题型归纳及解题方法

题型一　应用行列式定义的有关问题

例 1.1　已知$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$，求$x^3$的系数.

解：　由行列式的定义知$f(x)$是一个关于x的多项式函数,最高次幂为x^3,主对角线上的 4 个元素分别位于不同行、不同列,4 个元素的乘积x^3必然是行列式的一项;而元素$a_{11},a_{22},a_{34},a_{43}$也位于不同行、不同列,其对应于$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$的项是$(-1)^1 x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$,所以$x^3$的系数为−1.

题型二　利用行列式的性质计算或证明

例 1.2 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|=m,|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=n,$求行列式$|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)|$

解：由行列式的性质，可得

$$|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_1|+|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2|=-|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|+|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=-m+n$$

例 1．3 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为三维向量 ，记三阶矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

已知$|A|=1$，求$|B|$.

解：由行列式的性质，可得

$$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\right|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2$$

例 1.4 设A,B都是5阶方阵，且$|A|=-1,|B|=2$， A^*是A的伴随矩阵，求行列式$|2(A^TB^{-1})^3A^*|$

解：$|2(A^TB^{-1})^3A^*|=32(|A|\dfrac{1}{|B|})^3|A|^{5-1}=-4$

例 1.5 设有三阶方阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$和$|A^*-3A^{-1}|$.

解：$|\mathbf{A}|=\mathbf{-1}\neq\mathbf{0},$ 因此矩阵$\mathbf{A}$可逆，且有

$$\mathbf{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix};$$

故

$$\left|A^*-3A^{-1}\right|=\left|\left|A\right|A^{-1}-3A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=64$$

题型三　按行(列)展开及代数余子式的应用

例 1.3　计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

分析　　因行列式前 2 行(列)含较多的零元素,所以 D_5 可由拉普拉斯定理按前 2 行(或列)展开,前 2 行共有 C_5^2=10 个 2 阶子式,但非零子式只有 3 个:

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

而第三个子式子的余式为零,于是:

解：$$D_5=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=12-6=6$$

题型四　　范德蒙行列式的应用

例 1.4　计算 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}^3\\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}^3\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 & \boldsymbol{c}^3\end{vmatrix}$

解:　此行列式不是范德蒙行列式,须化为范德蒙行列式.

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & a^3\\ b & b^2 & b^3\\ c & c^2 & c^3\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3\div c]{\frac{r\ \div a}{r_2\div b}}abc\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{转置}}abc\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

例 1.5 设 **3** 阶方阵 A,B 满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵 B 以及行列

式$|B|$。

其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$， $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 $(A^2-E)B-(A+E)=0\Rightarrow(A+E)((A-E)B-E)=0$

$|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2\neq0,|A+E|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{vmatrix}=18\neq0$ $(A+E),(A-E)$ 可逆

$(A-E)B=E$

$|B|=\dfrac{1}{|A-E|}=\dfrac{1}{2}$ $\mathrm{B}=(\mathrm{A-E})^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

例 **1.6** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^*为 A 的伴随矩阵，E是单位矩阵，计算$|B|$.

［分析］ 由于$AA^*=A^*A=|A|E$，易具本题 $|A|=3$，用 A 右乘矩阵方程的两端，有

$$3AB=6B+A\quad\Rightarrow\quad3(A-2E)B=A$$

$$\Rightarrow\quad3^3|A-2E||B|=|A|3$$

又因 $|\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{vmatrix}=\mathbf{1}$，故 $|B|=\frac{1}{9}$

题型五 克莱姆法则的运用

例 1.5 问λ、μ为何值时,齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解?

解: 要齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式必为零.即

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=0$$

欲确定λ、μ的值,必先化简行列式,因λ、μ为未知常数,利用行列式的性质时,避免出现λ、μ做分母的情形. $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}\to -\mu\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda)$

故当$\mu=0$或$\lambda=1$时,所给方程有非零解.

