# 《常微分方程》期末考试试卷（A）

（2018-2019 学年度上学期，经济与管理学院 **金融工程、金融学**）

## 一、求解如下问题（每题 10 分，共 70 分）

1. 求初值问题$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0 \quad (x>0)\\ y(1)=0\end{cases}$的解.

2. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{-3x^2y+2y^3-8y}$的通解.

3. 求微分方程$(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$的积分因子及通解.

4. 求微分方程$y=(y'^3-2y'^2)e^{y'}$的通解.

5. 求微分方程$y''+4y'+4y=\sin 2x$的通解.

6. 求微分方程组$\dfrac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}e^x$的通解.

7. 判断微分方程$\dfrac{dy}{dx}=-x+\sqrt{x^2+2y}$是否有奇解，若有奇解并求出奇解.

二、(10 分)讨论微分方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y^2-3\mathrm{y}-4)\mathrm{e}^{x+y}\\ y(0)=3\end{cases}$解的存在性、唯一性以及解的存在区间.

三、（20 分）证明题

（1）证明：利用变换$x=e^t$可以将方程

$$x^3y'''+a_1x^2y''+a_2xy'+a_3y=f(x) \quad (x>0)$$，其中$a_1,a_2,a_3$为常数

化为常系数非齐次微分方程.对于如下 n 阶的微分方程：

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+a_ny=f(x) \quad (x>0),$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数, 结论是否同样成立?

（2）设$\Phi(x),\Psi(x)$为齐次线性方程组$\dfrac{dY}{dx}=A(x)Y$两个基本解矩阵，证明存在非奇异方阵$\mathrm{M}$，满足 $\Phi(x)=\Psi(x)\mathrm{M}$.