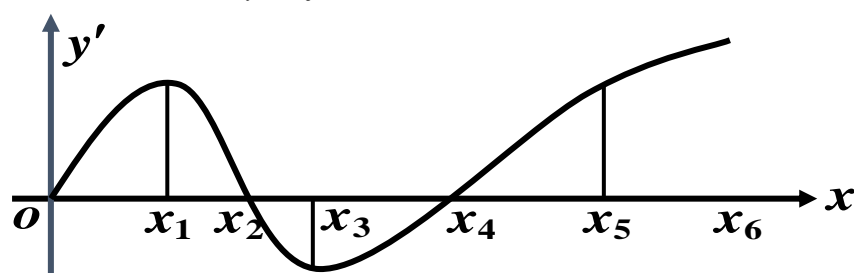


武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

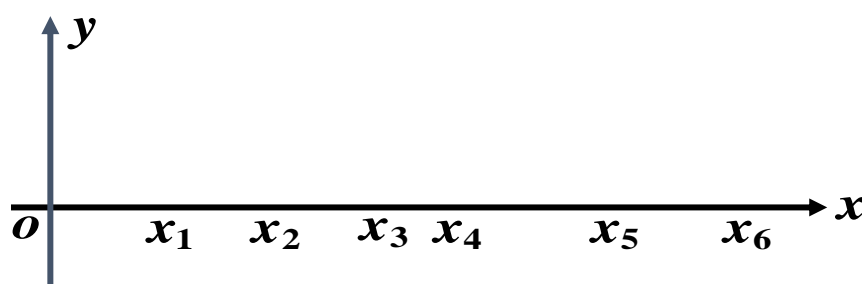
- 1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$.
- 2、(9 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- 3、(9 分) 已知 $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{\sin x} \cos^2 t dt = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- 4、(8 分) 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{n^2 + 1}$.
- 5、(9 分) 设 $a > 0$, 求 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$.
- 6、(9 分) 根据以下导函数 $y' = f'(x)$ 的图像:



填写关于函数 $f(x)$ 的表格 (其中 $f(0) = 0$):

单增区间		上凸区间	
单减区间		下凸区间	
极大值点		极小值点	

画出函数 $y = f(x)$ 的图像:



- 7、(8 分) 确定常数 a, b , 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{2x} - 1) & , x < 0 \\ a + \sin bx & , x \geq 0 \end{cases}$ 处处可导。
- 8、(9 分) 求由 $\arctan x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ 所确定的区域的面积。
- 9、(8 分) 涵洞的断面为抛物线拱形。拱高 1 米, 拱底宽 2 米, 在水面高出涵洞顶点 0.5 米时, 求涵洞闸门上所受的水压力。
- 10、(8 分) 用变量代换 $t = \sin x$ 化简微分方程 $y'' + y' \tan x - y \cos^2 x = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

11、(8 分) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线 $x = -1$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

12、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(t) dt = a \int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \quad (\text{其中 } a > 1 \text{ 为定常数}).$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 2\xi \int_0^{\xi} f(x) dx$.

武汉大学 2017-2018 第一学期高等数学 A1 期末试题 A 解答

1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$.

解 方法一: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x (\tan^2 x - 3)}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} = \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x - 3}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$

$$= \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{-\sin(x + \frac{\pi}{6})} = -24$$

方法二: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x (\tan x + \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3})}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x (\tan x + \sqrt{3}) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{-\sin(x + \frac{\pi}{6})} = 6 \cdot \frac{(-1)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -24$$

方法三: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x (\tan x + \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3})}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x (\tan x + \sqrt{3}) \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \sqrt{3}}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x)} = 6 \cdot \frac{(-1)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -24 \quad 9 \text{ 分}$$

2、(9 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\cot \frac{t}{2}\right)'}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\csc^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)}$ 9 分

3、(9 分) 已知 $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{\sin x} \cos^2 t dt = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 方程两边关于 x 求导得 $e^{y^2} y' + \cos^2 \sin x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\cos^2 \sin x \cdot \cos x}{e^{y^2}}$ 9 分

4、(8 分) 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{n^2 + 1}$.

解：方法一：由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}) \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

故由归结原理 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{n^2+1} = \frac{1}{2}$

方法二： $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\arctan(x+1) - \arctan 1) \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\xi} \quad (1 < \xi < 1+x)$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{1}{1+\xi} = \frac{1}{2}$$

故由归结原理 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{n^2+1} = \frac{1}{2}$

方法三： $\alpha = \arctan \frac{n+1}{n}$, 则 $\tan \alpha = \frac{n+1}{n}$

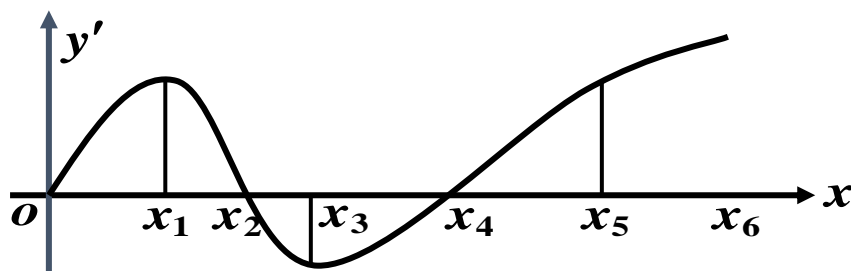
于是 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\frac{n+1}{n} - 1}{1 + \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2n+1}$, 所以 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2n+1}$

原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan \frac{1}{2n+1}) \cdot \sqrt{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}$ 8分

5、(9分) 设 $a > 0$, 求 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$.

