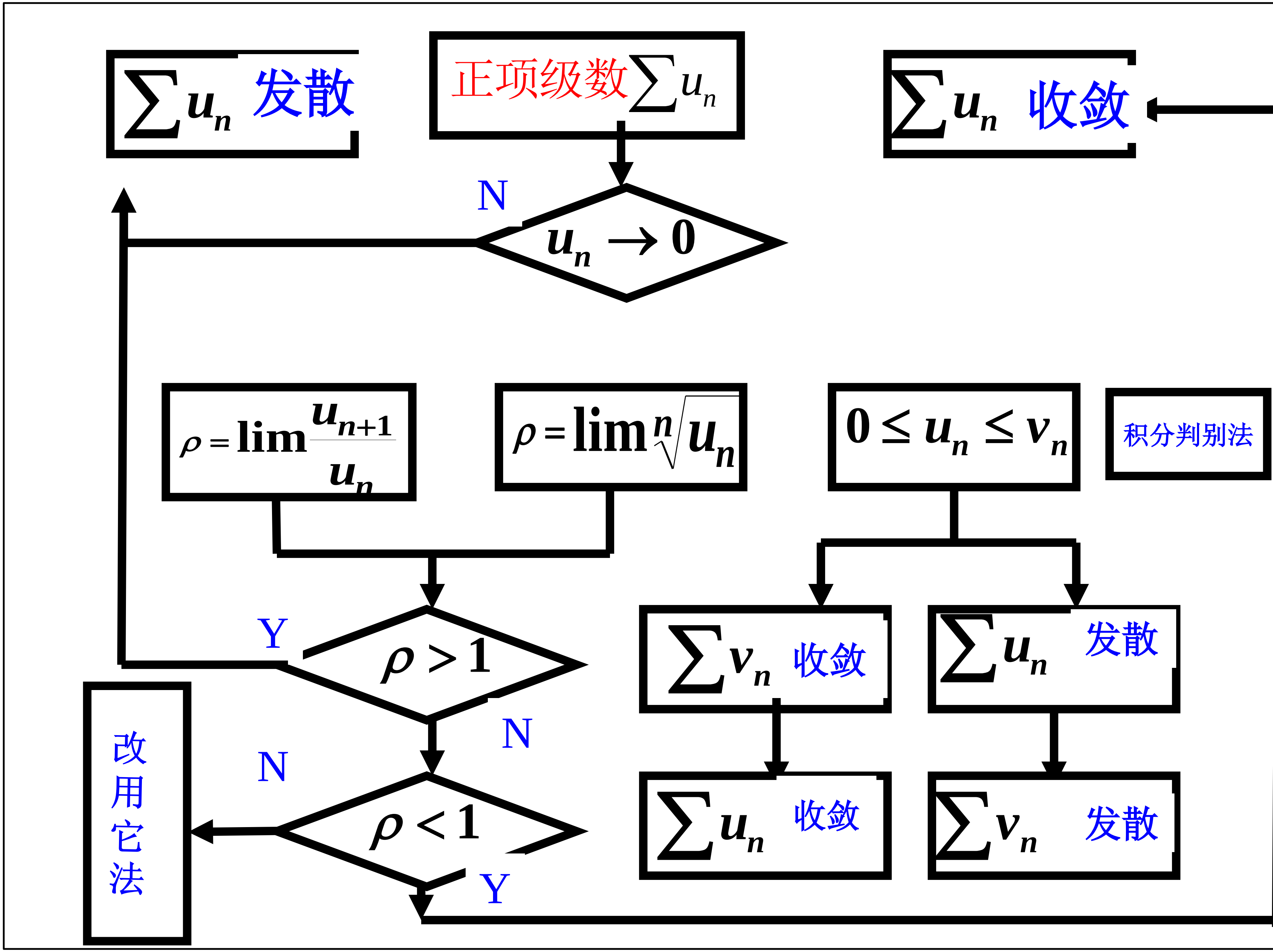
3、交错级数

Leibniz判别法

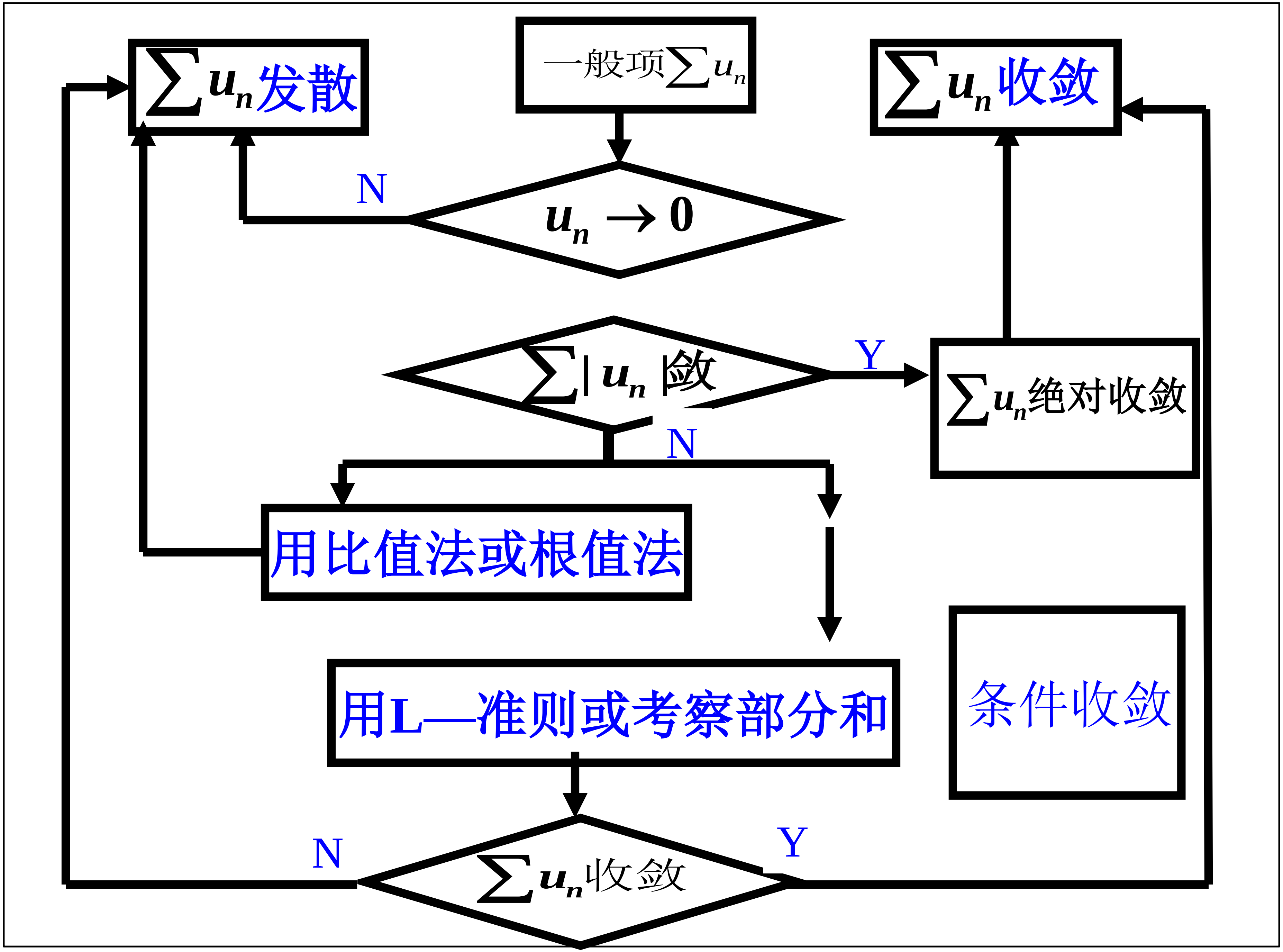
4、任意项级数及其敛散性判别法法

绝对收敛，条件收敛

附：正项级数与任意项级数判别程序

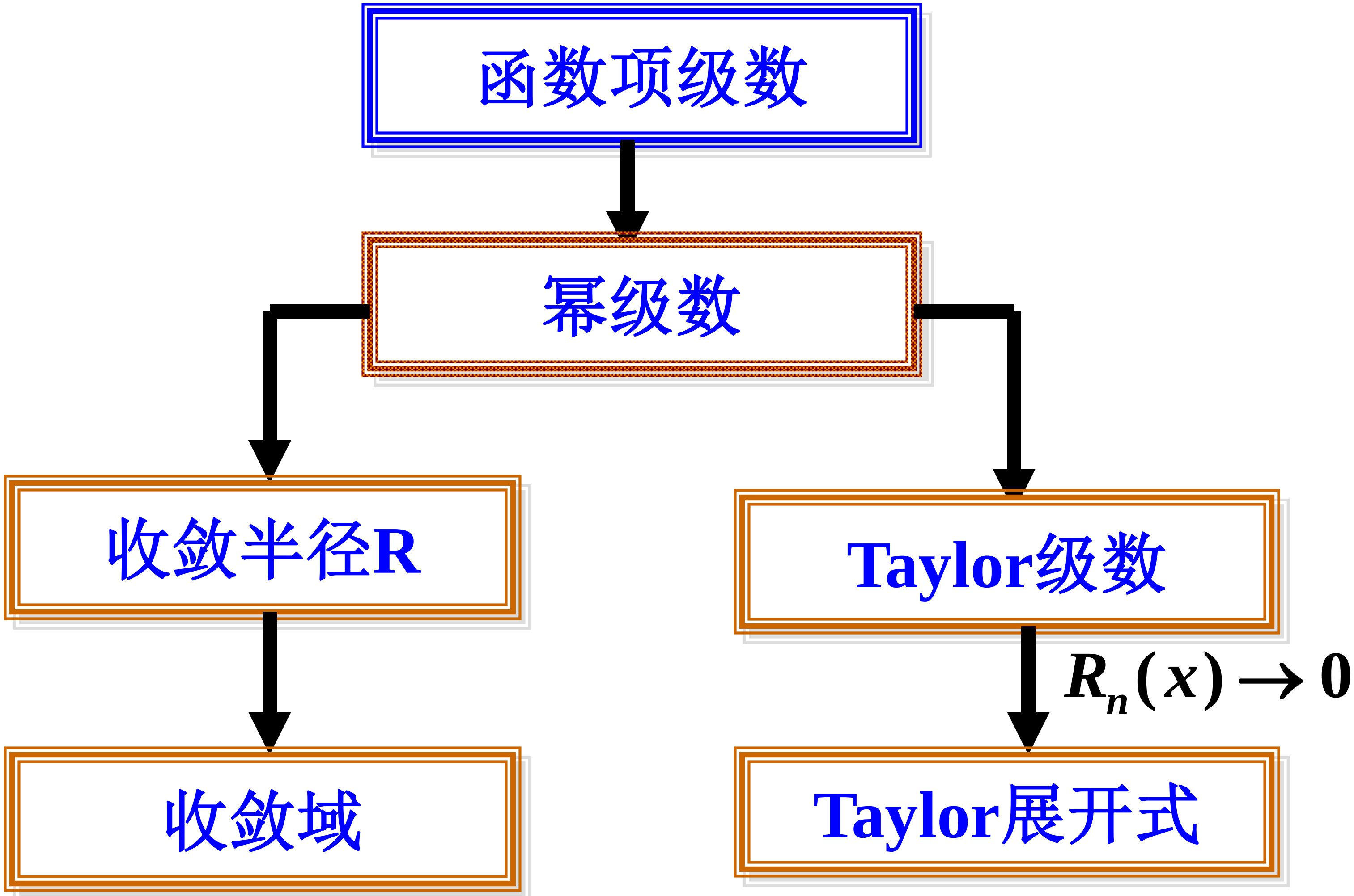


正项级数$\sum u_n$
$u_n \to 0$
N
$\sum u_n$ 发散
$\rho = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$
$\rho = \lim \sqrt[n]{u_n}$
$\rho > 1$
Y
N
$\rho < 1$
N
Y
改用它法
$0 \le u_n \le v_n$
积分判别法
$\sum v_n$ 收敛
$\sum u_n$ 收敛
$\sum u_n$ 发散
$\sum v_n$ 发散
$\sum u_n$ 收敛



一般项$\sum u_n$
$\sum u_n$发散
$\sum u_n$收敛
$u_n \to 0$
N
$\sum |u_n|$敛
Y
$\sum u_n$绝对收敛
N
用比值法或根值法
用L—准则或考察部分和
条件收敛
N
$\sum u_n$收敛
Y

5、函数项级数主要内容



6、幂级数展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

a. 直接法法

步骤: (1) 求$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

则级数在收敛域D内收 敛于 $f(x)$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in D$$

b. 间接展开法法

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

常见函数展开式

应用

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\mathbf{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\mathbf{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)L(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

等式成立范围视α取值而定.