题型六　特殊类型行列式及解法

类型一　行(或列)和相等的行列式

例 1.6 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x-a & a & a & \cdots & a\\ a & x-a & a & \cdots & a\\ a & a & x-a & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & a & \cdots & x-a\end{vmatrix}$

分析　　由于行列式的行(列)和相等,那么把$n-1$行(列)都加到同一行(列)上,出现公因子,提取公因子后再化为三角形行列式来计算.

$$D_n=\begin{vmatrix}x-a & a & a & \cdots & a\\ a & x-a & a & \cdots & a\\ a & a & x-a & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & a & \cdots & x-a\end{vmatrix}\to[x+(n-2)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & x-a & a & \cdots & a\\ 1 & a & x-a & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a & a & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$\to[x+(n-2)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-2a & a & \cdots & a\\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a\end{vmatrix}\to[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

类型二　各行(列)含有共同元素的行列式

例 1.7 $\boldsymbol{D_n}=\begin{vmatrix} x_1^2+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2^2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n^2+a_n^2 \end{vmatrix}$

分析　此类行列式可适当加一行一列, 且保持原行列式的值不变, 并能消去共同元素.

解:

解:（本题还有其它方法，此处就不一一列举）

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i})\prod_{i=1}^{n}x_i$$

题型六　矩阵的基本运算和证明

例 3.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $B=P^{-1}AP$，其中 P 为 3 阶可逆矩阵，计算 $\boldsymbol{B}^{2012}-2\boldsymbol{A}^2$

［分析］　本题考查 n 阶矩阵方幂的计算.

因为 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

利用分块矩阵的方幂

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

易知 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

从而 $\boldsymbol{A}^{2012}=(\boldsymbol{A}^2)^{1006}=\boldsymbol{E}$

那么，由 $B=P^{-1}AP$ 有

$$B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A(PP^{-1})AP=P^{-1}A^2P$$

因此 $$\boldsymbol{B}^{2012}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2012}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$$

故 $$\boldsymbol{B}^{2012}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

题型七　逆矩阵

例 3.1 已知$A=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-1&2\\0&3&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

例 3.2　已知$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3$，证明$\boldsymbol{B}$可逆，并求其逆.
分析　将$\boldsymbol{A}^3$代入$\boldsymbol{B}$式整理成乘积形式，再利用逆矩阵的性质.
证明　将$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$代入$\boldsymbol{B}$的表达式得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).$$

如能证明$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆，且又能分别求出它们的逆矩阵，则就证明了$\boldsymbol{B}$可逆，其逆矩阵也就能求出，下面分别求出来：

（1）　由$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$得到$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可 逆 ，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

（2）　由$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$得到$\boldsymbol{A}(\frac{\boldsymbol{A}^2}{2})=\boldsymbol{E}$，故$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^2}{2}$.

（3）　由$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$得$\boldsymbol{A}^3+2^3\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}+2^3\boldsymbol{E}=10\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})[(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})/10]=\boldsymbol{E}$$

故$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})/10$.

因$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$可逆，故$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$可逆，且

$$\boldsymbol{B}^{-1}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=$$

$$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^2/20=(\boldsymbol{A}^6-\boldsymbol{A}^5+3\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3+4\boldsymbol{A}^2)/20=$$

$$(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^2+6\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{A}^2)/20=(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})/10$$

评注　证明矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的同时，还需要求$\boldsymbol{A}$的逆$\boldsymbol{A}^{-1}$的命题，常常找出满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$的矩阵$\boldsymbol{B}$，从而使两问题一并解决.

题型八　分块矩阵

例3.3 求下列矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

分析　　这是一个分块矩阵，可用分块矩阵求逆的方法来求.

解　　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{n-2} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

而 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $\boldsymbol{n-2}$ 阶矩阵。则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{pmatrix}$

而

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0\\ 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-3} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-3} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

评注　要熟记常用的上（下）三角分块求逆，对角形分块求逆的方法，其它的分块矩阵求逆，一般可以利用这些特殊的形式进行变化.

