《常微分方程》期末考试试卷（A）

（2020-2021 学年度上学期，经济与管理学院 金融学专业）

一、求解如下问题（每题 10 分，共 80 分）

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解：令 $\frac{y}{x}=u$，$y=xu$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\cos^2 u$$

$$x\frac{du}{dx}=\cos^2 u$$

若 $\cos^2 u=0$，则 $u=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$\frac{y}{x}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 为其解

若 $\cos^2 u\neq 0$，$\frac{du}{\cos^2 u}=\frac{1}{x}dx$

两边积分得 $\tan u=\ln|x|+C$

其通解为 $\tan\frac{y}{x}=\ln|x|+C$

2. 求方程 $(2x^2+3y^2-7)x\,\mathrm{d}x+(3x^2+2y^2-8)y\,\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解.

解：方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

且 $\frac{\partial M}{\partial y}=6xy=\frac{\partial N}{\partial x}$

故为全微分方程，其满足 $y(0)=1$ 的特解为

$$\int_0^x(2x^2+3y^2-7)x\,dx+\int_1^y(2y^3-8y)\,dy=0$$

$$\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{2}{4}y^4-4y^2\right)\Big|_1^y=0$$

化简得：$x^4+3x^2y^2-7x+y^4-8y^2+7=0$

3. 求方程 $y'-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解：此为伯努利方程
当 $y=0$ 时，此时为方程解
当 $y\neq 0$ 时，两边同除 $\sqrt{y}$

$$y^{-1/2}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x^2$$

$$\frac{dy^{1/2}}{dx} - \frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2$$

则其 $y^{\frac{1}{2}} = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[C + \int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx\right]$

化简得：$\sqrt{y} = x^2\left[C + \frac{1}{2}x\right]$

4. 求方程 $x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' = x$ 的通解.

解：此为 Euler 方程，令 $x=e^t$
令 $D=\frac{d}{dt}$，原方程可化为

$$D(D-1)(D-2)y + 3D(D-1)y - 3Dy = e^t$$

化简可得方程：

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = e^t$$

其特征方程为 $\lambda^3-4\lambda=0$，$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm 2$
其齐次通解为 $\tilde{y} = c_1 + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t}$
可设其特解 $y^* = Ae^t$，待定可得 $A=-\frac{1}{3}$
故原方程解为：$y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^{-2} - \frac{1}{3}x$

5. 求方程 $y' = -2 + xe^{2x+y}$ 的通解.

解：令 $2x+y=u$，则方程可化为

$$\frac{du}{dx}=xe^{u}$$

$$e^{-u}du=x\,dx$$

积分得：$-e^{u}=\frac{1}{2}x^{2}+C$

从而方程的解为：$-e^{-(2x+y)}=\frac{1}{2}x^{2}+C$

$$y=-2x-\ln\left(-\frac{1}{2}x^{2}-C\right)$$

6. 已知α和β为常数，求α、β 的取值范围，使得微分方程组$\frac{dY}{dx}=\begin{pmatrix}-2 & \beta & 0\\ \beta & -2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}Y$

满足任意初始条件的解$Y(x)$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}Y(x)=\vec{0}$.

解：$A=\begin{pmatrix}-2 & \beta & 0\\ \beta & -2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$

其特征方程 $|\lambda E-A|=0$，具体为

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -\beta & 0\\ -\beta & \lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=0,\quad (\lambda-\alpha)\left[(\lambda+2)^{2}-\beta^{2}\right]=0$$

其特征根为 $\lambda_1=\alpha$，$\lambda_{2,3}=-2\pm\beta$

对应特征向量为 T_1，T_2，T_3（实对称矩阵，一定存在）

当$\beta\neq0$时，故其通解 $Y(x)=C_1T_1e^{\alpha x}+C_2T_2e^{(-2+\beta)x}+C_3T_3e^{(-2-\beta)x}$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}Y(x)=\vec{0}$，则 $\begin{cases}\alpha<0\\ -2+\beta<0\\ -2-\beta<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\alpha<0\\ -2<\beta<2\end{cases}$

当$\beta=0$时 其通解 $Y(x)=C_1T_1e^{\alpha x}+C_2T_2e^{-2x}+C_3T_3xe^{-2x}$

此时 $\begin{cases}\alpha<0\\ \beta=0\end{cases}$ 满足时，$\lim\limits_{x\to+\infty}Y(x)=0$.