解：原式 $= \left[e^{-ax} \left(-\frac{1}{1+a^2} \cos x - \frac{a}{1+a^2} \sin x \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+a^2}$ 9分

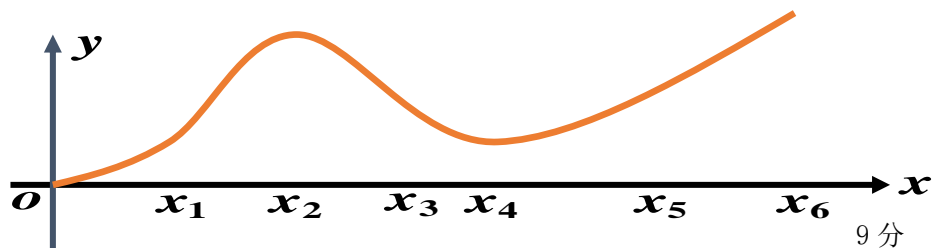
6、(9分) 根据以下导函数 $y = f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格 (其中 $f(0) = 0$):

单增区间	$(0, x_2), (x_4, x_6)$	凸区间	(x_1, x_3)
单减区间	(x_2, x_4)	凹区间	$(0, x_1), (x_3, x_6)$
极大值点	x_2	极小值点	x_4

画出函数 $y = f(x)$ 的图像：



7、(8分) 确定常数 a, b ，使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{2x} - 1) & , x < 0 \\ a + \sin bx & , x \geq 0 \end{cases}$ 处处可导。

解：要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导，首先须在 $x = 0$ 连续即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$

$$\text{即 } a = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{2x}}{1} = 2, \text{ 要使 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 可导, 须 } f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$\text{即 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}(e^{2x} - 1) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = 2$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + \sin bx - 2}{x} = b$$

则 $a = b = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导,从而处处可导。 8分

8、(9分) 求由 $\arctan x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ 所确定的区域的面积。

$$\text{解: } s = \int_0^1 (x - \arctan x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \arctan x \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

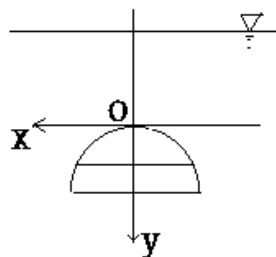
$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad 9 \text{ 分}$$

9、(8分) 涵洞的断面为抛物线拱形。拱高1米，拱底宽2米，在水面高出涵洞顶点0.5米时，求涵洞闸门上所受的水压力。

解：设坐标系如图，抛物线方程为 $y = kx^2$ 由于过(1,1)点，故 $k = 1$ 即 $y = x^2$

$$dF = (0.5 + y) \cdot 2\sqrt{y} dy$$

$$F = 2 \int_0^1 (0.5 + y) \sqrt{y} dy = \frac{22}{15} (\text{吨}) \quad (\text{或} = \frac{22000g}{15} \text{ 牛顿} \approx 14373.3 \text{ 牛顿}) \quad 8 \text{ 分}$$



10、(8分) 用变量代换 $t = \sin x$ 化简微分方程 $y'' + y' \tan x - y \cos^2 x = 0$ ，并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解。

解 先将 y', y'' 转化为 $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$ ，再用二阶常系数线性微分方程的方法求解即可。

$$\text{因为 } y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos x \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos^2 x \frac{d^2y}{dt^2} - \sin x \frac{dy}{dt},$$

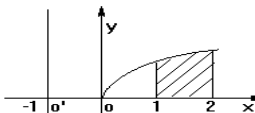
代入原方程, 得 $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$, 解此微分方程, 得 $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$

将初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 代入, 有 $C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}$. 故满足条件的特解为

$$y = \frac{3e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \quad 8 \text{ 分}$$

11、(8 分) 求由曲线 $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线 $x = -1$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 建立新的坐标系, 原点 O' 在原坐标的坐标点 $O'(-1, 0)$, 则由 $y = \sqrt{x'-1}, x' = 2, x' = 3$ 及 x 轴所围成的区域绕 $x' = 0$ 旋转而成体积。

$$\begin{aligned} V_{x=-1} &= 2\pi \int_2^3 xy dx = 2\pi \int_2^3 x\sqrt{x-1} dx \quad \text{设 } t = \sqrt{x-1} \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2(t^2+1)dt = 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} (t^4+t^2)dt \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4). \end{aligned} \quad 8 \text{ 分}$$


12、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(t) dt = a \int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx$ (其中 $a > 1$ 为定常数)。证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 2\xi \int_0^{\xi} f(x) dx$ 。

证明: 令 $F(x) = e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)$, 则 $F'(x) = e^{1-x^2} [-2x \left(\int_0^x f(t) dt \right) + f(x)]$

$$\begin{aligned} \text{且由积分中值定理有 } F(1) &= \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \\ &= e^{1-y^2} \left(\int_0^y f(t) dt \right) = f(y) \quad y \in [0, \frac{1}{3}] \end{aligned}$$

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (y, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

$$\text{即 } f(\xi) = 2\xi \int_0^{\xi} f(x) dx \quad 6 \text{ 分}$$