日期: /

# 壹 行列式

· 上三角（主对角线）

下三角（次对角线） $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdot a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$

· 性质 ① $D^T=D$ （$D^2=D^TD$） ② 互换行(列)变号. ③ 某行(列)的公因子可提出. ……

· 三叉型

例 2 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},\quad a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots\\ c_n\div a_n}]{\substack{c_1\div a_1\\ c_2\div a_2}} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

· 每行(列)每一项之和相同 —— 把第一行(列)化为该行(列)每项之和

例 3 计算 $D_n=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a\\ a & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \cdots & a & b \end{vmatrix}$.

每行(列)每一项之和
可把第一行(列)化

解

$$D_n \xlongequal{c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} (n-1)a+b & a & a & \cdots & a\\ (n-1)a+b & b & a & \cdots & a\\ (n-1)a+b & a & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a\\ (n-1)a+b & a & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & b & a & \cdots & a\\ 1 & a & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a\\ 1 & a & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{r_i-r_1}[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & b-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b-a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}.$$

· 降阶（按行/列展开）

$M_{ij}$ → 余子式. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ → 代数余子式.

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

$n$ 阶行列式 $D=|(a_{ij})|$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零，即（异乘变零）

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s),\qquad(1.21)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).\qquad(1.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{sj}A_{ij}=\begin{cases} D & s=i\\ 0 & s\neq i\end{cases}$$

日期: /

**例 4** 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

求第 4 行元素代数余子式之和的值. $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

**解** 把行列式 $D$ 的第 4 行元素换成第 2 行的元素，得另一行列式 $D_1$，则易知

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\2&2&2&2\end{vmatrix}=0.$$

根据行列式的定义，按第 4 行展开，得

$$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=0,$$

即 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$.

同例: 设 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\a&\cdots&a&x\end{vmatrix},$$ 求 $A_{n1}+A_{n2}+\cdots+A_{nn}$

2. 解 令

$$D_n^*=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a&a\\a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&x&a\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

则 $D_n^*$ 的第 $n$ 行各元素的代数余子式与 $D_n$ 的相同，故

$$A_{n1}+A_{n2}+\cdots+A_{nn}=D'_n$$

而

$$D_n^*\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_i-c_n}\begin{vmatrix}x-a&0&\cdots&0&a\\0&x-a&\cdots&0&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a&a\\0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}_n=(x-a)^{n-1}$$

故 $A_{n1}+A_{n2}+\cdots+A_{nn}=(x-a)^{n-1}$.

例: 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}n&n-1&\cdots&3&2&1\\n&n-1&\cdots&3&2&2\\n&n-1&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\therefore&\therefore&\vdots&\vdots\\n&n-1&n-1&\cdots&n-1&n-1\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}.$$

解

$$D_n\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}n&n-1&\cdots&3&2&1\\0&0&\cdots&0&0&1\\0&0&\cdots&0&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1&1\\0&1&\cdots&1&1&1\end{vmatrix}_n$$

$$=n\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&1\\0&0&\cdots&0&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1&1\\0&1&\cdots&1&1&1\\1&1&\cdots&1&1&1\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n.$$

## 加边型

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}\quad (a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n,n+1)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

(想都减一个1，就加一整行的1)

$$\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n,n+1)]{c_i\div a_{i-1}} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,\cdots,n,n+1)]{c_1+c_i} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right).$$

## 递推型

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a & -1 & 0 & \cdots & 0\\ ax & a & -1 & \ddots & \vdots\\ ax^2 & ax & a & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ ax^n & ax^{n-1} & \cdots & ax & a\end{vmatrix}$$

注意 $\underline{D_{n+1}}$

(2) **解** 给定行列式为 $n+1$ 阶，记为 $D_{n+1}$，则有

$$D_{n+1}\xrightarrow{\text{按第 } r_1 \text{ 展开}} aD_n+(-1)^{1+2}\times(-1)\begin{vmatrix}ax & -1 & \cdots & 0\\ ax^2 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=aD_n+xD_n=(a+x)D_n=(a+x)(a+x)D_{n-1}=\cdots$$

$$=(a+x)^{n-2}D_2=(a+x)^{n-1}\begin{vmatrix}a & -1\\ ax & a\end{vmatrix}=a(a+x)^n.$$

## 每相邻行(列)之间有较强关联

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n\\ 0 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1\\ 0 & x-1 & -1 & & & \vdots\\ 0 & 0 & & & & \vdots\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}$$

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

$$D_n \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$= n\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n$$

## 三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

递推

**6.(1) 解** 这是三对角行列式，由例 1 的结果可得

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

适当移项可得关于 $D_n$ 的递推关系式

$$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = D_{n-2} - D_{n-3} = \cdots = D_2 - D_1$$

因 $D_2 = 4-1 = 3, D_1 = 2, D_2 - D_1 = 1, D_3 - D_2 = 1, \cdots, D_n - D_{n-1} = 1$

所以

$$D_n = D_{n-1} + 1 = (D_{n-2}+1)+1 = \cdots = D_1 + (n-1) = n+1.$$

## ·克莱姆法则

齐次线性方程组 $\begin{cases} D\neq 0. \Leftrightarrow \text{只有零解} \\ D=0 \Leftrightarrow \text{非零解.} \end{cases}$

## ·拉普拉斯定理

$D=\sum_{i=1}^{t} N_i A_i$ $\quad A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M$

利用拉普拉斯定理计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} n & & & & & & & n+2 \\ & n-1 & & & & & n+1 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & 1 & 3 & & & \\ & & & 2 & 4 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & n & & & & & n+2 & \\ n+1 & & & & & & & n+3 \end{vmatrix}$$

2. 分析：$D_{2n}$ 的第 1 行和第 $2n$ 行两行中不为零的二阶子式只有 1 个，故按第 1 行和第 $2n$ 行展开.

