

合计 183 题，太少了！

第 01 次作业

1. 用对角线法则计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. 求出 m, n 使 9 级排列 $39m7215n4$ 为偶排列.

3. 设排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的逆序数为 k , 试求排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ 的逆序数.

4. 由 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 求 λ .

5. 证明下列各式：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. 设 α, β, γ 是 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 求 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ 的值.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

8. 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -12 & 134 \end{vmatrix}$, 求

(1) 第 4 行元素的余子式之和;

(2) 第 4 行元素的代数余子式之和.

9. 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix}$, 且 $M_{11} + M_{12} - M_{13} = 3, A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$, 求 D 之值.

10. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$, 求该方程的根.

11. 计算下列各行列式:

$$(1) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \prod_{i=1}^n a_i \neq 0; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_2 + x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & a_n + x_n \end{vmatrix}, \prod_{i=1}^n a_i \neq 0;$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad (4) D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

12. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}.$$

13. 证明: n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

14. 求 3 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, 使得

$$f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16.$$

15. λ 为何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

16. 就 a 值讨论方程组 $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ 之解的情况.

17. 证明: n 次多项式至多有 n 个互异的实数根.

第 02 次作业

1. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}; \quad (4) D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix};$$

$$(5) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0;$$

$$(7) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix};$$

2. 已知 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

试求 $A_{41} + A_{42}$ 与 $A_{43} + A_{44}$, 其中 A_{4j} 为行列式 D_4 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式.

3. 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix},$$

证明: $D = A + x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$, 其中 $A = \det(a_{ij})_{n \times n}$.

4. 用克拉默法则解方程组:

$$(2) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

5. 解方程组 $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{且 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 互不相同.}$$

6. 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$L_1: ax + 2by + 3c = 0, \quad L_2: bx + 2cy + 3a = 0, \quad L_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这 3 条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

第 03 次作业

1. 举例说明下列命题是错误的.

- (1) 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$;
- (2) 若 $A^2 = A$, 则 $A = O$ 或 $A = E$;
- (3) 若 $AX = AY$, $A \neq O$, 则 $X = Y$.

2. 计算下列矩阵的乘积.

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

4. 设 A, B 为 n 阶对称方阵, 证明: AB 为对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

5. 求与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的全体 2 阶矩阵.

6. 任一方阵 A 均可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

7. 证明: 设 A 为 $m \times n$ 阶实矩阵, 若 $A^T A = O$, 证明: $A = O$.

8. 求下列矩阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

9. 利用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

10. 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

11. 证明下列命题:

- (1) 若 A 可逆, 则 A^* 可逆且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
- (2) 若 $AA^T = E$, 则 $(A^*)^T = (A^*)^{-1}$.

(3) $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$.

12. 解矩阵方程: $\mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. 判断下列命题是否正确:

- (1) 可逆对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵;
- (2) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶方阵, 若 \mathbf{AB} 不可逆, 则 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均不可逆;
- (3) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 为 n 阶方阵, 若 $\mathbf{ABC} = \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
- (4) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶可逆方阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
- (5) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶方阵, 若 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 均可逆, 则 \mathbf{A}, \mathbf{B} 一定可逆.

第 04 次作业

1. 用矩阵分块的方法, 证明下列矩阵可逆, 并求其逆矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 设 A, B 都是可逆方阵, 求分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 C^{-1} .

3. 设 A 为 n 阶方阵, $AA^T = E$, 求 $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}^T$.

4. 用初等行变换法求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

5. 解矩阵方程 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 若 X 满足 $X + A^{-1}X = A^* + A^{-1}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X .

8. 求下列矩阵的行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

9. 设 A 是 3 阶可逆方阵, 将 A 的第一、三行互换后得到矩阵 B , 证明: B 可逆, 并求 AB^{-1} .

第 05 次作业

1. 设 A 为 4×3 阶矩阵, 且 $R(A) = 2$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $R(AB)$.

