线性代数课程

矩 阵

2021 年 9 月 5 日

■ 武汉大学数学与统计学院 ■ 王老师

第 2 章　矩阵

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律．了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律．了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

(2) 理解逆矩阵的概念及其性质、矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵的定义，会运用伴随矩阵求逆矩阵；

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律．了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

(2) 理解逆矩阵的概念及其性质、矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵的定义，会运用伴随矩阵求逆矩阵；

(3) 理解矩阵的初等变换的概念，初等矩阵的性质和矩阵等价，熟练掌握用初等变换求逆矩阵的方法；

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律．了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

(2) 理解逆矩阵的概念及其性质、矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵的定义，会运用伴随矩阵求逆矩阵；

(3) 理解矩阵的初等变换的概念，初等矩阵的性质和矩阵等价，熟练掌握用初等变换求逆矩阵的方法；

(4) 理解矩阵的秩及相关性质，熟练掌握用初等变换求矩阵的秩的方法，会运用矩阵的秩的性质证明一些结论；

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律．了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

(2) 理解逆矩阵的概念及其性质、矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵的定义，会运用伴随矩阵求逆矩阵；

(3) 理解矩阵的初等变换的概念，初等矩阵的性质和矩阵等价，熟练掌握用初等变换求逆矩阵的方法；

(4) 理解矩阵的秩及相关性质，熟练掌握用初等变换求矩阵的秩的方法，会运用矩阵的秩的性质证明一些结论；

(5) 了解分块矩阵的定义，运算法则和规律；

第 2 章　矩阵

本章要求：

(1) 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵及其性质；熟练掌握矩阵的基本运算及其规律. 了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质；

(2) 理解逆矩阵的概念及其性质、矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵的定义，会运用伴随矩阵求逆矩阵；

(3) 理解矩阵的初等变换的概念，初等矩阵的性质和矩阵等价，熟练掌握用初等变换求逆矩阵的方法；

(4) 理解矩阵的秩及相关性质，熟练掌握用初等变换求矩阵的秩的方法，会运用矩阵的秩的性质证明一些结论；

(5) 了解分块矩阵的定义，运算法则和规律；

(6) 理解线性方程组有解的充要条件并掌握其求解方法.

已知 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2\text{-}1)$$

其系数及常数项可以排成 m 行，$n+1$ 列的数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

若约定省略未知数、等号等符号，则任何一个线性方程组都可以用这样一个数表来描述；反之，一个数表也完全确定了线性方程组（2-1）．

若 m 个变量 y_1，y_2，$\cdots$，y_m 与 n 个变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 之间有下述关系：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

则称（2-2）为从变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 到变量 y_1，y_2，$\cdots$，y_m 的线性变换(linear transformation). 由其系数项可以排成一个 m 行 n 列的数表如下：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

显然给定一个线性变换，则上述数表也随之确定；反之，若给定一个数表，则线性变换也随之确定，二者之间存在一一对应.

设 $\mathbb{F}$ 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 $\mathbb{F}$ 中任意两个数（这两个数可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 $\mathbb{F}$ 中的数，则称 $\mathbb{F}$ 为一个数域(number field).

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域.

这三个数域分别用字母$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$来表示.

本书中通常提到数域 $\mathbb{F}$ 时指实数域 $\mathbb{R}$，少数时候也指复数域 $\mathbb{C}$.

定义 1　由数域 $\mathbb{F}$ 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 (row) n 列 (column)，并括以圆括号的数表

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m\times n$ 矩阵(matrix)，通常用大写字母或黑体字母表示，记作 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}_{m\times n}$，元素 a_{ij} 叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 第 i 行第 j 列的元素 (element)，简称为 $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ 元，i,j 分别称为该位置的行标和列标．矩阵可简记为 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\mathbf{A}=(a_{ij})$．有教材的矩阵括号用方括号．

元素均为实数的矩阵称为实矩阵(real matrix)，元素不全为实数的矩阵称为复矩阵(complex matrix)．本书的矩阵如无特殊说明均指实矩阵.

元素均为实数的矩阵称为实矩阵(real matrix)，元素不全为实数的矩阵称为复矩阵(complex matrix)．本书的矩阵如无特殊说明均指实矩阵．

当 $m=n$ 时，$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为n 阶矩阵（或n 阶方阵square matrix），也可记作 $\mathbf{A}_n$．n 阶方阵中过元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的直线称为方阵的主对角线(main diagonal)，主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角元素．

当 $n=1$ 时，即 $\mathbf{A}=(a_{11})$，此时矩阵可以等同看待为一个数 a_{11}，不必加括号．

元素均为实数的矩阵称为实矩阵(real matrix)，元素不全为实数的矩阵称为复矩阵(complex matrix)．本书的矩阵如无特殊说明均指实矩阵.

当 $m = n$ 时，$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 称为n 阶矩阵（或n 阶方阵square matrix），也可记作 $\mathbf{A}_n$．n 阶方阵中过元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 的直线称为方阵的主对角线(main diagonal)，主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元素.

当 $n = 1$ 时，即 $\mathbf{A} = (a_{11})$，此时矩阵可以等同看待为一个数 a_{11}，不必加括号.

当 $a_{ij} = 0(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 时，矩阵称为零矩阵(null matrix，zero matrix)；记作 $\mathbf{O}_{m\times n}$．在不致引起混淆时，可简单地记为 $\mathbf{O}$.

当 $m=1$ 时，$\mathbf{A}=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)_{1\times n}$ 称为行矩阵(row matrix) 或n 维行向量(row vector of n dimension)；为避免元素间混淆，行矩阵也记为 $\mathbf{A}=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$

当 $n=1$ 时，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$ 称为列矩阵(column matrix) 或m 维列向量(column vector).

具有相同行数和相同列数的矩阵，称之为同型矩阵(matr of the same type).

若同型矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}, \quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n,$$

称 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

注意　不同型的零矩阵是不相等的.

n 阶单位矩阵

几种常用的特殊矩阵:

(1) $\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$

称为 n 阶单位矩阵(identity matrix),也记为 $\mathbf{I}_n$ 或 $\mathbf{I}$,或者在不致引起混淆时简写为 $\mathbf{E}$.

n 阶对角矩阵

(2) 若矩阵 $\Lambda = (a_{ij})_{n\times n}$ 元素满足 $a_{ij} = 0$， $\forall\ i \neq j$，其形状是

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}，\text{简记为} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

也记作 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$，称为 n 阶对角矩阵(diagonal matrix).

n 阶数量矩阵

(3) 若 n 阶对角矩阵中主对角线上的元素都相等，即

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

则称 $\mathbf{A}$ 为n 阶数量矩阵(scalar matrix)．当 $\lambda = 1$ 时，$\mathbf{A}$ 就是 n 阶单位矩阵.

上三角矩阵

(4) 若矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij} = 0$， $\forall\ i > j$ ，称 $\mathbf{A}$ 是上三角矩阵(upper triangular matrix)，即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵

(5) 若 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足 $a_{ij}=0$， $\forall\, i<j$，称 $\mathbf{A}$ 是下三角矩阵(low triangular matrix)，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

取定数域 $\mathbb{F}$，设所讨论的矩阵全由数域 $\mathbb{F}$ 中的数组成.

定义 1　设有两个 $m \times n$ 同型矩阵 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，那么 A 与 B 的和 (addition 或 sum) 记为 $A + B$，规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \xlongequal{\text{def}} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2-3}$$

由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法，因此，不难验证加法满足运算规律：

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$；(交换律)

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.(结合律)

矩阵的减法

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $-\mathbf{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 的 负矩阵(negative matrix)，可定义矩阵的减法：

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}\ \underline{\underline{\text{def}}}\ \mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵

定义 2　数 λ 与矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积称为数 λ 与矩阵 $\mathbf{A}$ 的数乘矩阵(scalar multiplication of matrix)，简称为数乘，记做$\lambda\mathbf{A}$（或 $\mathbf{A}\lambda$），规定为

$$\lambda\mathbf{A} \xlongequal{\text{def}} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘运算规律

矩阵的数乘运算满足下列运算规律（设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是同型矩阵，λ，μ 是数）:

1. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

例 1 求矩阵 $\mathbf{X}$，使 $2\mathbf{X}+3\mathbf{A}=\mathbf{B}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 $$2\mathbf{X}=\mathbf{B}-3\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-8 & 8 & -1\\ -2 & 0 & -10\\ -8 & -10 & 4\end{pmatrix},$$

故 $$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & -5\\ -4 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

矩阵乘法的引入

先看下面一个问题. 设变量 y_1, y_2 到变量 z_1, z_2, z_3, z_4 的线性变换为

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ z_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \\ z_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 \end{cases}, \qquad \text{(2-4)}$$

其系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$.

又设变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2 的线性变换为

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \end{cases}, \qquad (2\text{-}5)$$

其系数矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

将 (2-5) 代入 (2-4)，可得从 x_1, x_2, x_3 到 z_1, z_2, z_3, z_4 的线性变换：

$$\begin{cases} z_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13} \\ z_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13} \\ z_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})x_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})x_2 + (a_{31}b_{13} \\ z_4 = (a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21})x_1 + (a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22})x_2 + (a_{41}b_{13} \end{cases}$$

(2-6)

如果用

$$z_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_j (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (2\text{-}7)$$

来表示 x_1, x_2, x_3 与 z_1, z_2, z_3, z_4 的关系，比较 (2-6), (2-7)，就有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3). \ (2\text{-}8)$$

用矩阵的表示法，我们可以说，如果矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别表示变量 z_1, z_2, z_3, z_4 与 y_1, y_2 以及 y_1, y_2 与 x_1, x_2, x_3 之间的关系，那么表示 z_1, z_2, z_3, z_4 与 x_1, x_2, x_3 之间的关系的矩阵 $\mathbf{C}$ 就由公式 (2-8) 决定．矩阵 $\mathbf{C}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积，记为 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

矩阵的乘法

定义 3　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵A 与 B 的乘积(multiplication of matrices) 是

$$C=\mathbf{AB}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}\overset{\text{def}}{=\!=}a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.\quad(2\text{-}9)$$

这表明 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的第 $\mathbf{A}$ 列对应元素乘积之和.