**解**

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} n & n+2 \\ n+1 & n+3 \end{vmatrix}(-1)^{1+2n+1+2n}\times\begin{vmatrix} n-1 & & & & & n+1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & 2 & 4 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ n & & & & & n+2 \end{vmatrix}$$

$$=-2D_{2(n-1)} = (-2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (-2)^{n-1} D_2 = (-2)^n.$$

注：本题通过 $D_{2n}$ 与 $D_{2(n-1)}$ 之间的关系，并利用 $D_2=-2$，进而求得 $D_{2n}$.

日期: /

· 范德蒙行列式

**例 4** 证明范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j), \quad (1.32)$$

其中连乘积 $\prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$ 表示满足条件"$1 \leqslant j < i \leqslant n$"的所有因子 $a_i - a_j$ 的乘积.

日期:　　/

# 贰 矩阵

## ·矩阵的乘法

交换律、消去律对矩阵乘法不成立

$A_{4\times3}O_{3\times2}=O_{4\times2}$　　$AE=A$.　$EB=B$.

$(AB)C=A(BC)$　　$A(B+C)=AB+AC$.　　$(B+C)A=BA+CA$

$(AB)^k\neq A^kB^k$.　　$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$

## ·矩阵的转置

$(A^T)^T=A$　　$(A+B)^T=A^T+B^T$　　$(AB)^T=B^TA^T$

## ·方阵的行列式

$|A^T|=|A|$　　$|kA|=k^n|A|$　　$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

## ·特殊的矩阵

对角矩阵 $diag(a_{11}.a_{22}\cdots a_{nn})$

数量矩阵 $diag(a.a.\cdots a)$

$\begin{cases}\text{对称矩阵} \Longleftrightarrow A^T=A & \text{A、B为n阶对称矩阵. AB是对称矩阵} \Longleftrightarrow AB=BA \\ \text{反对称矩阵} \Longleftrightarrow A^T=-A & \text{反对称矩阵主对角线元素均为0.}\end{cases}$

## ·逆矩阵

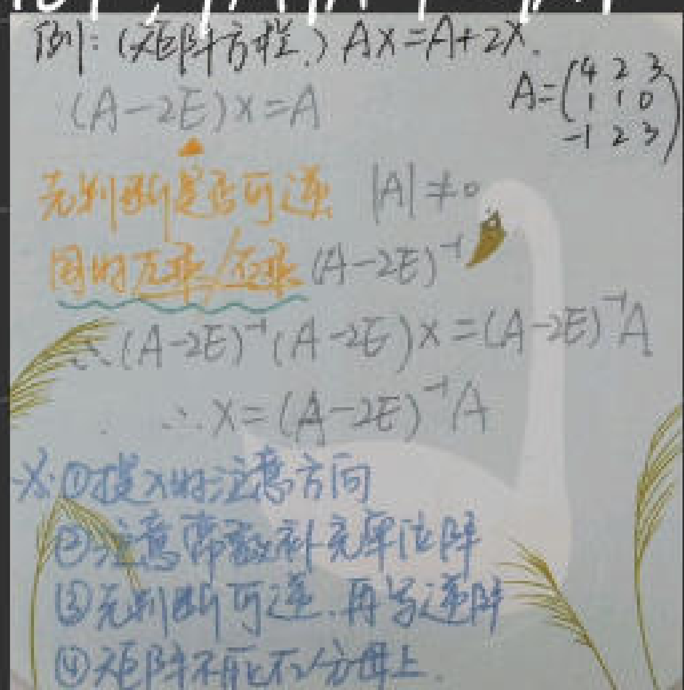
$AB=BA=I$.　$B=A^{-1}$

$\Rightarrow$ 伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$　($A^*$中$A_{ik}$是$|A|$中第i列的相应元素$a_{ki}$ $(k=1,2,\cdots n)$的代数余子式)

$AA^*=A^*A=|A|I$　　$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　　$A^*=|A|A^{-1}$

$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$　　$|A^*|=|A|^{n-1}$　$(|AA^*|=||A|E|,\ |A||A^*|=|A|^n)$

$\begin{cases}\text{非奇异}=\text{满秩}=\text{可逆}=|A|\neq0=AB=I. \\ \text{奇异}=\text{降秩}=\text{不可逆}=|A|=0.=r(A)<n_{\text{阶数}}.\end{cases}$


例：(矩阵方程) $AX=A+2X$.　$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$

$(A-2E)X=A$

先判断是否可逆　$|A|\neq0$

同时左乘/右乘 $(A-2E)^{-1}$

$\therefore (A-2E)^{-1}(A-2E)X=(A-2E)^{-1}A$

$\therefore X=(A-2E)^{-1}A$

※①乘入时注意方向

②注意常数补充单位阵

③先判断可逆，再写逆阵

④矩阵不能写分母上.