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $R(A) + R(A - E) = n$.

3. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 是 A 的前 s 行构成的 $s \times n$ 矩阵, 若 $R(A) = r$, 证明: $R(B) \geq r + s - m$.

4. 判断下列命题是否正确:

(1) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $R(AB) = R(BA)$;

(2) 若 A 的所有 r 阶子式均为零, 则 A 的所有 $r+1$ 阶子式也都为零;

(3) 秩相等的同阶矩阵一定等价;

(4) 设 A, B 为 n 阶方阵, 若 $R(A) > 0, R(B) > 0$, 则 $R(A+B) > 0$;

(5) 若矩阵 A 有一个非零 r 阶子式, 则 $R(A) \geq r$;

(6) 若矩阵 A 有一个为零 $r+1$ 阶子式, 则 $R(A) < r+1$.

5. 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

6. 问 λ 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ 2x_1 + \frac{4}{3}\lambda x_2 + 6x_3 = 4 \\ \lambda x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$$

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无穷多解?

7. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 16 \end{pmatrix}$, 求矩阵方程 $AX = B$ 的解 X .

第 06 次作业

1. 求与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的全体 3 阶矩阵.

2. 若矩阵 A 与所有的 n 阶矩阵可交换, 则 A 一定是数量矩阵, 即 $A = aE$.

3. 证明: 不存在 n 阶方阵 A 和 B , 使得 $AB - BA = E$.

4. 设 A, B 分别是 n 阶实对称和实反对称矩阵, 且 $A^2 = B^2$, 证明: $A = B = O$.

5. 设 A 是 3 阶方阵, A^* 是 A 的伴随阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维列向量, 且 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 5$, 求

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{vmatrix}.$$

7. 设 n 阶方阵 $A, B, A+B$ 均可逆, 证明: $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆矩阵.

8. 设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵, 且 $A, B, AB - E$ 可逆, 证明:

(1) $A - B^{-1}$ 可逆;

(2) $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 可逆, 并求其逆矩阵.

9. 解下列矩阵方程:

(2) $AXA = A$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

10. 对于 n 阶方阵 A , 存在自然数 k , 使得若 $A^k = O$, 证明 $E - A$ 可逆, 且有

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

11. 对 n 阶方阵 A , 证明: $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n-1; \\ 0, & R(A) \leq n-2. \end{cases}$

12. 对 n 阶方阵 A , 证明: $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.

13. 已知 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A, B^2 = B, (A+B)^2 = A+B$, 证明 $AB = O$.

14. 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ \text{---} & & & 3 & -1 \\ & & & -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

15. 设 $A = E - \xi \xi^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置, 证明:

(1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T \xi = 1$;

(2) 当 $\xi^T \xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

16. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $AB = O$, $A + B = E$, 证明: $R(A) + R(B) = n$.

17. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = E$, 证明: $R(A + E) + R(A - E) = n$.

18. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $A + B = AB$, 证明: $A - E$ 与 $B - E$ 均可逆, 且 $AB = BA$.

19. 计算下列矩阵的秩:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

20. 设 A 可逆, 且 A 的每行元素之和均为 a , 证明:

(1) $a \neq 0$;

(2) A^{-1} 的每行元素之和等于 $\frac{1}{a}$;

(3) A^m (m 为正整数) 的每一行的元素之和为 a^m .