矩阵乘法的要求

由矩阵乘法的定义可以看出:

1. 只有在第一个矩阵 (左矩阵)$\mathbf{A}$ 的列数和第二个矩阵 (右矩阵)$\mathbf{B}$ 的行数相等时，才能定义乘法 $\mathbf{AB}$;
2. 矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ 的行数是 $\mathbf{A}$ 的行数，列数则是 $\mathbf{B}$ 的列数.

例 2　设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

求 $\mathbf{AB}$.

解 设 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$，则有

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\times1+(-1)\times1+1\times2 = 4,$$

$$c_{12} = 3 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -1,$$

$$c_{13} = 3 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 3 = 3,$$

$$c_{14} = 3 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 4 = 4,$$

同理可计算 $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}$，得

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

注 **BA** 没有定义，不可行.

例 3　设 A，B 分别是 $n\times 1$ 和 $1\times n$ 矩阵，且

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

计算 AB 和 BA.

解

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

继续

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

继续

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

AB 是 n 阶矩阵,BA 是 1 阶矩阵.

例 4 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$.

解　计算易得

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

上述几个例子表明,

1. 当 $\mathbf{AB}$ 有意义时, BA 不一定有意义;
2. 即使 AB 和 BA 都有意义, 且有相同的矩阵阶数, AB 和 BA 也不一定相等.
3. 因此矩阵乘法不满足交换律, 即一般说来

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

上例还表明,

1. 当 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ 时，不能推出 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$.
2. 进一步，当 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$，且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 时，不一定有 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$，这表明矩阵乘法不满足消去律.

若两个矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是可交换的，有

(1) 单位矩阵与任何（同阶）矩阵可交换，即成立 $\mathbf{AE} = \mathbf{EA}$.

若两个矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是可交换的，有

(1) 单位矩阵与任何（同阶）矩阵可交换，即成立 $\mathbf{AE} = \mathbf{EA}$.

(2) 任何两个对角矩阵可交换.

若两个矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是可交换的，有

(1) 单位矩阵与任何（同阶）矩阵可交换，即成立 $\mathbf{AE} = \mathbf{EA}$.

(2) 任何两个对角矩阵可交换.

(3) 一个矩阵与任何（同阶）矩阵可交换的充要条件是该矩阵为数量矩阵.

矩阵乘法满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的乘法满足下列运算律：

(1) $(AB)C = A(BC)$；(结合律)

矩阵乘法满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的乘法满足下列运算律：

(1) $(AB)C = A(BC)$；(结合律)

(2) $A(B+C) = AB + AC$；

$(B+C)A = BA + CA$；(分配律)

矩阵乘法满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的乘法满足下列运算律：

(1) $(AB)C = A(BC)$；(结合律)

(2) $A(B+C) = AB + AC$；

$(B+C)A = BA + CA$；(分配律)

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ (其中 λ 为数).

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\mathbf{B}=(b_{ij})$ 是 $s\times t$ 矩阵，$\mathbf{C}=(c_{ij})$ 是 $t\times n$ 矩阵，则 $\mathbf{D}=(d_{ij})=\mathbf{AB}$ 是 $m\times t$ 矩阵，且 $d_{ik}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}$；而 $\mathbf{G}=(g_{ij})=\mathbf{BC}$ 是 $s\times n$ 矩阵，且 $g_{lj}=\sum_{k=1}^{t}b_{lk}c_{kj}$，从而 $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ 都是 $m\times n$ 矩阵．再记 $\mathbf{P}=(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{DC}$，$\mathbf{Q}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{AG}$．因

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{t}d_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{t}(\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk})c_{kj}=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

$$=\sum_{l=1}^{s}a_{il}\sum_{l=1}^{t}b_{lk}c_{kj}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}g_{lj}=q_{ij},$$

故结合律成立．

对于单位矩阵 E，容易验证

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n},\ A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}.$$

可简写为：$EA = A$，$AE = A$.

矩阵的方幂

设 A 是 n 阶方阵，k 为正整数，定义

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^1.$$

一般地，称

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n}$$

为方阵的n 次幂(powers of a matrix).

由乘法的结合律，不难证明，方阵的幂有如下性质：

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l},\ (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}, \text{ 其中 } k, l \text{ 为正整数.}$$

由于矩阵乘法不满足交换律，所以一般来说，

$$(\mathbf{AB})^m \neq \mathbf{A}^m\mathbf{B}^m,\ A, B \text{ 为 } n \text{ 阶方阵.}$$

例 5 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

解 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

假设 $\mathbf{A}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由数学归纳法知，结论成立.

有了方阵的幂，可以定义方阵的多项式．设

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是 x 的 m 次多项式，$\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，则

$$f(\mathbf{A}) = a_m \mathbf{A}^m + a_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{E}$$

称为方阵 $\mathbf{A}$ 的 m 次多项式.

因为 $\mathbf{A}^k$，$\mathbf{A}^l$ 及 $\mathbf{E}$ 都是可交换的，所以方阵 $\mathbf{A}$ 的多项式 $f(\mathbf{A})$ 和 $g(\mathbf{A})$ 也是可交换的，即

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}),$$

从而 $\mathbf{A}$ 的多项式可以像数 x 的多项式一样相乘或分解因式．如：

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(3\mathbf{A}-\mathbf{E}) = (3\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) = 3\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}-2\mathbf{E},$$

$$(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{E})^m = \mathbf{A}^m + C_m^1\lambda\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + C_m^{m-1}\lambda^{m-1}\mathbf{A} + \lambda^m\mathbf{E}.$$

例 6 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $A = \alpha\beta$，求 A^n.

解 因 $A=\alpha\beta$，有

$$A^2=(\alpha\beta)(\alpha\beta)=\alpha(\beta\alpha)\beta$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}=2\alpha\beta=2A,$$

递推可得

$$A^n=2^{n-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2^n & -2^{n-1} & 2^n\\2^{n+1} & -2^n & 2^{n+1}\\2^n & -2^{n-1} & 2^n\end{pmatrix}.$$

定义了矩阵的乘法，可以将线性方程组（2-1）及线性变换（2-2）表示成为矩阵形式．令

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组（2-1）可用矩阵乘积表示出：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \qquad (2\text{-}10)$$

称 $\mathbf{A}$ 为线性方程组（2-1）的系数矩阵(coefficient matrix)，上述表示法称为线性方程组的矩阵表示法．

同样，线性变换（2-2）可记为：$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$.

称 $\mathbf{A}$ 为线性变换（2-2）对应的矩阵．

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

转置矩阵记为 A^{T}（或 A'），即：

定义 4　设 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

A 的转置矩阵(transposed matrix) 指矩阵

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置矩阵记为 A^{T}（或 A'），即：

定义 4 设 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

A 的转置矩阵(transposed matrix) 指矩阵

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

显然，$m \times n$ 矩阵的转置矩阵是 $n \times m$ 矩阵.

例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\a&b&c\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&a\\1&b\\2&c\end{pmatrix}.$$

转置满足的运算律

在运算可行的情况下，矩阵的转置满足下列运算律：

1. $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$;
3. $(\lambda \mathbf{A})^{\mathsf{T}} = \lambda(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$, λ 是数；
4. $(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

只证 (4). 设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$, 记 $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$, $B^\mathrm{T}A^\mathrm{T} = D = (d_{ij})_{n\times m}$. 于是 $(\mathbf{AB})^\mathrm{T} = \mathbf{C}^\mathrm{T}$ 的 (i,j) 元是 $AB = C$ 的 (j,i) 元，即 $\mathbf{A}$ 的第 j 行与 B 的第 i 列对应元素乘积之和：

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki},$$

而 $\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{A}^\mathrm{T} = \mathbf{D}$ 的 (i,j) 元 d_{ij} 是 $\mathbf{B}^\mathrm{T}$ 的第 i 行与 $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ 的第 j 列对应元素乘积之和，即 B 的第 i 列与 A 的第 j 行对应元素乘积之和：

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki},$$

因此 $c_{ji} = d_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$，所以 $C^\mathrm{T} = D$，也就是 $(AB)^\mathrm{T} = B^\mathrm{T}A^\mathrm{T}$

由 (4) 易推出

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{k-1}^{\mathsf{T}}\cdots\mathbf{A}_1^{\mathsf{T}}.$$

例 7　已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$,

求 $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法 1　因为

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

所以 $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$

解法 2

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -7 & -5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

定义 5 设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{\mathrm{T}} = A$，即

$$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

则称 A 为对称矩阵(symmetric matrix)；

若 $A^{\mathrm{T}} = -A$, 即

$$a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 A 为反对称矩阵(skew-symmetric matrix).

易知反对称矩阵主对角线上各元素均为 0.

例如 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ 是对称矩阵,

而 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ 是反对称矩阵.

显然，对角矩阵一定是对称矩阵.

由（反）对称矩阵的定义可以证明下面基本性质：

(1) 设 $\mathbf{A}$ 为（反）对称矩阵，则 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$， $\lambda\mathbf{A}$ 也是（反）对称矩阵.

(2) 设 $\mathbf{A}$，B 为（反）对称矩阵，则 $\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$ 仍是（反）对称矩阵.

但注意，此时 $\mathbf{AB}$ 不一定是（反）对称矩阵.

例如 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 是对称矩阵，

但 $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 不是对称矩阵.

例 8　设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$ 是 n 阶对称矩阵，证明 $AB + BA$ 是 n 阶反对称矩阵.

例 8　设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\mathbf{B}$ 是 n 阶对称矩阵，证明 $AB+BA$ 是 n 阶反对称矩阵.

证　因 $A^{\mathrm{T}}=-A, B^{\mathrm{T}}=B$，有

$$(AB+BA)^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}+(BA)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$$

$$=B(-A)+(-A)B=-(AB+BA).$$

故结论成立.

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

定义 6 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 为复矩阵，由 $\mathbf{A}$ 的元素 a_{ij} 的共轭复数 $\bar{a}_{ij}$ 为元素的矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的共轭矩阵(conjugate matrix)，记为 $\overline{\mathbf{A}}$，即

$$\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a}_{ij})_{m\times n}.$$

共轭矩阵的性质

设 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 复矩阵，在运算可行的情况下，有如下性质：

(1) $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$;

(2) $\overline{k\mathbf{A}}=\overline{k}\,\overline{\mathbf{A}}$;（$\overline{k}$ 为复数）

(3) $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$;

(4) $\overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}=(\overline{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}}$.

