武汉大学 **2015 —2016** 学年度第 一 学期

《工程随机数学》试卷（**A**）

电子信息 学院________专业__班 学号____________姓名_______分数

1. （本题 10 分）将 a，b，c 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 p，而输出为其他一字母的概率都是(1-p)/2，今将字母串 aaaa,bbbb,cccc 之一输入信道，三者输入的概率分别为 p1, p2, p3 (p1+p2+p3=1)，已知输出为 abcb，问输入的是 aaaa 的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的。）

解： 以 A，B，C 分别表示事件"输入 aaaa"，"输入 bbbb"，"输入 cccc"，以 D 表示事件"输出 abcb"。由全概率公式和贝叶斯公式有

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(D|A)p_1}{P(D|A)p_1+P(D|B)p_2+P(D|C)p_3}$$

这里 $P(D|A)=p(\frac{1-p}{2})^3$，$P(D|B)=p^2(\frac{1-p}{2})^2$，$P(D|C)=p(\frac{1-p}{2})^3$ 带入上式

$$P(A|D)=\frac{p(\frac{1-p}{2})^3p_1}{p(\frac{1-p}{2})^3p_1+p^2(\frac{1-p}{2})^2p_2+p(\frac{1-p}{2})^3p_3}$$

$$=\frac{p_1}{p_1+p_3+p_2\frac{2p}{1-p}}=\frac{(1-p)p_1}{1-p_2-p+3pp_2}$$

2. （本题 10 分）设随机变量 $X\sim U(0,1)$ 。

（1） 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。（**2**）求 $D(x),D(y)$

解：（1）由于 $Y=2X^2+1\geq 1$，故当 $y<1$ 时，$f_Y(y)=0$. 当 $y\geq 1$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X^2+1\leq y)=P(X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}})=F_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})$$

两边关于 y 求导得

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{y-1}}=\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{y-1}}, & y\ge 1\\ 0, & else\end{cases}$$

3. （本题 15 分）二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & else.\end{cases}$$

（1）确定常数 c；（2）分析并判断 X 和 Y 是否相互独立？（3）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：（1）由于区域积分=1 得 $c=15$

$\int_\Omega cx^2ydxdy=1,\quad \int_0^1\int_0^y cx^2ydxdy=1,\quad \int_0^1\frac{c}{3}y^4dy=1,$ 得 $\quad c=15$

(2) $\quad f_X(x)=\int_x^1 15x^2ydy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2)$， $\quad f_Y(y)=\int_0^y 15x^2ydx=5y^4$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

(3) $\quad f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx=\int_0^z 15x^2(z-x)dx=\frac{5}{4}z^4$

4. （本题 15 分）某复杂系统由 100 个相互独立的部件所组成，在运行期间每个部件损坏的概率为 0.1，为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率？（$\Phi(0.25)=0.5987$, $\Phi(0.5)=0.6915$, $\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.5)=0.9332$, $\Phi(1.67)=0.9525$, $\Phi(2.0)=0.9772$, $\Phi(2.5)=0.9938$, $\Phi(3)=0.9987$）

解：(1) 此为 100 重贝努利事件， $X\sim b(100,0.9)$，求概率 $P(X\ge 85)$，

由定理知 $\frac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}$ 近似服从标准正态分布。

$$P(X\ge 85)=P\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\ge\frac{85-90}{\sqrt{9}}\}=P\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\ge -\frac{5}{3}\}=1-\Phi(-\frac{5}{3})=\Phi(\frac{5}{3})=0.9525$$

5．.（本题 10 分）设是取自正态总体的简单随机样本，且

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\ldots+X_6),Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,$$

$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$,试问统计量Z服从什么分布？

解：由 $X_1,X_2,\ldots,X_9$ 是取自正态总体 X 的简单随机样本，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,..X_9$ 相互独立，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，即 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$

因而

$$E(Y_1)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}E(X_i)=\mu,E(Y_2)=\frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9}E(Y_i)=\mu$$

即

$$E(Y_1-Y_2)=E(Y_1)-E(Y_2)=\mu-\mu=0,$$
$$D(Y_1)=D(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i)=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}D(X_i)=\frac{1}{6}\sigma^2,$$
$$D(Y_2)=D(\frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9}X_i)=\frac{1}{9}\sum_{i=7}^{9}D(X_i)=\frac{1}{3}\sigma^2,$$

且

$$D(Y_1-Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2,$$

因而

$$Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2})$$

即

$$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$$

$X_1,X_2,\ldots,X_9$

$S=\frac{1}{\mathrm{n-1}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(X_{\mathrm{i}}-\overline{X})$ 时,$\frac{(\mathrm{n-1})\ S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n-1})$,可知$S^2=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i=7}}^{9}(X_{\mathrm{i}}-Y_2)^2$时

$$\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$$

由Y_1,Y_2及S^2均是X_1，X_2，...，X_9的函数且X_1，X_2，...，X_9相互独立，可知Y_1，Y_1及S^2也相互独立，进而Y_1-Y_2与S^2也相互独立。又

$$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)\text{，}\quad\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$$

