练习 5．5

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 正定．

证 设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，则 $\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=0$，即 $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$，因 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值均为实数，故 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值均为 $\lambda=1$ 大于 0，从而 $\boldsymbol{A}$ 正定．

3．设 $\boldsymbol{A}$ 均为正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 都是正定矩阵．

证 因 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 均为对称矩阵．

本题有多种证法，例如可以通过证明所有的特征值均为正数来得到．因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $|\boldsymbol{A}|>0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值均大于零．设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则易知 λ，$\dfrac{1}{\lambda}$，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 分别为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 对应的特征值，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值均大于零，从而均正定．

4．判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 的正定性．

解 可以通过顺序主子式来判断．因

$$\Delta_1=3>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=5>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&1\end{vmatrix}=5>0,$$

故二次型正定．

5．判别二次型 $f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性．

解 可以通过顺序主子式来判断．二次型对应的矩阵为：$\begin{pmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{pmatrix}$，因

$$\Delta_1=-5<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-5&2\\2&-6\end{vmatrix}=26>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{vmatrix}=-80<0,$$

故二次型负定．

6．判断下列命题是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也是正定矩阵；

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵；

(4) 若实矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的元素全部大于 0．

解 (1) 正确．

(2) 正确．

(3) 错误．此时 $\boldsymbol{AB}$ 不一定对称，也不一定是正定矩阵．例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ 均正定，但 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&-1\\2&5\end{pmatrix}$ 不正定．

(4) 正确．设 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{Px}\neq\boldsymbol{0}$，从而由 $\boldsymbol{A}$ 正定，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Px})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Px})>0,$$

故 $\boldsymbol{B}$ 正定．

(5) 正确．

4. 下列矩阵是否可以对角化，若能，求对应的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}.$$

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为：

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

故特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-4$．

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$．

当 $\lambda_3=-4$ 时，解 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$．

从而 $\boldsymbol{A}$ 存在 3 个线性无关的特征向量，可以对角化．构造矩阵 $\boldsymbol{P}$ 如下，有

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}.$$

5. 已知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{pmatrix}$ 的特征值，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，并说明理由．

解 依题设，有

$$\left|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}-3&-2&2\\k&-1&-k\\-4&-k&3\end{vmatrix}=(k-1)^2=0,$$

故 $k=1$．此时

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-3&-2&2\\1&\lambda-1&-1\\-4&-1&\lambda+3\end{pmatrix},$$

由 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda^2(\lambda-1)=0$，有：

对 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+3r_1\\ r_3+4r_1}]{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & -5 & -1\end{pmatrix}.$$

因 $R(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，则 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含有1个线性无关的解向量，$\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，2，求 $\left|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right|$.

解 由题设知 $\left|\boldsymbol{A}=1\times(-1)\times 2=-2\right|$. 因 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\dfrac{1}{\lambda}+3\lambda-2$ 为 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值，即为 -1，-3，3，从而有

$$\left|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right|=(-1)\cdot(-3)\cdot 3=9\,.$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

（2）当 k 为何值时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵.

解 （1）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.
两边左乘 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$，从而可得 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}$.

因 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，从而有 $\lambda^2+2\lambda=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 的取值范围为 $0,-2$. 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，必相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，且 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\Lambda})=2$，故

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

即 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$.

（2）$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是实对称矩阵，由(1)知 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $k-2,k-2,k$. 而 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定的充分必要条件是全部特征值均大于零，得：$k-2>0$ 且 $k>0$，故 $k>2$ 时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证 因为

$$\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=-\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|,$$

从而 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0$，即 $\left|(-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$，得 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

9. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 可对角化，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，故对应的线性无关的特征向量有 2 个，$R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，将 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，得

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+2r_1]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2-x & 0 & -y-2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由 $R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，故 $x=2$，$y=-2$，从而

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}.$$

A 的另一个特征值为$\lambda_3=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}-\lambda_1-\lambda_2=10-4=6$.

对 $\lambda=2$，由 $(2E-A)x=0$，其同解方程为 $x_1+x_2-x_3=0$ 对应的特征向量为 $\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm T}$，$\xi_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$.

