武汉大学 2019—2020 学年 第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

参考答案和评分标准

一．（本题10分）解：1、 波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ \ (0<x<\pi,t>0)$ （2分）

边界条件：$u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=\pi}=0$ （1 分）

初始条件：$u\big|_{t=0}=A\sin 2x$，$u_t\big|_{t=0}=0$ （2 分）

2、 热传导方程 $\nabla^2 u(x,y)=0\ \ (0<x<a,0<y<b)$ （2分）

边界条件：$\begin{array}{l} u(x,y)\big|_{x=0}=u_0,u(x,y)\big|_{x=a}=u_0, \\ u(x,y)\big|_{y=0}=u_0,u(x,y)\big|_{y=b}=U \end{array}$ （3 分）

二．（本题 10 分）解：1、（10 分）令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

辅助函数的选取为：$w(x,t)=\dfrac{h(t)-g(t)}{l}x+g(t)=\dfrac{1-t}{l}x+t$ （4 分）

定解问题变为$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=A-(1-\dfrac{x}{l}) \\ v(0,t)=v(l,t)=0 \\ v(x,0)=-\dfrac{1}{l}x \end{cases}$ （6 分）

三．（本题10分） 解：1、$u(x,t)=\dfrac{1}{2}\big[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$ （3分）

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big]+\frac{1}{2a}\Big[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\Big]$$

$\dfrac{1}{2}\varphi(x+at)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=0$ ，$a\varphi'(x)+\psi(x)=0$ （2分）

2、$u(x,t)=\dfrac{1}{2}\big[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$=\dfrac{1}{2}\big[\sin(x+2t)+\sin(x-2t)\big]+\dfrac{1}{2\cdot 2}\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t}2\xi d\xi$ （3分）

$=\sin x\cos 2t+xt$ （2 分）

四、（**本题 15 分**）**1**、（**5 分**）证明：由$U=e^{-Dk^2t}v(x,y,z)$，得到

$$U_t(x,y,z,t)=-Dk^2\ e^{-k^2t}u(x,y,z) \qquad （2 分）$$

$$\nabla^2U(x,y,z,t)=e^{-k^2t}\nabla^2u(x,y,z) \qquad （2 分）$$

代人热传导方程$U_t(x,y,z,t)-D\nabla^2U(x,y,z,t)=0$得到

$$\nabla^2u(x,y,z)+k^2u(x,y,z)=0 \qquad （1分）$$

2、（**10 分**）**1**）定解问题 $\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0 \quad (0<x<a,0<y<b) \\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=a}=0 \\ u\big|_{y=0}=0,u\big|_{y=b}=0 \\ u\big|_{t=0}=f(x,y) \qquad u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ （3 分）

2）由$\nabla^2v(x,y)+\lambda v(x,y)=0$，若令$v(x,y)=X(x)Y(y)$，得到

$$\begin{cases} X''(x)+\mu X(x)=0 \\ Y''(y)+(\lambda-\mu)Y(y)=0 \end{cases}$$

定解问题 $\begin{cases} X''(x)+\mu X(x)=0 \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$ （1分）

本征值 $\mu=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$，本征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x$，（$n=1$，2, 3, $\cdots$） （1 分）

定解问题 $\begin{cases} Y''(y)+(\lambda-\mu)Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(b)=0 \end{cases}$ （1 分）

本征值 $\lambda-\mu=\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$，本征函数 $Y_m(y)=\sin\frac{m\pi}{b}x$，（$m=1$，2, 3, $\cdots$） （1 分）

二维波动问题的本征值 $\lambda=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$，（$n=1$，2, 3, $\cdots$,$m=1,2,3,\cdots$） （1分）

3） 关于$T(t)$满足的方程 $T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$ （1分）

其解为 $T_{nm}(t)=A_{nm}\cos a\sqrt{\lambda_{nm}}t+B_{nm}\sin a\sqrt{\lambda_{nm}}t$ （1分）

五、（本题15分）解：1）分离变量　$u(x,t)=X(x)T(t)$　代入泛定方程，得到

$$\begin{cases} T''(t)+\mu a^2 T(t)=0 \\ X''(x)+\mu X(x)=0 \end{cases}$$

2) 本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\mu X(x)=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$

