线性代数课程

第四章　向量空间与线性变换

2021 年 8 月 31 日

■ 武汉大学数学与统计学院　■ 古月老师

第四章 向量空间与线性变换

第四章 向量空间与线性变换

本章要求:

(1) 理解向量在指定基下的坐标的概念，掌握基变换和坐标变换公式，会求两组基之间的过渡矩阵，掌握坐标变换公式;

第四章 向量空间与线性变换

本章要求：

(1) 理解向量在指定基下的坐标的概念，掌握基变换和坐标变换公式，会求两组基之间的过渡矩阵，掌握坐标变换公式；

(2) 理解向量的内积与正交的概念；掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法；了解规范正交基、正交矩阵、正交变换的概念及其性质.

第四章 向量空间与线性变换

本章要求：

(1) 理解向量在指定基下的坐标的概念，掌握基变换和坐标变换公式，会求两组基之间的过渡矩阵，掌握坐标变换公式；

(2) 理解向量的内积与正交的概念；掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法；了解规范正交基、正交矩阵、正交变换的概念及其性质.

(3) 理解线性空间的基本概念及性质及子空间的概念.

第四章 向量空间与线性变换

本章要求：

(1) 理解向量在指定基下的坐标的概念，掌握基变换和坐标变换公式，会求两组基之间的过渡矩阵，掌握坐标变换公式；

(2) 理解向量的内积与正交的概念；掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法；了解规范正交基、正交矩阵、正交变换的概念及其性质.

(3) 理解线性空间的基本概念及性质及子空间的概念.

(4) 理解线性空间中基及向量的坐标，掌握不同基下坐标的转换.

第四章　向量空间与线性变换

本章要求：

(1) 理解向量在指定基下的坐标的概念，掌握基变换和坐标变换公式，会求两组基之间的过渡矩阵，掌握坐标变换公式；

(2) 理解向量的内积与正交的概念；掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法；了解规范正交基、正交矩阵、正交变换的概念及其性质.

(3) 理解线性空间的基本概念及性质及子空间的概念.

(4) 理解线性空间中基及向量的坐标，掌握不同基下坐标的转换.

(5) 会求不同基下线性变换对应的矩阵.

第一节	R^n 的基与向量在基下的坐标
第二节	向量的内积、标准正交基和正交矩阵

定义 1 设有序向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \subset R^n$，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 R^n 中任一向量 α 均可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，即

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
$$= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, \quad (4\text{-}1)$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 中一组基(bases)，有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是向量 α 在基 **A** 下的坐标(coordinat
记作

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

并称之为 α 的坐标向量(coordinate vector).

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 故坐标向量是唯一确定的.

下文中用 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 表示一组基，也用 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 表示由 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 组成的矩阵 $\mathbf{A}$.

虽然一个向量在给定的基下的坐标是唯一确定的, 但 R^n 中的基是不唯一的, 我们通常称由 n 个基本向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 组成的基为 R^n 中的标准基或自然基.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (4\text{-}2)$$

在求向量 α 在基 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 下的坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 时，由（4-2）知其坐标为 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha$ 的解，可通过解方程组得到唯一解，这可通过初等行变换实现：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{x} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\alpha$.

定理 1 设 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 R^n 的一组基，$\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是一组向量，若

$$\beta_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{nj}\end{pmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x_j},\mathbf{x_j}=\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{nj}\end{pmatrix}(\mathbf{j}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots$$

（4-3）

记 $\mathbf{K}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n)=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}$,

则 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 也是 R^n 的一组基的充要条件是：

$$|K|\neq 0.$$

证　由于 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 且有

$$\mathbf{B} = (\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \cdots, \beta_{\mathbf{n}}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(k_{ij})_{n\times n} = \mathbf{AK}, \quad (4\text{-}4)$$

所以 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{K}|$. 因此

$\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是 R^n 的一组基

$$\Leftrightarrow |\mathbf{B}| \neq 0 \Leftrightarrow |\mathbf{K}| \neq 0.$$

设 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 是 R^n 的两组基（分别称为旧基和新基），它们之间的关系如（4-3）所示, 用矩阵表示如 (4-4) 所示,

称矩阵 $\mathbf{K}$ 为由基 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 到基 $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 的过渡矩阵(transition matrix);

式 (4-4) 则称为基变换公式(formula for transformation of bases).

