2015-2016 学年第二学期期末考试

线性代数 C（A 卷）

1、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, 问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

2、（10 分）已知矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可交换. 试求 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ 的值.

3、（10 分）设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 其中列向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$ 求矩阵 A.

4、（12 分）设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1,-1,0,$ 方阵 $B=2A^2-3A-4E$

1）试求矩阵 B 的特征值及与 B 相似的对角矩阵；2）验证 B 可逆，并求 B^{-1} 的特征值及行列式 $\left|B^{-1}\right|$ 之值。

5、（10 分）设 $\alpha_1=(2,1,3,1)$, $\alpha_2=(1,2,0,1)$, $\alpha_3=(-1,1-3,0)$, $\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

6、（10 分）设二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 其中 k 为参数，确定 k 的取值范围使 f 为正定的。

7、(10 分）设有向量组 $I:\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(2,3,3),\alpha_3=(3,7,1),$ 及量组 $II:\beta_1=(3,1,4),\beta_2=(5,2,1),\ \beta_3=(1,1,-6)$。证明：组 I 与组 Ii 等价.

8、（12 分）设有方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1\\ -x_1+4x_2+mx_3=k\end{cases}$，问 m,k 为何值时, 方程组有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时, 求出一般解.

9、（10 分）用正交变换化二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$ 为标准形，并写出所用正交变换及 f 的标准形。

10、(6 分）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 R^n 中 $n-1$ 线性无关的向量，β_i 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交 $(i=1,2)$，证明：β_1,β_2 线性相关。