21. 求解线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

第 07 次作业

1. 设 $\alpha_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\alpha_2 = (10, 1, 5, 10)$, $\alpha_3 = (4, 1, -1, 1)$, 且向量 α 满足 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$, 求 α .
2. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)$; $\beta_1 = (2, 3, 4)$, $\beta_2 = (a, b, c)$. 问 β_1, β_2 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 若能线性表示, 求出具体的表达式.
3. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明 $2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关.
4. 设 α_1, α_2 线性相关, β_1, β_2 也线性相关, 问 $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.
5. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 若 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性无关, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 A 为可逆矩阵.
6. 下列命题是否正确, 说明理由:
 - (1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性相关的 n 维向量, 则对于任意不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_r , 均有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$.
 - (2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性无关的 n 维向量, 则对于任意不全为零的 k_1, k_2, \dots, k_r , 均有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r \neq 0$.
 - (3) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 2$) 中任取 m ($m < r$) 个向量, 所组成的部分向量组都线性无关, 则这个向量组本身也是线性无关的.
 - (4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 且只有 k_1, k_2, \dots, k_r 全为零时, 等式 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0$ 才成立, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.
 - (5) 在线性相关的向量组中, 去掉若干个向量后所得向量组仍然线性相关.
 - (6) 在线性无关的向量组中, 去掉每个向量的最后一个分量后仍然线性无关.
7. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而 α_{r+1} 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 试证 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 必线性无关.
8. 设有两向量组

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 0, 2, 1) \\ \alpha_2 = (1, 2, 0, 1) \\ \alpha_3 = (2, 1, 3, 0) \\ \alpha_4 = (2, 5, -1, 4) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \beta_1 = (1, -1, 3, 1) \\ \beta_2 = (0, 1, -1, 3) \\ \beta_3 = (0, -1, 1, 4) \end{cases}$$

证明上述两向量组等价.

第 08 次作业

1. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, -2, 2, 3)$, $\alpha_2 = (-2, 4, -1, 3)$, $\alpha_3 = (-1, 2, 0, 3)$, $\alpha_4 = (0, 6, 2, 3)$, $\alpha_5 = (2, -6, 3, 4)$. 求该向量组的一个极大线性无关组, 并用它来表示其余向量.

2. 已知向量组 I: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 和向量组 II: $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 具有相同秩, 并且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 之值.

3. 设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T$, $\alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

4. 设向量组 A 和向量组 B 的秩相等, 且 A 能由 B 线性表示, 则 A 与 B 两向量组等价.

5. 设 A 为 n 阶方阵, $R(A) = r < n$, 则对于 A 的 n 个行向量, 下列说法正确的有:

- (1) 必有 r 行线性无关;
- (2) 任意 r 行线性无关;
- (3) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关组;
- (4) 任意一个行向量均可由其它 r 个行向量线性表示.

第 09 次作业

1. 求 $x_1 + x_3 - x_4 = 0$ 的通解.

2. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

3. 求解方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. 已知 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$ 有无穷多解, 求 a .

5. λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解, 有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

6. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的 3 个解向量, 且 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$, 求该方程组的通解.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

8. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解, 即 $A\beta \neq 0$. 试证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

9. 判断下列诊断是否正确, 并说明理由:

(1) 矩阵 A 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $A^T x = 0$ 有非零解;

(2) 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解, 则 $Ax = b$ 也必有无穷多解;

(3) 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $Ax = 0$ 也有无穷多解;

(4) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 对齐次线性方程组 $Ax = 0$,

(A) 若 $m > n$, 则方程组 $Ax = 0$ 只有零解;

(B) 若 $m < n$, 则方程组 $Ax = 0$ 有非零解;

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $R(A) = r$, 对非齐次线性方程组 $Ax = b$,

(A) 若 $r = m$, 则方程组 $Ax = b$ 有解;

(B) 若 $r = n$, 则方程组 $Ax = b$ 有唯一解;

(C) 若 $m = n$, 则方程组 $Ax = b$ 有唯一解;

(D) 若 $r < n$, 则方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

10. 设 3 维列向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda+1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时:

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表达式唯一;
- (2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表达式不唯一;
- (3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

11. 设 A 为 3 阶矩阵, 3 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

求 $|A|$.

12. 证明向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1 = \alpha_2 + \dots + \alpha_s, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_s, \dots, \beta_s = \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1}$ 等价.

13. 求向量组 $a_1 = (1, -1, 1, 3)^T, a_2 = (-1, 3, 5, 1)^T, a_3 = (3, -2, -1, b)^T, a_4 = (-2, 6, 10, a)^T, a_5 = (4, -1, 6, 10)^T$ 的秩和一个极大无关组.