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

定义 7 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 A 的行列式(determinant of matrix)，记作 $|A|$ 或 $\det \mathbf{A}$.

矩阵 A 的行列式的性质

设 A,B 为 n 阶方阵，λ 为实数，则下列等式成立：

1. $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{A}|$；
2. $|\lambda A| = \lambda^n |\mathbf{A}|$；
3. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

仅证 (3). 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 构造 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix},$$

由例 1.10，可知 $D=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

在 D 中，以 b_{1j} 乘第 1 列，以 b_{2j} 乘第 2 列,⋯，以 b_{nj} 乘第 n 列，都加到第 $n+j$ 列上（$j=1,2,\cdots,n$），有

$$D=\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix},$$

其中 $C=(c_{ij})$，$c_{ij}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{nj}a_{in}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，故 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$.

再对 D 的行作 $r_j \longleftrightarrow r_{n+j}$（$j = 1, 2, \cdots, n$），有

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix},$$

再由例 1.10，有

$D = (-1)^n |-\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{C}| = (-1)^n(-1)^n |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|$. 得

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

注意

初学者容易犯的一个错误是 $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$.

由 (3) 知，对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$，不一定有 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，但总有 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$.

例 9　设 A 是 n 阶方阵，满足 $AA^{\mathrm{T}} = E$，且 $|A| < 0$，求 $|A+E|$.

解　由于 $\mathbf{A}$，有 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right| = |\mathbf{A}| \cdot \left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right| = |E| = 1$，故 $|\mathbf{A}|^2 = 1$. 由 $|A| < 0$，得 $|\mathbf{A}| = -1$，从而

$$|A+E| = \left|A + AA^{\mathrm{T}}\right| = \left|A(E+A^{\mathrm{T}})\right|$$
$$= |A| \cdot \left|(E+A^{\mathrm{T}})\right| = -\left|(E+A)^{\mathrm{T}}\right|$$
$$= -|A+E|,$$

所以

$$2|\mathbf{A}+\mathbf{E}| = 0,$$

即

$$|\mathbf{A}+\mathbf{E}| = 0.$$

第二节	矩阵的运算
A	矩阵的加法和数乘
B	矩阵的乘法
C	矩阵的转置与对称矩阵
D	共轭矩阵
E	方阵的行列式
F	伴随矩阵

定义 8　若 A 为方阵，行列式 $|A|$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 构成的如下方阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^{\mathrm{T}}, \quad (2\text{-}11)$$

称为 A 的伴随矩阵(adjoint matrix).

定义 8　若 A 为方阵，行列式 $|A|$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 构成的如下方阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^{\mathrm{T}}, \quad (2\text{-}11)$$

称为 A 的伴随矩阵(adjoint matrix).

注意　伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的 (i,j) 元是矩阵 $\mathbf{A}$ 的 (j,i) 元的代数余子式.

例 10　求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解　易求得

$$M_{11} = -11,\ M_{12} = -11,\ M_{13} = 11,$$

$$M_{21} = -5,\ M_{22} = -1,\ M_{23} = 7,$$

$$M_{31} = -7,\ M_{32} = 3,\ M_{33} = 1,$$

故 **A** 的伴随矩阵为:

$$A^* = \begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -1 & -3 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 1 对伴随矩阵，有如下结论成立：

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

证 由行列式按行展开的定理及其推论，得

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

故

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{E},$$

类似地，可证 $A^*A = |A|E$，故 $A^*A = AA^* = |A|E$.

对 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$，还可以验证如下性质：

(1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$；

(2) $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$，$k$ 为数.

定义 1 对于 n 阶方阵 A, 若存在 n 阶方阵 B，满足

$$AB = BA = E,$$

则称方阵 A 可逆(invertible matrix)，且称方阵 B 为 A 的逆矩阵(inverse of matrix A), 简称为 A 的逆阵或逆.

例如，对矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

因 $AB = BA = E$，故 B 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵.

性质 1 如果 A 是可逆的，则 A 的逆矩阵唯一.

性质 1　如果 A 是可逆的，则 A 的逆矩阵唯一.

证　设 B，C 都是 A 的逆矩阵，即 $AB = BA = E$，$AC = CA = E$，则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

因此，在 A 可逆时，可用 A^{-1} 来表示 A 的逆矩阵，即若 $AB = BA = E$，则 $B{=}A^{-1}$.

矩阵可逆的充分必要条件:

定理 1　n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$. 且在 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*. \qquad (2\text{-}12)$$

其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

证　充分性．设 A 的伴随矩阵为 $\mathbf{A}^*$，则由伴随矩阵的性质，有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因为 $|\mathbf{A}| \neq 0$，故有 $\mathbf{A} \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$，从而 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$．

证 充分性. 设 A 的伴随矩阵为 $\mathbf{A}^*$，则由伴随矩阵的性质，有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因为 $|\mathbf{A}| \neq 0$，故有 $\mathbf{A} \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$，从而 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

必要性. 由于 A 可逆，即存在 A^{-1}，使 $A^{-1}A=E$, 故 $|\mathbf{A}A^{-1}| = |E| = 1$, 有 $|A^{-1}| \cdot |\mathbf{A}| = 1$，所以 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

当矩阵的行列式不为零时，称该矩阵为非奇异矩阵(nons
matrix) 或非退化矩阵(non-degenerate matrix)；

当矩阵的行列式为零时，称该矩阵为奇异矩阵(singular
matrix) 或退化矩阵（degenerate matrix).

定理 2.2 表明，矩阵 A 可逆，$|A| \neq 0$ 与矩阵 A 非奇异，这三者是等价的.

例 1 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件，在可逆时求其逆矩阵.

解 由于 $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，所以矩阵 A 可逆的充要条件是 $ad-bc\neq 0$. 此时 A 的逆矩阵为：

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2　求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 按定理，只需求出 A 的行列式与伴随矩阵．由例 2.10，已求得 A 的伴随矩阵，因 $|\mathbf{A}| = -22$，于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -1 & -3 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

注　　如果根据公式 (2-12) 计算逆矩阵，计算量很大，因此该公式主要用于理论推导和计算低阶矩阵及特殊矩阵的逆矩阵，本章第 5 节将讨论求逆矩阵的一般方法.

注　　如果根据公式 (2-12) 计算逆矩阵，计算量很大，因此该公式主要用于理论推导和计算低阶矩阵及特殊矩阵的逆矩阵，本章第 5 节将讨论求逆矩阵的一般方法.

推论 1　若 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$（或 $\mathbf{BA}=\mathbf{E}$），则 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$.

证　因 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=|\mathbf{AB}|=|\mathbf{E}|=1$，故 $|\mathbf{A}|\neq 0$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在. 于是

$$\mathbf{B}=\mathbf{EB}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}.$$

注　如果根据公式 (2-12) 计算逆矩阵，计算量很大，因此该公式主要用于理论推导和计算低阶矩阵及特殊矩阵的逆矩阵，本章第 5 节将讨论求逆矩阵的一般方法.

推论 1　若 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$（或 $\mathbf{BA}=\mathbf{E}$），则 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$.

证　因 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=|\mathbf{AB}|=|\mathbf{E}|=1$，故 $|\mathbf{A}|\neq 0$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在. 于是

$$\mathbf{B}=\mathbf{EB}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}.$$

该推论说明：要判断 A 可逆，不必像定义那样验证 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，只需验证 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$，或 $\mathbf{BA}=\mathbf{E}$ 即可.

注　上述推论也可以这样证明：

因 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{E}| = 1$，故 $|\mathbf{A}| \neq 0$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在．对 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 两边同时左乘 $\mathbf{A}^{-1}$，可得 $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$，故 $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{EB} = \mathbf{A}^{-1}$，即 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$．

例 3　设 A 可逆，且 $A^*B = A^{-1} + B$，证明 B 可逆，当 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求 B.

解　由$A^*B=A^{-1}+B=A^{-1}+EB$，得$(A^*-E)B=A^{-1}$.
两边同时左乘 A，可得 $A(A^*-E)B=AA^{-1}$，即 $(|A|E-A)B=E$，则 B 可逆，且 $B=(|A|E-A)^{-1}$，其中

$$|A|E-A=\begin{pmatrix}8 & & \\ & 8 & \\ & & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

按逆矩阵的运算性质和求逆公式，易得

$$B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

对 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2\text{-}13)$$

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则 (2-13) 可表示为：$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2-14)

对（2-13），若 $D=|\mathbf{A}|\neq 0$，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，（2-14）两边同时左乘 $\mathbf{A}^{-1}$，即 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*\mathbf{b}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

比较等式两端，得

$$x_j=\frac{1}{D}(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\cdots+A_{nj}b_n)=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n,$$

这就是克拉默法则.

例 4 利用逆矩阵求方程组的解

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

解 由例 2.12，方程组的解为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -1 & -3 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

性质 2 设 A, B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

性质 2 设 A,B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

性质 2　设 A,B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

② λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$；

性质 2　设 A,B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

② λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

③ AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

性质 2　设 A, B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

② λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$；

③ AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

从而，若 $A = B$, 则 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$,

一般地有　$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. 记 $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

性质 2 设 A,B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

② λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

③ AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

从而，若 $A = B$, 则 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$,

一般地有 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. 记 $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

④ A^{T} 亦可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

性质 2 设 A,B 均为同阶可逆方阵，数 $\lambda \neq 0$，则下面结论成立：

① A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

② λA 亦可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$；

③ AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

从而，若 $A = B$, 则 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$，

一般地有 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. 记 $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

④ A^{T} 亦可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

⑤ $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

证　①因 A 可逆，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

证　①因 A 可逆，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

②因 $(\lambda A)\cdot\frac{1}{\lambda}A^{-1}=A\cdot A^{-1}=\mathbf{E}$，故 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

证 ①因 A 可逆，故 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

②因 $(\lambda A)\cdot\frac{1}{\lambda}A^{-1}=A\cdot A^{-1}=\mathbf{E}$，故 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

③因 $(\mathbf{AB})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{BB}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{AEA}^{-1}=\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$，所以 AB 可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

证 ①因 A 可逆，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

②因 $(\lambda A)\cdot\frac{1}{\lambda}A^{-1}=A\cdot A^{-1}=\mathbf{E}$，故 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

③因 $(\mathbf{A}\mathbf{B})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$，所以 AB 可逆，且 $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

④因 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，故 $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\mathsf{T}}=\mathbf{E}^{\mathsf{T}}$，从而 $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}=\mathbf{E}$，于是 $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$.

