武汉大学 **2020—2021** 学年 第 **一** 学期

《数学物理方法》试卷（A）

参考答案和评分标准

一. **（本题10分）**解：1、 热传导方程 $u_t - Du_{xx} = 0 \quad (0 < x < \pi, t > 0)$ （1分）

边界条件：$u_x\big|_{x=0} = -\dfrac{q_0}{k}, u_x\big|_{x=\pi} = 0$ （2 分）

初始条件：$u\big|_{t=0} = Ax$， （1 分）

$t \to \infty$时，$u(x,t) \to \infty$。 （1 分）

2、 稳态方程 $\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < \infty)$ （2分）

边界条件：$u(x,y)\big|_{x=0} = 0, u(x,y)\big|_{x=a} = u_0,$
$u(x,y)\big|_{y=0} = 0$ （3 分）

$u(x,y)\big|_{y\to\infty} =$ 有限 **（没有不扣分）**

二.**（本题 10 分）**解：1、（10 分）令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

辅助函数的选取为： $w(x,t) = \dfrac{(\pi-2)t}{\pi}x + 2t$ （4 分）

定解问题变为
$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + 2v_t = -(w_{tt} - w_{xx} + 2w_t) = -[\dfrac{(\pi-2)}{\pi}x + 2] \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 - w(x,0); v_t(x,0) = 2 - w_t(x,0) \end{cases}$$
（2+2+2=6 分）

二. **（本题10分）**

解：$u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \dfrac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$ （4分）

$= \dfrac{1}{2}[\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}(-\cos\xi)d\xi + \dfrac{1}{2}k\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\xi$ （3分）

$= \sin(x-t) + \dfrac{1}{2}kt^2$ （3 分）

武汉大学 2020—2021 学年 第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

参考答案和评分标准

一．（本题10分）解：1、 热传导方程 $u_t - Du_{xx} = 0 \quad (0 < x < \pi, t > 0)$ （1分）

边界条件：$u_x\big|_{x=0} = -\dfrac{q_0}{k}, u_x\big|_{x=\pi} = 0$ （2 分）

初始条件：$u\big|_{t=0} = Ax$， （1 分）

$t \to \infty$ 时，$u(x,t) \to \infty$。 （1 分）

2、 稳态方程 $\nabla^2 u(x,y) = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < \infty)$ （2分）

边界条件：$u(x,y)\big|_{x=0} = 0, u(x,y)\big|_{x=a} = u_0,$
$u(x,y)\big|_{y=0} = 0$ （3 分）

$u(x,y)\big|_{y\to\infty} =$ 有限 （没有不扣分）

二．（本题 10 分）解：1、（10 分）令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

辅助函数的选取为： $w(x,t) = \dfrac{(\pi-2)t}{\pi}x + 2t$ （4 分）

定解问题变为
$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + 2v_t = -(w_{tt} - w_{xx} + 2w_t) = -[\dfrac{(\pi-2)}{\pi}x + 2] \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 - w(x,0); v_t(x,0) = 2 - w_t(x,0) \end{cases}$$
（2+2+2=6 分）

二．（本题10分）

解：$u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \dfrac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$ （4分）

$= \dfrac{1}{2}[\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}(-\cos\xi)d\xi + \dfrac{1}{2}k\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\xi$ （3分）

$= \sin(x-t) + \dfrac{1}{2}kt^2$ （3 分）

四．（本题 10 分）

1）（4 分）证明： $\frac{\partial e}{\partial t}=(u_t u_{tt}+a^2 u_x u_{xt})$ $\quad a\frac{\partial p}{\partial x}=a^2(u_{tx}u_x+u_t u_{xx})$ （1 分）

$\frac{\partial p}{\partial t}=au_{tt}u_x+au_t u_{xt}$ $\quad a\frac{\partial e}{\partial x}=a(u_t u_{tx}+a^2 u_x u_{xx})$ （1 分）

将 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 代入，因为 $u_{tx}=u_{xt}$ 即得证。（1分）

2）**（3 分） 方法一：将** $\frac{\partial e}{\partial t}=a\frac{\partial p}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial p}{\partial t}=a\frac{\partial e}{\partial x}$ 分别对 t 和 x 求偏导得到