由于基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 和基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是等价的基（线性无关），故过渡矩阵 $\mathbf{K}$ 非奇异, 其逆矩阵 $\mathbf{K}^{-1}$ 是由基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 到基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 到过渡矩阵.

由于基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 和基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是等价的基（线性无关），故过渡矩阵 $\mathbf{K}$ 非奇异，其逆矩阵 $\mathbf{K}^{-1}$ 是由基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 到基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 到过渡矩阵.

基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 到基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 的过渡矩阵 $\mathbf{K}$ 可通过如下初等行变换求出:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix} \xrightarrow{r} \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{K}\end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{K}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

定理2 设向量 α 在基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 与基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 下的坐标分别是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$, 基 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 到基 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 的过渡矩阵为 $\mathbf{K}$, 则有

$$\mathbf{x}=\mathbf{K}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}. \quad (4-5)$$

证　由题意及向量在基下坐标的唯一性，以及过渡矩阵的可逆性得

$$\alpha = Ax = By = AKy \quad \Rightarrow \quad x = Ky \quad \Leftrightarrow y = K^{-1}x.$$

证　由题意及向量在基下坐标的唯一性, 以及过渡矩阵的可逆性得

$$\alpha = Ax = By = AKy \quad \Rightarrow \quad x = Ky \quad \Leftrightarrow y = K^{-1}x.$$

称式（4-5）为向量 α 在基 **A** 下的坐标 **x** 和基 **B** 下的坐标 **y** 的坐标变换公式(coordinate transformation), 其中 **K** 为基 **A** 到基 **B** 的过渡矩阵.

例 1 设中有向量

$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

$\beta_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 均为 R^3 中基;

(2) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求 $\alpha=\alpha_1$ 在上述两组基下的坐标;

(4) 若向量 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(4,-5,6)^{\mathrm{T}}$, 求此向量在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $B=AK$.

(1) 由于$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$,

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-18\neq 0$,

得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, β_1,β_2,β_3 线性无关, 所以 **A** 和 **B** 都是 R^3 的基.

(2) 因 $K = A^{-1}B$, 故对施行初等行变换, 得,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

于是基 A 到基 B 的过渡矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)(4) 一起解．因 $\alpha_1 = 1 \times \alpha_1 + 0 \times \alpha_2 + 0 \times \alpha_3$, 所以 α_1 在基 A 下的坐标是 $x_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

设 α_1 在基 B 下的坐标为 y_1, 则 $y_1 = \mathbf{K}^{-1} x_1$．记向量 β 在基 A 下的坐标是 $x_2 = (4, -5, 6)^{\mathrm{T}}$, 设 β 在基 B 下的坐标为 y_2, 则 $y_2 = \mathbf{K}^{-1} x_2$．对施行初等行变换（过程从略），得,

$$(\mathbf{K},\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\begin{pmatrix}-1&-1&2&1&4\\-1&2&-1&0&-5\\3&1&2&0&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{18}&1\\0&1&0&\frac{1}{18}&-1\\0&0&1&\frac{7}{18}&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{y}_1&\mathbf{y}_2\end{pmatrix},$$

于是 α_1 在基 B 下的坐标是 $\left(-\frac{5}{18},\frac{1}{18},\frac{7}{18}\right)^{\mathsf{T}}$, β 在基 B 下的坐标是 $(1,-1,2)^{\mathsf{T}}$.

