《常微分方程》期末考试试卷简答（A）

（2021-2022 学年度上学期，经济与管理学院 金融学专业）

一、求解如下微分方程的通解或特解（每题 10 分，共 80 分）

1. $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x-y+1)$.

解：令 $x-y+1=u$，则 $1-\dfrac{du}{dx}=\sin u$

$\dfrac{du}{dx}=1-\sin u$

① 当 $1-\sin u=0$，即 $u=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$y=x+1-2n\pi-\frac{\pi}{2}$ 的为方程特解

② 当 $1-\sin u\neq 0$ 时，$\dfrac{du}{1-\sin u}=dx$，$\int\dfrac{du}{1-\sin u}=x$，$\int\dfrac{du}{(\sin\frac{u}{2}-\cos\frac{u}{2})^2}=x$

$2\int\dfrac{d\tan\frac{u}{2}}{(\tan\frac{u}{2}-1)^2}=x$　　$-\dfrac{2}{\tan\frac{u}{2}-1}=x+c$，即 $-\dfrac{2}{\tan\frac{x-y+1}{2}-1}=x+c$ 为方程通解.

2. 求方程 $(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$ 的积分因子和通解.

解：$M(x,y)=2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}$，$N(x,y)=x^2+y^2$

此时 $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=1$，故方程有积分因子 $\varphi(x)=e^{\int dx}=e^x$.

故 $e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$ 为全微分方程.

其解为 $\int_0^y e^x(x^2+y^2)dy+\int_0^x 0\cdot e^x dx=c$

即 $e^x x^2 y+\frac{1}{3}e^x y^3=c$.

3. 已知方程 $y'=y^2+2xy+1-3x^2$ 有一特解 $y^*(x)=x$，利用变换 $y(x)=y^*(x)+u(x)$

求解此方程.

解：令 $y=x+u$，代入方程：$1+\frac{du}{dx}=x^2+2xu+u^2+2x^2+2xu+1-3x^2$

方程化为 $\dfrac{du}{dx}=4xu+u^2$

① 显然 $u=0$ 为解，即 $y=x$ 为原方程的解

② 当 $u\neq 0$ 时，$u^{-2}\dfrac{du}{dx}-4xu^{-1}=1$　　$-\dfrac{du^{-1}}{dx}-4xu^{-1}=1$，令 $w=u^{-1}$

$\dfrac{dw}{dx}+4xw=-1$ 为线性微分方程

其解为 $w=e^{-\int 4xdx}[c+\int(-1)e^{\int 4xdx}dx]=e^{-2x^2}[c-\int e^{2x^2}dx]$

当 $w=u^{-1}=\frac{1}{y-x}$ 代入即得原微分方程解

4. $y'=xe^{y'}$.

解：$x=y'e^{-y'}$，令 $y'=t$

则 $x=te^{-t}$，此时 $dy=t\,dx=t\,d(te^{-t})$

从而 $y=\int t\,d(te^{-t})=t^2e^{-t}-\int te^{-t}dt=t^2e^{-t}+\int t\,de^{-t}$

$=t^2e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}+C$

故方程解为 $\begin{cases} x=te^{-t} \\ y=t^2e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}+C \end{cases}$

5. $x^3y'''+3x^2y''+17xy'=x$

解：此为Euler方程，令 $x=e^t$，且令 $D=\frac{d}{dt}$

$D(D-1)(D-2)y+3D(D-1)y+17Dy=e^t$

化简得：$D^3y+16Dy=e^t$，其特征方程为 $\lambda^3+16\lambda=0$，特征根为

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=4i$，$\lambda_3=-4i$

$D^3y+16Dy=0$ 的通解为 $y=C_1+C_2\sin 4t+C_3\cos 4t$

$D^3y+16Dy=e^t$，有特解 $y^*=Ae^t$，待定得 $A=\frac{1}{17}e^t$

非齐次方程通解 $y=C_1+C_2\sin 4t+C_3\cos 4t+\frac{1}{17}e^t$

原非齐次方程通解为 $y=C_1+C_2\sin(4\ln x)+C_3\cos(4\ln x)+\frac{1}{17}x$.

6. 已知克莱罗型方程 $y=xp+f(p)$ $(p=\frac{dy}{dx})$，$f(p)$二阶可导，且$f''(p)\neq 0$，求以

$y=\sin x$为奇解的克莱罗方程的具体形式.

解：克莱罗方程的奇解为

$\begin{cases} y=xc+f(c) \\ 0=x+f'(c) \end{cases}$，由于 $y=\sin x$ 为奇解 则

$\begin{cases} \sin x=xc+f(c) \\ x=-f'(c) \end{cases}$，从而 $f(c)=\sin x-xc$

两边对 c 求导：$f'(c)=\cos x\cdot\frac{dx}{dc}-\frac{dx}{dc}c-x$，利用 $x=-f'(c)$

$c=\cos x$ 从而 $f(c)=\sqrt{1-c^2}-c\cdot\arccos c$

即得原方程为：$y=xy'+\sqrt{1-y'^2}-y'\arccos y'$ (或以 $y=\sin x$ 代入原方程亦可得同样结果)

7. $\frac{dY}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}Y$.

