武汉大学2018-2019学年第二学期
《复变函数与积分变换》期末考试答案(A卷)

姓名__________ 学号__________ 学院__________

一、（每小题5分，共40分）解答下列各题，写清楚过程或理由.

1. 求$e^{1-\frac{\pi}{2}i}$的值.

解: $e^{1-\frac{\pi}{2}i} = ee^{-\frac{\pi}{2}i} = e(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = -ei$.

2. 将求$(1+i)^i$写成$a+bi$形式.

解: 令$(1+i)^i = e^{iLn(1+i)} = e^{i(\ln|1+i|+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}e^{i\ln\sqrt{2}} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos(\frac{\ln 2}{2}) + i\sin(\frac{\ln 2}{2}))$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

3. 证明$u = x^2 - y^2$和$v = \frac{y}{x^2+y^2}$都是调和函数，但$u+iv$不是解析函数.

解: $u_x = 2x, u_{xx} = 2, u_y = -2y, u_{yy} = -2$, 则$u_{xx} + u_{yy} = 0$说明$u$为一调和函数. 同理, $v_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $v_{xx} = \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $v_{yy} = \frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$, 则$v_{xx} + v_{yy} = 0$说明$v$是一调和函数. 但是$u_x \neq v_y$, $u_y \neq -v_x$, 故$u+iv$不是解析函数.

4. 利用罗朗展开式求函数$(z+1)^2\sin\frac{1}{z}$在∞处的留数.

解: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, 则

$$(z+1)^2\sin\frac{1}{z} = (z^2+2z+1)(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}) + \cdots,$$

于是$\frac{1}{z}$的系数为$-\frac{1}{3!} + 1 = \frac{5}{6}$, 故在$\infty$处的留数为$-\frac{5}{6}$.

5. 将函数$\arctan z$在点$z_0 = 0$处展开成幂级数.

解: 当$|z| < 1$时,

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

6. 求积分$\int_0^i \sin z\mathrm{d}z$, 将结果写成$a+bi$形式.

解: 由于$e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, 故

$$\int_0^i \sin z\mathrm{d}z = -\cos z|_0^i = 1 - \cos i = 1 - \frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2} = 1 - \frac{e^{-1}+e}{2}.$$

7. 求函数$f(t) = \cos t\delta(t) - \sin tu(t)$的Laplace变换式.

解: 因为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty}(\cos t\delta(t) - \sin tu(t))e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \cos te^{-st}|_{t=0} - \int_0^{+\infty}\sin te^{-st}\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{1+s^2} = \frac{s^2}{1+s^2}. \end{aligned}$$

8. 求函数$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$的Laplace逆变换.

解: $f(t)=\frac{se^{st}}{s+i}|_{s=i}+\frac{se^{st}}{s-i}|_{s=-i}=\frac{ie^{it}}{2i}+\frac{-ie^{-it}}{-2i}=\cos t.$

二、(每小题7分，共28分) 计算下列各题、写清楚过程.

1. 将$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$在$|z|>3$内展开成Laurent级数，并求$Res[f(z),\infty]$.

解: 当$|z|>3$时, 有$|\frac{2}{z}|<|\frac{3}{z}|<1$, 则

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{z^k}-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{z^k}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k-2^k}{z^k}$$

. 故$Res[f(z),\infty]=0$.

2. 求积分$I=\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$.

解: C所围成的区域仅含有奇点1, 且为2阶奇点, 故由Cauchy积分公式有

$$I=2\pi i\left(e^{2z}\right)'|_{z=1}=2\pi i\cdot 2e^{2z}|_{z=1}=4e^2\pi i.$$

3. 计算积分$I=\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^{10}(z-i)(z-3)}$, 其中$C:|z|=2$为逆时针方向.

解: $|z|=2$所围成的区域含有奇点1和i, 且分别为10和1阶奇点, $|z|=2$所围成的区域外有奇点3和∞, 则由推广的留数定理可知

$$I=-2\pi i[Res[f,3]+Res[f,\infty]]=-2\pi i[\frac{1}{(z-1)^{10}(z-i)}|_{z=3}+0]=\frac{(1-3i)\pi}{5\times 2^{10}},$$

其中$\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}=\frac{1}{z^{12}}\frac{1}{(1+\frac{i}{z})^{10}(1-\frac{1}{z})(1-\frac{3}{z})}$, 故$Res[f,\infty]=0$.

4. 利用留数定理计算积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\sin\theta}$, 其中$a>1$.

