武汉大学数学与统计学院 2022-2023 学年第一学期
《概率论与数理统计A》期末考试卷
B卷

专业: ________________ **年级:** ________________

学号: ________________ **姓名:** ________________

1. (15分) 现在对某种病毒进行普查，假设在参加普查人员中携带病毒的比例事十万分之一，某种普查技术的准确率位95% (携带病毒被检出阳性和不懈怠病毒被检出阴性的概率)。

 (1) 甲在检查之后被通知结果是阳性，计算甲确实是病毒携带者的概率。

 (2) 甲在检查之后被通知结果是阴性，计算甲不携带该种病毒的概率。

 (3) 如果甲在第一次检查中被查出阳性，接着进行第二次检查，第二次检查的结果是阴性，求甲携带该种病毒的概率。

 解答:

 (1) A：一个人被检查出是阳性，B :一个人是阳性病毒携带者. 已知：$P(B) = 10^{-5}, P(\bar{B}) = 1 - 10^{-5}$, $P(A|B) = (\bar{A}|\bar{B}) = 0.95$, 由此推出：
 $P(A|\bar{B}) = 1 - 0.95 = 0.05, P(\bar{A}|B) = 1 - 0.95 = 0.05$.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} \\ &= \frac{10^{-5} * 0.95}{10^{-5} * 0.95 + (1 - 10^{-5}) * 0.05} \\ &= 1.89 * 10^{-4}. \end{aligned}$$

 (2) 类似（1），可以算出

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B}) + P(B)P(\bar{A}|B)} \\ &= \frac{(1 - 10^{-4}) * 0.05}{10^{-4} * 0.05 + (1 - 10^{-4}) * 0.95} \\ &\approx 1. \end{aligned}$$

 (3) 如果甲在第一次检查中被查出阳性，接着进行第二次检查，第二次检查的结果是阴性，求甲携带该种病毒的概率。

根据（1），第一次检查出阳性的人是病毒携带者的概率为 $1.89 * 10^{-4}$, 这时 $P(B) = 1.89 * 10^{-4} = p_1$. A_2 表示第二次检查结果是阳性，

$$
\begin{aligned}
P(B|\bar{A}_2) &= \frac{P(B)P(\bar{A}_2|B)}{P(B)P(\bar{A}_2|B) + P(\bar{B})P(\bar{A}_2|\bar{B})} \\
&= \frac{p_1 * 0.05}{p_1 * 0.05 + (1 - p_1) * 0.95} \\
&= 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

2. (10分) 若事件 A, B 发生的概率为 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B|A) = 0.8$, 求 (1) $P(A \bigcup B) =$, (2) $P(A - B|A \bigcup B) =$,； **解答:** $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$. 因此，

   (1) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$.

   (2) 记 $C = A \bigcup B$, $P(C) = 0.7$,
   $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.1$,
   $(A - B) \bigcap (A \bigcup B) = (A - B) \bigcap (A) \bigcup (A - B) \bigcap (B) = (A - B) \bigcup \Phi = A - B$.
   因此，
   $$P(A - B)|(A \bigcup B)) = \frac{P(A - B)}{P(A \bigcup B)} = \frac{1}{7}.$$

3. (20分) 假设随机变量 Λ 是服从$[1, 2]$ 上的均匀分布，当 $\Lambda = \lambda$的时候，随机变量 X 服从参数为λ的指数分布，密度函数为

   $$f(x|\Lambda = \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0).$$

   求

   (a) Λ 与X 的联合密度函数；

   (b) 计算$Y = X^2$的数学期望和方差；

   解答:

   (a) $\Lambda \sim U[1, 2]$ 从而有 $f_\Lambda(\lambda) = I(1 \le \lambda \le 2)$,故

   $$f(\lambda, x) = f_\Lambda(\lambda) f_{X|\Lambda=\lambda}(x|\Lambda = \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0) I(1 \le \lambda \le 2)$$

   (b) 由联合密度函数有

   $$
   \begin{aligned}
   f_X(x) &= \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0) d\lambda \\
   &= (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) e^{-x} - (\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) e^{-2x}, \ x > 0.
   \end{aligned}
   $$

有

$$
\begin{aligned}
EY = EX^2 &= \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-2x} dx \\
&= \Gamma(2) + \Gamma(1) - \frac{1}{2}\Gamma(2) - \frac{1}{2}\Gamma(1) \\
&= 1, \\
EY^2 = EX^4 &= \int_0^{+\infty} (x^3+x^2)e^{-x} - (2x^3+x^2)e^{-2x} dx \\
&= \Gamma(4) + \Gamma(3) - \frac{1}{8}\Gamma(4) - \frac{1}{8}\Gamma(3) \\
&= 7.
\end{aligned}
$$

从而 $E(Y) = 1$, $Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = 7 - 1 = 6$.

4. (15分) 若随机变量 (X, Y)的联合概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} xe^{-y/2} & 0 \le x \le 1, y > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

(a) 求 (X, Y) 的的边沿缘概率密度 ;

(b) 基于上问，说明X, Y 是否相互独立?

(c) 求$Z = X + Y$ 的概率密度。

解答:

(a) (1) $f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2} & y > 0, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

(b) 相互独立,

(c) $f_Z(z) = \begin{cases} (2z-4) + 4e^{-z/2} & 0 \le z \le 1, \\ (4 - 2\sqrt{e})e^{-z/2} & z \ge 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

5. (20分)

(1) 设随机变量$W = (aX + 3Y)^2$, $E(X) = E(Y) = 0$,$\mathrm{Var}(X) = 4$,$\mathrm{Var}(Y) = 16$, $\rho_{xy} = -0.5$。 求常数a使$E(W)$最小, 并求$E(W)$的最小值。

(2) 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布, 且由$\mathrm{Var}(X)=\sigma_x^2, \mathrm{Var}(Y)=\sigma_y^2$。 证明当$a^2=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$时, 随机变量$W=X-aY$与$V=X+aY$相互独立。

解答:

(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}W &= \mathrm{E}(aX+3Y)^2 && (1) \\ &= a^2\mathrm{E}X^2+6a\mathrm{E}XY+9\mathrm{E}Y^2. && (2) \end{aligned}$$

$\mathrm{E}X^2=\mathrm{Var}(X)+(\mathrm{E}X)^2=4$, $\mathrm{E}Y^2=\mathrm{Var}(Y)+(\mathrm{E}Y)^2=16$,
$\mathrm{E}XY=Coc(X,Y)+\mathrm{E}X\mathrm{E}Y=\rho*2*4=8\rho=-4$. 带入 (1), 有： $\mathrm{E}W=4a^2-24a+9\times 16$. 求出 $a=3$ 使得上式达到最大， 这时 $\mathrm{E}W=4\times 29=116$.

(2) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N(\mu,\Sigma)$. $\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X-aY \\ X+aY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

$|A|=2a\neq 0$. 因此， $\begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}$ 服从正态分布， 计算

$$\begin{aligned} Cov(W,V) &= cov(X-ay,X+aY) \\ &= \mathrm{Var}(X)-a^2\mathrm{Var}(Y). \end{aligned}$$

当 $a^2=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$, $Cov(X,Y)=0$, 因此 W,V 不相关，由于 W,V 服从正态分布，因此 W,V 独立。

6. (10分) 假设随机变量 X 的分布律为：

$$P(X=(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k})=\frac{2}{3^k},\ k=1,2,\cdots,$$

证明X的期望不存在。

解答: $\mathrm{E}|X|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k}\frac{2}{3^2}=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$. 所以期望不存在。