解：$\frac{dY}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}Y=AY$

其特征方程 $|A-\lambda E|=0$，即 $(\lambda-2)^3=0$，$\lambda_{1,2,3}=2$ (三重根)

方程解为 $Y=(R_0+R_1x+R_2x^2)e^{2x}$ $\quad 0 \quad 0 \quad 0$

此时 $(A-2E)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，$(A-2E)^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

从而 $(A-2E)^3R_0=0$. R_0 为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

其对应 R_1 为 $R_1=(A-2E)R_0$ ，分别为 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

R_2 为 $R_2=\frac{1}{2}(A-2E)R_1$ ，分别为 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

故齐次方程通解为 $\tilde{y}(x)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2x}+C_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x\right)e^{2x}+C_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}x^2\right)e^{2x}$

8. $y'''+2y''+y'=x+1+e^x$

解：齐次方程 $y'''+2y''+y'=0$ ，其对应特征方程为

$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0$ ， $\lambda_1=0$ ， $\lambda_{2,3}=-1$

齐次方程通解为 $\tilde{y}(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}$.

对于非齐次方程 $y'''+2y''+y'=x+1$ ，则有特解

$y_1^*(x)=x(ax+b)$ ，解得 $a=\frac{1}{2}$ ， $b=-1$

对于非齐次方程 $y'''+2y''+y'=e^x$ ，则有特解

$y_2^*(x)=Ae^x$ ，代入可 $A=\frac{1}{4}$

故原方程通解为 $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+x(\frac{1}{2}x-1)+\frac{1}{4}e^x$.

二、 证明题（共 20 分）

9. n 阶线性非齐次微分方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$ ，其中 $p_i(x), f(x)$, $i=1,2,\cdots,n$ 均在 (a,b) 内连续，且 $f(x)$ 不恒为0，证明，该微分方程有且至多有 $n+1$ 个线性无关的解.(7 分)

证：齐次方程 $y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=0$ 必好有n个线性无关的解.

若非齐次方程：$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=f(x)$ ，仅有不超过n个线性无关的解

$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_k(x)$ ， $(k\le n)$

由于 $y_1(x)-y_k(x), y_2(x)-y_k(x), \cdots, y_{k-1}(x)-y_k(x)$ 为齐次方程线性无关基本解组

且个数 $k-1$ 小于 n ，与齐次方程有n个线性无关解矛盾

同理，当有超过 $n+1$ 个线性无关解时，如 $n+2$ 个， $y_1(x), \cdots, y_{n+2}(x)$

则 $y_1(x)-y_{n+2}(x), \cdots, y_{n+1}(x)-y_{n+2}(x)$ 为 $n+1$ 个齐次线性方程线性无关解

矛盾.

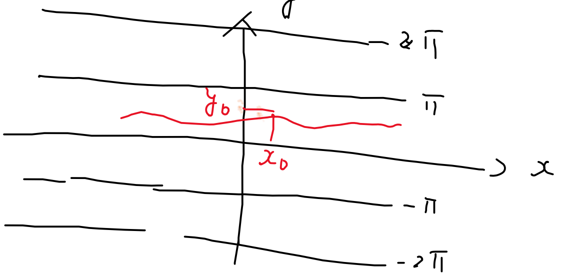
10. 讨论微分方程初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin y}{1+e^{-xy}} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$解的存在性、唯一性以及解的存在区间.（7 分）

证明: $f(x,y)=\dfrac{\sin y}{1+e^{-xy}} \in C(R^2)$ 故 $f(x,y)$ 满足局部L-条件

$f_y'(x,y) \in C(R^2)$

因此，其过任一点 (x_0,y_0) 的解存在且唯一

由 $\sin y=0$, $y=n\pi$, $n\in Z$.



若 $y_0=k\pi$ $(k\in Z)$, 则 $y=k\pi$ 即为其解

且存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

若 $k\pi<y_0<(k+1)\pi$, $k\in Z$

则由解的存在唯一性，

及延展定理，可知其解

的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

(或 $-1<f(x,y)<1$, 利用比较判别法及延展定理)

11. 已知某微分方程通解 $\Phi(x,y,C)=0$ 的参数方程形式为$\begin{cases} x=v_0 t\cos C \\ y=v_0 t\sin C-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$,其中

t为参数（$t>0$）, v_0、g 为某个大于 0 的常数，C 为任意常数($\dfrac{\pi}{4}\le C\le\dfrac{\pi}{2}$)，证明此微分方程有

奇解 $y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$.（6 分）

证明: 由① $t=\dfrac{x}{v_0\cos c}$ 代入②

$y=x\cdot\tan c-\frac{1}{2}g\cdot\dfrac{x^2\cos^2 c}{v_0^2}$

由 c 判别式

$$\begin{cases} y=x\tan c-\frac{1}{2}g\cdot\dfrac{x^2}{v_0}\cos^2 c \\ 0=x\sec^2 c+\frac{1}{2}g\cdot\dfrac{x^2}{v_0}\cdot 2\cos c\cdot\sin c \end{cases}$$

消去c 即得: $y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$.