2013-2014 第一学期高数 B1 期末试题解

一、（6 分）求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{(1+n)n}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\dfrac{(1+n)n}{2}}+\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{(1+n)n}+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

二、（8 分）指出函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$ 的间断点，并判定其类型。

解：$f(x)$ 的全部间断点：$x_1=0, x_2=1, x_3=2$。

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=-\frac{\sin2}{2}\neq\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{\sin2}{2},$$

$x_1=0$ 是第一类的跳跃间断点。

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\infty,$$

$x_2=1$ 是第二类的无穷间断点。

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=1,$$

$x_3=2$ 是第一类的可去间断点。

三、（6 分）求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+|x|^{3n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 的表达式。

解：当 $|x|\leq1$ 时，$1^{\frac{1}{n}}\leq\left(1+|x|^{3n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq2^{\frac{1}{n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$，故 $f(x)=1$。

当 $|x|>1$ 时，有 $|x|^3=(|x|^{3n})^{\frac{1}{n}}<\left(1+|x|^{3n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq(2\ |x|^{3n})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}\cdot|x|^3$，由夹逼准则，易得 $f(x)=|x|^3$。所以

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq1\\ |x|^3, & |x|>1\end{cases}。$$

四、（6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt}{\sin^2(x^3)}$。

解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2\cdot x}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}x^4\cdot x}{6x^5}=\dfrac{1}{24}$ 。

五、(6 分)设 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$，证明：$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续但不可导。

证明：$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0,\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0,f(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1\text{；}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{1}=-\frac{\pi}{2}\text{，}$$

$f'_+(1)\ne f'_-(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。

六、(6 分)判别积分 $\int_{e^{-1}}^{e}\dfrac{dx}{x\ln x}$ 的敛散性。

解：$\int_{e^{-1}}^{e}\dfrac{dx}{x\ln x}=\int_{e^{-1}}^{1}\dfrac{dx}{x\ln x}+\int_{1}^{e}\dfrac{dx}{x\ln x}=\Big[\ln\big|\ln x\big|\Big]_{e^{-1}}^{1}+\Big[\ln\big|\ln x\big|\Big]_{1}^{e}$，

两个反常积分都发散，故 $\int_{e^{-1}}^{e}\dfrac{dx}{x\ln x}$ 发散。

七、(8 分)设函数 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases}y''+4y'+4y=0\\ y(0)=2,y'(0)=-4\end{cases}$，求积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 。

解：特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 有二重根 $\lambda=-2$ 。微分方程的通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$，由 $y(0)=2$ 有 $C_1=2$，$y=(2+C_2x)e^{-2x}$，$y'=-4e^{-2x}+C_2e^{-2x}-2C_2xe^{-2x}$，由 $y'(0)=-4$ 有 $C_2=0$ 。故 $f(x)=2e^{-2x}$，从而

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1\text{ 。}$$

八、(6 分)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ 的值。

解：$\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 中令 $x=0$ 得 $y=1$ 。

对 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 两边微分

$$\frac{1}{x^2+y}(2xdx+dy)=x^3dy+3x^2ydx+\cos xdx\text{，}$$

上式令 $x=0$，$y=1$ 得 $dy\big|_{x=0}=dx$，所以，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=1$ 。

九、(8 分)设 $\begin{cases}x=t+\operatorname{arc}\cot t\\ y=t-\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：$\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2},p=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2}$ 。

$$\frac{dp}{dt}=\frac{2t^3-2t^2-2t^3+4t^2-2t}{t^4}=\frac{2t-2}{t^3}\text{，}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{2(t-1)(1+t^2)}{t^5}\text{ 。}$$

十、（8 分）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ 的通解。

解 1：由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ 有 $xdy-2ydy+dy=2xdx-ydx+dx$，故

$$xdy+ydx-2ydy+dy=2xdx+dx\text{，从而 } d(xy-y^2+y)=d(x^2+x)\text{，}$$

得原方程的通解为

$$xy-y^2+y=x^2+x+C\text{。}$$

解 2：作变换 $\begin{cases}y=s+a\\x=t+b\end{cases}$（$a,b$ 待定）。代入

$$\frac{2x-y+1}{x-2y+1}=\frac{2t-s+2b-a+1}{t-2s+b-2a+1}$$

解方程组 $\begin{cases}2b-a+1=0\\b-2a+1=0\end{cases}$ 得 $b=-\dfrac{1}{3},a=\dfrac{1}{3}$。$\begin{cases}y=s+\dfrac{1}{3}\\x=t-\dfrac{1}{3}\end{cases}$。因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ds}{dt}$，方程变为

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2t-s}{t-2s}\text{，即 }\frac{ds}{dt}=\frac{2-\frac{s}{t}}{1-\frac{2s}{t}}\text{。}$$