第一节 R^n 的基与向量在基下的坐标

第二节 向量的内积、标准正交基和正交矩阵

第二节	向量的内积、标准正交基和正交矩阵
A	向量的内积
B	标准正交基与施密特正交化方法
C	正交矩阵和正交变换

定义 1 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 则 α 与 β 的内积（inner product）$[\alpha,\beta]$ 定义为:

$$[\alpha,\beta]=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \quad (4-6)$$

有教材也用 (α,β) 表示 α 与 β 的内积.

定义 1 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 则 α 与 β 的**内积**（inner product）$[\alpha,\beta]$ 定义为:

$$[\alpha,\beta]=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \quad (4-6)$$

有教材也用 (α,β) 表示 α 与 β 的内积.

内积的性质: 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$, k_1,k_2 是实数.

(1) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$;（对称性）

定义 1 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 则 α 与 β 的**内积**（inner product）$[\alpha,\beta]$ 定义为：

$$[\alpha,\beta]=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \quad (4-6)$$

有教材也用 (α,β) 表示 α 与 β 的内积.

内积的性质： 设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^n$, k_1,k_2 是实数.

(1) $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$；（对称性）

(2) $[k_1\alpha+k_2\beta,\gamma]=k_1[\alpha,\gamma]+k_2[\beta,\gamma]$；（线性性）

定义 1 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 则 α 与 β 的内积（inner product）$[\alpha, \beta]$ 定义为:

$$[\alpha, \beta] = \alpha^{\mathrm{T}} \beta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad (4-6)$$

有教材也用 (α, β) 表示 α 与 β 的内积.

内积的性质: 设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, k_1, k_2 是实数.

(1) $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$;（对称性）

(2) $[k_1\alpha + k_2\beta, \gamma] = k_1[\alpha, \gamma] + k_2[\beta, \gamma]$;（线性性）

(3) $[\alpha, \alpha] \geqslant 0$, 且 $[\alpha, \alpha] = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$.（正定性）

定义 2 对于 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 的**长度**(length)（或**模**、**范数**）（记作 $\|\alpha\|$）定义为：

$$\|\alpha\| = \sqrt{[\alpha, \alpha]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

向量的长度满足如下性质：

(1) $\|\alpha\| \geqslant 0$；且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$；（正定性）

向量的长度满足如下性质：

(1) $\|\alpha\| \geqslant 0$；且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$；（正定性）

(2) $\|\lambda\alpha\| = |\lambda| \cdot \|\alpha\|$；$(\lambda \in \mathbb{R})$;（齐次性）

向量的长度满足如下性质:

(1) $\|\alpha\| \geqslant 0$；且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$；（正定性）

(2) $\|\lambda\alpha\| = |\lambda| \cdot \|\alpha\|$；$(\lambda \in \mathbb{R})$;（齐次性）

(3) $|[\alpha, \beta]| \leqslant \|\alpha\| \, \|\beta\|$；即

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

（柯西 -施瓦茨 Cauchy-Schwarz 不等式）.

向量的长度满足如下性质：

(1) $\|\alpha\| \geqslant 0$；且 $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$；（正定性）

(2) $\|\lambda\alpha\| = |\lambda| \cdot \|\alpha\|$；$(\lambda \in \mathbb{R})$;（齐次性）

(3) $|[\alpha, \beta]| \leqslant \|\alpha\| \, \|\beta\|$；即

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

（柯西 -施瓦茨 Cauchy-Schwarz 不等式）.

(4) $\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$.（三角不等式）

证 下面证明 (3):

证　下面证明 (3)：对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 设 $\gamma = \alpha + t\beta$, 由性质 (1),

$$[\gamma, \gamma] = [\alpha + t\beta, \alpha + t\beta] \geqslant 0,$$

即 $[\alpha, \alpha] + 2[\alpha, \beta]t + [\beta, \beta]t^2 \geqslant 0$,

证　下面证明 (3)：对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 设 $\gamma = \alpha + t\beta$, 由性质 (1),