日期:　　/

⇒ 逆矩阵求法

① 伴随矩阵法. $|A|\neq 0 \Rightarrow$ 可逆. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$

② 初等变换法. $(A \vdots I) \longrightarrow (I \vdots A^{-1})$

(只作行变换. 一整行一起变换. 算完后验证 $A\cdot A^{-1}=E$)

例 3　设方阵 $A$ 满足 $A^2-3A=I$，证明 $A-I$ 可逆，并且求出其逆矩阵.

证　等式 $A^2-3A=I$ 两边同时加上 $2I$，得

$$A^2-3A+2I=3I.$$

利用因式分解方法，得 $(A-I)(A-2I)=3I$，即

$$(A-I)\left[\frac{1}{3}(A-2I)\right]=I.$$

这表明 $A-I$ 可逆，而且 $(A-I)^{-1}=\frac{1}{3}(A-2I)$.

性质: $(A^{-1})^{-1}=A$.　$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$　$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$

· 分块矩阵

转置: $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$　$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{n1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^T & A_{2n}^T & \cdots & A_{nn}^T \end{pmatrix}$

· 矩阵初等变换.

阶梯形矩阵、行简化阶梯形. 标准形 $\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$

初等矩阵: 单位矩阵经过一次初等变换所得的矩阵.

(初等矩阵都可逆. 初等矩阵的逆矩阵(转置?)也是初等矩阵)

$A_{m\times n}$. 对A作一次初等$\frac{行}{列}$变换. 相当于在A的$\frac{左}{右}$乘上相应的$\frac{m}{n}$阶初等矩阵　$P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t$

矩阵A、B等价 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵P、Q. 使得 $PAQ=B$

· 矩阵的秩 —— 非零子式的最高阶数.

$r(A^T)=r(A)$

矩阵的秩 → 矩阵的行阶梯形矩阵中非零行的行数

· 例题

例 8　将矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ 表示成若干个初等矩阵的乘积.

解　用初等行变换将矩阵 $A$ 化为单位矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I.$$

由初等矩阵与初等变换的关系可知，矩阵 $A$ 右乘 4 个相应的初等矩阵得到的积等于单位矩阵 $I$，即

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}A=I.$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

即矩阵 $A$ 已表示成 4 个初等矩阵的积.

**例 11** 设有分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$，其中 $A$ 和 $C$ 分别为 $m$ 阶与 $n$ 阶可逆矩阵，$B$ 为 $m\times n$ 矩阵，证明：矩阵 $P$ 可逆，并求 $P^{-1}$.

**解** 与 2.6.3 段中用初等变换法求逆矩阵的方法类似，构造分块矩阵

$$\left(\begin{array}{cc:cc} A & B & I_m & O \\ O & C & O & I_n \end{array}\right).$$

作分块矩阵的初等行变换，若分块矩阵的第 $i$ 行用 $R_i(i=1,2)$ 表示，并沿用矩阵初等变换的记号，则

$$\left(\begin{array}{cc:cc} A & B & I_m & O \\ O & C & O & I_n \end{array}\right) \xrightarrow[C^{-1}R_2]{A^{-1}R_1} \left(\begin{array}{cc:cc} I_m & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & I_n & O & C^{-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+(-A^{-1}B)R_2} \left(\begin{array}{cc:cc} I_m & O & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & I_n & O & C^{-1} \end{array}\right).$$

所以

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

要求逆矩阵，就直接算 $(A|I)$

(如果变换过程中左侧有一行全为0. 则不可逆)

P109 例13.

日期: /

# 叁 线性方程组

## ·线性方程组的消元解法（高斯消元法）

做法tips：① 写出增广矩阵 $\bar{A}$

② 只做行变换，化为行简化阶梯形

③ 看 $r(A) \neq r(\bar{A}) \neq n$（阶梯形中虚线左边非零行行数 ≠ 右边的）

④ 不管零行，非零行的首非零元留在左边，其余变号挪到右边。

线性方程组有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$，当 $r<n$ 时，无穷多解；$r=n$ 时唯一解

齐次线性方程组 $Ax=0$ 中，$r(A)=n \rightarrow$ 有唯一零解，$r(A)<n \rightarrow$ 有非零解

方程个数 $m <$ 未知量个数 $n \rightarrow$ 有非零解

$m=n \rightarrow$ 有非零解充要条件：$|A|=0$

$\rightarrow$ 有零解：$|A|\neq 0$ / $A$ 可逆 / $r(A)=n$

## ·线性表示

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_m\alpha_m$　$\beta$ 是 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的线性组合，由…线性表示

可线性表示的充分条件 → 以 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 为列向量的矩阵与以 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta$ 为列向量的矩阵有相同的秩。（$\bar{A}$ 有解）