题型九　矩阵的秩

例　设 3 阶方阵 A和B，且它们的秩为 $r(A)=2, r(B)=3$，求秩 $\boldsymbol{r(A^* B^*)}$

解　由 $r(A)=2, r(B)=3$，故 $\boldsymbol{r(A^*)=1, r(B^*)=3}$，所以 $\boldsymbol{r(A^* B^*)=1}$

题型十　初等变换与初等矩阵

例 3.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$.

（1）证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

（2）求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

分析　对换 $\boldsymbol{A}$ 的两行相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘上一个同阶的初等矩阵.

解　（1）因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，又因 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$，故 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，因而 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

（2）因 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$；

故　$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}]^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{EE}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$.

评注　要熟悉三种初等矩阵的表示及其作用和性质，三种初等矩阵不同的书有不同的表示，本书的三种初等矩阵的表示形式是 $\boldsymbol{E}(i,j), \boldsymbol{E}[i(k)], \boldsymbol{E}[j(k),i]$. 也有如下表示的：$\boldsymbol{E}_{ij}$，$\boldsymbol{E}_i(k), \boldsymbol{E}_{ij}(k)$ 等等，要注意区分.

题型十一　线性组合、线性相关的判别

例 4.1　若向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关，向量组 a_2,a_3,a_4 线性无关，试问 a_4 能否由 a_1,a_2,a_3 线性表示？并说明理由.

解　不能. 因为已知 a_2,a_3,a_4 线性无关，那么 a_2,a_3 线性无关，又因 a_1,a_2,a_3 线性相关，所以 a_1 可由 a_2,a_3 线性表示，设 $a_1=l_2a_2+l_3a_3$，如 a_4 能由 a_1,a_2,a_3 线性表示，那么

$a_4=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=(d_1l_2+k_2)a_2+(k_1l_3+k_3)a_3$ 即 a_4 可由 a_2,a_3 线性表示，从而 a_2,a_3,a_4 线性相关，与已知矛盾，因此，a_4 不能用 a_1,a_2,a_3 线性表示.

题型十二　　线性相关与线性无关的证明

证明线性无关通常的思路是：用定义法（同乘或拆项重组），用秩（等于向量个数），齐次方程组只有零解或反证法.

例 4.2　设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 a，且 $A^{K-1}a\neq0$，证明：向量组 $a,Aa,\cdots,A^{k-1}a$ 线性无关.

证法一　（定义法，同乘）　设有常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 使得

$\lambda_1a+\lambda_2Aa+\cdots+\lambda_kA^{k-1}a=0$

用 A^{k-1} 左乘上式，得　$A^{k-1}(\lambda_1a+\lambda_2Aa+\cdots+\lambda_kA^{k-1}a)=0$

由　$A_ka=0$　知　$A^{k+1}a=A^{k+2}a=\cdots A^{2k-2}a=0$

从而有　$\lambda_1A^{k-1}a=0$　因为　$A^{k-1}a\neq0$　所以　$\lambda_1=0$.

类似可证 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$，故向量组 $a,Aa,\cdots,A^{k-1}a$ 线性无关.

证法二　（反证法）如果 $a,Aa,\cdots,A^{k-1}a$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使　$\lambda_1a+\lambda_2Aa+\cdots+\lambda_kA^{k-1}a=0$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 中第一个不为 0 的数是 λ_i，则　$\lambda_iA^{i-1}a+\lambda^{i+1}A^ia+\cdots+\lambda kA^{k-1}a=0$

用 A^{k-1} 左乘上式，利用 $A^ka=A^{k+1}a=\cdots=0$，得 $\lambda_iA^{k-1}a=0$

由于 $\lambda_i\neq0$，得 $A^{k-1}a=0$，与已知矛盾.

题型十三　　求秩与极大线性无关组

例 4.3　设向量组

$a_1=(1,1,1,3)^T,a_2=(-1,-3,5,1)^T,a_3=(3,2,-1,p+2)^T,a_4=(-2,-6,10,p)^T.$

（1）p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将量 $a=(4,1,6,10)^T$ 用 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示.