14. 确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

15. 设有向量组 (A): $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T, \alpha_2 = (-2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, 及 $\beta = (1, b, -1)^T$, 问 a, b 为何值时:

- (1) 向量 β 能由向量组 (A) 线性表示, 且表示式唯一;
- (2) 向量 β 不能由向量组 (A) 线性表示;
- (3) 向量 β 能由向量组 (A) 线性表示, 且表示式不唯一, 并求一般表示式.

16. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 求一个秩为 2 的方阵 B , 使得 $AB = O$.

17. 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a, b, c), a, b, c$ 不全为零, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB = O$,

求线性方程组 $Ax = O$ 的通解.

18. 设四元齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T.$$

求方程组 (I) 与 (II) 的公共解.

19. 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \quad \text{和} \quad (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

20. 设 4 元齐次线性方程组 (I) 和 (II), 已知 $\xi_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\xi_2 = (-1, 0, 1, 0)^T$, $\xi_3 = (0, 1, 1, 0)^T$ 是 (I) 的一个基础解系, $\eta_1 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\eta_2 = (1, 1, -1, 0)^T$ 是 (II) 的一个基础解系, 求 (I) 和 (II) 公共解.

21. 设 (I) 和 (II) 都是 3 元非齐次线性方程组,

(I) 的通解为: $\xi_1 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)^T$, k_1, k_2 可取任意常数;

(II) 的通解为: $\xi_2 + k\beta$, 其中 $\xi_2 = (0, 1, 2)^T$, $\beta = (1, 1, 2)^T$, k 为任意实数.

求 (I) 和 (II) 的公共解.

22. 设 A 是 n 阶方阵, 存在正整数 k , $A^k x = 0$ 有解向量 α , 但 $A^{k-1}\alpha \neq 0$, 试证: $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

23. 已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为 $\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T$, $\xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T$.

25. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 r , $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \quad \text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1.$$

26. 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $|A| = 0$, $A^* \neq O$, 证明 A^* 中任何一个非零列向量都构成齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.

27. 已知 n 维向量 a_1, a_2, \dots, a_n 中, 前 $n-1$ 个向量线性相关, 后 $n-1$ 个向量无关, 又 $b = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 n 阶方阵, 求证: 方程组 $Ax = b$ 必有无穷多解, 且其任一解 $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 中必有 $c_n = 1$.

28. 证明: $R(A^T A) = R(A)$.

第 11 次作业

1. 验证 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 1, 2)^T$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, 并把 $b_1 = (5, 0, 7)^T$, $b_2 = (-9, -8, -3)^T$ 用这组基线性表示.

2. 求 \mathbb{R}^4 中向量 $\alpha = (0, 0, 0, 1)^T$ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 3, 1)^T$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\varepsilon_4 = (0, 1, -1, -1)^T$ 下的坐标.

3. 设 \mathbb{R}^3 中两组基 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$, 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. 已知从 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 K 为

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$

求基向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

4. 在 \mathbb{R}^3 中, 取两组基 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 7, 1)^T$; $\beta_1 = (3, 1, 4)^T$, $\beta_2 = (5, 2, 1)^T$, $\beta_3 = (1, 1, -6)^T$, 试求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 K 与坐标变换公式.

5. 设 3 维向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, 2, 1)^T$, 求 β 关于基 $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 - \alpha_2$ 下的坐标.

6. 向量空间 \mathbb{R}^4 的两组基分别为

(I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$;

(II) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4$.

(1) 由基 (II) 到基 (I) 的过渡矩阵 K ;

(2) 在基 (I) 与基 (II) 下有相同坐标的全体向量.

7. 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$ 正交, 试求一个非零向量 α_3 , 使 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

8. 已知 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 是 \mathbb{R}^3 中一组基, 试用施密特正交化方法, 构造 \mathbb{R}^3 的一个规范正交基.