$$[\gamma,\gamma] = [\alpha + t\beta, \alpha + t\beta] \geqslant 0,$$

即 $[\alpha,\alpha] + 2[\alpha,\beta]t + [\beta,\beta]t^2 \geqslant 0$,

故关于 t 的二次三项式的判别式

$$4[\alpha,\beta]^2 - 4[\alpha,\alpha][\beta,\beta] \leqslant 0,$$

于是

$$|[\alpha,\beta]| \leqslant \|\alpha\| \, \|\beta\|.$$

证　下面证明 (3)：对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 设 $\gamma = \alpha + t\beta$, 由性质 (1),

$$[\gamma, \gamma] = [\alpha + t\beta, \alpha + t\beta] \geqslant 0,$$

即 $[\alpha, \alpha] + 2[\alpha, \beta]t + [\beta, \beta]t^2 \geqslant 0$,

故关于 t 的二次三项式的判别式

$$4[\alpha, \beta]^2 - 4[\alpha, \alpha][\beta, \beta] \leqslant 0,$$

于是

$$|[\alpha, \beta]| \leqslant \|\alpha\| \, \|\beta\|.$$

(4) 利用性质 (3), 有

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= [\alpha+\beta, \alpha+\beta] = [\alpha, \alpha] + 2[\alpha, \beta] + [\beta, \beta] \\ &\leqslant \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \, \|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2, \end{aligned}$$

故结论成立.

可以定义两个向量 α 与 β 的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 为：

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}.$$

当 $[\alpha,\beta]=0$ 时，称向量 α 与 β正交(orthogonal)，记为 $\alpha\perp\beta$.

可以定义两个向量 α 与 β 的夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 为:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \; \|\beta\|}.$$

当 $[\alpha, \beta] = 0$ 时, 称向量 α 与 β正交(orthogonal), 记为 $\alpha \perp \beta$.

零向量与任何向量都正交.

可以定义两个向量 α 与 β 的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 为：

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}.$$

当 $[\alpha,\beta]=0$ 时，称向量 α 与 β正交(orthogonal)，记为 $\alpha\perp\beta$.

零向量与任何向量都正交.

长度为 1 的向量称为单位向量(unit vector). 非零向量 $\alpha\neq\mathbf{0}$ 对应的单位化向量为 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$，它表示同方向上的单位向量.

定义 3 定义了内积运算的 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 称为 n 维欧几里得空间（Euclidean space），简称**欧氏空间**, 仍记作 $\mathbb{R}^n$.

例 1　设

$\alpha_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1)^T$, $\alpha_2 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)^T$, $\alpha_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3)^T$,

求与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交的单位向量.

例 1 设

$\alpha_1=(1,\ 1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,\ -1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_3=(2,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$,

求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的单位向量.

解 先求与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量, 设此向量为 x, 解齐次线性方程组

$$Ax=\begin{pmatrix}\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2{}^{\mathrm{T}}\\ \alpha_3{}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\alpha_1{}^{\mathrm{T}}x\\ \alpha_2{}^{\mathrm{T}}x\\ \alpha_3{}^{\mathrm{T}}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

所以 $\mathbf{x}=k(-4,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数. 单位化得所求向量为 $\frac{\pm1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)^{\mathrm{T}}$.

第二节	向量的内积、标准正交基和正交矩阵
A	向量的内积
B	标准正交基与施密特正交化方法
C	正交矩阵和正交变换

所谓正交向量组(orthogonal vectors set), 是指一组两两正交的非零向量组.

若每一向量还是单位向量, 则称其为标准正交向量组(standard orthogonal vectors set).