作变换 $s=tu$，则 $\dfrac{ds}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$，从而 $u+\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2-u}{1-2u}$，即 $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{2-2u+2u^2}{1-2u}$，分离变量有

$$\frac{1-2u}{2\ (1-u+u^2)}du=dt\text{，解得 }-\frac{1}{2}\ln(u^2-u+1)=t+C'\text{，}$$

$$u^2-u+1=Ce^{-2t}(C>0)$$
$$s^2-ts+t^2=Ct^2e^{-2t}(C>0)$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ 的通解

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=C\left(x+\frac{1}{3}\right)^2e^{-2\left(x+\frac{1}{3}\right)}(C>0)\text{。}$$

十一、（8 分）求由曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},y=\dfrac{1}{x},x=1,x=2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

解：$V_{大}=\pi\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\ln 2$，$V_{小}=\pi\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$，故旋转体的体积为

$$V=V_{大}-V_{小}=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\pi\text{。}$$

十二、（8 分）求曲线 $y=\ln x(2\le x\le 6)$ 的一条切线，使得该切线与直线 $x=2,x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形的面积最小。（$\ln 2\approx 0.693,\ln 6\approx 1.792$）

解：$y=\ln x$ 在 $(x,\ln x)$ 点的切线 $Y=\dfrac{1}{x}(X-x)+\ln x$，

当 $X=2$ 时 $Y=\dfrac{2-x}{x}+\ln x$；当 $X=6$ 时 $Y=\dfrac{6-x}{x}+\ln x$。梯形的面积

$$A_{大}=\frac{6\text{-}2}{2}\left(\frac{6-x}{x}+\ln x+\frac{2-x}{x}+\ln x\right)=4\left(\frac{4-x}{x}+\ln x\right)$$

曲边梯形的面积

$$A_{小}=\int_2^6 \ln x dx=x\ln x\Big|_2^6-\int_2^6 dx=6\ln 3+4\ln 2-4$$

所围面积

$$A=A_{大}-A_{小}=4\left(\frac{4-x}{x}+\ln x\right)-6\ln 3-4\ln 2+4(2\le x\le 6)$$

$$A'=4\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)。$$

$A'=0$ 的唯一解 $x=4$ 。$A'\begin{cases}<0, & 2<x<4\\ >0, & 4<x<6\end{cases}$，在 $[2,6]$ 上连续的 A 在 $(2,6)$ 内有唯一的极小值点 $x=4$ 。$x=4$ 是 A 在 $[2,6]$ 上的最小值点。所求切线

$$y=\frac{1}{4}(x-4)+\ln 4。$$

十三、（10 分）研究函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，凸性区间和拐点，并求该函数图形的一条斜渐近线。

解：$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 在所有点连续。因

$$y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\left(1+\frac{x-1}{1+x^2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\frac{x(1+x)}{1+x^2}\qquad \begin{cases}>0, & x<-1\\ <0, & -1<x<0\\ >0 & x>0\end{cases}$$

$$y''=\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{1+x^2}\left(1+\frac{x-1}{1+x^2}\right)+e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\frac{1+x^2+2x-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\frac{1+3x}{\left(1+x^2\right)^2}\qquad \begin{cases}<0, & x<-\frac{1}{3}\\ >0, & x>-\frac{1}{3}\end{cases}$$

单调增区间：$\left(-\infty,-1\right]$ 和 $\left[0,+\infty\right)$；单调减区间：$\left[-1,0\right]$。极大值 $y(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$；极小值 $y(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$。上凸区间：$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$；下凸区间：$\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$。拐点上凸区间：$\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}e^{\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{3}}\right)$。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=e^{\pi},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right)&=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}\right)-\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\\ &=\lim_{x\to+\infty}xe^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x-\pi\right)-e^{\pi}=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\dfrac{-1}{x^2}}-e^{\pi}=-2e^{\pi}\end{aligned}$$

该函数图形的一条斜渐近线（右方）：$y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$。

十四、（6 分）设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上三阶可导，且 $f(0)=f(1)=f'(1)=0$，证明在 $\left(0,1\right)$ 内存在一点

c，使得 $3f''(c)+cf'''(c)=0$。

证明：$f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上三阶可导，则 $f(x)$，$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 都在 $\left[0,1\right]$ 上连续。又 $f(0)=f(1)=0$，根据罗尔定理，存在 $a\in\left(0,1\right)$ 使得 $f'(a)=0$。又 $f'(1)=0$，根据罗尔定理，存在 $b\in\left(a,1\right)$ 使得 $f''(b)=0$。

构造函数 $F(x)=x^3f''(x)$，因 $F(0)=F(b)=0$，$F(x)=x^3f''(x)$ 在 $\left[0,b\right]$ 上满足罗尔定理条件，根据罗尔定理，在 $\left(0,b\right)\subset\left(0,1\right)$ 内存在一点 c，使得 $F'(c)=0$，则

$$3f''(c)+cf'''(c)=\frac{3c^2f''(c)+c^3f'''(c)}{c^2}=\frac{F'(c)}{c^2}=0\text{。}$$