（2）p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解　对矩阵 (a_1,a_2,a_3,a_4a) 做初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

（1）当 $p\neq 2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，此时设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，解得

$x_1=2,x_2=\dfrac{3p-4}{p-2},x_3=1,x_4=\dfrac{1-p}{p-2}$

（2）当 $p=2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，此时，向量组的秩等于 $3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组.

题型十四 有关秩的证明

例 4.4　设 A 是 n 阶方阵，证明 $\boldsymbol{r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n\\1,r(A)=n-1\\0,r(A)<n-1\end{cases}}$

证明　若 $r(A)=n,$ 则 $|A|\neq 0,$ A 可逆，于是 $A^*=|A|A^{-1}$ 故 $(A^*)=n$，

若 $r(A)\leq n-2,$ 则 $|A|$ 中所有 $n-1$ 阶行列式全为零，于是 $A^*=0.$ 即 $r(A^*)=0.$

若 $r(A)=n-1,$ 则 $|A|=0,$ 但存在 $n-1$ 阶子式不为零，因此 $A^*\neq 0,r(A^*)\geq 1,$ 又因 $AA^*=|A|E=0,$ 有 $\boldsymbol{r(A)+r(A^*)\leq n}$ 即 $r(A^*)\leq n-r(A)=1$，从而 $r(A^*)=1.$

题型十五 线性方程组解的基本概念

例 4.5　设 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$

（1）齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解，则 $a=$________.

（2）线性方程组 $Ax=b$ 无解，则 $a=$________.

分析　（1）齐次方程级 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=$ 未知数的个数，若

方程个数等于未知数个数，则齐次方程组只有零解$\Leftrightarrow$系数行列不等于零.
此题当$a\neq 3$且$a\neq 1$时，方程组只零解.
（2)线性方程组$Ax=b$无解$\Leftrightarrow r(A)\neq r(\tilde{A})$,此题当$a=-1$时，$r(A)=2, r(\tilde{A})=3$，方程组$Ax=b$无解.

题型十六　　　　含有参数的方程组解和讨论

例 4.7 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=0 \end{cases}$$

（1）a,b,c满足何种关系时，方程组仅有零解？
（2）a,b,c满足何种关系时，方程组有无穷多组解？并且基础解系表示全部解.
解　系数行列式是范德蒙行列式，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

（1）当$a\neq b, b\neq c, c\neq a$时，$D\neq 0$，由克莱姆法则方程组仅有零解

$x_1=x_2=x_3=0.$

（2）$D=0$，方程组有无穷多解，下面分四种情况讨论：
1）当$a=b\neq c$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}.$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$k_1(1,-1,0)^T.$

2）当$a=c\neq b$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$k_2(1,0,-1)^T.$

3）当$b=c\neq a$时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$k_3(0,1,-1)^T$.

4）当$a=b=c$时，同解方程组为

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

方程组有无穷多组解，全部解为

$k_4(-1,1,0)^T + k_s(-1,0,1)^T$.

题型十七 有关基础解系的证明

例 4.8　齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & +a_{n-1,2}x_2 & +\cdots+ & a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为$A, M_j(j=1,2,\cdots,n)$是矩阵 A 中划去第j列所得到的行列式，证明：如果M不全为 0，则$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^T$是该方程组的基础解系.

证明　因为 A 是$(n-1)\times n$矩阵，若M_j不全为 0，即 A 中有 n-1 阶子式非零，故$r(A)=n-1$，那么齐次方程组 Ax=0 的基础解系由$n-r(A)=1$个非 0 向量所构成. 令

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

按第一行展开，有

$D_i = a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}M_n$

又因D_i中第一行与第$i+1$行相同，知$D_i=0$，因而

$a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + a_{in}(-1)^{n-1}M_n = 0$

即$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)^T$满足$i$个方程$(i=1,2,\cdots,n-1)$，从而它是 Ax=0 的非零解，也就是 Ax=0 的基础解系.