9. 设 x 为 n 维列向量, $x^T x = 1$, 令 $H = E - 2xx^T$, 求证 H 是对称的正交矩阵.

10. 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵, 且 $|A| = -|B|$, 求证: $|A + B| = 0$.

11. 已知 A 为反对称矩阵, 若 $E + A$ 可逆, 证明 $(E - A)(E + A)^{-1}$ 是正交矩阵.

12. 设 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关, 且 α_1, α_2 均与 β_1, β_2 正交, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 线性无关.

第 12 次作业

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 设方阵 A 的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 对应的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2 , 证明:

(1) $\xi_1 - \xi_2$ 不是 A 的特征向量;

(2) $\xi_1, \xi_1 - \xi_2$ 线性无关.

3. 设 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明 A 的特征值只能取 1 或 2.

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值之和是 3, 特征值之积为 -24, 求 a, b .

5. 已知 n 阶方阵 A 的特征值为 $2, 4, \dots, 2n$, 求行列式 $|A - 3E|$ 的值.

6. 已知 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, 且 $\lambda = 1$ 是 A 的二重特征值, $\lambda = -2$ 是 A 的单特征值, 求 A 的特征多项式.

7. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 试求:

(1) A^{-1} , A^* 的特征值; (2) $|A^2 - 2E|$, $|A^{-1} - 2A^*|$ 的值.

8. 证明 n 阶矩阵 A 是奇异矩阵的充分必要条件是 A 有一个特征值为零.

9. 判断下列命题是否正确:

(1) 方阵 A 的任一特征值一定存在无穷多个特征向量;

(2) 由于方阵 A 和 A^T 有相同的特征值, 故它们也有相同的特征向量;

(3) 若 n 阶方阵 A 的 n 个特征值全为 0, 则 $A = O$;

(4) 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $0, \pm 1$, 则 $Ax = 0$ 的基础解系仅一个向量.

第 13 次作业

1. 判断下列矩阵可否对角化:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$ 相似, 求 a, b 及可逆阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^k .

4. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值仅为 0 和 1, 证明: $A^2 = A$.

5. 设 A 为实反对称矩阵, 证明: A 的特征值为零或纯虚数.

6. 设 m 阶矩阵 A 和 n 阶矩阵 B 均可对角化, 证明: $m+n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 也可对角化.

7. 设 A 为非零矩阵, 且存在正整数 m , 使得 $A^m = O$, 证明: A 的特征值全为零且 A 不可对角化.

8. 判断下列命题是否正确:

(1) 若 $A \sim B$, 则对任意的实数 t , 有 $tE - A \sim tE - B$;

(2) 设 $A \sim B$, 则它们一定相似于同一对角矩阵;

(3) 设 A 为 4 阶矩阵, $R(A) = 3$, $\lambda = 0$ 是 A 的 3 重特征值, 则 A 一定不能相似于对角矩阵.

第 14 次作业

1. 求使矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

可对角化的正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ .

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

3. 设 $\xi = (1, 1, 2)^T$ 是 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ 的特征向量, 求 a, b .

4. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^TAP = \Lambda$;

(3) 求 A 及 $(A - \frac{3}{2}E)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

5. 设 A 和 B 是 n 阶实对称矩阵, 证明: $A \sim B$ 的充分必要条件是它们的特征值相同.

6. 写出下列二次型所对应的矩阵:

(1) $f = x^2 + 2xy + 4y^2 - 2xz - 6yz + 5z^2$;

(2) $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$;

(3) $f = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$.

7. 用正交变换化下列二次型为标准形:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

8. 用配方法化下列二次型为标准形:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

9. 设二次曲面 $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz = 1$, 试利用正交变换将曲面方程化为标准方程, 并指出方程的图形是怎样的曲面.

10. 试求出 $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的最大值.