定理 1 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

定理 1　若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证　设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$, 用 α_i 与两边作内积得:

$$[\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m]$$

$$=k_1[\alpha_i,\alpha_1]+k_2[\alpha_i,\alpha_2]+\cdots+k_i[\alpha_i,\alpha_i]+\cdots+k_m[\alpha_i,\alpha_m]$$

$$=[\alpha_i,\mathbf{0}]=0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

定理 1 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是正交向量组, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 用 α_i 与两边作内积得:

$$[\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m]$$

$$= k_1[\alpha_i, \alpha_1] + k_2[\alpha_i, \alpha_2] + \cdots + k_i[\alpha_i, \alpha_i] + \cdots + k_m[\alpha_i, \alpha_m]$$

$$= [\alpha_i, \mathbf{0}] = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两正交, 有 $[\alpha_i, \alpha_j] = 0, \forall i \neq j$. 即得: $k_i[\alpha_i, \alpha_i] = 0$, 而 $[\alpha_i, \alpha_i] \neq 0$, 于是 $k_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

定义 4 设 $\mathbf{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是向量空间的一组基（basis），若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正交向量组, 则称 $\mathbf{B}$ 为正交基(orthogonal basis)；

定义 4 设 $\mathbf{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是向量空间的一组基（basis），若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正交向量组, 则称 $\mathbf{B}$ 为正交基(orthogonal basis)；

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 还都是单位向量, 则称 $\mathbf{B}$ 是的一组标准正交基(standard orthogonal basis)，也称为规范正交基 （normal orthogonal basis）.

定义 4 设 $\mathbf{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是向量空间的一组基（basis），若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正交向量组, 则称 $\mathbf{B}$ 为正交基(orthogonal basis)；

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 还都是单位向量, 则称 $\mathbf{B}$ 是的一组标准正交基(standard orthogonal basis)，也称为规范正交基 （normal orthogonal basis）.

例如：在 n 维欧氏空间中, 自然基

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$,

显然是标准正交基.

关于标准正交基, 有下面简单的性质.

性质 1　设 $\mathbf{B} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是的一组标准正交基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 在 $\mathbf{B}$ 下的坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$[\alpha_i, \alpha] = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

关于标准正交基, 有下面简单的性质.

性质 1　设 $\mathbf{B} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是的一组标准正交基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 在 $\mathbf{B}$ 下的坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$[\alpha_i, \alpha] = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

证　由定义, 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$, 则

$$[\alpha_i, \alpha] = [\alpha_i, x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n] = x_i[\alpha_i, \alpha_i] = x_i.$$

关于标准正交基, 有下面简单的性质.

性质 1　设 $\mathbf{B} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是的一组标准正交基, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, α 在 $\mathbf{B}$ 下的坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$[\alpha_i, \alpha] = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

证　由定义, 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$, 则

$$[\alpha_i, \alpha] = [\alpha_i, x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n] = x_i[\alpha_i, \alpha_i] = x_i.$$

下面讨论如何通过向量空间中给定的基来构造该向量空间的标准正交基.

定理 2 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关 $(m \geqslant 2)$, 则存在某个正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$, 对任意的 $1 \leqslant t \leqslant m$, 有 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 等价.

定理 2 在 $\mathbb{R}^n$ 中，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $(m \geqslant 2)$，则存在某个正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，对任意的 $1 \leqslant t \leqslant m$，有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价.

证 令 $\beta_1=\alpha_1$；$\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1=\alpha_2+k_1\alpha_1$（$k_1$ 为待定系数），要使 $\beta_2 \perp \beta_1$，则要求成立

$$[\beta_1,\beta_2]=[\beta_1,\alpha_2]+k_1[\beta_1,\beta_1]=0.$$

由于 $\beta_1=\alpha_1 \neq \mathbf{0}$，故 $[\beta_1,\beta_1] \neq 0$，从而取 $k_1=-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}$. 又从上式可得

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2-k_1\beta_1.$$

故等价.

一般地, 若已求得正交向量组$\beta_1,\cdots,\beta_{t-1}$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{t-1}$ 等价 $(2\leqslant t\leqslant m)$. 令

$$\beta_t=\alpha_t+k_1\beta_1+\cdots+k_{t-1}\beta_{t-1},$$

由 $\beta_t\perp\beta_i(i=1,\cdots,t-1)$ 的要求, 用 β_i 与上式两边作内积得：$0=[\beta_i,\alpha_t]+k_i[\beta_i,\beta_i]$.