7. 已知常系数三阶线性齐次微分方程 $y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=0$ 的通解为

$\tilde{y}(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-2x}, x\in(-\infty,+\infty)$，求此微分方程的具体形式. 并利用待定系数法，给出其对应非齐次方程 $y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=x^2+3x+1+xe^x$ 特解 $y^*(x)$ 的具体形式（不必具体求出待定的系数值）.

解：显然方程的特征方程具有特征值

$\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=-2$

其特征方程为

$(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$

即：$\lambda^3-3\lambda+2=0$

从而对应的微分方程为

$y'''-3y'+2y=0$

方程 $y'''-3y'+2y=x^2+3x+1+xe^x$，其特解 $y^*(x)$

为 $y^*(x)=P_0+P_1x+P_2x^2+x^2[ax+b]e^x$（叠加原理）

8. 判断微分方程 $y'=-x+\sqrt{x^2+2y}$ 是否有奇解？如果有奇解，求出奇解.

解：由原方程化为 $y'+x=\sqrt{x^2+2y}$

两边平方 $y'^2+2xy'+x^2=x^2+2y$

有：$y=\frac{1}{2}y'^2+xy'$，此为克莱罗方程

其通解为 $y=\frac{1}{2}c^2+cx$，C为任意常数

由C-判别法

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}c^2+cx \\ 0=c+x \end{cases}$$ 消去c可得 $y=-\frac{1}{2}x^2$

且满足非蜕化性条件，故 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 为奇解.

二、 **证明**（每题 10 分，共 20 分）

1. 讨论微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+\cos^2(x+y)}$过平面上任意初始点$(x_0,y_0)$，其解的存在性、唯一性以及解的存在区间，并对其结果予以证明.

证：方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$

且 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+\cos^2(x+y)}$，显然

$\left.\begin{array}{l} f(x,y)\in C(R^2) \\ \text{且 } f_y'(x,y)\in C(R^2) \end{array}\right\}$ 故 $f(x,y)$ 在 R^2 连续且满足局部L-条件

因此方程的解存在且唯一.

显然，$-2<f(x,y)<2$，$(x,y)\in R^2$

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-2 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$　　$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

其解为 $y_1(x)=y_0-2(x-x_0)$，其解为 $y_2(x)=y_0+2(x-x_0)$

由比较定理和延拓定理，原方程解 $y(x)$

$y_1(x)<y(x)<y_2(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$

故原方程解的存在区间为 $x\in(-\infty,+\infty)$

2. 若函数 $p_i(x),i=1,2,3$满足 $\beta^2 p_1(x)+\beta p_2(x)+p_3(x)=0,x\in(-\infty,+\infty)$，其中$\beta$为某个非零常数，证明线性齐次微分方程 $p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=0$ 必有一解 $y(x)=e^{\beta x}$。试求微分方程$(x-2)y''-xy'+2y=0$的通解.

解：将 $y=e^{\beta x}$ 代入方程，可得

$$[\beta^2 P_1(x)+\beta P_2(x)+P_3(x)]e^{\beta x}\equiv 0,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

故 $y(x)=e^{\beta x}$ 为方程的解

对于方程 $(x-2)y''-xy'+2=0$

易验证 $y_1=e^x$ 为方程的一个解.

利用刘维尔定理，可构造与 y_1 线性无关的解为

$$y_2=Cy_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{\int\frac{x}{x-2}dx}dx=Ce^x\int\frac{1}{e^{2x}}\cdot e^{x+\ln(x-2)^2}dx$$

$$=Ce^x\int e^{-x}(x-2)^2dx=-Ce^{2}[x^2-2x+2]$$

可取 $y_2=x^2-2x+2$

可得齐次方程通解为

$$\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2(x^2-2x+2)$$