可知

$$\frac{\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{\frac{2S^2}{\sigma^2}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim t(2)\text{，即}Z\sim t(2)$$

6. （**本题 10 分**）设X_1，X_2，...，X_n 为总体的一个样本，x_1，x_2，...，x_n为一相应的样本值。求下面总体函数未知参数的矩估计量和最大似然估计值。

$$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)},x>c\\0,\text{其他}\end{cases}$$

其中$c>0$为已知参数，$\theta>1$，θ为未知参数。

解：

(1) 求一个未知参数的矩估计量首先求总体 X 的数学期望，然后令总体数学期望等于样本均值，解方程，得未知参数的 矩估计量。

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_C^{+\infty} x\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} dx \\
&= \theta c^{\theta} \int_c^{+\infty} x^{-\theta} dx \\
&= \theta c^{\theta} \left(\frac{1}{1-\theta} x^{-\theta+1}\right)\Big|_c^{+\infty} \\
&= \theta c^{\theta} \left(\frac{-c^{1-\theta}}{1-\theta}\right) = \frac{\theta c}{\theta - 1}
\end{aligned}
$$

对样本的一组观察值 x_1， x_2， ...， x_n，得样本均值 $\bar{x}$ 。

令 $\frac{\theta c}{\theta-1} = \bar{x}$，解得 $\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-c}$，即为 θ 的矩估计值

那么 $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$ 为 θ 的矩估计量。其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是随机变量，表示对样本的不同观察值，它的取值不同，所以 $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$ 是随机变量。

(2)对样本的一组观察值 x_1， x_2， ...， x_n，似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta c^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} = \theta^n c^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\theta+1)} \qquad (x_i > c)
$$

两边去对数 $\ln L(\theta) = n\ln\theta + n\theta\ln c - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

对 θ 求倒数 $\frac{\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + n\ln c - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln c}$

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - n\ln c}$

7. （**本题 15 分**）已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体的一个样本

（1）就 μ 是否大于已知数 μ_0，求假设检验的拒绝域，显著性水平为 α；

（2）若样本容量为 20，样本均值等于 3100，样本标准差等于 170，α等于 0.01，判断 $\mu>\mu_0=3000$ 是否成立？ $t_{0.005}(19)=2.861$ ， $t_{0.01}(18)=2.552$ ， $t_{0.005}(18)=2.878$ ， $t_{0.01}(19)=2.54$ ， $\chi^2{}_{0.025}(19)=32.851$

解：

（1） $\mathrm{H}_0:\mu\le\mu_0(或\mu=\mu_0)$；$\mathrm{H}_1:\mu>\mu_0$

总体均值 μ 的无偏估计为样本均值$\bar{X}$，且$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$。由于$\sigma^2$未知，以其无偏估计——样本标准差 S 代替，则

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)。$$

设 H_0 成立，由 t 分布可构造小概率事件

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>t_\alpha(n-1)\right\}\gg \mathrm{P}\{\mathrm{T}>t_\alpha(n-1)\}=\alpha$$

由此可得拒绝域为

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_\alpha(n-1)$$

（2）$\mathrm{n}=20$，$\bar{X}=3100$，$\mathrm{S}=170$，$\alpha=0.01$，则，

$$t_{0.01}(20-1)=t_{0.01}(19)=2.54,$$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{3100-3000}{170/\sqrt{20}}\approx 2.63。$$

$T>t_{0.01}(19)$，落在拒绝域内，即拒绝H_0，接受H_1，即 μ显著大于 3000

8. （本题 15 分）设$\mathrm{X(t)}=\sin(\Theta\mathrm{t})$，Θ 为$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量。

（1）证明$\mathrm{X(n)(n}=0$，±1，±2，⋯）为平稳随机序列；

（2）求该平稳随机序列的功率谱密度。

解：（1）

Θ 的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\ll\theta\ll 2\pi\\ 0 & 其它\end{cases}$$

随机序列 $X(n)=\sin(n\Theta)(n=0,\pm1,\cdots)$ 的均值和相关函数分别为：

$$\mu_X(n)=E[X(n)]=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin(n\theta)\,d\theta=0,$$

$$R_X(n.m)=E[X(n)(m)]=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin(n\theta)\sin(m\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(n-m)\,\theta-\cos(n+m)\,\theta]d\theta=\begin{cases}0.5 & n-m=0\\ 0 & n-m\neq 0\end{cases},$$

即 $\qquad R_X(n.m)=R_X(n-m)=0.5\delta_{mn}$。

故随机序列 $X(n)=\sin(n\Theta)(n=0,\pm1,\cdots)$ 是平稳序列。

（2）

该平稳序列的相关函数可表示为

$$R_X(\tau)=0.5\delta(\tau)=\begin{cases}0.5 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases},$$

则由维纳-辛钦定理，其功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=0.5$$ 。