线性代数课程

行列式

2021 年 9 月 5 日

■ 武汉大学数学与统计学院 ■ 王老师

第 1 章　行列式

第 1 章　行列式

本章要求：

(1) 理解行列式的定义和基本性质，熟练掌握应用行列式性质和行列式按行（列）展开法则进行行列式计算的方法；

第 1 章　行列式

本章要求：

(1) 理解行列式的定义和基本性质，熟练掌握应用行列式性质和行列式按行（列）展开法则进行行列式计算的方法；

(2) 理解和掌握行列式的代数余子式的性质；

第 1 章　行列式

本章要求：

(1) 理解行列式的定义和基本性质，熟练掌握应用行列式性质和行列式按行（列）展开法则进行行列式计算的方法；

(2) 理解和掌握行列式的代数余子式的性质；

(3) 理解并掌握克拉默法则及齐次线性方程组有非零解的相关结论.

引言

求解线性方程组（system of linear equations）是线性代数中的一个基本问题，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

对任意实数 a, b, c, d，若记 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$，称 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为2 阶行列式，则上述解可以用 2 阶行列式叙述为：

当 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解，

其解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，

有

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

三元线性方程组有相仿的结论．在解三元线性方程组时，要用到“3 阶行列式”，3 阶行列式定义为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{def}}}\ a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1\text{-}2)$$

式（1-2）中 6 项是按沙路法或对角线法得到的.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

类似地可以得到其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

该结果可以推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的情形．首先给出 n 阶行列式的定义并讨论它的性质．

n 个不同自然数组成的一个有序数组 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 称为一个n 元排列(permutation of order n)，其中每个自然数 p_i 称作（第 i 个）元素.

例如：1234，2314 都是 4 元排列；341562 是 6 元排列；而 3231 不是排列.

3 个自然数共有 $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ 种不同排列. 用 P_n 表示所有 n 元不同排列的总数，有：

$$P_n = n(n-1)\cdots 2\,1 = n!\,.$$

n 个不同自然数按从小到大的顺序的排列，称之为 n 元的标准排列（standard permutation）. 如 2357 是一个 4 元的标准排列. $12\cdots n$ 是一个 n 元标准排列，其它的排列或多或少地违反从小到大的顺序.

顺序、逆序的定义

定义 1 在 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若有 $p_s < p_t$ ($s < t$)，则称数对 p_s 与 p_t 构成该排列的一个顺序(sequence)；

若有 $p_s > p_t$ ($s < t$)，则称数对 p_s 与 p_t 构成该排列的一个逆序(inverted sequence)；

一个排列中所有逆序的总数，称作该排列的逆序数(num of inversions)，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 元排列. 如果用 t_i 表示 $p_1p_2\cdots p_n$ 中 p_i 后面比 p_i 小的数的个数（此时 $t_n=0$），则 $p_1p_2\cdots p_n$ 逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

自然排列 $1\,2\,3\cdots n$ 中无逆序，故 $\tau(123\cdots n)=0$.

注 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数也可这样计算：用 t_i 表示 $p_1p_2\cdots p_n$ 中 p_i 前面比 p_i 大的数的个数（此时 $t_1=0$），则

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1 计算 $\tau(32415)$ 和 $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)$.

解

$$\tau(32415)=2+1+1+0+0=0+1+0+3+0=4.$$

$$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当逆序数为奇数时，称排列为**奇排列**(odd permutation)；当逆序数为偶数时，称排列为**偶排列**(even permutation).

例如排列 231 的逆序数为 2，是偶排列；排列 321 的逆序数为 3，是奇排列；所有标准排列的逆序数为 0，是偶排列.

定义 2 在某个 n 元排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中，如果对调两个元素的位置（如对换 p_s 与 p_t 的位置），其余元素不动，称作对该排列的一个对换(transposition, interchange). 可记作

$$p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n \xrightarrow{(p_s,p_t)} p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n.$$

例如：$3241 \xrightarrow{(3,4)} 4231$，$21345 \xrightarrow{(3,5)} 21543$.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

这表明，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

定理 1　对换改变排列的奇偶性.