11. 判断下列命题是否正确:

(1) 两个 n 阶矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩;

- (2) 若 B 与对称矩阵 A 合同, 则 B 也是对称矩阵;
- (3) 若矩阵 A 与 B 合同, 则存在唯一的可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = B$;
- (4) 正交矩阵的特征值一定是实数;
- (5) 正交矩阵的特征值只能为 1 或 -1 .

第 15 次作业

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A^3 - 3A^2 + 5A - 3E = O$, 证明: A 正定.

2. 设 A 均为正定矩阵, 证明: A^T , A^{-1} , A^* 都是正定矩阵.

3. 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正定性.

4. 判别二次型 $f(x, y, z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

5. 判断下列命题是否正确:

(1) 若 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 则 $A + B$ 也是正定矩阵;

(2) 若 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 则 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是正定矩阵;

(3) 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是正定矩阵;

(4) 若实矩阵 B 与正定矩阵 A 合同, 则 B 也是正定矩阵;

(5) 若 A 是正定矩阵, 则 A 的对角线上的元素全部大于 0.

6. 下列矩阵是否可以对角化, 若能, 求对应的可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. 已知 $\lambda = 0$ 是 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & 1 & k \\ 4 & k & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值, 判断 A 能否对角化, 并说明理由.

8. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, -1, 2, 求 $|A^* + 3A - 2E|$.

9. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 且满足条件 $A^2 + 2A = O$, 已知 A 的秩为 $R(A) = 2$.

(1) 求 A 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时, $A + kE$ 为正定阵, 其中 E 为 3 阶单位阵.

10. 设 A 为正交矩阵, 且 $|A| = -1$, 证明 $\lambda = -1$ 是 A 的特征值.

11. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 可对角化, $\lambda = 2$ 是 A 的 2 重特征值, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

12. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 求:

(1) a, b 之值;

(2) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

13. 设 n 阶矩阵 A, B 可交换, 且 A 的特征值不相同, 证明: 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 均为对角矩阵.

14. 设 $\lambda \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m \times n}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

15. 已知 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量,

(1) 确定常数 a, b 及 ξ 所对应的特征值;

(2) 判断 A 能否相似于对角阵, 并说明理由.

16. 设 $1, 1, -1$ 是 3 阶实对称矩阵 A 的 3 个特征值, 对应于 1 的特征向量为 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, $p_2 = (2, 2, 1)^T$, 求 A .

17. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$, 对应于特征值 2 的一个特征向量为 $(1, -1, 1)^T$, 对应于特征值 1 的一个特征向量为 $(1, 0, -1)^T$, 求对应于特征值 2 的与 $(1, -1, 1)^T$ 线性无关的一个特征向量, 并求 A .

18. 设实对称矩阵 $A_{3 \times 3}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$, 属于 λ_1, λ_2 的特征向量依次为 $p_1 = (1, -1, 0)^T$, $p_2 = (1, 1, 1)^T$, 求 A .

19. 设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 证明:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

20. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $a_i b_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 令 $A = \alpha\beta^T$, 求 A 的特征值与特征向量.

21. 存在可逆线性变换 $x = Py$, 将如下二次型 f 化成二次型 g , 求此变换 P .

$$f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3,$$

$$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

22. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$, 通过正交变换可化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换.

23. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

24. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (kE + A)^2$, 其中 k 为实数, E 为单位矩阵, 求对角阵 Λ , 使 B 与 Λ 相

似, 并求 k 为何值时, B 为正定矩阵.

25. 设 A 为正定矩阵, M 为满秩矩阵, 证明: M^TAM 为正定矩阵.

26. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: 对充分大的 t , $tE + A$ 是正定矩阵.

27. 若 A 为 m 阶正定矩阵, B 为 $m \times n$ 阶矩阵, 证明: B^TAB 正定 $\Leftrightarrow R(B) = n$.

28. A 为正定阵的充要条件是存在可逆矩阵 U , 使 $A = U^TU$.

29. 判断下列二次型的正定性:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$.