题型十八　有关线性方程组命题的证明

例 4.9 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 n 维向量，如果方程组（I）Ax=0 的解全是方程（II）$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，证明 β 可用 A 的行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

证明　构造一个联立方程组（III）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0 \end{cases}$$

记为 Cx=0，显然（III）的解必是（I）的解，又因（I）的解全是（II）的解，于是（I）的解也必全是（III）的解，所以（I),（III）是同解方程组，它们有相同的解，从而

$$n-r(A)=n-r(C)$$

得到 $r(A)=r(C)$，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta)$.

因此极大线性无关组所含向量个数相等，这样 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大线性无关组也必是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 的极大线性无关组，从而 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

题型十九 关于向量空间的命题

例 4.10　　证明 $\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$ 是 3 维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基，并求向量 $a=(5,0,7)^T$ 在此基下的坐标.

证明　因

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故它是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3)，由定义有

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_3$ 与 a 代入上式可得方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2+3x_3 &=5 \\ -x_1 \quad +x_2+ \ x_3 &=0 \\ \qquad 3x_2+2x_3 &=7 \end{cases} \Rightarrow x_1=2, x_2=3, x_3=-1$$

故α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为（2，3，-1）.

题型二十　关于正交向量组的命题

例 4.11　已知$\boldsymbol{R}^4$中的一个正交向量组$\alpha_1=(1,1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,1,0,1)^T$，求$\boldsymbol{R}^4$的一个正交基.

解　设要求的另外两个向量为α_3,α_4，由正交条件应有$\alpha_1{}^T\alpha_3=0,\alpha_1{}^T\alpha_4=0,\ \alpha_2{}^T\alpha_3=0,\alpha_2{}^T\alpha_4=0,$则$\alpha_3,\alpha_4$应满足方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_2+x_4=0 \end{cases}$$

解上面两个方程得一基础解系为$(-1,-1,2,0)^T,(1,-1,0,2)^T$.

取$\alpha_3=(-1,-1,2,0)^T,\alpha_4=(1,-1,0,2)^T$，即得$R^4$的一个正交基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

题型二十一　关于正交矩阵的判断和证明

例 5.1 设 A、B 都是 m 阶正交矩阵，且|A|=1，|B|=－1，求|A+B|的值.

解 因为 A、B 都是正交矩阵，

所以　$A^TA=E,B^TB=E(A^T=A^{-1}\Rightarrow AA^T=E)$

$|A+B|=|AB^TB+AA^TB|=|A(B^T+A^T)B|=$

$|A||(A+B)^T||B|(|A|=1,|B|=-1)=-|A+B|$

$|A+B|=0.$

题型二十二　求矩阵的特征值和特征向量

例 5.2 已知$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\ \mathbf{5}&\boldsymbol{a}&\mathbf{3}\\ \mathbf{-1}&\boldsymbol{b}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$的一个特征向量，试确定参数 a, b 及特征向量$\alpha$所对应的特征值.

解　设特征向量α所对应的特征值为λ，由特征值与特征向量的定义

知 $A\alpha=\lambda\alpha$

$A\alpha=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix},\lambda\alpha=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$，

所以有 $\lambda=-1,a=-3,b=0.$

例5.3设三阶实对称方阵A的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$是$A$的属于$\lambda_1$的一个特征值，记$B=A^5-4A^3+E$，证明$\alpha_1$是B特征向量，并求B的全部特征向量。

解 $B\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1=\lambda_1^5\alpha_1-4\lambda_1^3\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

所以α_1是B的对应于特征值-2的特征向量，同理可得B的全部特征值为-2，1，1

由于A是实对称方阵，则B 也是实对称方阵，有$[\alpha_1,p]=0$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_1}\\\boldsymbol{x_2}\\\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}$

是B的对应于特征值1的特征向量

$x_1-x_2+x_3=0$，取$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_2}\\\boldsymbol{x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$得基础解系$\boldsymbol{P_1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{P_2}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$

B的对应于特征值1的全部特征向量是$c_1p_2+c_2p_3$（c_1,c_2为不全为0的任意常数），对应于特征值-2的全部特征向量是$c_3\alpha_1$，（c_3为不等于零任意常数）

题型二十三　用特征值和特征向量反求矩阵A.