这表明，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证　（1）先考虑相邻位置元素的对换. 设

$$a_1 \cdots a_l p q b_1 \cdots b_m \xrightarrow{(p,q)} a_1 \cdots a_l q p b_1 \cdots b_m.$$

记上式左边为排列 (I)，右边为排列 (II)，在排列 (I) 与排列 (II) 中，所有不含元素 p, q 的其它任意两个元素构成的数对无论是顺序还是逆序，在 (I) 与 (II) 中是一样的；所有含元素 p 不含元素 q（或者含元素 q 不含元素 p）的任意两个元素构成的数对无论是顺序还是逆序，在 (I) 与 (II) 中也是一样的；

余下数对 p, q，讨论如下：

当 $p < q$ 时，$\tau(pq) = 0, \tau(qp) = 1$，有

$$\tau(\text{II}) - \tau(\text{I}) = 1,$$

当 $p > q$ 时，$\tau(pq) = 1, \tau(qp) = 0$，有

$$\tau(\text{II}) - \tau(\text{I}) = -1,$$

所以排列 (II) 比排列 (I) 的逆序数不是增加 1 就是减少 1，因此两排列的奇偶性相反.

（2）再考虑任意位置元素的对换. 设

$$a_1\cdots a_l p c_1\cdots c_m q b_1\cdots b_k \xrightarrow{(p,q)} a_1\cdots a_l q c_1\cdots c_m p b_1\cdots b_k.$$

该对换可以分解成:

先作 $m+1$ 次相邻元素的对换，得到:

$$a_1\cdots a_l c_1\cdots c_m q p b_1\cdots b_k;$$

再作 m 次相邻元素的对换，得到:

$$a_1\cdots a_l q c_1\cdots c_m p b_1\cdots b_k.$$

共 $2m+1$ 次相邻位置对换，由（1），两个排列的奇偶性相反.

注　对换改变排列的奇偶性，但是对换前后的排列的逆序数不一定是相邻的两个数．如：

$$3241 \xrightarrow{(3,4)} 4231,\ \tau(3241)=4,\ \tau(4231)=5.$$

$$4132 \xrightarrow{(2,4)} 2134,\ \tau(4132)=4,\ \tau(2134)=1.$$

推论 1 任意 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$，都可以经过一系列对换变成标准排列，且对换次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数具有相同的奇偶性.

推论 1　任意 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$，都可以经过一系列对换变成标准排列，且对换次数与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数具有相同的奇偶性.

推论 2　在全部 n 元排列中，奇偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

例 2 用两种方法通过对换将排列 35472 化为标准排列.

方法 1 大数往后调:

$$35472 \xrightarrow{(7,2)} 35427 \xrightarrow{(5,2)} 32457 \xrightarrow{(3,2)} 23457.$$

方法 2 小数往前调:

$$35472 \xrightarrow{(3,2)} 25473 \xrightarrow{(5,3)} 23475 \xrightarrow{(7,5)} 23457.$$

第三节	n 阶行列式
A	n 阶行列式的定义
B	行列式的性质

有了前面的准备，现在可以给出 n 阶行列式的定义. 先来回顾一下 2 阶和 3 阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (1\text{-}4)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1\text{-}5)$$

从上面定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，每一项乘积都带有符号．在 3 阶行列式的展开式 (1-5) 中，任一项除正负号外的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列．可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项在 (1-5) 中带有正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带有负号．借助于逆序数和奇（偶）排列，可以将该定义推广到 n 阶情形：

定义 1 由 n^2 个元素 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,$
排成的 n 行 n 列组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n 阶行列式（determinant），其值定义为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1\text{-}6)$$

简记作$D=\det(a_{ij})$, $|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $|a_{ij}|_1^n$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素. 这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和, 在不引起混淆时, 有时也用 $\sum$ 表示对所有 n 元排列求和.

注意　n 阶行列式是一个"数"，是取自"不同行不同列元素乘积的代数和"，每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，它们共有 $n!$ 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 前面的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为逆序数.

特别地，定义 1 阶行列式（即 $n=1$）为

$$\det(a_{11}) \underline{\underline{\text{def}}}\ a_{11}.$$

注意不要与绝对值符号混淆，错写为 $|a_{11}|=a_{11}$.