## ·线性相关

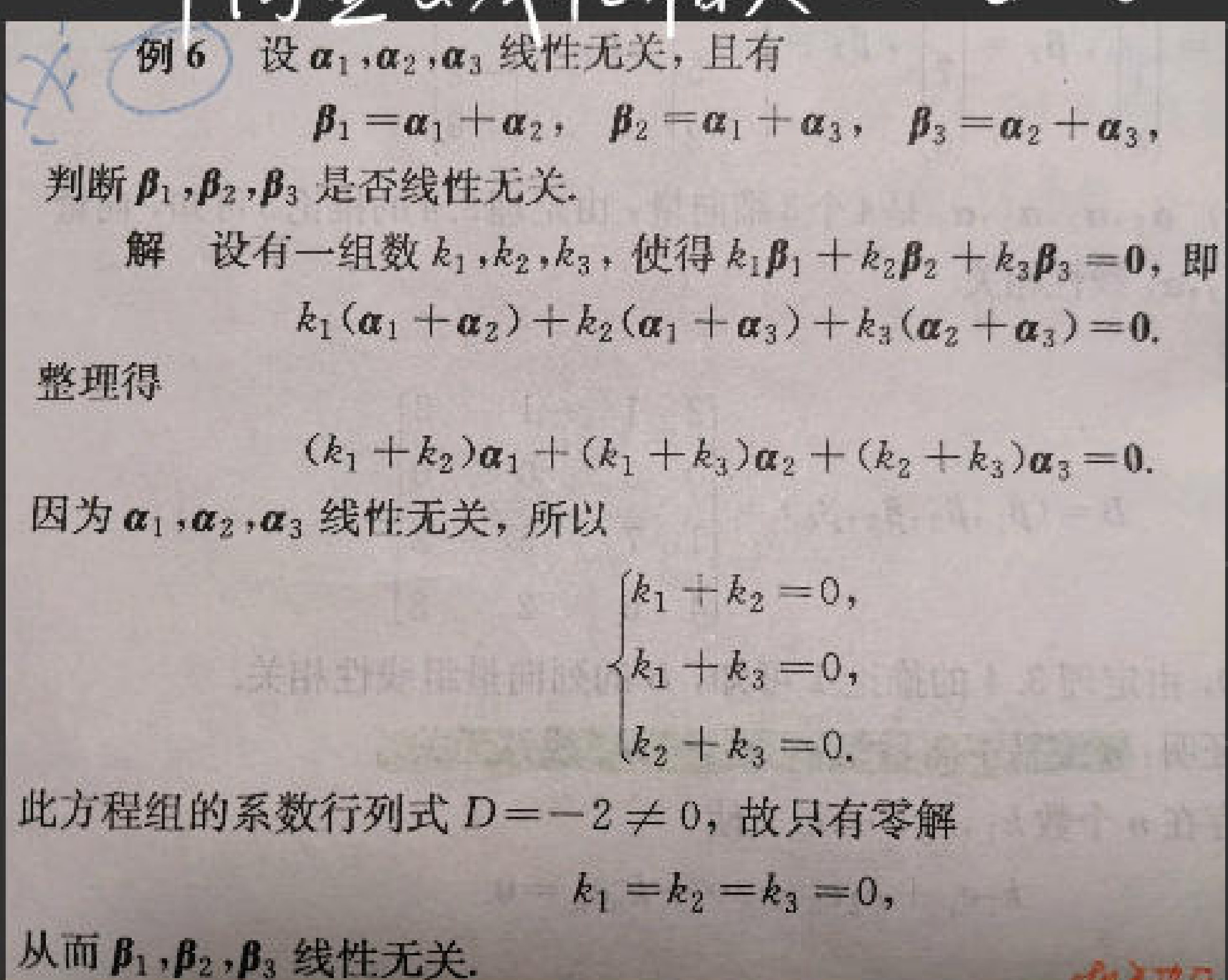
不全为0的 $k_1,k_2\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关。

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 为列向量的矩阵的秩小于向量个数 $n$

$\Leftrightarrow |\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n| = 0$（线性无关 $\neq 0$）

一个向量 $\alpha$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$

$n$ 个 $n$ 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$；线性无关 $\Leftrightarrow \neq 0$



例6　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且有

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_1+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_2+\alpha_3,$$

判断 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是否线性无关.

解　设有一组数 $k_1,k_2,k_3$，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1+\alpha_3)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0.$$

整理得

$$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1+k_3)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+k_2=0, \\ k_1+k_3=0, \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$$

此方程组的系数行列式 $D=-2\neq 0$，故只有零解

$$k_1=k_2=k_3=0,$$

从而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

要证明线性无关/相关，设存在不全为0的 $k_1,k_2\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+\cdots+k_n\alpha_n=0$.

证无关 $\rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

日期:　　/

## ·向量的秩

→极大线性无关组：①以向量组各向量为列构成矩阵A.

②把A化为行简化阶梯形，可求极大线性无关组表达式

③阶梯形非零行行数就是向量组的秩.

→给定两个向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$，(II) $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$，若向量组(I)能被(II)线性表出，且 $s>t$，则向量组(I)线性相关

→若向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 线性表示，则 $s \le t$

→ $(n+1)$ 个 $n$ 维向量一定线性相关.