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,\ x\in[-1,1]$$

1．求函数的幂级数展开式，必须相应地写出展开式成立的范围，

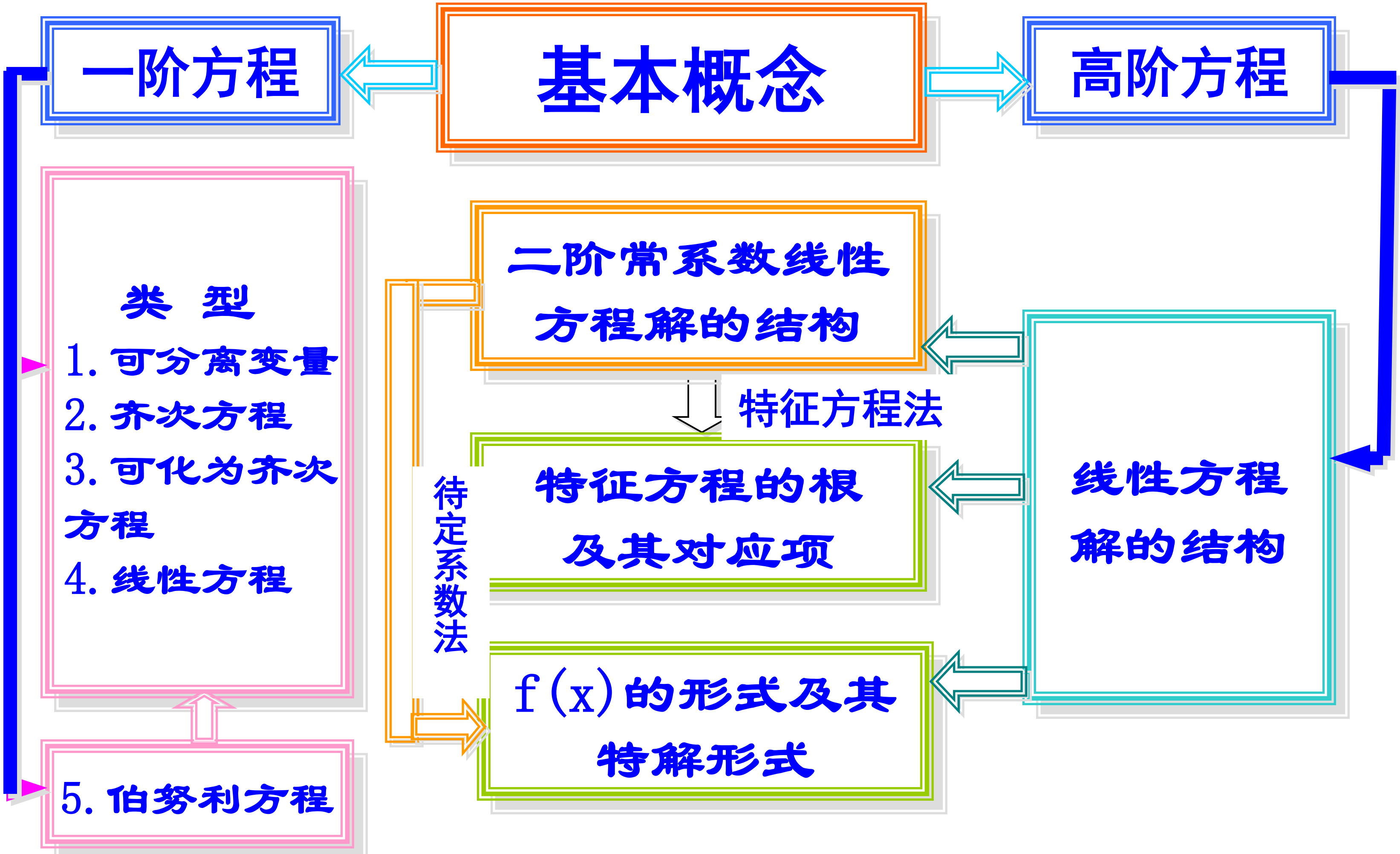
2．对于不同类型的函数注意采用不同的展开方法和步骤

有理分式 —化为部分分式，利用几何级数展开

反三角函数或对数函数 —先展开其导数，再逐

项积分

五、微分方程主要内容