按照行列式的定义计算行列式的值，计算量很大. 但是如果行列式中的元素有很多为 0 时，因包含 0 元素的项为 0，只需找出非零项计算即可.

例 1 在 6 阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带哪种符号.

例 1 在 6 阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带哪种符号.

解 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，因

$$\tau(431265) = 0 + 1 + 2 + 2 + 0 + 1 = 6,$$

故该项为正号.

下三角行列式

例 2　计算下三角行列式（low triangular determinant）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

下三角行列式

解　按照不同行不同列来取元素，只有一项可能非零，该项为 $(-1)^{\tau(12\ldots n)}a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$，故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即该行列式的值等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上元素的乘积.

n 阶上三角行列式

类似地有，对n 阶上三角行列式（upper triangular determinant），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶对角行列式

特别地，对n 阶对角行列式（diagonal determinant），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3　证明如下 n 阶行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n.$$

解　由行列式定义

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

对本题只有 $p_1 = n$，$p_2 = n-1$，$\cdots$，$p_n = 1$ 的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 才可能不为零，其它都为零．因此所有 $n!$ 项中只剩下一项：

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n.$$

由例 1.1，该项的符号是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故结论成立．

解　由行列式定义

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

对本题只有 $p_1=n$，$p_2=n-1$，$\cdots$，$p_n=1$ 的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 才可能不为零，其它都为零．因此所有 $n!$ 项中只剩下一项：

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=d_1\cdot d_2\cdot\cdots\cdot d_n.$$

由例 1.1，该项的符号是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故结论成立．

根据定义易知：如果一个 n 阶行列式非零元素至多有 $n-1$ 个，则至少有一行或一列元素全部为 0，从而该行列式必为零．

例 4 计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$.

解 按照行列式的定义，其一般项除正负号外是 n 个取自不同行不同列的元素的乘积，在其任意一个一般项中都包含每一行的一个元素，每一列的一个元素.

而本题的行列式前三列最多只有两行非零元，从这三列的不同行取出的三个元素必然有至少一个为 0，因而该行列式的每一个一般项中至少有一个 0，故该行列式的值等于 0.

第三节	n 阶行列式
A	n 阶行列式的定义
B	行列式的性质

定义 2　行列式 D 中的行与列对换后得到的行列式称为 D 的**转置行列式**（transpose determinant），记作 D^{T}，即：

$$
\text{若 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式，即 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D$.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证　记 $D^{\mathrm{T}} = \det(b_{ij})$，则 $b_{ij} = a_{ji}$，$\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$．由定义

$$D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

交换和式中各项 $a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ 的因子 $a_{p_i i}$ 的位置，使得

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}.$$

假设这些因子经过 m 次的位置对换而完成．即 $p_1p_2\cdots p_n$ 经 m 次对换成标准排列 $12\cdots n$，同时 $12\cdots n$ 也经 m 次对换成 $q_1q_2\cdots q_n$．故 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 有相同奇偶性，得

$$D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} = D.$$

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式的值变号.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式的值变号.

证 设 $D=\det(a_{ij})$. 交换第 s 行与第 t 行元素，假设 $s<t$，得到的新行列式为

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{ij}=a_{ij}$ ($i\neq s,t,j=1,2,\cdots,n$)，$b_{sj}=a_{tj}$，$b_{tj}=a_{sj}$ ($j=1,2,\cdots,n$)，于是

$$\overline{D} = \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{sp_s} \cdots b_{tp_t} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{tp_s} \cdots a_{sp_t} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{sp_t} \cdots a_{tp_s} \cdots a_{np_n},$$

因 $\tau(p_1 \cdots p_s \cdots p_t \cdots p_n)$ 与 $\tau(p_1 \cdots p_t \cdots p_s \cdots p_n)$ 奇偶性相反，从而

$$\overline{D} = -\sum_{n!} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_t \cdots p_s \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{sp_t} \cdots a_{tp_s} \cdots a_{np_n} = -D.$$

推论 1　如果行列式 D 有两行（列）的对应元素相同，则

$$D = 0.$$

推论 1 如果行列式 D 有两行（列）的对应元素相同，则

$$D = 0.$$

证 记交换这相同的两行得到行列式 D_1，显然

$$D_1 = D;$$

又由性质 1.2 得 $D_1 = -D$，故 $D = 0$.

