武汉大学2012-2013学年第二学期末

《高等数学C2》试卷(A卷)

一. 计算下列各题(每题6分, 共30分)

(1) $\int_{-1}^{1}(\frac{x^3}{1+x^2}+\frac{1}{1+\sqrt{2+x}})\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x|\mathrm{d}x$; (3) $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\mathrm{d}y$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$.

解. (1)

$$\int_{-1}^{1}(\frac{x^3}{1+x^2}+\frac{1}{1+\sqrt{2+x}})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}\mathrm{d}x \quad (2分)$$

$$=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=2(\sqrt{3}-1)+2\ln\frac{2}{1+\sqrt{3}}. \quad (4分)$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x)\mathrm{d}x \quad (2分)$$

$$=\sin x|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\sin x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1. \quad (4分)$$

(3)

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{\infty}\ln x\mathrm{d}\frac{1}{x} \quad (2分)$$

$$=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1. \quad (4分)$$

(4)

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\mathrm{d}y=\int_0^4\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}\mathrm{d}x \quad (3分)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}x^2\Big|_0^{\sqrt{4-y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^4e^{2y}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(e^8-1). \quad (3分)$$

(5) 由

$$\frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}. \qquad (3分)$$

$$S_n = 3(1-\frac{1}{2n+1}).\ S = \lim_{n\to\infty} S_n = 3. \qquad (3分)$$

二. 解答下列各题(每题7分, 共42分)

(1) 求函数$z=(x^2+y^3)e^{-x}$的偏导数和全微分;

(2) 设$y=y(x)$是由方程$\int_0^y te^{t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t = 0$确定的隐函数, 求$y'$;

(3) 将$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为$D$上的二次积分(两种次序), 其中$D$是由$x$轴, $y=\ln x$及$x=e$ 围成的区域;

(4) 讨论下列级数 a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{n^2(n+2)}$;, b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的敛散性;

(5) 求解微分方程$(x^2+y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$;

(6) 设函数$y(x)$满足方程$\int_0^x (t-x)y(t)\mathrm{d}t = y(x)+e^x$, 求$y(x)$.

解. (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x}\left(-2x+x^2+y^3\right),\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{-x}y^2 \qquad (4分)$$

$$\mathrm{d}z = -e^{-x}\left(-2x+x^2+y^3\right)\mathrm{d}x + 3e^{-x}y^2\mathrm{d}y. \qquad (3分)$$

(2) I. 记$F(x,y)=\int_0^y te^{t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\cos^2 x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = ye^{y^2}. \qquad (4分)$$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\cos^2 x}{ye^{y^2}}. \qquad (3分)$$

II. 方程两边同时对x求导得, $y'ye^{y^2}-\cos^2 x = 0$(4分). 由此得, $y' = \frac{\cos^2 x}{ye^{y^2}}$(3分).

(3)

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y \quad (3分)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{e^y}^e f(x,y)\mathrm{d}x. \quad (4分)$$

(4) 由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10n+1}{n^2(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10n+1}{n+2} = 10. \quad (2分)$$

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 原级数收敛(2分)。

由$\ln(1+\frac{1}{n})$单调下降，且$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$(2分), 级数收敛(1分)。

(5) I. 原方程可化为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\frac{y}{x}. \quad (2分)$$

令$u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1-u^2}{2u}. \quad (2分)$$

解得$\frac{1}{1-u^2} = Cx$. 故所求解为$x = C(x^2-y^2)$.(3分)

II. 原方程可化为:

$$x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y^2 = 0. \quad (2分)$$

令$u = y^2$, 则有

$$\mathrm{d}(x - \frac{u}{x}) = 0. \quad (3分)$$

故方程的通解为: $x^2 - y^2 = Cx$(2分).

(6) 原方程为

$$\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t = y(x) + e^x. \quad (1分)$$

上式对x求导, 得

$$-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t = y'(x) + e^x. \quad (1分)$$

上式两端再对x求导, 得

$$-y(x) = y''(x) + e^x. \quad (1分)$$

故$y(x)$满足方程$y'' + y = -e^x$(1分), 解得

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}e^x. \quad (3分)$$

三. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(\frac{x}{3})^{n-1}$ 的收敛域与和函数。(10分)

解: 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}x^{n-1}$的收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1} = 3. \quad (2分)$$

又幂级数在$x=-3$与$x=3$处发散(2分), 故收敛域为$(3,3)$(1分).

令$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}x^{n-1}$, 则

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x \quad (1分)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n} = -\frac{x}{3+x}. \quad (2分)$$

于是,

$$S(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = -\frac{3}{(3+x)^2}. \quad (2分)$$

四. 设$f(x)$在$[0.1]$上连续. 在$(0,1)$上可导且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0)$. 证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使$f'(\xi)=0$.(8分)

证. 由积分中值定理, 存在一点$\eta \in [\frac{2}{3}, 1]$使

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(\eta). \quad (3分)$$

故有

$$f(\eta) = 3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0). \quad (3分)$$

由罗尔中值定理, 存在一点$\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$, 使$f'(\xi) = 0$(2分).

五. 已知某种生物的总数满足$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay - by^2$, 其中$a, b$为正常数。设$t = 0$时, $y(0) = y_0 < \frac{a}{b}$, 求t时刻该生物的总数$y(t)$, 并计算$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. (10分)

解. 分离变量得: $\frac{\mathrm{d}y}{y(a-by)} = \mathrm{d}t$(1分). 积分得:

$$\int (\frac{1}{y} + \frac{b}{a-by})\mathrm{d}y = a\int \mathrm{d}t. \quad \ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = at + C_1. \quad (3分)$$

即有,

$$\frac{y}{a-by} = Ce^{at}, y(t) = \frac{a}{b + C^{-1}e^{-at}}. \quad (2分)$$

由初值条件，$C = \frac{y_0}{a-by_0}$.(1分) 因此, t时刻该生物的总数

$$y(t) = \frac{a}{b + (\frac{a}{y_0} - b)e^{-at}} \quad (1分)$$

且$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$. (2分)