解: 令$z=e^{i\theta}$, 则在$|z|=1$上, $\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})=\frac{z^2-1}{2zi}$, $\mathrm{d}z=e^{i\theta}\cdot i\mathrm{d}\theta=iz\mathrm{d}\theta$. 作图$C=z:|z|=1$, 取逆时针方向为正向, 有

$$I=\oint_C\frac{2\mathrm{d}z}{z^2+2iaz-1},$$

上面的被积函数有两个1阶极点$z_1=(-a+\sqrt{a^2-1})i$和$z_1=(-a-\sqrt{a^2-1})i$. 显然, $|z_1|<1$, $|z_2|>1$. 因此被积函数在$|z|<1$内只有一个极点z_1, 其留数为$Res(f,z_1)=\frac{2}{z_1-z_2}=\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$. 于是$I=2\pi i\cdot Res(f,z_1)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

三、(本题10分) 已知$u(x,y)=2(x-1)y$且$f(2)=-i$, 求解析函数$f(z)=u+iv$.

$f(z)=-i(z-1)^2$
$=-i[(x-1)+iy]^2$
$=-i[(x-1)^2-y^2+2(x-1)yi]$
$=2(x-1)y+i[y^2-(x-1)^2]$

解: 由于$f'(z)=u_x+iv_x$, $u_x=2y$, $u_y=2(x-1)$. 由Cauchy-Riemann方程$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$得

$$f'(z)=u_x-iu_y=2y-2(x-1)i=-2ix-2yi^2+2i=-2iz+2i.$$

于是得$f'(z)=-iz^2+2iz+C$, 由初值条件$f(2)=-i$可知$C=-i$, 即$f(z)=-iz^2+2iz-i=-i(z-1)^2$.

四、(本题10分) 证明: 如果函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析, 且$|f(z)|$在D内为一个常数, 则$f(z)$是常数.

解: 由条件$|f(z)|=c$可知$u^2+v^2=c^2$, 则$2uu_x+2vv_x=0$, $2uu_y+2vv_y=0$. 又由于$f(z)$在区域D解析, 则由C-R方程可知$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$. 联立方程组可解得$u_x=0$, $u_y=0$, $v_x=0$, $v_y=0$, 从而$f'(z)=0$, 即$f(z)=C$, 其中C为复常数.

$$(s^2-1)Y(s)-(s^2+s)X(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}$$

$$(s-1)Y(s)-sX(s)=\left[\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}\right]\cdot\frac{1}{s+1}$$

五、（第一小题8分，第二小题4，共12分）利用Laplace变换求解下列方程：

1. 求方程组 $\begin{cases} y''-x''-x'-y=e^t-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$ 满足初值条件 $\begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$ 的解.

解：记$X(s)=L(x)(s)$, $Y(s)=L(y)(s)$. 由于$L(y')(s)=sY(s)-y(0)$, $L(y'')(s)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$, 及初值条件，得$L(y')(s)=sY(s)$, $L(y'')(s)=s^2Y(s)$. 类似地，$L(x')=sX(s)$, $L(x'')(s)=s^2X(s)$. 又$L(e^t)(s)=\frac{1}{s-1}$, $L(1)(s)=\frac{1}{s}$.

对方程组两边同时做Laplace变换，得

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\frac{-s+2}{s(s-1)^2} & ? \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)} & ✓ \end{cases}$$

解方程组得

$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s^2},\quad Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}.$$

故由Laplace逆变换得

$$X(t)=(e^{st})'|_{s=1}-(e^{st})'|_{s=0}=e^{st}t|_{s=1}-s^{st}t|_{s=0}=te^t-t.$$

$$y(t)=\frac{e^{st}}{(s-1)^2}|_{s=0}+(\frac{e^{st}}{s})'|_{s=1}=1+\frac{e^{st}ts-e^{st}}{s^2}|_{s=1}=1+e^tt-e^t.$$

2. 求积分方程$y(t)+\int_0^t y(t-\tau)e^\tau\,\mathrm{d}\tau=1$的解.

解：记$Y(s)=L(y)(s)$, $\int_0^t y(t-\tau)e^\tau\,\mathrm{d}\tau=y(t)*e^t$, 则有

$$L(y(t)*e^t)(s)=L(y)(s)L(e^t)(s)=\frac{Y(s)}{s-1},\quad L(1)(s)=\frac{1}{s}.$$

对方程两边同时做Laplace变换得$Y(s)+\frac{Y(s)}{s-1}=\frac{1}{s}$, 即$Y(s)=\frac{s-1}{s^2}$. 由Laplace逆变换得

$$y(t)=\left((s-1)e^{st}\right)'|_{s=0}=\left(e^{st}+(s-1)e^{st}t\right)|_{s=0}=1-t.$$