性质 3　用数 k（$k \neq 0$）乘以行列式的某一行（列）等于以数 k 乘以此行列式，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 2 如果行列式的某一行（列）有公因子，则公因子可提到行列式外面.

推论 2　如果行列式的某一行（列）有公因子，则公因子可提到行列式外面.

推论 3　行列式中若有两行（或两列）对应元素成比例，则行列式的值为零.

推论 2　如果行列式的某一行（列）有公因子，则公因子可提到行列式外面.

推论 3　行列式中若有两行（或两列）对应元素成比例，则行列式的值为零.

推论 4　若行列式中某行（或等列）的元素全为零，则行列式的值为零.

性质 4 如果行列式的某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，而其它位置的元素与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

继续证明

按行列式的定义，有

$$D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \ldots a_{nj_n}$$
$$= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots b_{ij_i} \ldots a_{nj_n}$$
$$+ \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots c_{ij_i} \ldots a_{nj_n}$$
$$= D_1 + D_2.$$

继续证明

按行列式的定义，有

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\ldots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\ldots a_{nj_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\ldots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots b_{ij_i}\ldots a_{nj_n}$$

$$+\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\ldots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots c_{ij_i}\ldots a_{nj_n}$$

$$=D_1+D_2.$$

例如：行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3+1&3+2&3+3\\1&1&1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

性质 5　把一行（列）的倍数加到另一行（列），行列式的值不变.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{t1}+\lambda a_{s1} & a_{t2}+\lambda a_{s2} & \cdots & a_{tn}+\lambda a_{sn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

在应用上述性质时，主要是应用性质 1.2，1.3，1.5，称为行列式的初等变换．通常用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_j 表示行列式的第 j 列，引进记号：

1. 对换变换：$r_i \longleftrightarrow r_j (c_i \longleftrightarrow c_j)$ 表示对换 i，j 两行（列）；
2. 倍乘变换：kr_i（kc_i）表示用数 $k(k \neq 0)$ 乘以第 i 行（列）；
3. 倍加变换：$r_i + kr_j$（$c_i + kc_j$）表示用数 k 乘以第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，

并将对行施行的三种变换称为初等行变换，对列施行的三种变换称为初等列变换．

要注意 $r_i + r_j$ 与 $r_j + r_i$ 的区别，$r_i + r_j$ 的目标行是第 i 行，即第 i 行改变，第 j 行不变．

例 5　一个 n 阶行列式，假设它的元素满足

$$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

称该行列式为反对称行列式(skew symmetric determinant)．证明：当 n 为奇数时，此行列式为零．

证　设 $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，根据性质 1.1，有

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

利用性质 1.3，每行提取公因子 (-1)，即得 $D = (-1)^n D$．故当 n 为奇数时，有 $D = 0$．

提示

对于任意一个行列式，通过初等行（列）变换一定能化为上（下）三角行列式，其值可能相差一个非零常数倍数.

提示

对于任意一个行列式，通过初等行（列）变换一定能化为上（下）三角行列式，其值可能相差一个非零常数倍数.

由于上（下）三角行列式容易计算，因此计算行列式的一个基本方法是利用行列式的性质，把行列式化成上（下）三角行列式进行计算.

例 6　将行列式化为上三角行列式，并计算其值：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\underset{r_4-2r_1}{\overset{r_3+r_1}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \underset{r_4+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

例 7　计算下列 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix} .$$

解 本行列式每一列所有元素之和都是 $x+(n-1)a$，将第 $2,3,\cdots,n$ 各行加到第 1 行，得：

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \dots & x+(n-1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

解　本行列式每一列所有元素之和都是 $x+(n-1)a$，将第 $2,3,\cdots,n$ 各行加到第 1 行，得：

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \dots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-ar_1}(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

故

$$D=(x+(n-1)a)\cdot(x-a)^{n-1}.$$

例 8　证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证 将第 2 列、第 3 列元素加到第 1 列，再提取第一列的公因子 2，有

$$D = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

证　将第 2 列、第 3 列元素加到第 1 列，再提取第一列的公因子 2，有

$$D = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}$$

证　将第 2 列、第 3 列元素加到第 1 列，再提取第一列的公因子 2，有

$$D = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2-c_1}{\underset{c_3-c_1}{=\!=\!=}} 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=\!=} 2\begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & -b_1 \\ c_2 & -a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例 9　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明:$D=AB$.