证 ①因 A 可逆，故 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$.

②因 $(\lambda A)\cdot\frac{1}{\lambda}A^{-1}=A\cdot A^{-1}=\mathbf{E}$，故 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

③因 $(\mathbf{AB})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{BB}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{AEA}^{-1}=\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$，所以 AB 可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

④因 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，故 $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$，从而 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}$，于是 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

⑤因 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$，从而 $|\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=\left|\mathbf{AA}^{-1}\right|=|\mathbf{E}|=1$，得 $\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

例 5　设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，证明 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 都可逆，并求 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$.

解　由已知可得 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=2\mathbf{E}$，从而有

$$\mathbf{A}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{E},$$

于是可知 $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{E})$.

同样由 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=2\mathbf{E}$ 可得

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-6\mathbf{E}=-4\mathbf{E},$$

即 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})\cdot\frac{1}{4}(3\mathbf{E}-\mathbf{A})=\mathbf{E}$，故

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}=\frac{1}{4}(3\mathbf{E}-\mathbf{A}).$$

例 6　证明：当方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 可逆时，有

(1) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$;

(2) $(\mathbf{A}^k)^* = (\mathbf{A}^*)^k$，$k$ 为正整数；

(3) $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

证　(1) 由 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| \neq 0$ 可知 $\mathbf{AB}$ 可逆，故 $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^* = |\mathbf{AB}|\mathbf{E}$，从而

$$(\mathbf{AB})^* = (\mathbf{AB})^{-1}|\mathbf{AB}|\mathbf{E} = |\mathbf{AB}|(\mathbf{AB})^{-1}$$

$$= |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1}\cdot|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$$

$$= |\mathbf{B}|\frac{1}{|B|}\mathbf{B}^*\cdot|\mathbf{A}|\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.$$

(2) 由 (1) 直接可得.

(3) 因 $\mathbf{A}$ 可逆，有 $|\mathbf{A}| \neq 0$，因 $\mathbf{AA}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$，从而 $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n$，即得

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成若干个小矩阵，每个小矩阵称为 A 的子块(submatrix)，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵(block matrix).

例如对 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$，将 A 分成子块的分法很多，例如：

(1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$;

记 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，其中

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{22}=(a_{34}),$$

即 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 为 A 的子块，而 A 成为以 A_{11}，A_{12}, A_{21}, A_{22} 为元素的矩阵.

一种重要的分块方法是所谓的按列划分和按行划分.

设 $\mathbf{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，把矩阵的每一列看成是一个 $m\times 1$ 的小矩阵 α_j，于是 $\mathbf{A}$ 可以写成

$$\mathbf{A}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n);$$

类似地，把矩阵的每一行看成是一个 $1\times n$ 的小矩阵 β_i，于是 $\mathbf{A}$ 可以写成

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

矩阵分块的不同给计算带来差别. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

我们对 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 进行不同形式的划分, 来进行 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的基本运算.

划分一、把 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别分划成 4 个 2×2 小矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}\\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}.$$

现在对矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 进行乘积运算，把这些小矩阵看作数一样来处理，按乘法运算规则，有

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}\\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}_{22}\end{pmatrix},$$

计算出 $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{21}$，$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}_{22}$，可得

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

同样，我们也可以进行加法、数乘的运算，例如：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{E}_2+\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_1+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{E}_2+\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}，\ 3\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3\mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ 3\mathbf{A}_1 & 3\mathbf{E}_2 \end{pmatrix}.$$

划分二、把 **A** 与 **B** 按下列形式划分成 4 个小矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

按这种划分进行乘法运算，即

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix},$$

此时所有的小矩阵乘积运算都是没有定义的.

划分三、对矩阵 **A** 的划分同划分二相同，而 **B** 的划分改成为：

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix},\ \mathbf{B}_{12}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21}=\begin{pmatrix}2&-1&1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}_{22}=(0).$$

此时 **AB** 的运算也可以按分块形式进行：

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{1}\\\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{1}\end{pmatrix}$$

但此时小矩阵的乘法运算并没有带来方便，不如划分一简单.

分块的基本原则

既要考虑矩阵本身的特点和运算需要，还要注意分块后的矩阵在运算中是否有意义及子块间的运算应遵循矩阵的运算规则.

因此在对矩阵进行分块运算时，必须要合理分块，以保证小矩阵的运算可以进行，特别是乘法运算和求逆运算.

(1) 分块矩阵的和与数乘

设矩阵 A 与 B 为同型矩阵，采用同样的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 均为同型矩阵. 容易证明

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2r}+B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的转置

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & A_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的乘积

一般，设 $\mathbf{A}=(a_{ik})_{sn}, \mathbf{B}=(b_{kj})_{nm}$，把 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分成一些小矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1l} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tl} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{B}=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{B}_{l2} & \cdots & \mathbf{B}_{lr} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中每个 $\mathbf{A}_{ij}$ 是 $s_i \times n_j$ 小矩阵，每个 $\mathbf{B}_{ij}$ 是 $n_i \times m_j$ 小矩阵，于是有

$$
\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tr} \end{pmatrix} \end{array},
$$

其中

$$
\mathbf{C}_{pq}=\mathbf{A}_{p1}\mathbf{B}_{1q}+\mathbf{A}_{p2}\mathbf{B}_{2q}+\cdots+\mathbf{A}_{pl}\mathbf{B}_{lq}=\sum_{k=1}^{l}\mathbf{A}_{pk}\mathbf{B}_{kq}
$$

$$
(p=1,2,\cdots,t;q=1,2,\cdots,r).
$$

注意　在分块中矩阵 **A** 的列的分法必须与矩阵 **B** 的行的分法一致.

（4）分块对角矩阵

设方阵 A 的分块矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

除主对角线上的子块不为零子块外，其余子块都为零矩阵，且 $A_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为方阵，则 A 称为分块对角矩阵(block diagonal matrix)(或准对角矩阵).

具有同样分法的同阶分块对角矩阵的和、差、积仍是同类型分块对角矩阵，其运算法则类似于对角矩阵相应的运算法则．设有与 A 同阶的分块对角矩阵

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix},$$

其中 A_i 与 $B_i(i=1,2,\cdots,m)$ 均为对应同阶方阵，则有

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & & & \\ & A_2 \pm B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \pm B_m \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m B_m \end{pmatrix}.$$

它们还是分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式与逆矩阵

分块对角矩阵的行列式为

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}_1|\ |\mathbf{A}_2|\ \cdots |\mathbf{A}_m|\,.$$

分块对角矩阵的行列式与逆矩阵

分块对角矩阵的行列式为

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}_1|\ |\mathbf{A}_2|\ \cdots |\mathbf{A}_m|.$$

当 $|\mathbf{A}_i| \neq 0$ 时，有 $|\mathbf{A}| \neq 0$，从而可知 $\mathbf{A}$ 可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 1　设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{A}^2$.

解 将 $\mathbf{A}$ 分块为分块对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \mathbf{A}_3\end{pmatrix}$，

则

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1^2 & & \\ & \mathbf{A}_2^2 & \\ & & \mathbf{A}_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & & & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & & & 4 & -4 & 1 \\ & & & 0 & 4 & -4 \\ & & & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

例 2 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

例 2　设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解　$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，$A_1=(4)$,

$A_1^{-1}=\left(\frac{1}{4}\right)$，$A_2=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$,$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$,

于是有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&2&-3\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

例 3 求矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 分别是 k 阶和 r 阶的可逆矩阵，$\mathbf{C}$ 是 $r \times k$ 矩阵，$\mathbf{O}$ 是 $k \times r$ 零矩阵.

解　因为 $|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, 所以当 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆时，$\mathbf{D}$ 也可逆．设

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_r \end{pmatrix},$$

这里 $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_r$ 分别表示 k 阶和 r 阶单位矩阵．乘出来并比较等式两边，得

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X}_{11} = \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{A}\mathbf{X}_{12} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{11} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{12} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{22} = \mathbf{E}_r. \end{cases}$$

由第①，②式得 $\mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{X}_{12} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$,

代入第④式，得 $\mathbf{X}_{22} = \mathbf{B}^{-1}$,

代入第③式，得

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = -\mathbf{C}\mathbf{X}_{11} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{X}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$$

因此

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

第四节 矩阵的分块

A 矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换

定义 1　对矩阵的行（列）施行的下述三种变换，称为矩阵的初等行（列）变换(elementary row (column) transformation)：

(1) 对换变换：交换矩阵的 i, j 两行（列），记作 $r_i \longleftrightarrow r_j$（$c_i \longleftrightarrow c_j$）；

(2) 倍乘变换：用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的第 i 行（列），记作 $k\,r_i$（$k\,c_i$）；

(3) 倍加变换：把矩阵的第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列），记作 $r_i + k\,r_j$（$c_i + k\,c_j$）.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换(elementary transformation).

在矩阵的初等变换中，倍乘变换与倍加变换是基本变换，对换变换可通过倍乘变换与倍加变换实现.

因此以后我们在证明与矩阵的初等变换有关的性质时，只要对倍乘变换与倍加变换验证成立就行.

例 4　用倍乘变换与倍加变换对换矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

的第 1 行与第 3 行.

解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_3} \begin{pmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_3} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}.$$

定理 1 初等变换不改变方阵的可逆性.

定理 1　初等变换不改变方阵的可逆性.

证　考虑倍乘变换与倍加变换即可.

设方阵 A 经一次倍乘变换（某行乘以非 0 常数 k）或倍加变换化为方阵 B，考虑它们的行列式，则 $|B| = k\,|A|\,(k \neq 0)$, 或 $|B| = |A|$，所以 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$, 由此可得 A 与 B 有相同的可逆性.

