练习 3．1

2． 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$，且向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，求 $\boldsymbol{\alpha}$．

解 $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{6}(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3)=\dfrac{1}{6}(6,12,18,24)=(1,2,3,4)$．

练习 3．2

2． 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$；$\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a,b,c)$．问 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能线性表示，求出具体的表达式．

解 对下列矩阵施行初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&2&a\\0&1&1&3&b\\0&0&1&4&c\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&-1&a-b\\0&1&0&-1&b-c\\0&0&1&4&c\end{array}\right),$$

故有

$$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=(a-b)\boldsymbol{\alpha}_1+(b-c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3.$$

3． 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

解 本题可以用定义证明，这里略去．下面通过矩阵来证明．因

$$\left(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

而行列式 $\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，故矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 可逆，从而 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 具有相同的线性相关性，从而 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

4． 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性相关，问 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 是否一定线性相关？试举例说明之．

解 不一定．例如：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关．

5． 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵．

证 下面用定义证明．设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\right)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．

因 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$\left|A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3\right| = |A| \cdot \left|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\right| \neq 0$，故$|A| \neq 0$，$A$为可逆矩阵.

7. 举例说明下列各命题是错误的：

(1) 若向量组α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是线性相关的，则α_1可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m，使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$成立，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关，$\beta_1,\cdots,\beta_m$亦线性相关.

(3) 若只有当λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m全为 0 时，等式 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$才能成立，则$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_m$线性无关，$\beta_1$，$\cdots$，$\beta_m$亦线性无关.

(4) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关，$\beta_1,\cdots,\beta_m$亦线性相关，则有不全为 0 的数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$使$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，$\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$同时成立.

解 (1) 例如$\alpha_1=0$，$\alpha_2\neq 0$；

(2) 取$\beta_i=-\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,m$，而$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关即可；

(3) 取$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关，而$\beta_i=0$，$i=1,2,\cdots,m$，即可；

(4) 取$\alpha_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,0)^{\mathrm{T}}$，则$\alpha_1+\alpha_2=0$. 取$\beta_1=(0,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(0,2)^{\mathrm{T}}$，则$2\beta_1-\beta_2=0$，可以验证.

8. 下列命题是否正确，说明理由：

(1) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组线性相关的$n$维向量，则对于任意不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_r$，均有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$.

(2) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组线性无关的$n$维向量，则对于任意不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_r$，均有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\neq 0$.

(3) 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$（$r\geq 2$）中任取$m$（$m<r$）个向量，所组成的部分向量组都线性无关，则这个向量组本身也是线性无关的.

(4) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，且只有$k_1,k_2,\cdots,k_r$全为零时，等式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=0$才成立，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关.

(5) 在线性相关的向量组中，去掉若干个向量后所得向量组仍然线性相关.

(6) 在线性无关的向量组中，去掉每个向量的最后一个分量后仍然线性无关.

解 (1) 显然错误，容易举例. 注意定义中仅要求存在某一组数使其成立即可.

(2) 正确. 这与原始的定义等价.

(3) 错误. 例如：$\alpha_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1)^{\mathrm{T}}$.

(4) 错误. 例如：$\alpha_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_1=(0,0)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(1,1)^{\mathrm{T}}$，满足条件，但$\beta_1,\beta_2$线性相关.

(5) 错误. 举例同(3).

(6) 错误. 例如：$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$线性无关，但去掉第 3 个分量后线性相关.

9. 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关，而α_{r+1}不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示，试证$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，α_{r+1}

必线性无关.

证 否则，设存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{r+1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}=\boldsymbol{0},$$

则 $k_{r+1}=0$．否则由上式可得

$$\boldsymbol{\alpha}_{r+1}=-\frac{1}{k_{r+1}}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right),$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，与题设矛盾．此时即有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，再与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，$\boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性无关.

10. 设有两向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)\end{cases}\quad \text{和} \quad \begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,3,1)\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,3)\\ \boldsymbol{\beta}_3=(0,-1,1,4)\end{cases},$$

证明上述两向量组等价.

解 设 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}\right)$，若能证 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，即说明两向量组等价.

$$\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&1&2&2&1&0&0\\0&2&1&5&-1&1&-1\\2&0&3&-1&3&-1&1\\1&1&0&4&1&3&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&1&2&2&1&0&0\\0&2&1&5&-1&1&-1\\0&-2&-1&-5&1&-1&1\\0&0&-2&2&0&3&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4\leftrightarrow r_3]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&1&2&2&1&0&0\\0&2&1&5&-1&1&-1\\0&0&-2&2&0&3&4\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$．得证.