证　利用初等列变换将行列式 A 化为下三角行列式：

$$A=\lambda\begin{vmatrix} p_{11} & & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=\lambda\, p_{11}\cdots p_{kk}\ (\lambda\neq 0);$$

在将 A 化为下三角行列式的过程中，对 A 下方的元素施行同样的初等列变换，这不改变行列式 D 的后 $n-k$ 列的元素．同样，利用初等列变换将行列式 B 化为下三角行列式：

$$B=\mu\begin{vmatrix} q_{11} & & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=\mu\, q_{11}\cdots q_{nn}(\mu\neq 0).$$

在将 B 化为下三角行列式的过程中，对 B 上方的元素施行同样的初等列变换，B 上方的元素仍然还都是 0，这样原行列式 D 化为

$$D=\lambda\mu\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & O & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ d_{11} & \cdots & d_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & \cdots & d_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\mu p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn} \qquad (\lambda\mu\neq 0),$$

故 $D=AB$.

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 = 10.$$

根据行列式的定义，3 阶行列式 (1-5) 可以通过 2 阶行列式来表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1\text{-}7)$$

本节介绍利用 $n-1$ 阶行列式来表示 n 阶行列式，即行列式按行（列）展开问题，先给出定义：

定义 1 在行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序排列构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \qquad (1\text{-}8)
$$

称为元素 a_{ij} 的余子式(complement cofactor)，记作 M_{ij}；而称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式(algebraic complement cofactor).

例如 $D=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 5 & 6 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 7 & -1 & 1\end{vmatrix}$ 中元素 6 的余子式以及代数余子式分别是:

$$M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-16,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-16.$$

定理 1　n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 可以表示成它的任意一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即：

按第 i 行展开行列式：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\ \ i=1,2,\cdots,n. \qquad (1\text{-}9)$$

按第 j 列展开行列式：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ \ j=1,2,\cdots,n. \qquad (1\text{-}10)$$

证　由于行与列具有相同的性质，故只证明 (1-9) 式.

（1）首先讨论 D 的第 n 行中除 $a_{nn} \neq 0$ 外，其余元素全为 0 的特殊情形．此时，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

按照行列式的定义，D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

而第 n 行中仅 $a_{nn}\neq 0$，所以其一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_{n-1}n)}a$

对 n 元排列 $j_1j_2\dots j_{n-1}n$ 与 $(n-1)$ 元排列 $j_1j_2\dots j_{n-1}$，有:

$$\tau(j_1j_2\dots j_{n-1}n)=\tau(j_1j_2\dots j_{n-1}),$$

所以 D 的一般项可以写成

$$a_{nn}\cdot(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{(n-1)j_{n-1}},$$

而其中的 $(-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{(n-1)j_{n-1}}$ 正是 a_{nn} 的余子式 M_{nn} 的一般项，故 $D=a_{nn}M_{nn}$，又 a_{nn} 的代数余子式 $A_{nn}=(-1)^{n+n}M_{nn}=M_{nn}$，得 $D=a_{nn}A_{nn}$.

（2）其次讨论 D 的第 i 行中除 $a_{ij} \neq 0$ 外，其余元素全为 0 的特殊情形．此时，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

继续证明

将元素 a_{ij} 按下面的方法移动到第 n 行第 n 列上：将第 i 行依次与第 $i+1, i+2, \cdots, n$ 行交换位置，再将第 j 列依次与第 $j+1, j+2, \cdots, n$ 列交换位置.