初等矩阵

对单位矩阵 $\mathbf{E}$ 施行一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵(elementary matrix). 共有 3 种初等矩阵:

(1) 对换矩阵：$\mathbf{E}(i,j)$ 或 $\mathbf{E}_{ij}$，即交换 $\mathbf{A}$ 的第 i,j 两行或交换 $\mathbf{E}$ 的第 i,j 两列得到的矩阵.

$$\mathbf{E}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 倍乘矩阵：$\mathbf{E}(i(k))$ 或 $\mathbf{E}_i(k)$，即用数 $k \neq 0$ 乘 $\mathbf{E}$ 的第 i 行或第 i 列得到的矩阵.

$$\mathbf{E}(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} & \end{array}$$

(3) 倍加矩阵：$\mathbf{E}(i,j(k))$ 或 $\mathbf{E}_{ij}(k)$，即把 $\mathbf{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，或把 $\mathbf{E}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上得到的矩阵.

$$\mathbf{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}.$$

显然，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换，例如：

1. 变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为 $r_i \leftrightarrow r_j$；
2. 变换 $k\,r_i$ 的逆变换为 $\frac{1}{k} r_i$；
3. 变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$.

每种初等矩阵也是可逆矩阵，且其逆矩阵是同类型的初等矩阵，即有

定理 2　初等矩阵均可逆，且其逆矩阵、转置矩阵仍为同类型初等矩阵：

$$\mathbf{E}(i,j)^{-1}=\mathbf{E}(i,j);$$

$$\mathbf{E}(i(k))^{-1}=\mathbf{E}(i(\tfrac{1}{k}));$$

$$\mathbf{E}(i,j(k))^{-1}=\mathbf{E}(i,j(-k));$$

$$\mathbf{E}(i(k))^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}(i(k));$$

$$\mathbf{E}(i,j)^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}(i,j);$$

$$\mathbf{E}(i,j(k))^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}(j,i(k)).$$

例 5　计算矩阵与初等矩阵的乘积：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+k \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

定理 3 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵. 初等矩阵左乘 $\mathbf{A}$ 等同于对 $\mathbf{A}$ 作相应的初等行变换, 初等矩阵右乘 $\mathbf{A}$ 等同于对 $\mathbf{A}$ 作相应的初等列变换. “等同于”指的是:

① $\mathbf{E}_m(i,j)\mathbf{A} \Leftrightarrow$ 交换 $\mathbf{A}$ 的 i,j 两行;

② $\mathbf{E}_m(i(k))\,\mathbf{A} \Leftrightarrow$ 以 $k \neq 0$ 乘 $\mathbf{A}$ 的第 i 行;

③ $\mathbf{E}_m(i,j(k))\,\mathbf{A} \Leftrightarrow$ 把 $\mathbf{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去;

④ $\mathbf{A}\,\mathbf{E}_n(i,j) \Leftrightarrow$ 交换 $\mathbf{A}$ 的 i,j 两列;

⑤ $\mathbf{A}\,\mathbf{E}_n(i(k)) \Leftrightarrow$ 以 $k \neq 0$ 乘 $\mathbf{A}$ 的第 i 列;

⑥ $\mathbf{A}\,\mathbf{E}_n(i,j(k)) \Leftrightarrow$ 把 $\mathbf{A}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上去.

证　这里仅证明行变换的情况，对于列变换可类似地证明.

将 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 按行分块，记 $\mathbf{A}$ 的第 i 行为

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,2,\cdots,m,$$

则

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}.$$

①对 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{E}_m(i,j)$，得

$\mathbf{E}_m(i,j)\mathbf{A}$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
& & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
& & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
& & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
& & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},
$$

这等同于对矩阵 $\mathbf{A}$ 施行交换两行的初等行变换.

②对 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{E}_m(i(k))$，得

$$\mathbf{E}_m(i(k))\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ k\alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},$$

这等同于对矩阵 $\mathbf{A}$ 施行对第 i 行乘以 k 的初等行变换.

③对 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{E}_m(i,j(k))$，得

$\mathbf{E}_m(i,j(k))\mathbf{A}$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i + k\alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_m
\end{pmatrix},
$$

这等同于对矩阵 $\mathbf{A}$ 施行第 j 行的 k 倍加到第 i 行的初等行变换.

注　定理 2.5 把矩阵的初等变换用矩阵乘法的等式表示了出来，这样我们可以

1. 利用初等变换去研究矩阵乘法，使问题更直观;
2. 也可以利用矩阵乘法的等式去研究初等变换，等式使研究更理性和灵活.

定义 2　如果矩阵 **A** 满足：若 **A** 存在零行 (元素全为零的行)，且零行都在非零行 (元素不全为零的行) 的下边，非零行的第一个非零元素（简称首非零元）的列标随着行标的增大而增大，则称矩阵 **A** 为行阶梯形矩阵(row echelon matrix)；

若 **A** 为行阶梯形矩阵，且非零行的首非零元为 1（简称首 1）并且这些首 1 所在的列的其它元素均为 0，则称矩阵 **A** 为行最简形矩阵(reduced row echelon matrix)；

若 **A** 为行最简形矩阵，且 **A** 的左上角是一个单位矩阵，其余元素均为 0，则称矩阵 **A** 为标准形矩阵(normal form for a matrix).

$m \times n$ 矩阵的行阶梯形矩阵的一般形式是:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $a_{ij_i} \neq 0$ 是第 i 行的首非零元 $(i = 1, 2, \cdots, r)$.

$m \times n$ 矩阵的行最简形矩阵的一般形式是:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

例如下面矩阵中，（1）（2）是行阶梯形矩阵，（3）是行最简形矩阵，（4）是标准形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法可以证明,

对于任何矩阵 $\mathbf{A}$，总可以经过有限次初等行变换把它化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

进一步地，对行最简形矩阵施行初等列变换，还可以将其化为标准形矩阵.

由于初等矩阵的乘积是可逆矩阵，从而结合定理 2.5，有

定理 4 对任意 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$，有

(1) 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$(行阶梯形，$\mathbf{F}$ 为非零行子块)；

(2) 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{PAQ} = \mathbf{F},\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}\quad (\mathbf{F}\text{ 为 }\mathbf{A}\text{ 的标准形}).\ (2\text{-}15)$$

或说成：存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$，使得

$$A = P_1 F Q_1,\ F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\ (F\text{ 为 }A\text{ 的标准形}).$$

例 6　设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，试用初等变换将 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯形矩阵、行最简形矩阵及标准形矩阵，并写出其中的初等行变换所对应的初等矩阵.

解 对矩阵 **A** 先实施初等行变换，再实施初等列变换：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_2,c_4-c_2]{c_3-\frac{1}{2}c_1,c_4-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

其中 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等是行阶梯形矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是行最简形矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是标准形矩阵. 与前六步初等行变换

对应的初等矩阵分别是:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}_{2,1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{E}_{3,1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{E}_{3,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = E_{1,2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = E_2(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_6 = E_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

且有

$$\mathbf{P}_6\mathbf{P}_5\mathbf{P}_4\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 5 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_l$，使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_l$.

定理 5 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_l$，使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_l$.

证 设 n 阶方阵 A 的标准形为 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 由于初等变换可逆，所以矩阵 F 经有限次初等变换也可化为 A，于是存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\cdots$，$\mathbf{P}_l$，使得 $A = P_1P_2\cdots P_sFP_{s+1}\cdots P_l$，应用定理 2.3 可得

A 可逆 $\Leftrightarrow F$ 可逆 $\Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow F = E \Leftrightarrow A = P_1P_2\cdots P_sP_{s+1}\cdots P_l$.

由定理 2.7 可知：当 A 是 n 阶可逆矩阵时，存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, , \cdots, P_l$, 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_l \Leftrightarrow \mathbf{P}_l^{-1} \cdots \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P}_l^{-1} \cdots \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1},$$

因初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵，故存在有限个初等矩阵 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i^{-1}$（$i = 1, 2, \cdots, l$），使得

$$\mathbf{Q}_l \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_l \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1},$$

即，如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 化成单位矩阵，则同样用这一系列初等行变换去化单位矩阵，就得到 $\mathbf{A}^{-1}$，从而得到一有效的求逆矩阵的方法：

求逆矩阵的方法

把 $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ 这两个 $n \times n$ 矩阵凑在一起，作成一个 $n \times 2n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$，用初等行变换把它的左边一半化成 $\mathbf{E}$（等同于左乘 $\mathbf{A}^{-1}$），此时右边的一半就是 $\mathbf{A}^{-1}$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 7　设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$，用初等变换法求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解

$$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{E})=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-3&-4&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3;\ (-1)\cdot r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-14&3&9\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-6\\0&0&1&5\end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$

注　3 阶及 3 阶以上矩阵求逆矩阵常用初等变换法，用初等行变换求逆矩阵时，必须始终作行变换，其间不能作任何列变换，如果出现全零行，该矩阵不可逆.

进一步地，我们还可以得到当 $\mathbf{A}$ 可逆时，求解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 的初等变换法：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{X}$ 为方程的解，且 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

事实上，实施初等行变换等同于左乘可逆矩阵，从而

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})\xrightarrow{r}(\mathbf{E},\ \ \mathbf{X}),$$

即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{B})=(\mathbf{E}\ \ \mathbf{X})$，

即 $\mathbf{PA}=\mathbf{E}$，$\mathbf{PB}=\mathbf{X}$，因 $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

例 8　设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$.

解 $\quad (\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

继续

$$\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$，此为所给方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的唯一解.

注　对方程 $\mathbf{YA}=\mathbf{B}$，当 $\mathbf{A}$ 可逆时，可通过初等列变换 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{BA}^{-1}\end{pmatrix}$ 得到方程的解 $\mathbf{Y}=\mathbf{BA}^{-1}$，也可以将 $\mathbf{YA}=\mathbf{B}$ 转化为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$，用 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}\mathbf{E} & Y^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 来求解.

定义 3 若矩阵 **A** 经过有限次初等行变换变为矩阵 **B**，称矩阵 **A** 与矩阵 **B** 行等价(row equivalent)，记为 $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$；

若矩阵 **A** 经过有限次初等列变换变为矩阵 **B**，称矩阵 **A** 与矩阵 **B** 列等价(column equivalent)，记为 $\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$；

若矩阵 **A** 经过有限次初等变换变为矩阵 **B**，称矩阵 **A** 与矩阵 **B** 等价(equivalent)，记为 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

等价作为矩阵间的一种关系，不难证明，它具有自反性、对称性与传递性.

(1) 自反性：$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$;

(2) 对称性：若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，则 $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$;

(3) 传递性：若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$，则 $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}$.