例 5.4 已知$A\alpha_1=a_1,A\alpha_2=2\alpha_2,A\alpha_3=3\alpha_3$，其中$\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，

求矩阵A.

解法一 由已知条件知 A 有 3 个不同的特征值 1,2,3，所以

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\Lambda=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&&\\&\boldsymbol{2}&\\&&\boldsymbol{3}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{-2}\\\mathbf{2}&\mathbf{-2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$ 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}$

解法二 由已知条件知 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$，于是 $A=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$。下略

题型二十四 求矩阵 A 中的参数

例 5.4 已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的特征向量，求 a,b 的值，并证明 A 的任一特征向量均能由 ξ 线性表示.

解 设 ξ 是 λ 所对应的特征向量，则 $A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{pmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases}a-1-2=\lambda\\5+b-3=\lambda\\-1=2=-\lambda\end{cases}$ $\Rightarrow \lambda=-1,a=2,b=-3$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$ 知 $\lambda=-1$ 是 A 的 3 重特征值，又因 $r(-E-A)=2$，从而 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有 1 个，所以 A 的特征向量均可由 ξ 线性表示。

题型二十五 n 阶矩阵 A 能否对角化的判定

例 5.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$，问 a,b,c 取何值时，A 可对角化。

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\a&1-\lambda&0&0\\2&b&2-\lambda&0\\2&3&c&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=2.$

下面只要讨论a,b,c为何值时$r(A-\lambda_1 E)=r(A-E)=2$，

$r(A-\lambda_3 E)=r(A-2E)=2$，即可．$\boldsymbol{A-E}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{b} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \boldsymbol{c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$要使$r(A-E)=2$，只要$\mathrm{a}=0.$，

$\boldsymbol{A-2E}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，　要使$r(A-2E)=2$，只要$\mathrm{c}=0.$

因此当$a=0,c=0,b$为任意值时，A 可对角化.

评注　n阶矩阵 A 能否对角化，主要用下面方法判定：

（1）A 能对角化⇔A 有 n 个线性无关的特征向量.

（2）A 有 n 个不同的特征值⇒A 可对角化.

题型二十六　求相似变换矩阵 P

例 5.7　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ x & \mathbf{4} & y \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$，已知 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是 A 的 2 重特征值，试求可逆矩阵 P,使$p^{-1}AP$为对角矩阵.

解　因为 A 有 3 个线性无关的特征向量，所以 A 可对角化，又$\lambda=2$是 A 的 2 重特征值，因此方程组$(A-2E)x=0$的基础解系中含有 2 个线性无关的特征向量，从而$R(A-2E)=1,$

$$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-x & y+x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

要使r（A-2E）=1，只有 x=2,y=-2.　　于是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

由　$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+5=10$　　而　$\lambda_1=\lambda_2=2$

则　$\lambda_3=6.$　　当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，由$(A-2E)x=0$求得基础解系

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=6$时，由$(A-6E)x=0$求得基础解系$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-2}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix}$.

取$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P})=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ \mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{6}\end{pmatrix}$.

题型二十七　相似对角化的应用

例 5.8　A 是n阶矩阵，2,4,…，2n 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位矩阵，计算行列式$|A-3E|$.

解 因为 A 有 n 个不同的特征值，故存在可逆矩阵 P，使

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&&&\\ &\mathbf{4}&&\\ &&\ddots&\\ &&&\mathbf{2n}\end{pmatrix}=\Lambda$ 于是$A=P\Lambda P^{-1}$ 得$A-3E=P\Lambda P^{-1}-3PP^{-1}=P(\Lambda-3E)P^{-1}$

从而 $|A-3E|=|P||\Lambda-3E||P^{-1}|=|\Lambda-3E|=-(2N-3)!!$

题型二十八　有关实对称矩阵的问题

例 5.9　设实对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\boldsymbol{a}\\ \mathbf{1}&\boldsymbol{a}&\mathbf{1}\\ \boldsymbol{a}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$，向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{-2}\end{pmatrix}$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不惟一，试求：