→向量组的秩

$$0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le \min\{向量的个数s，向量的维数\}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性无关，$r=s$；线性相关，$r<s$

### →求极大线性无关组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\-3\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\6\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性相关性.

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组.

(3) 把其余向量表示成极大线性无关组的线性组合.

做题tips：

①确保向量是行或列向量，均按列构成矩阵

②只做行变化，化为行简化阶梯形.

③首非零元所在的列做极大线性无关组 ⇒ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ 是极大无关组

④其余向量表示系数直接表示出来

**解** 取 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化阶梯形：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 5 & 2 & 2\\1 & -1 & 5 & 2\\0 & -3 & 6 & -1\\2 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\0 & -1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

化成行最简是为了方便判断线性关系和后面用极大无关组表示

(1) $r(\boldsymbol{A}) = 3 < n\ (=4)$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的行简化阶梯形中，基本向量 $e_1, e_2, e_3$ 在第 1,2,4 列，故 $\boldsymbol{A}$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$.

(3) 其余向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$，由行简化阶梯形，从而 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$\begin{cases} r(A+B) \le r(A) + r(B) \\ \max\{r(A), r(B)\} \le r(A,B) \le r(A) + r(B) \\ r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}. \end{cases}$$

日期:　　/

## •齐次线性方程组解的结构

系数矩阵的秩+基础解系含解向量的个数＝未知量的个数

做法：①A做初等变换，化为行简化阶梯形.

②非零行首非零元的1对应的x留在左边，其余变量移到右边

③写出自由未知量，令(自由未知量)$^T$依次取 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\cdots$，代入得到的 $\underbrace{\eta_1, \eta_2 \cdots}_{\text{基础解系}}$

④方程组通解为 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots$

## •非齐次线性方程组解的结构.

做法：①②③同上.

④令自由未知量均取0，得$Ax=b$的特解$\gamma_0$

⑤ $x=\gamma_0+\overbrace{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}}^{Ax=0\text{的基础解系的线性组合}}$

非齐次线性方程组(3.22)有解

⟺向量$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{A}$的列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示

⟺$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$是等价向量组

⟺$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})$.

⟺$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$.

例：

**例**　用基础解系表示如下线性方程组的全部解：

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3,\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1,\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7.\end{cases}$$

**解**　作方程组的增广矩阵$\overline{A}$，并对它施以初等行变换：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&1&1\\1&-9&3&7&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&-7&2&4&4\\0&-14&4&8&8\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

非齐次通解tips：
①写出$\overline{A}$，实行变换，化为行简…
②非零行的首非零元的1留在…
写出非齐次的同解方程组.…
③令自由未知量均取0，得$Ax=b$…

即原方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4,\\x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

同解．取$x_3,x_4$为自由未知量，并让未知量$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$取值$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得方程组的一个解：

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4,\\x_2=\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

同解．取$x_3,x_4$为自由未知量，对自由未知量$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$取值$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，即得导出组的基础解系：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\quad\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此，所给方程组的通解为

$$\eta=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{13}{7}\\-\frac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中$c_1,c_2$为任意常数.

日期:　　　/

例：4元非齐次 $r(A)=3$. $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 是3个解. $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. 求通解

解：通解 $x=\underbrace{\text{特解}}_{\alpha_1}+\underbrace{\text{导出组基础解系的线性组合}}_{n-r(A)=4-3=1}$ → 1个解 $\alpha_2$.

$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的解. $\therefore \alpha_1-\alpha_2$. $\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=0$ 的解

$\therefore 2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$ 是解

类似：

8. 已知 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的三个解，$r(\boldsymbol{A})=3$，且

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

试求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

**8. 解**　由题设 $\boldsymbol{A\gamma}_i=\boldsymbol{\beta}\quad(i=1,2,3)$. 因为

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\gamma}_1-\frac{\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_3}{2}\right)=\boldsymbol{A\gamma}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A\gamma}_2+\boldsymbol{A\gamma}_3)=\boldsymbol{\beta}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\gamma}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_2+\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\5\\3\end{pmatrix}$$

是原方程组的导出组的一个解向量. 而 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以导出组的基础解系只含有一个解向量. 故原方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}_1+k\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\-1\\5\\3\end{pmatrix}$$

其中 $k$ 为任意常数.

## ·向量等价

两个向量组可以互相线性表示

充要条件：$B=QAP$. 则等价. 其中 $Q$、$P$ 可逆

判断两个向量组 $A=(\alpha_1.\alpha_2\cdots)$. $B=(\beta_1.\beta_2\cdots)$ 是否等价：

$(A\,\vdots\,B)$ 能否把左边化为 $\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$. 能 → 等价. 不能 → 不等价

日期: /

· 线性相关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$.

$\Leftrightarrow$ 所含向量个数大于向量维数.