定理6 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则有

① $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B} \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$；

② $\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B} \Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{AQ} = \mathbf{B}$；

③ $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$.

证　① $\mathbf{A}\overset{r}{\sim}\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 经有限次初等行变换变成 $\mathbf{B}$

$\Leftrightarrow$ 存在有限个 m 阶初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_l$，使 $\mathbf{P}_l \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_l \cdots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$，使 $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$.

类似可证②，③.

例 9　求 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵 $\mathbf{F}$，并求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA}=\mathbf{F}$.

解 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 & -3 \end{pmatrix},$$

故

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ 10 & -8 & -3\end{pmatrix}.$$

故

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-3&3&1\\3&-2&-1\\10&-8&-3\end{pmatrix}.$$

注　这里 $\mathbf{P}$ 不唯一，因最后的矩阵中，r_2+kr_3 时，$\mathbf{F}$ 不变，但 $\mathbf{P}$ 在变化.

分块矩阵的初等变换

将矩阵的分块乘法与初等变换结合是矩阵运算中很重要的手段，这就是分块矩阵的初等变换．现对某个单位矩阵进行如下分块：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行 (列) 对换；某一行 (列) 左乘 (右乘) 一个矩阵 $\mathbf{P}$；一行 (列) 加上另一行 (列) 的 $\mathbf{P}$(矩阵) 倍数，就可得到如下类型的一些矩阵：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}.$$

这些矩阵均称为分块初等矩阵：

分块初等矩阵

(1)分块对换矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}$.

分块初等矩阵

(1)分块对换矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}$.

(2)分块倍乘矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵.

分块初等矩阵

(1)分块对换矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}$.

(2)分块倍乘矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵.

(3)分块倍加矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵.

下面仅以 2×2 分块矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ 为例来讨论分块矩阵的初等变换（称为广义初等变换）．类似于矩阵的初等变换及对应的初等矩阵，可以定义分块矩阵的三类广义初等变换并对应相应的分块初等矩阵.

分块初等矩阵是方阵，它们左乘（或右乘）分块矩阵，在保证可乘的条件下，其作用和前面初等矩阵左乘（或右乘）矩阵的作用是相同的．例如广义初等行变换有:

(1) 交换两行:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

(1) 交换两行：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

(2) 用一个可逆矩阵左乘某行：

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} \mathbf{PA} & \mathbf{PB} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

(3) 用一个矩阵左乘某一行加到另一行:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{PA}+\mathbf{C} & \mathbf{PB}+\mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \tag{2-16}$$

在式 (2-16) 中，选择适当的矩阵 $\mathbf{P}$，可使 $\mathbf{PA}+\mathbf{C}=\mathbf{O}$. 例如 $\mathbf{A}$ 可逆时，选 $\mathbf{P}=-\mathbf{CA}^{-1}$，则 $\mathbf{PA}+\mathbf{C}=\mathbf{O}$，于是变换后的 (2-16) 左端成为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的，因此 (2-16) 中的运算非常有用.

类似地，有广义初等列变换：

(1) 交换两列：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

类似地，有广义初等列变换：

(1) 交换两列：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

(2) 用一个可逆矩阵右乘某行：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BP} \\ \mathbf{C} & \mathbf{DP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix}.$$

(3) 用一个矩阵右乘某一行加到另一行:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BQ} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}+\mathbf{DQ} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}.$$

例 10　设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 均是 n 阶可逆矩阵，求 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 对 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$ 作广义初等行变换

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} & -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{B}^{-1} \cdot r_2]{\mathbf{A}^{-1} \cdot r_1} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix},$$

故

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 11　设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 都是 n 阶矩阵，$\mathbf{A}$ 可逆，证明：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \left| \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right|.$$

证 $$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \cdot r_1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

因 $\begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{vmatrix} = 1$，从而

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\,\left|\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right|.$$

定义 1 在 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 中，任取 k 行和 k 列（$1 \leqslant k \leqslant \min\{m,n\}$），由这些行和列交叉点上的 k^2 个元素按原来的相对位置构成的一个 k 阶行列式，称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个k 阶子式(minor of order k) （共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个）．若该 k 行 k 列的对应顺序一致（即取矩阵的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列元素），则构成的 k 阶行列式称为 $\mathbf{A}$ 的一个k 阶主子式（共有 $C^k_{\min(m,n)}$ 个）．若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，取前 k 行前 k 列构成的 k 阶行列式，称为方阵 $\mathbf{A}$ 的k 阶顺序主子式(ordinal principal minor)，当 k 取 $1, 2, \cdots, n$ 时，就得 $\mathbf{A}$ 的 n 个顺序主子式．

定义 2 设矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，如果 $\mathbf{A}$ 中不为零的子式最高阶数为 r，即存在 r 阶子式不为零，而任何 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）均为零，则称 r 为 $\mathbf{A}$ 的秩（rank），记作 $R(\mathbf{A})$、$r(\mathbf{A})$ 或 $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$．规定：$\operatorname{rank}(\mathbf{O})=0$.

性质 1　设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

性质 1 设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

性质 1　设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

性质 1　设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

④若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(\mathbf{A}) < r$；

性质 1 设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

④若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(\mathbf{A}) < r$；

⑤若 $R(\mathbf{A}) = r$，则 A 的所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为 0，且所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也全为 0；

性质 1 设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

④若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(\mathbf{A}) < r$；

⑤若 $R(\mathbf{A}) = r$，则 A 的所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为 0，且所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也全为 0；

⑥ $R(\mathbf{A}) \leqslant \min\{m, n\}$；

性质 1　设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

④若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(\mathbf{A}) < r$；

⑤若 $R(\mathbf{A}) = r$，则 A 的所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为 0，且所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也全为 0；

⑥ $R(\mathbf{A}) \leqslant \min\{m, n\}$；

⑦当 $k \neq 0$ 时，有 $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$；

性质 1 设 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，则有

①矩阵的秩是唯一的；

② $R(\mathbf{A}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$；

③若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为 0，则 $R(\mathbf{A}) \geqslant r$；

④若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0，则 $R(\mathbf{A}) < r$；

⑤若 $R(\mathbf{A}) = r$，则 A 的所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为 0，且所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也全为 0；

⑥ $R(\mathbf{A}) \leqslant \min\{m, n\}$；

⑦当 $k \neq 0$ 时，有 $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$；

⑧ $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$.

对 n 阶方阵 $\mathbf{A}$，由于 $\mathbf{A}$ 的 n 阶子式仅有 $|\mathbf{A}|$，故若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则有 $R(\mathbf{A}) = n$；

若 $|\mathbf{A}| = 0$，则 $R(\mathbf{A}) < n$. 因此称可逆矩阵为满秩矩阵（full rank matrix），不可逆矩阵又称为降秩矩阵（reduced rank matrix）.

对矩阵 $A_{m\times n}$，若 $R(\mathbf{A}) = m$，称 $\mathbf{A}$ 为行满秩矩阵（full row rank matrix）；

若 $R(\mathbf{A}) = n$，称 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵（full column rank matrix）.

定理 1　初等变换不改变矩阵的秩，即若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，则

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}).$$

证　因为若经一次初等行变换矩阵的秩不变，则经有限次初等行变换矩阵的秩仍然不变．另外，因 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$，且对 $\mathbf{A}$ 施行一次初等列变换，等同于对 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 施行一次初等行变换．从而只用证明经一次初等行变换矩阵的秩不变．

由于对换变换可用倍乘变换与倍加变换实现，故只要考虑后两种初等行变换．设 $R(\mathbf{A}) = r$，且 A 的某个 r 阶子式 $D_1 \neq 0$．设 A 经一次倍乘变换或倍加变换化为 B．下面证明在 B 中一定存在 r 阶非零子式．首先在 B 中取 r 阶子式 D_2，使得 D_2 在 B 中与 D_1 在 A 中的所在行和所在列完全相同．

1）考虑倍乘变换 $A \xrightarrow{kr_i} B$（$k \neq 0$），若 A 的第 i 行不是 D_1 的所在行，则 $D_2 = D_1 \neq 0$；若 A 的第 i 行是子式 D_1 的所在行，则 $D_2 = kD_1 \neq 0$，所以 D_2 是 B 的 r 阶非零子式.

2）考虑倍加变换 $A \xrightarrow{r_i+kr_j} B$（$k \neq 0$），有且只有下列 3 种情况：

(1) 若 A 的第 i 行不是 D_1 的所在行，则 $D_2 = D_1 \neq 0$，D_2 是 B 的 r 阶非零子式.

(2) 若 A 的第 i 行与第 j 行都是 D_1 的所在行（在 D_1 中分别记为 i_1 行与 j_1 行），对子式 D_2 施行倍加变换 $r_{i_1} - k\, r_{j_1}$，则子式 D_2 化为 D_1, 于是 $D_2 = D_1 \neq 0$, D_2 是 B 的 r 阶非零子式.

(3) 若 A 的第 i 行是 D_1 的所在行（在 D_1 中记为 i_1 行），A 的第 j 行不是 D_1 的所在行，由于子式 D_2 的第 i_1 行元是两组数相加，利用行列式的性质，可得 $D_2 = D_1 + kD'_2$，这里 D'_2 不是 B 的子式，它的第 i_1 行元取自 B 的第 j 行，除第 i_1 行外，它与 D_2 完全相同，通过对调变换可将 D'_2 化为 B 的 r 阶子式 $\widetilde{D}_2$，所以 $D'_2 = \pm\widetilde{D_2}$. 若 $\widetilde{D_2} = 0$，则 $D_2 = D_1 \pm k\widetilde{D_2} = D_1 \neq 0$，$D_2$ 是 B 的 r 阶非零子式；若 $\widetilde{D_2} \neq 0$，则 $\widetilde{D_2}$ 是 B 的 r 阶非零子式.

应用性质 2.3 可得 $R(\mathbf{B}) \geqslant r$，即 $R(\mathbf{B}) \geqslant R(\mathbf{A})$.

由于初等变换是可逆的，B 也可以经过一次初等行变换化为 A，利用上述结论可得 $R(\mathbf{A}) \geqslant R(\mathbf{B})$，于是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$.