于是可求得 $k_i=-\frac{[\beta_i,\alpha_t]}{[\beta_i,\beta_i]}$, $i=1,\cdots,t-1$, 从而

$$\beta_t=\alpha_t-\frac{[\beta_1,\alpha_t]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\cdots-\frac{[\beta_{t-1},\alpha_t]}{[\beta_{t-1},\beta_{t-1}]}\beta_{t-1}.$$

易见 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是正交向量组, 且由 $\beta_1,\cdots,\beta_{t-1}$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{t-1}$ 等价及上式, 可得 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 等价.

定理 4.4 的证明给出了将一个线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 正交化的步骤:

取

$\beta_1 = \alpha_1$,

$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_r, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$, $r = 2, 3, \cdots, m$.

故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 两两正交, 且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价.

如果再将正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 单位化, 即令

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

则 $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价的标准正交向量组.

如果再将正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 单位化, 即令

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

则 $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价的标准正交向量组.

由上述过程把一个线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 化为与之等价的标准正交向量组 $\eta_1, \cdots, \eta_m$ 的过程称为施密特正交化方法(Schmidt orthogonalization method).

例 2　设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

试用施密特正交化方法将该组向量标准正交化.

解 先正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1$,

解 先正交化, 令 $\beta_1 = \alpha_1$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

解 先正交化, 令 $\beta_1=\alpha_1$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

再单位化：令 $\eta_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $\eta_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \sqrt{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

则 η_1, η_2, η_3 即为所求的标准正交向量组.

第二节	向量的内积、标准正交基和正交矩阵
A	向量的内积
B	标准正交基与施密特正交化方法
C	正交矩阵和正交变换

定义 5 如果 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad (4-7)$$

则称 A 为正交矩阵(orthogonal matrix).

例如, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

等都是 2 阶正交矩阵.

容易验证下面两个矩阵也都是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

由正交矩阵的定义知, **A** 是正交矩阵当且仅当 **A** 的列向量组为标准正交基.

事实上, 设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \ldots & \ldots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

即 $[\alpha_i, \alpha_j] = \alpha_i^{\mathrm{T}} \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

即 $[\alpha_i, \alpha_j] = \alpha_i^{\mathrm{T}} \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$

由此可见, 方阵 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵的充要条件是: $\mathbf{A}$ 的列向量是两两正交的单位向量.

即 $[\alpha_i, \alpha_j] = \alpha_i^{\mathrm{T}} \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

由此可见, 方阵 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵的充要条件是: $\mathbf{A}$ 的列向量是两两正交的单位向量.

由正交矩阵的定义及逆矩阵的性质可知, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ 等价于 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, 因此上述结论对 $\mathbf{A}$ 的行向量仍然成立, 从而有定理:

定理 3

A 是正交矩阵

$\Leftrightarrow$ 方阵 **A** 的行向量组是标准正交向量组.

$\Leftrightarrow$ 方阵 **A** 的列向量组是标准正交向量组.

正交矩阵的性质:

定理 4　(1) 若 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵, 则 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交矩阵, 且 $|\mathbf{A}| = \pm 1$;

（2）若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 也是正交阵.

正交矩阵的性质：

定理4　(1) 若 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵, 则 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交矩阵, 且 $|\mathbf{A}| = \pm 1$；

（2）若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 也是正交阵.

证　(1) 若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. 又由

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

得 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵；取行列式得 $\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right| |\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right| = |\mathbf{E}| = 1$, 从而 $|\mathbf{A}|^2 = 1$ 得 $|\mathbf{A}| = \pm 1$.

正交矩阵的性质:

定理 4　(1) 若 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵, 则 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交矩阵, 且 $|\mathbf{A}|=\pm 1$;

（2）若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 也是正交阵.

证　(1) 若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. 又由

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E},$$

得 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也是正交阵; 取行列式得 $\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right||\mathbf{A}|=\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right|=|\mathbf{E}|=1$, 从而 $|\mathbf{A}|^2=1$ 得 $|\mathbf{A}|=\pm 1$.