总共进行第 $(n-i)+(n-j)=2n-(i+j)$ 次行列交换后，第 i 行被移动到第 n 行，第 j 列被移动到第 n 列，元素 a_{ij} 被移动到第 n 行第 n 列，而其它元素保持相对位置不变，有

$$D=(-1)^{2n-(i+j)}$$

$$* \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} & a_{(i-1)j} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} & a_{(i+1)j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

上面行列式中 (n, n) 元 a_{ij} 的代数余子式即为 M_{ij}，此时利用（1）中的证明结论，有：

$$D=(-1)^{2n-(i+j)}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij},$$

即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

（3）最后讨论一般情形，证明按第 i 行的展开式．将 D 的第 i 行每一个元素写成 n 个数之和：

$$a_{ij} = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{j-1\quad 0} + a_{ij} + \underbrace{0+\ldots+0}_{n-j\quad 0},\ j=1,2,\ldots,n,$$

由行列式的性质，可将 D 分成 n 个 n 阶行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由（2）的结论得：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

推论 1　n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的某一行（列）元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad （i\neq j）$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad （i\neq j）.$$

证　仅证行的情形．将行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的第 j 行元素换成第 i 行元素，得到有两行元素完全相同的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow\ i \\ \\ \leftarrow\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

由行列式的性质知道 $D_1=0$.

另外，将 D_1 按第 j 行展开：

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn},$$

故

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

可以将定理 1.2 与及其推论合写如下：

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij} \text{ 或 } D=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij},$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 为克罗内克 (Kronecker) 符号.

注意!

将行列式按一行（列）展开计算并未减少计算量，因为相当于把一个 n 阶行列式的计算换成 n 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算，但这两个公式在理论上是重要的. 它在行列式计算中的意义主要体现在：

(1) 可以将高阶行列式低阶化；

(2) 在某一行（列）中只有一个非零元或者零元较多时，可以考虑按该行（列）展开计算.

例 1　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解　本行列式的特点是第 3 行、第 4 列都只有一个非零元．首先按第 3 行展开

$$D = 2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

上面的 3 阶行列式第 2 行、第 3 列都只有一个非零元，再按第 3 列展开，有

$$D = 2\cdot 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2) = -12.$$

例 2　计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

解　本行列式的特点是大部分元素为 0，按第 1 列展开，有

$$D = x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}_{n-1} + y\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix}$$

解　本行列式的特点是大部分元素为 0，按第 1 列展开，有

$$D = x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}_{n-1} + y\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot x^{n-1} + y \cdot (-1)^{n+1} \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

例 3 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$.

行列式中空白处的元素皆为 0.

解 按第 1 行展开，得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix}+b\cdot(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & & \\ 0 & c & & & \\ c & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$=adD_{2(n-1)}-bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

解　按第 1 行展开，得

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & & \\ 0 & c & & & \\ c & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} = (ad-bc)D_{2(n-1)}$$

以此作递推公式即可得

$$D_{2n} = (ad-bc)D_{2(n-1)} = (ad-bc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (ad-bc)$$

降阶法是计算行列式的一个基本方法.

例 4 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 的第 4 行各元素的余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解 因 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$，由行列式展开的相关结论，有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 因 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$，由行列式展开的相关结论，有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+2}(-7)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

例 5　证明范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j),$$

其中连乘积号表示满足 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积，即

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

例如，
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = (3-2)\times(5-2)\times(5-3) = 6.$$

证　用数学归纳法证明．当 $n=2$ 时，有

$$V_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论成立．假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，下面证明对 n 阶范德蒙行列式结论也成立．

在 V_n 中，从最后一行起，依次将前一行乘 $-x_1$ 加到后一行，得

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第 1 列展开，并分别提取公因子，得

$$V_n=(x_2-x_1)\cdots\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，根据归纳假设得

$$V_n=(x_2-x_1)\cdots\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

由该结果立即得出，范德蒙行列式为零的充分必要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.

第一节	引言
第二节	逆序与对换
第三节	n 阶行列式
第四节	行列式按一行（列）展开
第五节	克拉默法则

定理 1 （克拉默法则Cramer' s Ruler）如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{（1-11）}$$

的系数行列式 D 不等于零，

则方程组 (1-11) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \qquad \text{（1-12）}$$

其中 D_j（$j = 1, 2, \cdots, n$) 是把系数行列式 D 中的第 j 列用常数项代替后得到的 n 阶行列式.

定理中包含着三个结论：

①方程组有解；②解是唯一的；③解由公式 (1-12) 给出.

这三个结论是有联系的，这里证明的步骤是：

(1) 把 $(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D})$ 代入方程组，验证它是解.

(2) 假如方程组有解，证明它的解必由公式 (1-12) 给出.