推论 1　设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，P 是 m 阶可逆矩阵，Q 是 n 阶可逆矩阵，则

$$R(\mathbf{PAQ}) = R(\mathbf{A}).$$

对于行阶梯形矩阵 $\mathbf{A}$，设其共有 k 个非零行，则易得到 $\mathbf{A}$ 的高于 k 阶的一切子式均为零．若取 $\mathbf{A}$ 的 k 个非零行及及首非零元所在的列，则可得到 $\mathbf{A}$ 的一个 k 阶非零子式，故 $\mathbf{A}$ 的秩为 k．这样可以得到如下有用结论：

对于行阶梯形矩阵 $\mathbf{A}$，设其共有 k 个非零行，则易得到 $\mathbf{A}$ 的高于 k 阶的一切子式均为零．若取 $\mathbf{A}$ 的 k 个非零行及及首非零元所在的列，则可得到 $\mathbf{A}$ 的一个 k 阶非零子式，故 $\mathbf{A}$ 的秩为 k．这样可以得到如下有用结论：

定理 2　行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数．

根据定理 2.10，要求 $\mathbf{A}$ 的秩，只需将 $\mathbf{A}$ 用初等变换变为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为该矩阵的秩．因为行阶梯形或标准形 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 中非零行的个数为原矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩，所以矩阵的标准形是唯一的．

例 1　设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 的秩，并求 $\mathbf{A}$ 的一个最高阶非零子式．

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - r_4;\ r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(\mathbf{A}) = 3$.

最高阶非零子式为 3 阶，直接从 $\mathbf{A}$ 的 $C_4^3C_5^3 = 40$ 个 3 阶子式中找非零子式较麻烦，从行阶梯形矩阵知，记 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$，由于上面施行初等变换中没有用列变换，所以 $\mathbf{A}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 的行阶梯形矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，知 $R(\mathbf{A}_0) = 3$，故 $\mathbf{A}_0$ 中必有 3 阶非零子式. 在 $\mathbf{A}_0$ 的 C_4^3=4 个 3 阶子式中找非零子式较在 $\mathbf{A}$ 中找容易.

由 $\mathbf{A}$ 的前 3 行构成的子式得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $\mathbf{A}$ 的最高阶非零子式之一为 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

例 2　设 $\mathbf{A}$ 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵，求证：$\mathbf{A}$ 可以表示成 r 个秩为 1 的 $m \times n$ 矩阵之和.

证　$\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(\mathbf{A})=r$，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$. 记 $\mathbf{E}_{ii}$ 为第 i 行第 i 列元素为 1，其余元素均为 0 的 $m\times n$ 阶矩阵，有

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{22}+\cdots+\mathbf{E}_{rr}.$$

于是

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\sum_{i=1}^{r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{ii}\mathbf{Q}^{-1}.$$

因为 $R(\mathbf{E}_{ii})=1$，所以 $R(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{ii}\mathbf{Q}^{-1})=1$. 得证.

定理 3 （西尔维斯特定理，也称积秩定理）设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times l$ 矩阵，则

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) - n \leqslant R(\mathbf{AB}) \leqslant \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}.$$

定理 3 （西尔维斯特定理，也称**积秩定理**）设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times l$ 矩阵，则

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) - n \leqslant R(\mathbf{AB}) \leqslant \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}.$$

证 设 $R(\mathbf{A}) = r$，$R(\mathbf{B}) = s$，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的标准形矩阵分别为 $F_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$F_2 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$，应用定理 2.6，必存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{PF}_1\mathbf{Q}$，$\mathbf{B} = \mathbf{RF}_2\mathbf{S}$，于是

$$AB = PF_1QRF_2S = P(F_1QRF_2)S.$$

应用定理 2.9 的推论得

$$R(AB) = R(P(F_1 QRF_2)S) = R(F_1 QRF_2),$$

记 $C = QR = \begin{pmatrix} C_{r\times s} & C_{r\times(n-s)} \\ C_{(n-r)\times s} & C_{(n-r)\times(n-s)} \end{pmatrix}$, 因矩阵 Q, R

皆可逆，故 C 可逆，则 $R(C) = n$，且

$$F_1 QRF_2 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{r\times s} & C_{r\times(n-s)} \\ C_{(n-r)\times s} & C_{(n-r)\times(n-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix} =$$

于是 $R(AB) = R\begin{pmatrix} C_{r\times s} & O \\ O & O \end{pmatrix} = R(C_{r\times s}) \leqslant \min\{r, s\}$

$\min\{R(A), R(B)\}$.

比较矩阵 C 与 $\begin{pmatrix} C_{r\times s} & O \\ O & O \end{pmatrix}$，将 C 的 $(n-r)$ 个行全改为零行后，该矩阵的秩最多减少 $(n-r)$；同样，将 C 的 $(n-s)$ 个列全改为零列后，该矩阵的秩最多减少 $(n-s)$, 因此

$$R(AB) = R\begin{pmatrix} C_{r\times s} & O \\ O & O \end{pmatrix} \geqslant n-(n-r)-(n-s) = r+s-n = R(A)+R(B)-n.$$

由积秩定理可得:

若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times s}=\mathbf{O}$, 则 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leqslant n$.

第 3 章例 3.14 还将给出该结论的另一证法.

定理 4　设 A,B 是矩阵，则

① $R(A \pm B) \leqslant R(A) + R(B)$ （A,B 都是 $m \times n$ 矩阵）；

② $\max\{R(A), R(B)\} \leqslant R(A,\ B) \leqslant R(A) + R(B)$ （A,B 分别是 $m \times n, m \times l$ 矩阵）.

证　设 $R(\mathbf{A})=r$，$R(\mathbf{B})=s$，$\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的标准形矩阵分别为 $F_1=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$F_2=\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$，应用定理 2.6，必存在可逆矩阵 P,Q,R,S，使得 $A=PF_1Q$，$B=RF_2S$，将 P,Q,R,S 写成分块矩阵如下：

$P=(P_1,P_2)$，其中 P_1 由 P 的左边的 r 个列向量构成，P_2 由余下的列向量构成；

$Q=\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$，其中 Q_1 由 Q 的上边的 r 个行向量构成，Q_2 由余下的行向量构成；

$R=(R_1,R_2)$，其中 R_1 由 R 的左边的 s 个列向量构成，R_2 由余下的列向量构成；

$S=\begin{pmatrix}S_1\\S_2\end{pmatrix}$，其中 S_1 由 S 的上边的 s 个行向量构成，S_2 由余下的行向量构成；

则

$$A=(P_1,P_2)\begin{pmatrix}E_r & O\\O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}=P_1Q_1,$$

$$B=(R_1,R_2)\begin{pmatrix}E_s & O\\O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1\\S_2\end{pmatrix}=R_1S_1,$$

①将矩阵 A,B 相加（或相减）得

$$A \pm B = P_1Q_1 \pm R_1S_1 = (P_1,R_1)\begin{pmatrix} Q_1 \\ \pm S_1 \end{pmatrix},$$

由于矩阵 (P_1,R_1) 的列数为 $r+s$，应用积秩定理得

$$R(A \pm B) = R\left((P_1,R_1)\begin{pmatrix} Q_1 \\ \pm S_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\leqslant R(P_1,R_1) \leqslant r+s = R(A)+R(B).$$

②将矩阵 A,B 并成 $(A,\ B)$ 得

$$(A,\ B)=(P_1Q_1,\ R_1S_1)=(P_1,\ R_1)\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & S_1 \end{pmatrix},$$

由于矩阵 $(P_1,\ R_1)$ 的列数为 $r+s$，应用积秩定理得

$$R(A,B)=R\left((P_1,\ R_1)\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & S_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\leqslant R(P_1,\ R_1)\leqslant r+s=R(A)+R(B).$$

又由于矩阵增加新的列，矩阵的秩只会增加或不变，所以

$$R(A)\leqslant R(A,\ B),R(B)\leqslant R(A,\ B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \max\{R(A),R(B)\}\leqslant R(A,\ B).$$

例 3　设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$m < n$，证明：

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}| = 0.$$

证　由于 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \min\{m, n\} = m < n$，所以有

$$R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) \leqslant \min\{R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}), R(\mathbf{A})\} < n,$$

而 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，所以 $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}| = 0$.

例 4 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，证明

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})\geqslant n.$$

例 4　设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，证明

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})\geqslant n.$$

证　因 $(\mathbf{A}+\mathbf{E})+(\mathbf{E}-\mathbf{A})=2\mathbf{E}$，故

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})\geqslant R(2\mathbf{E})=n,$$

而 $R(\mathbf{E}-\mathbf{A})=R(\mathbf{A}-\mathbf{E})$，所以有

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})\geqslant n.$$

例 5　证明：若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l}=\mathbf{C}$，且 $R(\mathbf{A})=n$，则

$$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{C})$$

例 5　证明：若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l}=\mathbf{C}$，且 $R(\mathbf{A})=n$，则

$$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{C})$$

证　应用积秩定理得

$$R(B)=R(A)+R(B)-n\leqslant R(C)=R(AB)\leqslant R(B),$$

所以 $R(B)=R(C)$.

对于一般的线性方程组，有如下问题需要研究：

①方程组是否有解？

②若方程组有解，有多少解？如何求出它的所有解？

③在有许多解时，解与解之间的关系如何？

线性方程组的消元法

设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2\text{-}17)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知数，a_{ij} 表示第 i 个方程未知数 x_j 的系数，b_i 为常数项．m 为方程的个数，m 可以小于 n，也可以等于或大于 n.

方程组（2-17）可以等价地写为矩阵形式：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (2\text{-}18)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = (\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}),$$

分别称为方程组（2-17）的系数矩阵(coefficient matrix)、未知数列向量、常数项列向量、增广矩阵（augm matrix）．因为一个线性方程组由它的全部系数和常数项完全确定，所以线性方程组与它的增广矩阵——对应

若 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$，则称方程组 (2-17) 为齐次方程组(system of homogeneous linear equations)，否则称 (2-17) 为非齐次方程组(system of non-homogeneous linear equations).