(2) 因为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\mathbf{E}$, 所以

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\mathbf{E}.$$

故 $\mathbf{AB}$ 也是正交矩阵.

定理 5　设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基 A 到基 B 的过渡矩阵为 K, 则 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基的充要条件是 K 为正交矩阵.

定理 5 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基 A 到基 B 的过渡矩阵为 K, 则 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基的充要条件是 K 为正交矩阵.

证 由于基 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是标准正交基, 所以 $A^{\mathrm{T}}A=E$, 因为 $B=AK$, 所以

$$B^{\mathrm{T}}B=(AK)^{\mathrm{T}}(AK)=K^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AK=K^{\mathrm{T}}K,$$

于是:

基 B 是标准正交基

$$\Leftrightarrow B^{\mathrm{T}}B=E \Leftrightarrow K^{\mathrm{T}}K=E \Leftrightarrow K \text{ 为正交矩阵.}$$

引进了正交矩阵后, 可以定义正交变换.

引进了正交矩阵后, 可以定义正交变换.

定义 6　设 $\mathbf{P}$ 为 n 阶矩阵, $x, y \in \mathbb{R}^n$, 则关系式 $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 称为从变量 $\mathbf{x}$ 到变量 $\mathbf{y}$ 的 线性变换.

如果 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵, 则称 $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 是可逆的线性变换.

如果 $\mathbf{P}$ 是正交矩阵, 则称 $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 是为正交变换 (orthogonal transformation).

正交变换有下面性质:

性质 2　若向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ 在正交矩阵 $\mathbf{P}$ 作用下变换为 $\mathbf{Px}, \mathbf{Py} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$，则向量的内积、长度及向量间的夹角均保持不变, 即

$$[\mathbf{Px}, \mathbf{Py}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}], \ \|\mathbf{Px}\| = \|\mathbf{x}\|, \ \langle \mathbf{Px}, \mathbf{Py} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

正交变换有下面性质:

性质 2　若向量 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ 在正交矩阵 $\mathbf{P}$ 作用下变换为 $\mathbf{Px},\mathbf{Py}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$，则向量的内积、长度及向量间的夹角均保持不变，即

$$[\mathbf{Px},\mathbf{Py}]=[\mathbf{x},\mathbf{y}],\ \|\mathbf{Px}\|=\|\mathbf{x}\|,\ \langle\mathbf{Px},\mathbf{Py}\rangle=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

证　$[\mathbf{Px},\mathbf{Py}]=(\mathbf{Px})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Py})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P})\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=[\mathbf{x},\mathbf{y}]$,

当 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 时，上式为 $[\mathbf{Px},\mathbf{Px}]=[\mathbf{x},\mathbf{x}]$，即 $\|\mathbf{Px}\|=\|\mathbf{x}\|$. 此时，有

$$\cos\langle\mathbf{Px},\mathbf{Py}\rangle=\frac{[\mathbf{Px},\mathbf{Py}]}{\|\mathbf{Px}\|\ \|\mathbf{Py}\|}=\frac{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}{\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|}=\cos\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle,$$

所以两向量间的夹角保持不变.

例 3　设 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$ 是正交矩阵，且 $|\mathbf{A}| < 0$，证明：$|\mathbf{E}+\mathbf{A}| = 0$.

例 3　设 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$ 是正交矩阵，且 $|\mathbf{A}| < 0$，证明：$|\mathbf{E} + \mathbf{A}| = 0$.

证　因为 $\mathbf{A}$ 是正交阵，有 $|\mathbf{A}| = \pm 1$，又 $|\mathbf{A}| < 0$，故 $|\mathbf{A}| = -1$，于是

$$|\mathbf{E} + \mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\right| = \left|(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E})\mathbf{A}\right|$$

$$= |\mathbf{A} + \mathbf{E}| \cdot |\mathbf{A}| = -|\mathbf{E} + \mathbf{A}|,$$

得 $|\mathbf{E} + \mathbf{A}| = 0$.