对 $\lambda=6$，由 $(6E-A)x=0$，有

$$6E-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&2&2\\1&5&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $\xi_3=(1,-2,3)^{\mathrm T}$.

令 $P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&3&-3\\-1&1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&b&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，求:

(1) a,b 之值;

(2) 可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

解 (1) 依题意，由特征值的性质，有

$$-2+3+a=-2+b+2,\quad \left|A\right|=-6(a+1)=-4b,$$

解得 $a=-1$，$b=0$.

(2) 此时

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&3&-3\\-1&1&-1\end{pmatrix},\quad \left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\1&\lambda-3&3\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda+2),$$

对特征值 $\lambda_1=-2$，解 $(-2E-A)x=0$，得基础解系 $p_1=(2,1,1)^{\mathrm T}$.

对特征值 $\lambda_2=0$，解 $(0E-A)x=0$，得基础解系 $p_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$.

对特征值 $\lambda_3=2$，解 $(2E-A)x=0$，得基础解系 $p_3=(0,3,1)^{\mathrm T}$.

令

$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&3\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

有 $P^{-1}AP=B$.

12. 设 n 阶矩阵 A,B 可交换，且 A 的特征值不相同，证明：存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$ 均为对角矩阵.

证 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的互不相同的特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$为其对应的特征向量，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n$，且$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$线性无关.

因$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可交换，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i)=\boldsymbol{B}(\lambda_i\boldsymbol{p}_i)=\lambda_i(\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i)，\quad \boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n .$$

即$\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i$也是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_i$的特征向量．因$\lambda_i$是$\boldsymbol{A}$的单重特征值，所以对应于$\lambda_i$的任意两个向量都成比例，于是

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i=\mu_i\boldsymbol{p}_i，\quad \boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n .$$

设$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$，则$\boldsymbol{P}$可逆，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}_1，\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)=\boldsymbol{\Lambda}_2，$$

即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$均为对角矩阵.

14. 设$\lambda\neq 0$是m阶矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$的特征值，证明$\lambda$也是$n$阶矩阵$\boldsymbol{BA}$的特征值.

证 设$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{AB}$的对应于特征值λ的特征向量，即

$$\boldsymbol{AB}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} .$$

因$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，且$\lambda\neq 0$，从而$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，上式两边左乘$\boldsymbol{B}$得

$$\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})，$$

由于$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{BA}$对应于特征值$\lambda$的特征向量.

17. 已知$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，

（1）确定常数a,b及$\boldsymbol{\xi}$所对应的特征值；

（2）判断$\boldsymbol{A}$能否相似于对角阵，并说明理由.

解 （1）设$\boldsymbol{\xi}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ_0的特征向量，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}2-1-2=\lambda_0\\5+a-3=\lambda_0\\-1+b+2=-\lambda_0\end{cases},$$

从而有$a=-3$，$b=0$，特征向量$\boldsymbol{\xi}$所对应的特征值$\lambda_0=-1$.

（2）此时$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0，$$

知矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$．由于

$$R(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}=2,$$

从而$\lambda=-1$只有一个线性无关的特征向量，故$\boldsymbol{A}$不能相似对角化.

18. 设 1，1，-1 是 3 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的 3 个特征值，对应于 1 的特征向量为$\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$.

解 设$\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$为$\lambda=-1$对应的特征向量，则其与$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$正交，故

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad 2x_1+2x_2+x_3=0,$$

得$\boldsymbol{p}_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$. 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则有

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&4\\1&1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

19. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶实对称矩阵，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$，对应于特征值 2 的一个特征向量为$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，对应于特征值 1 的一个特征向量为$(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，求对应于特征值 2 的与$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$线性无关的一个特征向量，并求$\boldsymbol{A}$.

解 设$\boldsymbol{p}_2=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$为与$\lambda_1=\lambda_2=2$对应的与$\boldsymbol{p}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$正交的特征向量，且与$\boldsymbol{p}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$正交，则

$$x_1-x_2+x_3=0,\quad x_1-x_3=0,$$

得$\boldsymbol{p}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\1&2&1\\3&0&-3\end{pmatrix},$$

此时

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\1&2&1\\3&0&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

20. 设实对称矩阵$\boldsymbol{A}_{3\times 3}$的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$，属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量依次为$\boldsymbol{p}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$.

