武汉大学 2015-2016 第一学期高等数学 B1 期末试题
A 卷解答

一、（7 分）若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1)}=\dfrac{1}{2015}$　　7 分

二、（7 分）设 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 为正数 $(m\geq 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n)^{\frac{1}{n}}$。

解：不妨设 $a_1=\max\{a_1,\ldots,a_m\}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a_1\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{a_2^n}{a_1^n}+\cdots\dfrac{a_m^n}{a_1^n})^{\frac{1}{n}}=a_1=\max\{a_1,\ldots,a_m\}$　　7 分

或者用夹逼原理 $a_1\leq(a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n)^{\frac{1}{n}}\leq a_1 m^{\frac{1}{n}}$，两边令 $n\to\infty$ 即得极限为 $\max\{a_1,\ldots,a_m\}$

三、（7 分）求不定积分 $\int\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

解、 $\int\dfrac{\arctan x}{x^2}dx=\int\arctan x d(-\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{x}\arctan x+\int\dfrac{dx}{x(1+x^2)}$　　（4 分）

$=-\dfrac{1}{x}\arctan x+\int\dfrac{dx}{x}-\int\dfrac{xdx}{1+x^2}=-\dfrac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$　　（3 分）

四、（7 分）设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

4分

解 $2x+2yy'-y'e^{xy}-ye^{xy}(y+xy')=0$ 将点 $(0,2)$ 代入得 $y'(0)=\dfrac{4}{3}$　$y=\dfrac{4}{3}x+2$

(或 $4x-3y+6=0$)　3 分

五、（7 分）设 $a>0$，计算定积分 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{3}dx$

解：原式 $=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx-\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln 3dx$，由于 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}a^2$（定积分的几何意义），4 分

所以原式 $=-\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln 3dx=-\dfrac{\pi}{2}a^2\ln 3$　3 分

六、（7 分）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x<1\\ x, & 1\leq x<2\\ 0, & other\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

解 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}, & 1\le x<2\\ \frac{11}{6} & x\ge 2\end{cases}$ 7 分 （对一半就给4分）

七、（7 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定，其中 C 是非零常数，f 具有二阶导数，且 $f'(y)\neq 1$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解 $y-f(y)=\ln\frac{x}{C}$， $y'-f'(y)y'=\frac{1}{x}$，$y'=\frac{1}{x[1-f'(y)]}$，

$y''-f''(y)y'^2-f'(y)y''=-\frac{1}{x^2}$，4 分

$y''=\frac{1}{1-f'(y)}[f''(y)y'^2-\frac{1}{x^2}]=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$ 3 分

八、（7 分）设 $f(x)=\begin{cases}6, & x\le 0\\ \frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\overset{t=\arcsin x}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{a\sin^3 t}{\sin t-t}$ 4 分

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{at^3}{\sin t-t}=-6a=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=6$ 所以 $a=-1$. 3 分

九、（9 分）求初值问题 $\begin{cases}y''+y=x^2+\sin x\\ y(0)=1, y'(0)=-1\end{cases}$ 的解。

解 对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

非齐次方程 $y''+y=x^2$ 的一个特解为 $\boldsymbol{y_1=x^2-2}$，非齐次方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特解为 $\boldsymbol{y_2=-\frac{x}{2}\cos x}$， 6 分

原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2-\frac{x}{2}\cos x$，利用初值条件可求得 $C_1=3$， $C_2=-\frac{1}{2}$，

原问题的解为 $y=3\cos x-\frac{1}{2}\sin x+x^2-2-\frac{x}{2}\cos x$ 3 分

十、（9 分）求抛物线 $y^2=4x$ 与 $y^2=8x-4$ 所围图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

解：图略

$A=2\int_0^2(\frac{y^2+4}{8}-\frac{y^2}{4})dy=\frac{4}{3}$ 4 分

$$V=\pi\int_0^1 4x\,dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(8x-4)\,dx=\pi\left[2x^2\right]_0^1-\pi\left[4x^2-4x\right]_{\frac{1}{2}}^1=\pi \quad 5\text{ 分}$$

十一、（8 分）判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}dx$ 的敛散性。

解 $\forall x\in(1,+\infty)$，有 $\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}\right|\le\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\le\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ 4 分

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}=1$ ，$p=\frac{5}{2}>1$，故 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\right|dx$ 收敛，从而

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x^3+1}}dx$ 也收敛。 4 分

十二、（11 分）求函数 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调区间，极值，凹凸区间及拐点。

解：$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\frac{[(x-1)+(-2)]^2}{4(x-1)}=\frac{(x-1)}{4}-1+\frac{1}{x-1}, y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$,

$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$ ， 3 分

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	无定义	—	0	+
y''	−	−	−		+	+	+
y	↗	-2	↘		↘	0	↗

5 分

$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$ 单调增区间，$(-1,1)$，$(1,3)$ 单调减区间，$f(-1)=-2$ 极大值，$f(3)=0$ 极小值，$(1,+\infty)$ 凸区间，$(-\infty,1)$ 凹区间。 3 分

十三、（6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，且 $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\tan x\mathrm{d}x=0$，证明 在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证：记 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，且 $F(-1)=F(1)=0$，若 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点，不妨设 $F(x)>0, x\in(-1,1)$， $0=\int_{-1}^1 f(x)\tan x\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\tan x\mathrm{d}F(x)$

$=F(x)\tan x\big|_{-1}^1-\int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x\mathrm{d}x<0$，此矛盾说明 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内至少存在一个零点 x_0，对 $F(x)$ 在 $[-1,x_0]$，$[x_0,1]$ 上分别使用 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(-1,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,1)$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$ 6 分