$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}=a\frac{1}{\partial t}(\frac{\partial p}{\partial x})$ 和 $\frac{1}{\partial x}(\frac{\partial p}{\partial t})=a\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$ （1 分）

因为p的二阶导数存在，故 $\frac{1}{\partial t}(\frac{\partial p}{\partial x})=\frac{1}{\partial x}(\frac{\partial p}{\partial t})$，所以有

$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}=0$ （2分）

方法二：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=a(u_{tt}u_x+u_t u_{xt})=a(a^2u_{xx}u_x+u_t u_{xt})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a(a^2u_{xxt}u_x+a^2u_{xx}u_{xt}+u_{tt}u_{xt}+u_t u_{xtt})$$

$$a^2\frac{\partial p}{\partial x}=a^3(u_{tx}u_x+u_t u_{xx})$$

$$a^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=a^3(u_{txx}u_x+u_{tx}u_{xx}+u_{tx}u_{xx}+u_t u_{xxx})$$

3）**（3 分）** 证明： $E'(t)=\int_0^l(u_t u_{tt}+a^2u_x u_{xt})dx=\int_0^l(a^2u_t u_{xx}+a^2u_x u_{xt})dx$ （1 分）

而 $\int_0^l a^2u_t u_{xx}dx=\int_0^l a^2u_t du_x=a^2u_t u_x\Big|_0^l-\int_0^l a^2u_{tx}u_x dx$ （1 分）

由于 x=0 和 x=l 具有第一类或者第二类齐次边界条件，因此 $a^2u_t u_x\Big|_0^l\equiv 0$，且 $u_{xt}=u_{tx}$，

故 $E'(t)=0$ ，$E(t)=$常数 （1 分）

五、（本题15分）解：1）分离变量 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入泛定方程，得到

$$\begin{cases} T'(t)+\mu DT(t)=0 \\ X''(x)+\mu X(x)=0 \end{cases}$$

2) 本征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\mu X(x)=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$

本征值 $\mu=(n)^2$，$(n=0,1,2,3,\cdots)$

本征函数 $X_n(x)=\cos nx$，($n=1,0,2,3,\cdots$) （4 分）

3）关于 $T(t)$ 满足的方程的解为

$$T_n(t)=A_n e^{-n^2Dt}$$ （3 分）

4）定解问题的通解； $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2Dt}\cos nx$ （3 分）

5）由初始条件 $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx=\cos x+\cos 3x$

$$u_t(x,0)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty} naB_n \cos nx=3\cos 3x$$

得到 $A_1=1, A_3=3 \qquad A_n=0 \quad (n\neq 1,3)$ （3 分）

定解问题的解为 $u(x,t)=e^{-Dt}\cos x+3e^{-9Dt}\cos 3x$ （2 分）

六．（**本题 10 分**）

1） *Legender* 方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \quad l=3$ （1 分）

在 $x=0$ 点领域的级数解为 $y(x)=\sum_{k=0}^{4}c_k x^k$， $P_3(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ 代入方程，

当 $l=3$ 时，有 $6c_2x^2+(6c_3+10c_1)x+(2c_2+12c_0)=0$

所以，有 $c_2=c_0=0$，$c_3=-\frac{5}{3}c_1$ （3 分）

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}c_k x^k=-\frac{5}{3}c_1x^3+c_1x$$ （1 分）

由 $P_3(1)=-\frac{5}{3}c_1+c_1=1$，得到 $c_1=-\frac{3}{2}$

故 $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ （2 分）

2）递推关系 ：$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$

$2P_2(x)-3xP_1(x)+P_0(x)=0 \qquad P_2(x)=\frac{3xP_1(x)-P_0(x)}{2}=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$3P_3(x)-5xP_2(x)+2P_1(x)=0$

$$P_3(x)=\frac{5xP_2(x)-2P_1(x)}{3}=\frac{1}{3}[5x\frac{1}{2}(3x^2-1)-2x]$$

$$=\frac{1}{6}[(15x^3-5x)-4x]=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$ （3 分）

七、定解问题：$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=0 \quad a<r<2a \\ u(r,\theta)\big|_{r=a}=u_0 \\ u(r,\theta)\big|_{r=2a}=u_0\cos\theta\end{cases}$ （3 分）