证　（1）证明 $x_j=\frac{D_j}{D}$ 是方程组的解，即代入第 i 个方程，验证左端等于右端 b_i 即可.

把 D_j 按第 j 列展开，有

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

把方程组 (1-11) 简写为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

把 $x_j=\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}\sum\limits_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$ 代入方程组第 i 个方程，左端为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j.$$

因为当 $k=i$ 时，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$ 等于 D；而当 $k \neq i$ 时，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$，

所以 $\frac{1}{D}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}D_j = \frac{1}{D}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = \frac{1}{D}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ij}A_{kj}b_k =$

$\frac{1}{D}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}b_k = \frac{1}{D}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}) = \frac{1}{D}\cdot b_i \cdot D = b_i$. 这相当于把 (1-12) 式代入方程组 (1-11) 的每个方程使它们同时变成恒等式，故 (1-12) 式为方程组 (1-11) 的解.

（2）假设 $x_j = c_j$ 是方程组 (1-11) 的解，故

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases},$$

n 个等式分别依次乘以 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$，再把 n 个等式的两端相加，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ij}\right)c_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\right)c_j + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ij}\right)c_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}.$$

上式左端只有 c_j 的系数 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=D$，其余项的系数都为零，且右端 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = D_j$，于是 $Dc_j = D_j$，得

$$c_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

综上所述，线性方程组 (1-11) 有唯一解.

例 1　用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

解　计算各行列式，有

$$D=\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=-7\neq 0,\ D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&2\\1&-1&2&1\\1&1&2&0\\0&1&1&1\end{vmatrix}=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&3&4&2\\1&1&2&1\\4&1&2&0\\1&0&1&1\end{vmatrix}=7,\ D_3=\begin{vmatrix}5&0&3&2\\1&-1&1&1\\4&1&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=7,\ D_4=-7.$$

由克拉默法则，方程组有唯一解

$$x_1=1,x_2=-1,x_3=-1,x_4=1.$$

在方程组（1-11）中，右端常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组(system of homogeneous linear equations)，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1\text{-}13)$$

显然齐次线性方程组总是有解的，因为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是一个解，称之为零解(zero solution)．若解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零，称之为非零解(non-zero solution).

定理 2 如果齐次线性方程组（1-13）的系数行列式 $D \neq 0$，则它只有零解．即，如果线性方程组（1-13）有非零解，那么必有 $D = 0$．

定理 2　如果齐次线性方程组（1-13）的系数行列式 $D \neq 0$，则它只有零解．即，如果线性方程组（1-13）有非零解，那么必有 $D = 0$.

定理 3　齐次线性方程组（1-13）有非零解的充分必要条件是 $D = 0$.

该定理的充分性参见第 2 章.

例 2　λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1),$$

由定理 1.5 知，当 $\lambda=3$ 或 $\lambda=4$ 或 $\lambda=-1$ 时，齐次线性方程组有非零解.

例 3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相等的常数，$b_1, b_2, \cdots,$ 是不全为 0 的常数，用克拉默法则证明存在唯一的多项式

$$f(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-2} x + c_{n-1},$$

使得 $f(a_i) = b_i$（$i = 1, 2, \cdots n$）.

证 由 $f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x+c_{n-1}$，则有

$$\begin{cases} f(a_1)=c_0a_1^{n-1}+c_1a_1^{n-2}+\cdots+c_{n-2}a_1+c_{n-1}=b_1, \\ f(a_2)=c_0a_2^{n-1}+c_1a_2^{n-2}+\cdots+c_{n-2}a_2+c_{n-1}=b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ f(a_n)=c_0a_n^{n-1}+c_1a_n^{n-2}+\cdots+c_{n-2}a_n+c_{n-1}=b_n, \end{cases}$$

这是关于未知数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的线性方程组，将系数行列式化为范德蒙行列式得

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^{n-2} & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

将上式右端行列式的第 1 行依次与下一行对换调至第 n 行，再将所得行列式的第 1 行依次与下一行对换调至第 $n-1$ 行，……，最后将所得行列式的第 1 行与第 2 行对换，一共对调了 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次，所以有

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0.$$

故该线性方程组有唯一解，从而 $f(x)$ 存在且唯一.