日期: /

# 肆　基变换与坐标变换

## ·基变换

$$\begin{cases}\beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \cdots + c_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \cdots + c_{n2}\alpha_n \\ \quad\vdots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \cdots + c_{nn}\alpha_n\end{cases} \rightarrow (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)\, C \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

$C \rightarrow$ 由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 的过渡矩阵（基变换矩阵）.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)\, C^{-1}$$

## ·坐标变换

若向量 $\alpha$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 下的坐标分别为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，那么有:

$$x = Cy \qquad y = C^{-1}x \qquad \text{(坐标变换公式)}$$

## ·向量的正交化 (正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 必定线性无关)

### 向量组的正交化 (施密特正交化):

给定一组线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ $(2 \le m \le n)$

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \qquad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

再单位化. $\eta_i = \dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$

日期: /

# 伍. 矩阵的特征值与特征向量

## 一、特征值与特征向量

$Ax=\lambda x$　　$(\lambda I-A)x=0$　　$|\lambda I-A|=0$

$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$　　$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

特征值&特征向量求法:

①计算 $|\lambda I-A|=0$ 的全部根(特征值)(把某行/列尽可能化为0、提取公因子)

②设 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_r$ 是A的全部互异特征值，对于每一个 $(\lambda_i I-A)x=0$，求出基础解系，它们就是A属于特征值 $\lambda_i$ 的一组线性无关特征向量.

• 特征值与特征向量性质：（λ是矩阵A的特征值）

① $g(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$ 是 $g(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mI$ 的特征值，且 $g(A)x=g(\lambda)x$

② $\frac{1}{\lambda}$ 是 $A^{-1}$ 的特征值.　　$\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 $A^*$ 的特征值.　　$A^T$ 与A特征值相同

③若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 是矩阵A的不同特征值，$x_1,x_2,\cdots x_m$ 是A的分别属于 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$ 的特征向量，则 $x_1,x_2,\cdots x_m$ 线性无关.

④矩阵A的n个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，则: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