定解问题的通解为 $u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta)$ （2分）

由边界条件确定系数 $u\big|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l a^l+B_l a^{-(l+1)})P_l(\cos\theta)=u_0$

$$u\big|_{r=2a}=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l(2a)^l+B_l(2a)^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta)=u_0\cos^2\theta=u_0(\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3})$$ （2分）

$$A_0a^0+B_0a^{-1}=u_0$$

$$A_0(2a)^0+B_0(2a)^{-1}=\frac{1}{3}u_0$$

$$A_2a^2+B_2a^{-3}=0$$

$$A_2(2a)^2+B_2(2a)^{-3}=\frac{2}{3}u_0$$

得到：$A_1=\frac{4}{7a}u_0 \quad B_1=-\frac{4a^2}{7}u_0 \quad A_l=0 \ \ (l\neq 1) \quad B_l=0 \ \ (l\neq 1)$ （1分）

球壳内 $(a<r<2a)$ 电位分布 $u(r,\theta)=[\frac{4}{7}(\frac{r}{a})-\frac{4}{7}(\frac{a}{r})^2]u_0P_1(\cos\theta)$ （2分）

八、（**本题 10 分**） 证明：

利用整数阶 Bessel 函数的母函数 $\exp\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$，令 $t=e^{i\theta}$，有

$$e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$$

两边对 θ 求导，再令 $\theta=0$，得到

$$ix\cos\theta e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}inJ_n(x)e^{in\theta}$$

$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x),$$ （6 分）

另解： 由 $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$，两边对 t 求导数，得到

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}[\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}$$ 两边乘以 t，令 t=1，得到

$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)$$

2） 由 $e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$ 两边对 θ 求两次导数，得到

$$-ix\sin\theta e^{ix\sin\theta}+ix\cos\theta(ix\cos\theta e^{ix\sin\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)^2J_n(x)e^{in\theta}$$

令 $\theta=0$，得到 $x^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2J_n(x)$ （4 分）

九、(**15 分**) 1)定解问题为 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\rho,t)}{\partial t} - D\nabla^2 u(\rho,t) = 0 \qquad \rho < 1 \\ u\big|_{\rho=1} = 0 \\ u\big|_{t=0} = (1-\rho^2)T_0 \end{cases}$$ (3 分)

2)分离变量,令 $u(\rho,t) = T(t)R(\rho)$,则

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} + Dk^2 T(t) = 0 \\ \rho^2 \dfrac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho} + k^2\rho^2 R(\rho) = 0 \end{cases}$$

$R(\rho)$满足的方程的本征值问题(第一类齐次边界条件)

$$\begin{cases} \rho^2 \dfrac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho} + k^2\rho^2 R(\rho) = 0 \\ R(\rho)\big|_{\rho\le 1} = \text{有限} \\ R(\rho)\big|_{\rho=1} = 0 \end{cases}$$ (1 分)

本征值: $k = k_m^0 = x_m^0$ (x_m^0 是 0 阶 Bessel 函数的第 m 个零点) (1 分)

本征函数:$\{J_0(k_m^0\rho)\}$ $(m = 1,2,\cdots)$ (1 分)

3) 圆柱体内 $T(t)$ 满足的方程 $\dfrac{dT(t)}{dt} + D(k_m^0)^2 T(t) = 0$

其解为 $T_m(t) = A_m \exp(-D(k_m^0)^2 t)$ (3 分)

4)定解问题的通解为 $u(\rho,t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m e^{-D(k_m^0)^2 t} J_0(k_m^0\rho)$ (2 分)

5)系数由初始条件确定:$u(\rho,0) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_m^0\rho) = f(\rho) = (1-\rho^2)T_0$ (1 分)

$$A_m = \frac{1}{\frac{1}{2}J_1^2(x_m^0)} \int_0^1 \rho J_0(k_m^0\rho)(1-\rho^2)d\rho = \frac{8}{[x_m^0]^3 J_1(x_m^0)}$$ (2 分)

则问题的解为 $u(\rho,t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{8}{[x_m^0]^3 J_1(x_m^0)} e^{-D(k_m^0)^2 t} J_0(k_m^0\rho)$ (1 分)