2004～2005 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 B 卷答案

一、填空题（4×4 分）

1、x^2-3；　2、$-\frac{1}{3}$；　3、4；　4、$xf(x)+c$；　5、$\frac{2x\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}$

二、单项选择题（5×3 分）

1、C；　2、D；　3、A；　4、C；　5、B

三、试解下列各题

解：1、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cot x-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+3x)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{x}}=e^6$

3、$dy=\left[erc\tan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right]dx=\arctan xdx$

4、两边对 x 求导

$$e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})-y-x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$$

5、$dx=-2t\sin t^2dt$

$$dy=(\cos t^2-2t^2\sin t^2-\cos t^2)dt=-2t^2\sin t^2dt$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t^2\sin t^2}{2t\sin t^2}=t$$

$$d\frac{dy}{dx}=dt\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2t\sin t^2}$$

6、$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+c$

7、$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx+\int_0^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx\underline{\underline{x=-t}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}(\pi-2)$$

8、$\int_0^{\prime}\arctan(1+\sqrt{x})dx\underline{\underline{\sqrt{x}+1=t}}\int_1^2\arctan td(t-1)^2$

$$=(t-1)^2\arctan t\Big|_1^2-\int_1^2(1-\frac{2t}{1+t^2})dt$$

$$=\arctan 2+/u\frac{5}{2}-1$$

四、解：例如广义积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$收敛时，但广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$发散。

五、解：令$f(x)=xe^x-e^x+1$　　　　　（$x>0$）

$f'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$

$\therefore f(x)\uparrow$　　　　　　　　　　（$x>0$）

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$　　　　　　　$f(x)>0$

即$e^x-1<xe^x$　　　　　　　$(x>0)$

六、证：由题设知：$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$

$=\frac{1}{2}f''(0)x^3+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$，$\xi$在0与$x$之间。

令$x=-1$，得$1=f(1)=\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$（$0<\xi_1<1$），

$0=f(-1)=\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$，（$-1<\xi_2<0$），

两式相减得$6=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\le 2\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，

当$f'''(\xi_1)\ge f'''(\xi_2)$，取$\eta=\xi_1$，有$f'''(\eta)\ge 3$；

当$f'''(\xi_2)\ge f'''(\xi_1)$，取$\eta=\xi_2$，有$f'''(\eta)\ge 3$。

故存在$\eta\in(-1,1)$，使$f''(\eta)\ge 3$。

七、证：由于$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$时恒有

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|=|x_1-x_2|$$

所以，对任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，那么对一切$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$　　故$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

八、解：$s(t)=s_1(t)+s_2(t)$

$=\int_0^t (t^2-x^2)dx+\int_t^1 (x^2-t^2)dx=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

$s'(t)=4t^2-2t=0$，$t_1=0$，$t_1=\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{s(0)=}\frac{1}{3}$，$s(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$s(1)=\frac{2}{3}$

当$t=1$时，s_1+s_2取最大面积$\frac{2}{3}$；

$t=\frac{1}{2}$时，s_1+s_2取最小面积$\frac{1}{4}$；