⑤k重特征根对应的线性无关的特征向量的个数 $\leq k$

## 二、相似矩阵

n阶可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=B$

性质：A、B有相同的秩、迹、行列式、特征值&特征多项式

$A^k\sim B^k$　　$A^{-1}\sim B^{-1}$

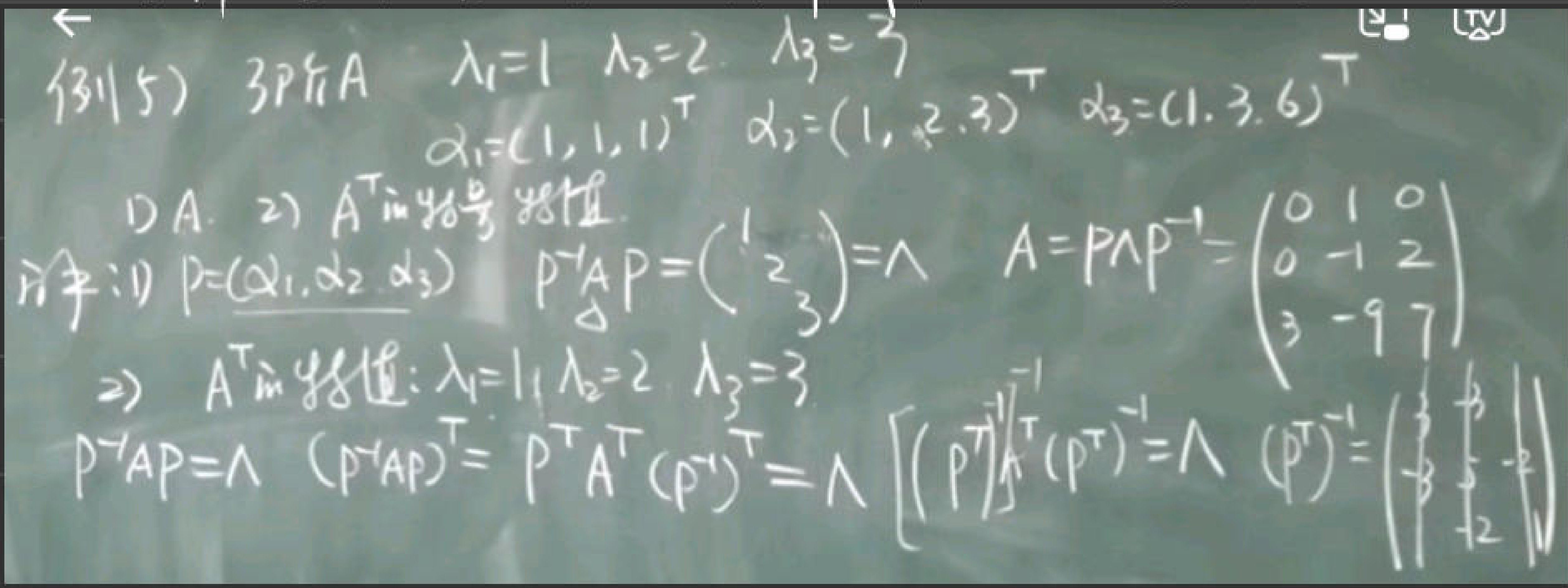
日期:　　/

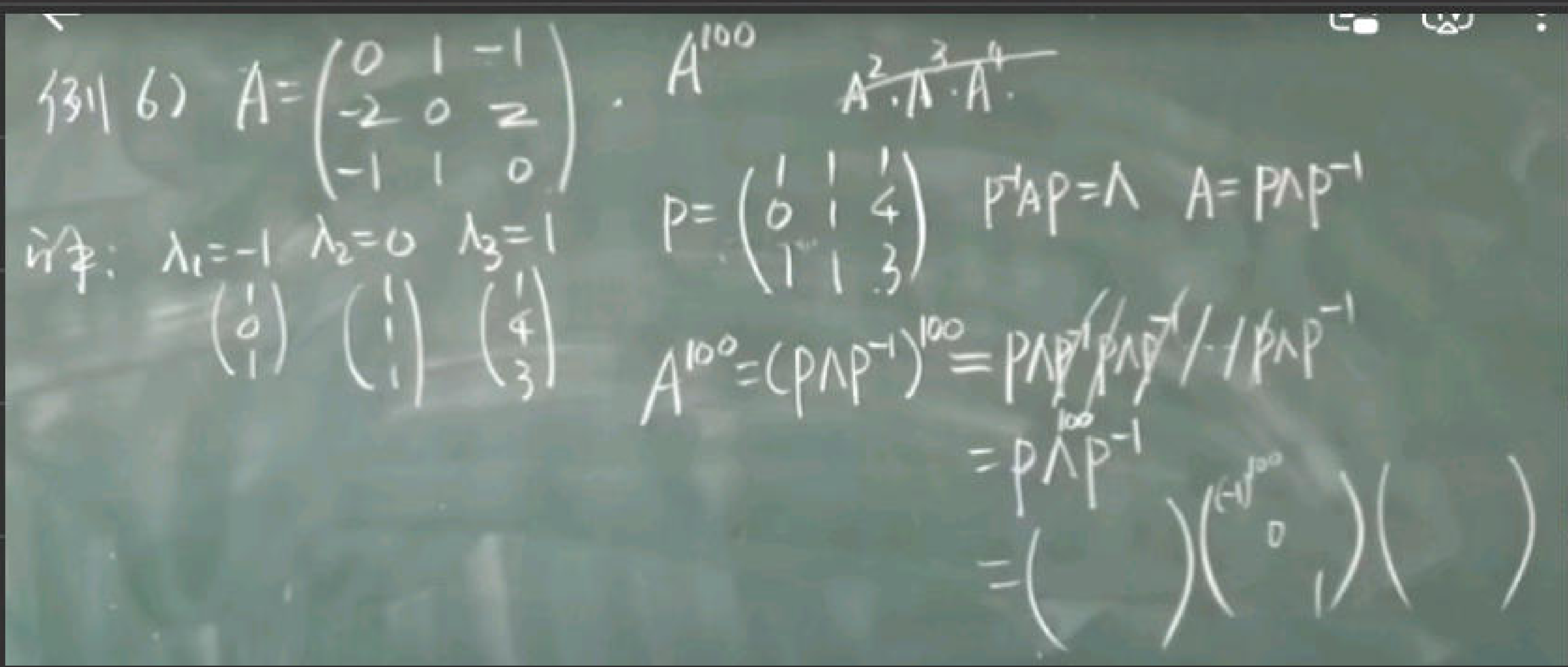
· 矩阵相似于对角形的条件

$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

若n阶矩阵A有n个互异特征值, 则 $A\sim\Lambda$

→ A的每个k重特征值λ恰好有k个线性无关的特征向量.




## 三、正交矩阵

A为n阶实方阵. $A^TA=I$ 则A为正交矩阵

性质: $|A|=\pm1$, $A^T$、$A^{-1}$也是正交矩阵, $A^{-1}=A^T$

A、B正交、同阶, 则AB为正交矩阵

A正交 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组是两两正交的单位向量组.