（1）a 的值。　　（2）正交矩阵 P 使得P^TAP为对角阵。

解　（1）由$Ax=\beta$有解但不唯一知，

$R(A)=R(\bar{A})<3$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\ 1&a&1&1\\ a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\ 0&a-1&1-a&0\\ 0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{pmatrix}$$

要使$r(A)=r(\bar{A})<3$，只有$a=-2$.（也可用|A|=0，得$a=-2$.）

（2）由 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\ 1&-2&1\\ -2&1&1\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\ 1&-2-\lambda&1\\ -2&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3).$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0.$

当 $\lambda_1=3$ 时，由 $(A-3E)x=0$ 求得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 单位化得 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-3$ 时，由 $(A+3E)x=0$ 求得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 单位化得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=0$ 时，由 $(A-0E)x=0$ 求得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 单位化得

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 则 P 为正交矩阵，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&0\end{pmatrix}$$

题型二十九　有关特征值和特征向量的证明

例 5.10　设 A 为 n 阶矩阵，且 A2=A，证明 2E-A 可逆.

证法一　设 λ 为 A 的特征值，由 $A^2=A$ 得 $\lambda^2=\lambda,\lambda=0$或$\lambda=1$

即 A 的特征值只能为 0 或 1. $\lambda=2$不是 A 的特征值,因此$|2E-A|\neq 0$ 即 $2E-A$可逆.

证法二 由$A^2=A$ 得

$$A^2-A=0,A^2-A-2E=-2E,(A+E)(A-2E)=-2E,\frac{1}{2}(A+E)(2E-A)=E$$

故$2E-A$可逆，且$(2E-A)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$

题型三十 二次型及其矩阵表示形式的互换

例 6.1 写出矩阵$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$所对应的二次型：

解 （2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+10x_2x_3$

题型三十一 求二次型的标准形.

例 6.2 试用配方法将二次型 $f=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$化为标准形.

解 将f做如下变形：

$$f_3=(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3)-3x_2^2-6x_2x$$
$$=[x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-(x_2-x_3)^2-3x_2{}^2-6x_2x_3$$
$$=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2$$
$$=[x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-(x_2-x_3)^2-3x_2{}^2-6x_2x_3$$
$$=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2$$

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=2x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

将$C=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$ 代入f，即得 $f=y^2{}_1-y^2{}_2$为标准形，所做的可逆变换为$x=Cy$.

题型三十二　判定二次型的正定性

例 6.3　设 $f=t(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz-2xz,$ 问

（1）t满足什么条件时，f 是正定的？

（2）t满足什么条件时，f 是负定的？

分析　此类问题可通过A的顺序主子式来判定，或者是配平方的方法.

解　f 所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$

A的顺序主子式 $|A_1|=t,|A_2|=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1$

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1+t & 1+t \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

$$=(t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix}=(t+1)(t^2-t-2)=(t+1)^2(t-2)$$

（1）f 正定，A的所有顺序主子式大于零，即 $\begin{cases} t>0 \\ t^2-1>0 \\ (t+1)^2(t-2)>0 \end{cases}$ 得 $t>2$.

（2）f 负定，A的奇数阶顺序主子式小于 零，偶数阶顺序主子式大于零，即$\begin{cases} t<0 \\ t^2-1>0 \\ (t+1)^2(t-2)<0 \end{cases}$

得 $t<-1$.

题型三十三　有关正定性的证明

例 6.4　证明：若A,B都是n阶正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵.

证明　由A,B都是正定矩阵，故A及B都是实对称矩阵，从而$A+B$也是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^T,\boldsymbol{g}=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$ 为正定二次型。即对 $\forall z\neq 0$，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^T>\mathbf{0},\boldsymbol{g}=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}>\mathbf{0}$ 有

$$h=z^TAz+z^TBz=z^T(A+B)z>0$$

即 $h = z^T (A+B) z$ 是正定二次型， $A+B$ 是正定矩阵.