武汉大学2015-2016学年
《复变函数与积分变换》期末考试参考答案

一、（**每小题4分，共40分**）解答下列各题, 写清楚过程或理由.

1. 求$(1-i)^{\frac{1}{5}}$的值.

解: $(1-i)^{\frac{1}{5}}=\{\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]\}^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{10}}[\cos(-\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}k\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}k\pi)]$, $k=0,1,2,3,4$.

2. 求$(1-i)^i$的值, 并指出其主值.

解: $(1-i)^i=\exp[i\mathrm{Ln}(1-i)]=\exp\{i[\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}-2k\pi)]\}=\exp\{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}\}$, 其中$k\in\mathbb{Z}$. 主值为$\exp\{\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}\}$.

3. 解复方程$\cos z-\sin z=0$.

解: $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$. 化简得$e^{2iz}=i$. 解得$z=\frac{\mathrm{Ln}i}{2i}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. 指出函数$f(z)=2x^3+3y^3i$在何处可导?在何处解析?

解: 令$u=2x^3$, $y=3y^3$, 则$u_x=6x^2, u_y=0, v_x=0, v_y=9y^2$. 若$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, 则$6x^2=9y^2$. 因此, f在$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$上可导, 但在复平面上处处不解析.

5. 指出$z=1$是函数$f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{z-1}}$什么类型奇点?

解: $z=1$是f的本性奇点, 这是因为$f(z)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{z-1}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots)$含有无穷个负幂项.

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^ne^{i\frac{\pi}{n}}z^n$的收敛半径.

解: $R=\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|2^ne^{i\frac{\pi}{n}}|}\right)^{-1}=\frac{1}{2}$.

7. 求函数$f(t)=2\delta(t)+te^t$的Laplace变换式.

解: $\mathcal{L}[2\delta(t)+te^t]=2\mathcal{L}[\delta(t)]+\mathcal{L}[te^t]=2-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^t]=2+\frac{1}{(s-1)^2}$.

8. 求函数$F(s)=\frac{2s+3}{s^2+9}$的Laplace逆变换.

解: $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\left.\frac{2s+3}{s+3i}e^{st}\right|_{s=3i}+\left.\frac{2s+3}{s-3i}e^{st}\right|_{s=-3i}=2\cos 3t+\sin 3t$.

9. 指出级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2}{3^n}i\right]$是条件收敛还是绝对收敛?

解: 由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}$收敛, 所以原级数收敛. 又由于级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛, 所以原级数条件收敛.

10. 求积分$I=\int_0^i z^2e^z\mathrm{d}z$的值.

解: 分部积分: $I=z^2e^z\big|_0^i-2\int_0^i ze^z\mathrm{d}z=-e^i-2[ze^z|_0^i-\int_0^i e^z\mathrm{d}z]=(1-2i)e^i-2$.

二、（**每小题7分，共28分**）计算下列各题, 写清楚过程.

1. 设L是不经过原点的逐段光滑的简单闭曲线, 试求$I=\oint_L\frac{1}{z^{2016}}\mathrm{d}z$.

解: 分别就$z=0$在L内部和外部讨论, 易得$I=0$.

2. 试求$J=\oint_{C_1+C_2}\dfrac{\cos z}{z^4}\mathrm{d}z$, 其中$C_1: |z|=2015$为逆时针方向, $C_2: |z|=2016$为顺时针方向.

解: 由Cauchy定理, $J=-\oint_{C_1^-+C_2^-}\frac{\cos z}{z^4}\mathrm{d}z=0$.

3. 求$K=\oint_C\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$, 其中$C: |z|=2015$为正向.

解: $K=-2\pi i\mathrm{Res}(\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty)=2\pi ic_{-1}$. 由于

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=z^n-1+\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{2n}}+\cdots,\quad 1<|z|<+\infty,$$

那么$n=1$时$c_{-1}=1$, $n\neq 1$时$c_{-1}=0$. 因此, $n=1$时$K=2\pi i$, $n\neq 1$时$K=0$.

4. 利用留数定理计算反常积分$N=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+16x^4}\mathrm{d}x$.

解: $N=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$. 上半平面, $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$有两个一级极点$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}$, 其留数分别为

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad \mathrm{Res}(f,z_2)=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

根据留数定理,

$$I=\frac{1}{8}2\pi i\{\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\}=\frac{\pi i}{4}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right\}=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

三、(**本题10分**)把函数$f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$在$0<|z|<1$和$0<|z-i|<1$内展开成Laurent级数.

解: 当$0<|z|<1$时,

$$f(z)=\frac{-1}{iz^2}\cdot\frac{1}{1+iz}=\frac{-1}{iz^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-iz)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}i^{k-1}z^{k-2}.$$

当$0<|z-i|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{(z-i+i)^2}=\frac{-1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}.$$

由于$\frac{1}{(1-\tau)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\tau^{n-1}$, $|\tau|<1$, 那么

$$f(z)=\frac{-1}{(z-i)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2},\ \ 0<|z-i|<1.$$

四、(**本题10分**)求以$v(x,y)=\dfrac{-x^2+y^2}{2}$为虚部的解析函数$f(z)$使得$f(0)=0$.

解: 设$f=u+iv$, 则

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x=y-ix=-iz\Longrightarrow f(z)=\int f'(z)dz=-\frac{iz^2}{2}+C.$$

考虑到$f(0)=0$, 可得$C=0$. 因而, $f(z)=-\frac{iz^2}{2}$.

五、(**每小题6分, 共12分**)利用Laplace变换解下列方程:

1. 求方程$y''+y'-2y=e^{3t}$满足初值条件$y(0)=y'(0)=0$的解.

解: 设方程的解$y=y(t),t\geq 0$. 设$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$. 方程两边实行Laplace变换, 并考虑初始条件得

$$s^2Y(s)+sY(s)-2Y(s)=\frac{1}{s-3}\Longrightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s-3)}=\frac{-\frac{1}{6}}{s-1}+\frac{\frac{1}{15}}{s+2}+\frac{\frac{1}{10}}{s-3}.$$

取逆变换得原方程的解为

$$y(t) = -\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{3t}.$$

2. 求积分方程$y(t) + \int_0^t y(t-\tau)e^{\tau}\mathrm{d}\tau = t$的解.

解: 设$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. 方程两边实行Laplace变换得

$$Y(s) + \frac{Y(s)}{s-1} = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}.$$

取逆变换得原方程的解为

$$y(t) = t - \frac{t^2}{2}.$$