本征值　$\mu=(n)^2$，　$(n=0,1,2,3,\cdots)$

本征函数　$X_n(x)=\cos nx$，（ $n=1,0,2,3,\cdots)$　（4 分）

3）关于 $T(t)$ 满足的方程的解为　$T_0(t)=A_0+B_0 t$

$$T_n(t)=A_n\cos nat+B_n\sin nat \qquad (n\neq 0)$$（3 分）

4）定解问题的通解；　$u(x,t)=A_0+B_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nat+B_n\sin nat]\cos nx$　（3 分）

5）由初始条件　$u(x,0)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx=2\cos 2x+4\cos 4x$

$$u_t(x,0)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\cos nx=3\cos 3x$$

得到　$A_2=2, A_4=4 \qquad B_3=1$

$$A_n=0 \ \ (n\neq 2,4), \qquad B_n=0 \ \ (n\neq 3)$$（3 分）

定解问题的解为 $u(x,t)=2\cos 2at\cos 2x+4\cos 4at\cos 4x+\sin 3at\cos 3x$　（2 分）

六. **（本题 20 分）**1、 **（5 分）**解：　$xP_l(x)=\dfrac{(l+1)P_{l+1}(x)}{2l+1}+\dfrac{lP_{l-1}(x)}{2l+1}$

或者　$xP_{l-1}(x)=\dfrac{(l-1+1)P_l(x)}{2(l-1)+1}+\dfrac{(l-1)P_{l-2}(x)}{2(l-1)+1}=\dfrac{lP_l(x)}{2l-1}+\dfrac{(l-1)P_{l-2}(x)}{2l-1}$　（2分）

$$I=\int_{-1}^{1}xP_{l-1}(x)P_l(x)dx=\frac{2l}{(2l+1)(2l-1)}$$（3分）

2、 （15 分）解：1）球内定解问题　$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta)=0 & r<a \\ u(r,\theta)\big|_{r=a}=A(\cos^2\theta+1) \end{cases}$　（2 分）

球内定解问题的通解为　$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$　（2 分）

由边界条件 $u\big|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) = A(\cos^2\theta+1)$

$$\cos^2\theta+1 = \frac{2}{3}[\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)]+\frac{4}{3} = \frac{2}{3}P_2(x)+\frac{4}{3}P_0(x)$$ （2 分）

利用系数比较法，得到：$\begin{cases} A_0 = \dfrac{4}{3}A \\ A_2 = \dfrac{2}{3}Aa^{-2} \end{cases}$

球内电位分布 $u(r,\theta) = \frac{4}{3}AP_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}(\frac{r}{a})^2P_2(\cos\theta)$ （2 分）

2）球外定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta)=0 \qquad r>a \\ u(r,\theta)\big|_{r=a} = A(\cos^2\theta+1) \end{cases}$

球外定解问题的通解为 $u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$ （2 分）

由边界条件 $u\big|_{r=1} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = A(\cos^2\theta+1)$

$$\cos^2\theta+1 = \frac{2}{3}P_2(x)+\frac{4}{3}P_0(x)$$

利用系数比较法，得到：$\begin{cases} A_0 = \dfrac{4}{3}Aa \\ A_2 = \dfrac{2}{3}Aa^3 \end{cases}$

球外电位分布 $u(r,\theta) = \frac{4}{3}A(\frac{a}{r})P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}A(\frac{a}{r})^3P_2(\cos\theta)$ （2分）

3） 极大值位于球面上，$\cos\theta = \pm1, \theta = 0, \pi \ \ u_{\max} = 2A$ （1 分）

对 $(2a,\pi)$ 点，电势的值为 $u(2a,\pi) = \frac{4}{3}(\frac{1}{2})A+\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^3A = \frac{3}{4}A$

球心的电势 $u(0,0) = \frac{4}{3}A$

$$u(0,0)-u(2a,\pi) = \frac{7}{12}A$$ （2 分）

七、（本题 20 分）1、（5 分）解：$\int x^2J_1(x)dx = x^2J_2(x)+c$ （2 分）

利用 $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$ （2 分）

$$\int x^2J_1(x)dx = 2xJ_1(x)-x^2J_0(x)+c$$ （1 分）

2、**（15 分）** 1）定解问题为
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(\rho,t)}{\partial t}-D\nabla^2 u(\rho,t)=0 \qquad \rho<1\\ u\big|_{\rho=1}=0\\ u\big|_{t=0}=(1-\rho^2)T_0\end{cases}$$
（3 分）