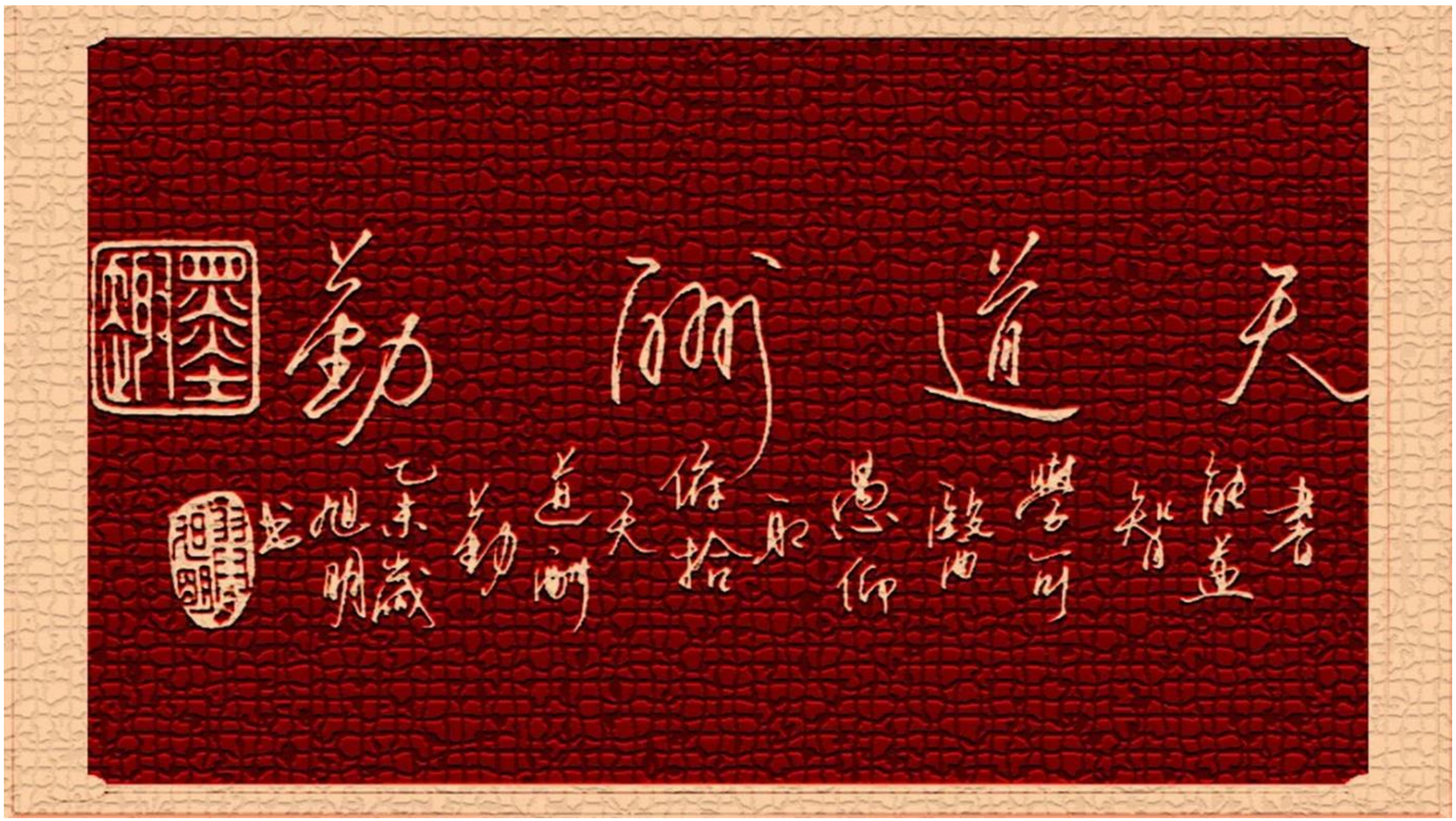
基本概念
一阶方程
高阶方程
类 型
1. 可分离变量
2. 齐次方程
3. 可化为齐次方程
4. 线性方程
5. 伯努利方程
二阶常系数线性方程解的结构
特征方程法
特征方程的根及其对应项
待定系数法
f(x)的形式及其特解形式
线性方程解的结构

复习结语

- 考试内容
- 考试复习
- 答疑安排（1-2次）

學海無邊

書能益智，學可醫愚
仰取俯拾，天道酬勤



祝同学们在期末考试中取得优异成绩！