使方程组成立的已知向量 $\mathbf{x}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 称为方程组的解向量(solution vector)，简称解 (solution). 此时称方程组是相容方程组(system of compatible equations)，如果方程组无解，称方程组是不相容方程组(system of incompatible equations) 或矛盾方程组. 方程组的所有解构成的集合称为方程组的解集 (solution set). 具有相同解集的两个方程组称为同解方程组.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

解　对方程组变形，② -2 ①，③ -①，可得

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - \ x_3 = 2 \\ \qquad\ x_2 - \ x_3 = 5 \end{cases}$$

⑤ $\longleftrightarrow$ ⑥，⑤ -4 ⑥，得

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 - \ x_3 = 5 \\ \qquad\qquad 3x_3 = -18 \end{cases}$$

进一步地，这里省略了具体的实施细节，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 \qquad\quad = -1 \\ \qquad\qquad x_3 = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad\quad = 18 \\ \qquad x_2 \qquad\quad = -1 \\ \qquad\qquad x_3 = -6 \end{cases},$$

从而可以得到方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \quad 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}.$$

上面方程组求解的过程中用到了线性方程组的三种初等变换，即：

①互换两个方程的位置；

②某个方程乘以一个非零的数；

③将某个方程的若干倍加到另一个方程.

若将以上各方程组中系数为 0 的未知数全部补齐，如 $0x_3$ 等，因每步变形未知数 x_1, x_2, x_3 不变，“=”号不变，只是重复书写，变的只是系数和常数项. 若忽略未知数和“+”，“=”号，剩下的就是矩阵，而方程组的三种初等变换对应于对增广矩阵施行相应的初等行变换. 由此可证明如下结论：

定理 1　线性方程组通过方程组的初等变换得到的新方程组与原方程组同解.

证 设线性方程组 $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 的增广矩阵 $\bar{\mathbf{A}}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)$ 经过有限次初等行变换变为矩阵 $\bar{\mathbf{A}}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)$，故存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_1$，从而有

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{P}\mathbf{A}_1, \mathbf{P}\mathbf{b}_1),$$

有 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_1$，$\mathbf{b}_2 = \mathbf{P}\mathbf{b}_1$.

若 $\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 的任一解，即 $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_1$，等式两边同时左乘矩阵 $\mathbf{P}$，则有 $\mathbf{P}\mathbf{A}_1\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\mathbf{b}_1$，即 $\mathbf{A}_2\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_2$. 另一方面，若 $\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ 的任一解，即 $\mathbf{A}_2\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_2$，等式两边同时左乘矩阵 $\mathbf{P}^{-1}$，则由 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1$，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$，有 $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$. 故两方程组同解.

解方程组的过程本质上就是将增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形矩阵的过程．当通过一系列的初等行变换将原增广矩阵变换成行最简形矩阵时，方程组的解也就得到了，这就是所谓的解线性方程组的高斯消元法(Gauss elimination).

用矩阵的初等行变换表示上述例 2.34 方程组的求解过程如下:

$$
\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_1+r_2;\ r_1-3r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.
$$

从而可得方程组的解.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 2 \end{cases}.$$

解　对增广矩阵作初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&3\\3&4&-3&4&8\\1&2&3&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&3\\0&1&6&7&-1\\0&1&6&7&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-9&-8&4\\0&1&6&7&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即原方程组同解于方程组

$$\begin{cases}x_1-9x_3-8x_4=4\\x_2+6x_3+7x_4=-1\end{cases},\text{ 得}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9x_3 + 8x_4 + 4 \\ x_2 = -6x_3 - 7x_4 - 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases},$$

其中 x_3，x_4 可取任意值，令 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，故方程组的全部解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 10 \end{cases}.$$

解　因

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&3&-4&5\\1&-1&2&2\\3&5&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&3&-4&5\\0&-4&6&-3\\0&-4&6&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-4&5\\0&-4&6&-3\\0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

由第三行得：$0x_1+0x_2+0x_3=-2$，故原方程组为矛盾方程组，无解.

定理 2　n 元线性方程组 (2-18) 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩．且当

$$R(\mathbf{A}) = R(\overline{\mathbf{A}}) = n$$

时，有唯一解 (unique solution)；当

$$R(\mathbf{A}) = R(\overline{\mathbf{A}}) < n$$

时，有无穷多个解.

证　为叙述方便，不妨设方程组的增广矩阵 $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\ \ \mathbf{b})$ 经初等行变换可化为如下行最简形矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \end{cases} \tag{2-19}$$

可见当 $d_{r+1} = 1 \neq 0$ 时，方程组无解，此时 $R(\overline{\mathbf{A}}) = R(\mathbf{A}) + 1 > R(\mathbf{A})$，故方程组有解充分必要条件是 $d_{r+1} = 0$，即 $R(\mathbf{A}) = R(\overline{\mathbf{A}})$.

当方程组有解 (即 $d_{r+1}=0$ 或 $R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=r$) 时，

(1) 若 $r=n$，则方程组有唯一解：$x_1=d_1$，$x_2=d_2$，$\cdots$，$x_n=d_n$.

(2) 当 $r<n$ 时，将 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots x_n$ 作为自由未知数，方程组 (2-19) 成为

$$\begin{cases} x_1=d_1-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n \\ x_2=d_2-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{2n}x_n \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=d_r-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n \end{cases},$$

其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}k_1 - \cdots - b_{1n}k_{n-r} \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}k_1 - \cdots - b_{2n}k_{n-r} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}k_1 - \cdots - b_{rn}k_{n-r} \\ x_{r+1} = \qquad k_1 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdot \\ x_n = \qquad\qquad k_{n-r} \end{cases} \quad （2\text{-}20）$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

称（2-20）为方程组的通解(general solution).

总结一下解方程组 (2-18) 的一般步骤：

1. 施行初等行变换把方程组 (2-18) 的增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}}$ 化成行阶梯形，若 $R(\mathbf{A}) < R(\overline{\mathbf{A}})$，则方程组无解；
2. 若 $R(\mathbf{A}) = R(\overline{\mathbf{A}})$，则进一步把 $\overline{\mathbf{A}}$(对齐次线性方程组用 $\mathbf{A}$ 代替 $\overline{\mathbf{A}}$) 化成行最简形；
3. 设 $R(\mathbf{A}) = R(\overline{\mathbf{A}}) = r$，把行最简形中 r 个非零行的首非零元所对应的未知数取作主未知数，其余 $n-r$ 个未知数取作自由未知数，并令自由未知数分别等于 $c_1, c_2 \cdots c_{n-r}$，由 $\overline{\mathbf{A}}$ 的行最简形即可写出含 $n-r$ 个参数的方程组的通解.

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组

(1) 有唯一解；

(2) 无解；

(3) 有无穷限多个解？并在有无穷多个解时，求其通解.

解法 1 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix},$$

故

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 3$，方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda = 0$ 时，$R(\mathbf{A}) = 1, R(\bar{\mathbf{A}}) = 2$，方程组无解；

(3) 当 $\lambda = -3$，$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 2$，方程组有无穷多个解.

此时，

$$\overline{\mathbf{A}} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{(-\frac{1}{3})r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以通解为： $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2，即 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (c \in \mathbb{R}).$$

解法 2 因系数矩阵 $\mathbf{A}$ 为方阵，故方程有唯一解的充要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$，而

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda)\lambda^2,$$

所以当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，有唯一解.

当 $\lambda = 0$ 时,

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\mathbf{A}) = 1, R(\overline{\mathbf{A}}) = 2$，所以无解.

当 $\lambda=-3$ 时,

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\mathbf{A})=R(\overline{\mathbf{A}})=2$，所以有无穷多个解，且通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix},(c\in\mathbb{R}).$$

注　对含参数的矩阵作初等行变换时，如本例，由于 $\lambda+1, \lambda+3$ 等因式可能为 0，故不宜作诸如 $r_2 - \frac{1}{\lambda+1} r_1$，$r_2 \times (\lambda+1)$，$r_3 \div (\lambda+3)$ 这样的变换，否则需要对 $\lambda+1=0$ (或 $\lambda+3=0$) 的情形另作讨论，

因此，对含参数的矩阵作初等行变换较不方便.

因齐次线性方程组总有零解，故由定理 2.14 可得

推论 1　n 元齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) < n$.

特别地，当 $m < n$ 时，齐次线性方程组

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{O}_{m\times 1}$$

必有非零解. 即未知数的个数多于方程的个数时，齐次线性方程组必有非零解.

例 5 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

解　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&-3&-6&-6\\0&-3&-6&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{3})r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-2\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$，由此得：

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 取任意值}).$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ 得

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -2c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

写成向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

定理 3　矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解的充要条件是

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

定理 3 矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解的充要条件是

$$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{B}).$$

证 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $m\times l$ 矩阵，则 $\mathbf{X}$ 为 $n\times l$ 矩阵，对 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{B}$ 进行分块，取列向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_l\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l\end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}\Leftrightarrow \mathbf{Ax}_i=\mathbf{b}_i(i=1,2,\cdots,l).$$

充分性．设 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{B})$，则 $R(\mathbf{A})\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{b}_i)\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{B})$，所以 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b}_i)$，由定理 2.10，$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\mathbf{b}_i(i=1,2,\cdots,l)$ 都有解，所以 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解．

充分性．设 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{B})$，则 $R(\mathbf{A})\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{b}_i)\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{B})$，所以 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{b}_i)$，由定理 2.10，$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\mathbf{b}_i(i=1,2,\cdots,l)$ 都有解，所以 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解．

必要性．设 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解，则

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})=(\mathbf{A},\mathbf{AX})=\mathbf{A}(\mathbf{E},\mathbf{X}),$$

得

$$\begin{aligned}R(\mathbf{A})&\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{B})=R(\mathbf{A}(\mathbf{E},\mathbf{X}))\\&\leqslant \min\{R(\mathbf{A}),R(\mathbf{E},\mathbf{X})\}\leqslant R(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

得 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

定理 4 矩阵方程 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{X}_{n\times l}=\mathbf{O}$ 只有零解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A})=n$.

例 6　已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$，问 a,b,c 为何值时方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解，有解时求全部解.

解 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解 $\Leftrightarrow R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A},\mathbf{B})$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1 & a & b & c\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1\end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解 $\Leftrightarrow a=b=c=1.$

当 $a=b=c=1$ 时,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ $(k_1 \in \mathbb{R})$,

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1-k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$ $(k_2 \in \mathbb{R})$,

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_3 \\ -1-k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$ $(k_3 \in \mathbb{R})$,

故原方程的通解为

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ -k_1 & 1-k_2 & -1-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$