武汉大学2017-2018学年第二学期末
《高等数学C2》试卷(A卷)答案

一. 已知矢量$\mathbf{a}=(2,-3,1),\mathbf{b}=(1,-1,3),\mathbf{c}=(0,-2,1)$, 计算: (1) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ (2) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ (6分)

解. (1) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}=8\mathbf{c}=(0,-16,8)$(3分)

(2) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(-8,-5,1)\cdot(0,-2,1)=11$.(3分)

二. 求A,B, 使平面$\pi: Ax+By+6z-7=0$与直线$l: \frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$垂直.(7分)

解. π的法向量为:$\mathbf{n}=(A,B,6)$. l的方向向量为: $\mathbf{s}=(2,-4,3)$.(3分) 故向量$\mathbf{n}$与向量$\mathbf{s}$平行, 有$\frac{A}{2}=\frac{B}{-4}=\frac{6}{3}$. 于是, $A=4,B=-8$.(4分)

三. 求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$. (7分)

解. 由$\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\frac{x^2}{|x|+|y|}+\frac{y^2}{|x|+|y|}\le\frac{x^2}{|x|}+\frac{y^2}{|y|}=|x|+|y|$(4分)及$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$.(3分)

四. 求函数$z=x^2+xy^2+\sin(xy)$的全微分. (7分)

解. 由$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^2+y\cos(xy),\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+x\cos(xy)$ (5分),

$$\mathrm{d}z=[2x+y^2+y\cos(xy)]\mathrm{d}x+[2xy+x\cos(xy)]\mathrm{d}y \quad (2分).$$

五. 从斜边之长为l的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.(7分)

解. 设直角三角形的两直角边之长为分别为x,y, 则周长$S=x+y+l$ $(0<x<l,0<y<l)$.(2分)

构造拉格朗日函数: $L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$.

令$L_x=1+2\lambda x=0,L_y=1+2\lambda y=0$. 解得$x=y=-\frac{1}{2\lambda}$. 代

入$x^2+^2=l^2$, 得$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2l}$. 于是$x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}}\right)$是惟一可能的极值点.

因此在斜边之长为l的一切三角形中, 周长最大的是等腰三角形(5分).

六. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$; (2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.(8分)

解. (1) $I=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$.(4分)

(2) $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.(4分)

七. 计算二重积分$\iint\limits_D x\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是项点分别为$(0,0)$, $(\pi,0)$ 和(π,π)的三角形闭区域.(8分)

解.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^\pi x\mathrm{d}x\int_0^x \sin(x+y)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^\pi x[-\cos(x+y)]_0^x\mathrm{d}x=\int_0^\pi x(\cos x-\cos 2x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi x\mathrm{d}(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x) \qquad (4分)\\ &= \left[x(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x)\mathrm{d}x\\ &= \cos x|_0^\pi-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^\pi=-2. \quad (4分)\end{aligned}$$

八. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$绝对收敛, 并求其和.(6分)

证. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{e}<1$, 级数绝对收敛(4分). 又$S_n=-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{e^n}=-\frac{1}{e}\frac{1-e^{-(n+1)}}{1+e^{-1}}$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{-e^{-1}}{1+e^{-1}}=\frac{-1}{1+e}$(2分).

九. 判断交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$是否收敛, 是条件收敛, 还是绝对收敛?(6分)

解. 由$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$单调下降及$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$, 交错级数收敛(3分). 又由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$及调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 交错级数条件收敛(3分).

十. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域及和函数(8分).

解. 收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1$. 当$x=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}$发散. 故幂级数的收敛域为$(-1,1)$(3分).

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$, 则$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$. 于是

$$s(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,-1<x<1.\quad(5分)$$

十一. 将函数$(1+x)e^x$展开成x的幂级数并指出展开式成立的区间(8分).

解. 由$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $-\infty<x<\infty$,(2分),

$$(1+x)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)x^n,$$

$$-\infty<x<\infty.\quad(6分)$$

十二. 求微分方程$xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$满足初值问题$y(1)=0$的特解.(7分)

解. 令$u=\frac{y}{x}$, 则原方程化为: $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$(3分). 积分得: $\arcsin u=\ln|x|+C$. 将$u=\frac{y}{x}$代入得方程的通解: $\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C$. 又$y(1)=0$. 代入通解得: $C=0$. 故方程的特解为: $y=x\sin\ln|x|$(4分).

十三. 求解微分方程$y'+y\cos x=\sin 2x$的通解.(7分)

解.

$$\begin{aligned}
y=&e^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\left(\int\sin 2xe^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}+C\right)x\quad(3分)\\
=&e^{-\sin x}\left(\int\sin 2xe^{\sin x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{-\sin x}\left(2\int\sin xe^{\sin x}\mathrm{d}\sin x+C\right)\\
=&e^{-\sin x}\left(2(\sin x-1)e^{\sin x}+c\right)=2\sin x-2+Ce^{-\sin x}\quad(4分)
\end{aligned}$$

十四. 求微分方程$y''+y'=2x$的通解.(8分)

解. 对应的齐次方程的特征方程为: $\lambda^2+\lambda=0$. 特征根为: $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$. 对应齐次方程的通解为:

$$Y=C_1+C_2e^{-x}. \qquad (4分)$$

设非齐次方程的特解为: $y^*=x(Ax+B)$. 代入方程得: $2Ax+(2A+B)=2x$. 解方程 $\begin{cases}2A=2,\\ 2A+B=0\end{cases}$ 得, $A=1,B=-2$. 由此, 微分方程的解为:

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-x}+x(x-2). \quad (4分)$$