$a_{ij}=A_{ij} \Rightarrow A^*=A^T$　　A为正交矩阵. A的实特征值只能为±1

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的

日期:　　/

一定可对角化

# 四. 实对称矩阵的对角化

$A^T=A$

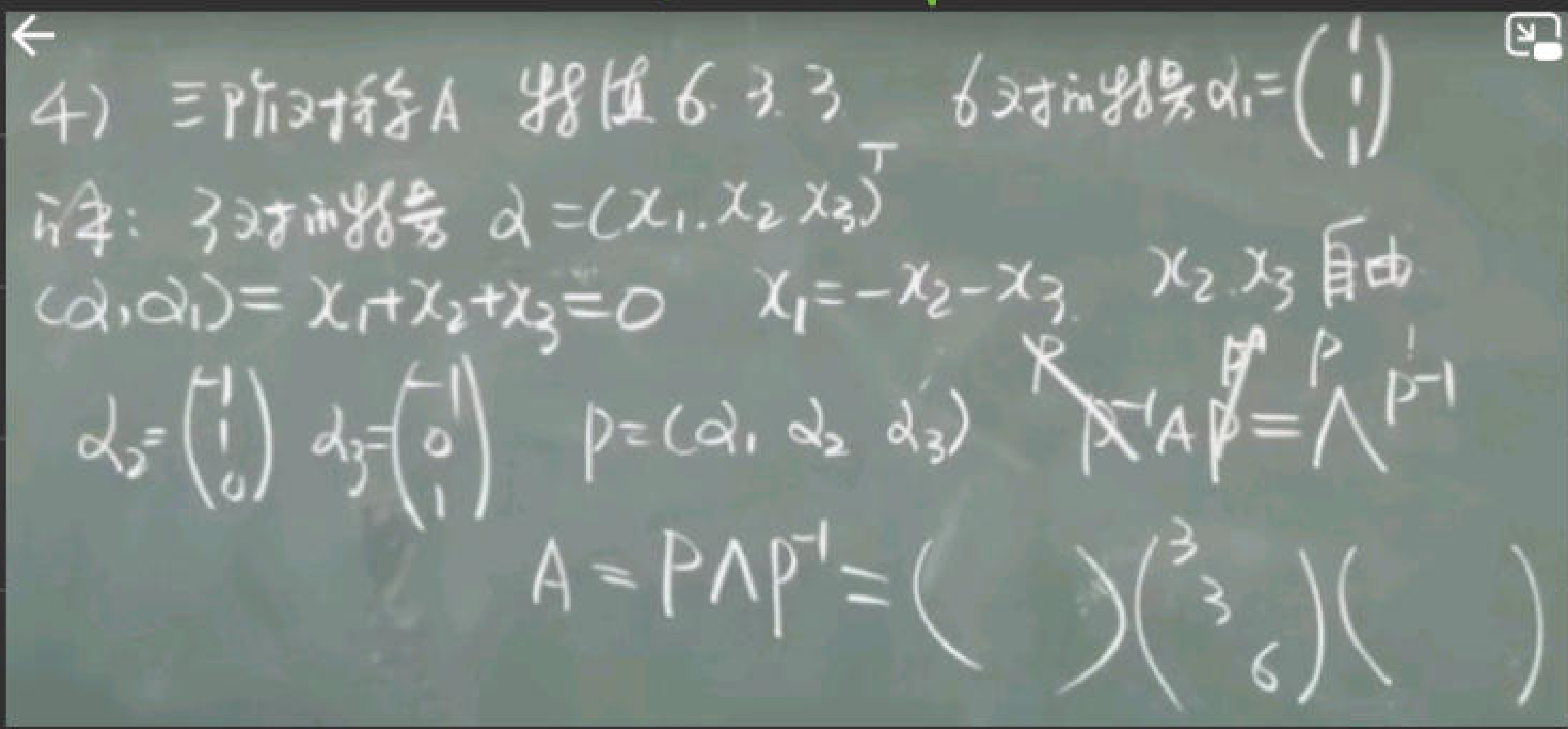
· 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量是正交的.

· 设A为n阶实对称矩阵,则存在正交矩阵Q,使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

正交矩阵Q求法: ①求 $|\lambda I-A|=0$ 全部特征值. ②求出对应的特征向量.

③特征向量先正交化,再单位化,使之成为一组标准正交向量组.

④做成列,构成Q. ⑤ $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.



日期:　　/

# 陆　二次型

## 一、二次型及其矩阵表示

$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x^TAx$　　（A为实对称矩阵. $A^T=A$）

## 二、二次型的标准型

$x = Cy \quad y = C^{-1}x$

· **矩阵的合同**

若存在非奇异矩阵 C. 使 $B = C^TAC$. 则A与B合同　$A \simeq B$

矩阵之间关系

- 等价：A、B是同型矩阵. 存在可逆矩阵 P、Q.　$PAQ = B$
- 相似：A、B是同阶方阵. 若存在可逆矩阵 P　$P^{-1}AP = B$
  - 正交相似 ——————————　$P^{-1}AP = B$、$P^TAP = B$
- 合同：A、B是同阶方阵. 若存在可逆矩阵 C　$C^TAC = B$

合同的性质：$r(A) = r(B)$.　$A^T = A \Rightarrow B^T = B$.

· **标准型**：

二次型 $f = x^TAx \xrightarrow{x=Cy} f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

标准型：$\Lambda = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$

## 三、化二次型为标准型的方法.

1、正交变换法.

2、拉格朗日配方法.（如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 中没有平方项. 则 $\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \end{cases}$

3、初等变换法. $\left(\frac{A}{I}\right) \rightarrow$ ① 对A、I 做同样的初等列变换.

② 只对A做相应的初等行变换（行、列配套）

③ A化成对角阵之时. I化成的就是C

④ 处理×、÷时. 开方处理（×5 → 先列变×5. 再行变×5）

日期:　　/

四. 实二次型的正惯性指数.

规范标准型: $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$ $(r \le n)$. $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$p \to$ 正惯性指数. $r-p \to$ 负惯性指数. 正负之差 $\to$ 符号差

五. 正定二次型

$f$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数为 $n$

$\Updownarrow$ $\Leftrightarrow$ $A$ 的特征值全大于0.

$A$ 是正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $A$ 合同于单位阵. $C^TAC = I$.

$\to |A| > 0$, $A$ 的主对角线上元素 $a_{ii} > 0$

注 设 $n$ 个变量的二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，则下列命题等价：

(1) $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(2) $f$ 的正惯性指数 $p = n$.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零.

(4) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

(5) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.

实二次型 $f = x^TAx$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ $A$ 的各阶顺序主子式全 $> 0$

日期:　　　/