解 依题设$\lambda_3=-3$对应的特征向量$\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$正交，故

$$x_1-x_2=0,\quad x_1+x_2+x_3=0,$$

得$\boldsymbol{p}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$. 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，则

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&1&-2\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\2&2&2\\1&1&-2\end{pmatrix},$$

此时

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\2&2&2\\1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：

（1） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（2） 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解 （1） 设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.
用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式，得 $k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所以

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

可变形为：$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)-(2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，故 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是属于不同特征值的特征向量，所以线性无关，因此 $k_1=k_3=0$，从而有 $k_2=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（2） 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

25. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$， $a_ib_i\neq 0,\forall i=1,2,\cdots,n$，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解 因矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_1&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},$$

其特征多项式为：

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1b_1&-a_1b_2&\cdots&-a_1b_n\\-a_2b_1&\lambda-a_2b_2&\cdots&-a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_nb_1&-a_nb_1&\cdots&\lambda-a_nb_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & 0\\ -a_2b_1 & \lambda-a_2b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_1 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & \lambda-a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_1 & \cdots & -a_nb_n\end{vmatrix}$$

$$=\lambda D_{n-1}-a_nb_n\lambda^{n-1},$$

递推可得 $D_n=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)$，从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 及 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其等价于方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$，基础解系为：

$$\boldsymbol{p}_1=(-b_2,b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(-b_3,0,b_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{p}_{n-1}=(-b_n,0,0,\cdots,b_1)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{p}_{n-1}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 不全为零.

对 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，解 $(\lambda_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{p}=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 为特征向量，其中 $k\neq 0$.

27. 存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将如下二次型 f 化成二次型 g，求此变换 $\boldsymbol{P}$.

$$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3,$$

$$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

解　**方法 1**：两二次型对应的矩阵分别为：

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix},\quad g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别作合同变换如下：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\hline\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{c_2-2c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\\hline 1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3+c_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hline 1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right),$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}$ 下

$$f=2z_1^2+z_2^2,$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \hline \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\\ \hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1}]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\ \hdashline 1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[c_3-2c_2]{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\ \hdashline 1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{array}\right),$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}$ 下 $g=2z_1^2+z_2^2$，其中

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{y}$ 得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{y},$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&-6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下 $f=g=2z_1^2+z_2^2$.

方法 2：配方易得

$$\begin{aligned}f&=2(x_1+2x_2-x_3)^2+8x_2x_3+x_2^2+x_3^2-10x_2x_3\\&=2(x_1+2x_2-x_3)^2+(x_2-x_3)^2,\end{aligned}$$

$$g=2(y_2+y_3-y_1)^2+(y_2+2y_3)^2,$$

故可令

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=y_2+y_3-y_1\\x_2-x_3=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}，解得\begin{cases}x_1=-y_1-y_2-4y_3\\x_2=y_2+3y_3\\x_3=y_3\end{cases}，即$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}，取 \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} 即可.$$

若令

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-y_2-y_3+y_1\\x_2-x_3=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}，则有\begin{cases}x_1=y_1-3y_2-6y_3\\x_2=y_2+3y_3\\x_3=y_3\end{cases}，即$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}，取 \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-3&-6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} 即可.$$

若令

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=y_2+y_3-y_1 \\ x_2-x_3=-y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x_1=-y_1+3y_2+4y_3 \\ x_2=-y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}，取 \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}即可.$$

若令

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-y_2-y_3+y_1 \\ x_2-x_3=-y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，则有$\begin{cases} x_1=y_1+y_2+2y_3 \\ x_2=-y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}，取 \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}即可.$$

还可以有其它结果.

29． 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，通过正交变换可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

解 依题设，二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$，其特征值为 1，2，5．因其特征多项式为：

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -a \\ 0 & -a & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3-a)(\lambda-3+a),$$

故 $a=2$（负值舍去）.

对于解特征值 $\lambda_1=1$，解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

对于解特征值 $\lambda_2=2$，解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

对于解特征值 $\lambda_3=5$，解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

单位化后，令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,2,5)$.

30. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

（3）求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解 （1）二次型对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

由二次型的秩为 2，知

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-8a=0,$$

得 $a=0$.

（2）当 $a=0$ 时，有 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

知 A 有特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，由

$$(2E-A)x=0,\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为：$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(0,0,1)^{\mathrm T}$.

当 $\lambda_3=0$ 时，由

$$(0E-A)x=0,\quad \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得特征向量为：$\alpha_3=(1,-1,0)^{\mathrm T}$.

由于 α_1，α_2，α_3 已两两正交，直接将 α_1，α_2，α_3 单位化，得：

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，即为所求的正交变换矩阵，由 $x=Qy$，可化原二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm T}Ax=(Qy)^{\mathrm T}AQy=y^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}AQy=y^{\mathrm T}\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}y=2y_1^2+2y_2^2.$$

（3）**方法 1：** 由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0,y_2=0,y_3=k$（k 为任意常数）. 从而所求解为：

$$x=Qy=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\eta_3=\begin{pmatrix}k\\-k\\0\end{pmatrix}，其中 k 为任意常数.$$

方法 2：方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+x_3^{\ 2}=0$，

即 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，所以 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解 $k(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

31． 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 k 为实数，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 k 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解 由于 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 必可相似对角化，而对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角线元素即为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，只要求出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值即知 $\boldsymbol{\Lambda}$，又因正定的充分必要条件是特征值全大于零，k 的取值亦可求出.

方法 1：由

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

则 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $k+2,k+2,k$，而 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值是 $(k+2)^2,(k+2)^2,k^2$.

又由题设知 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\left((k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2\right)^{\mathrm{T}}=\left((k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right)^2=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{B}$ 必可相似对角化，且

$$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}.$$

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的全部特征值大于零，此时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

方法 2：由方法 1 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=(k\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^2=(\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1})^2\\&=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda})^2\boldsymbol{P}^{-1},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda})^2$，故 $\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}$.

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的全部特征值大于零，此时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

33． 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，$\boldsymbol{M}$ 为满秩矩阵，证明：$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵.

证 对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$，因 $\boldsymbol{M}$ 满秩，故 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，从而由 $\boldsymbol{A}$ 正定，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x})>0,$$

故 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ 为正定.

34. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，求证：对充分大的 t， $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵， $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为实数，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ，则 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$ 为 $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值，取 $t>\max\{-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n\}$ ，从而 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$ 均为正值，此时 $t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

35. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵， $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，证明： $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 正定 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B})=n$.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，即 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$ ，于是 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$ ，即对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ，都有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$ (若 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ ，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$ 矛盾). 因此， $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，故有 $R(\boldsymbol{B})=n$ ($\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有唯一零解的充要条件是 $R(\boldsymbol{B})=n$).

充分性. 因 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$，根据实对称矩阵的定义知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也为实对称矩阵. 若 $R(\boldsymbol{B})=n$ ， 则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

37. $\boldsymbol{A}$ 为正定阵的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$ ，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

证 可以利用正定二次型定义证. 对任意向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，因 $\boldsymbol{U}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{Ux}\neq\boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ux}=(\boldsymbol{Ux})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ux}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

反之，若 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都大于零. 不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为其特征值，$\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}=\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}},$$

从而

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{PQ})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{PQ})(\boldsymbol{PQ})^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{PQ})^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{U}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

38. 判断下列二次型的正定性：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3\quad(a,b\in\mathbb{R})$.

解 (1) 二次型所对应的矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix},$$

计算其顺序主子式有：

$$\Delta_1=5>0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0，\ \Delta_3=\det\boldsymbol{A}=1>0，$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，f 为正定二次型.

(2) 二次型所对应的矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & b\\ 0 & b & 1\end{pmatrix},$$

计算其顺序主子式有：

$$\Delta_1=1，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2，\ \Delta_3=\det A=1-(a^2+b^2)，$$

当 $a^2+b^2<1$ 时，有 $\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0$，故 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，f 为正定二次型；当 $a^2+b^2\geq 1$ 时，有 $\Delta_1>0,\Delta_3\leq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 为不定矩阵，f 为不定二次型.