2）分离变量，令 $u(\rho,t)=T(t)R(\rho)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{dT(t)}{dt}+Dk^2T(t)=0\\ \rho^2\dfrac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho}+k^2\rho^2R(\rho)=0\end{cases}$$

$R(\rho)$满足的方程的本征值问题（第一类齐次边界条件）

$$\begin{cases}\rho^2\dfrac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho}+k^2\rho^2R(\rho)=0\\ R(\rho)\big|_{\rho\le 1}=\text{有限}\\ R(\rho)\big|_{\rho=1}=0\end{cases}$$
（1 分）

本征值： $k=k_m^0=x_m^0$ （x_m^0是 0 阶 Bessel 函数的第 m 个零点） （1 分）

本征函数：$\{J_0(k_m^0\rho)\}$ $(m=1,2,\cdots)$ （1 分）

3）圆柱体内$T(t)$满足的方程 $\dfrac{dT(t)}{dt}+D(k_m^0)^2T(t)=0$

其解为 $T_m(t)=A_m\exp(-D(k_m^0)^2t)$ （3 分）

4）定解问题的通解为 $u(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m e^{-D(k_m^0)^2t}J_0(k_m^0\rho)$ （2 分）

5）系数由初始条件确定：$u(\rho,0)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(k_m^0\rho)=f(\rho)=(1-\rho^2)T_0$ （1 分）

$$A_m=\frac{1}{\frac{1}{2}J_1^2(x_m^0)}\int_0^1\rho J_0(k_m^0\rho)(1-\rho^2)d\rho=\frac{8}{[x_m^0]^3J_1(x_m^0)}$$
（2 分）

则问题的解为 $u(\rho,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{8}{[x_m^0]^3J_1(x_m^0)}e^{-D(k_m^0)^2t}J_0(k_m^0\rho)$ （1 分）

八、**（本题 20 分）1、（10 分）** 设 $\mathscr{L}\,[u(x,t)]=\tilde{u}(x,p)$，对方程两边取 LT，得到

$$p\tilde{u}(x,p)-\phi(x)+a\frac{d\tilde{u}(x,p)}{dx}=\tilde{f}(x,p)$$
（1 分）

两边取 FT，得到 $p\tilde{u}(\omega,p)-\tilde{\phi}(\omega)+aj\omega\tilde{u}(\omega,p)=\tilde{f}(\omega,p)$ （1 分）

整理得到 $$\tilde{u}(\omega,p)=\frac{f(\omega,p)}{p+ja\omega}+\frac{\tilde{\phi}(\omega)}{p+ja\omega}$$ （2 分）

$$\mathcal{F}\,\mathcal{L}^{-1}[\frac{\tilde{\phi}(\omega)}{p+ja\omega}]=\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)e^{-ja\omega t}]=\phi(x-at)$$ （2 分）

$$\mathcal{F}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{f(\omega,p)}{p+ja\omega}=f(x,t)\otimes\ \mathcal{F}\ \ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+ja\omega}\ =f(x,t)\otimes\ \delta(x-at)$$

$$=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\ f(\xi,\tau)\delta[(x-\xi)-a(t-\tau)]d\xi d\tau\ =\int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)d\tau$$ （2 分）

$$u(x,t)=\phi(x-at)+\int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)d\tau$$ （2 分）

2、（**10 分**）解: 定解问题对应的齐次方程和第二类齐次边界条件的本征值和本征函数是

$$\mu=\left(n\pi\right)^2,\quad X_n(x)=\sin n\pi x\quad(\ n=1\ ,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$ （2 分）

设定解问题的解为 $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin(n\pi x)$$ （1 分）

关于 $T(t)$ 满足的方程为 $$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'(t)+D(n\pi)^2T_n(t)]\sin n\pi x=\sin 2\pi x$$ （1 分）

$$\begin{cases}T_2'(t)+4D(\pi)^2T_2(t)=1\\T_2(0)=0\end{cases}$$ （1 分）

$$\begin{cases}T_n'(t)+D(n\pi)^2T_n(t)=0 & n\neq 2\\T_n(0)=0\end{cases}$$ （1 分）

解出 $$T_2(t)=1*e^{-4D\pi^2t}=\int_0^t e^{-4D\pi^2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{4D\pi^2}(1-e^{-4D\pi^2t})$$

$$T_n(t)=0\qquad n\neq 2$$ （2 分）

故 $$u(x,t)=\frac{1}{4D\pi^2}(1-e^{-4D\pi^2t})\sin 2\pi x$$ （2 分）