武汉大学数学与统计学院

2009—2010 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题

一、(42 分)试解下列各题:

1、计算 $\lim\limits_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x]$.

2、求解微分方程 $y''-2y'+3y=0$ 的通解。

3、计算 $\int_{-1}^{1}x^2(1+\sqrt{1+x^2}\sin x)\mathrm{d}x$.

4、计算 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

5、求曲线 $\begin{cases} x=\int_1^t \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u \\ y=\int_1^t \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \end{cases}$ 自 $t=1$ 至 $t=\frac{\pi}{2}$ 一段弧的长度。

6、设 $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$,求 $y^{(n)}$.

二、(8 分)已知 $u=g(e^{xy})$,其中 $y=f(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t$ 确定,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

三、(8 分)设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$,试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、(15 分)已知函数 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$,求:

1、函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间,极大、极小值;

2、函数图形的凸性区间、拐点、渐近线 。

五、(12 分)已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-y'=2(1-x)$,且 x 轴~~为~~与曲线 $y=y(x)$ ~~的一条切线~~在原点相切,在曲线 $y=y(x)$($x\geq 0$)上某 B 点处作一切线,使之与曲线、x 轴所围平面图形的面积为 $\frac{1}{12}$,试求:(1)曲线 $y=y(x)$ 的方程;(2)切点 B 的坐标;(3)由上述所围图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积。

六、(10 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,证明:

(1)存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使 $f(\eta)=\eta$;

(2)对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

七、(5 分)设函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2, \lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$,求证:$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

武汉大学数学与统计学院

2009—2010 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、（42 分）试解下列各题：

1、解：原极限$=\lim\limits_{x\to\infty} x[(\frac{2}{x}+1)e^{\frac{1}{x}}-1]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[(\frac{2}{x}+1)e^{\frac{1}{x}}-1]}{\frac{1}{x}}\overset{t=1/x}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{(2t+1)e^{t}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}(2t+3)e^{t}=3$

2、解：齐次方程 $y''\overset{-2y'+3y}{\cancel{+4y'+29y}}=0$ 的特征方程为 $\overset{\lambda^2-2\lambda+3=0}{\cancel{\lambda^2+4\lambda+29=0}}$，它有复数根 $\overset{\lambda=1\pm\sqrt{2}i}{\cancel{\lambda=-2\pm 5i}}$，

故原方程的通解为：$y=(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)\mathrm{e}^{-2x}$ $y=c_1e^{x}\cos\sqrt{2}x+c_2e^{x}\sin\sqrt{2}x$.

3、解：原式$=2\int_0 x^2dx = \frac{2}{3}$

4、解：$\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2\int_0^{+\infty}td(-e^{-t})=2[-te^{-t}]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=2$

5、解：$s=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_1^{\pi/2}\sqrt{(\frac{\cos t}{t})^2+(\frac{\sin t}{t})^2}dt=\int_1^{\pi/2}\frac{1}{t}dt=\ln\frac{\pi}{2}$

6、解：$y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ $\qquad y^{(n)}=(-1)^n n![(1+x)^{-(n+1)}-(2+x)^{-(n+1)}]$

二、（8 分）解：$\frac{du}{dx}=g'(e^{xy})e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})$，方程两边微分得：$e^{y^2}dy=2x\cos x^2dx$ $\qquad \frac{dy}{dx}=2x\cos x^2e^{-y^2}$

故有 $\frac{du}{dx}=e^{xy}g'(e^{xy})(y+2x^2\cos x^2e^{-y^2})$

三、（8 分）解：$x_n>0$，$x_2-x_1=\frac{1}{2}>0$，因此 $x_2>x_1$

设 $x_n>x_{n-1}$，则 $x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{1+x_n}-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$

$\therefore x_n$ 单调增加，且 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}<2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则：$a=1+\frac{a}{1+a}$ 解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为 a 非负，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

四、（15 分）解：定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $\qquad y'=1-\frac{8}{x^3}$ 令 $y'=0\Rightarrow$ 驻点 $x=2$，不可导点 $x=0$

$y''=\frac{24}{x^4}>0$

1）故单调增加区间为：$(-\infty,0),(2,+\infty)$，单调减少区间为：$(0,2)$ 极小值为：$f(2)=3$，无极大值。

2）下凸区间为：$(-\infty,0),(0,+\infty)$，无拐点，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=\infty$，故 $x=0$ 为函数图形的铅直渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x^3+4}{x^2}-x]=0$

故 $y=x$ 为函数图形的斜渐近线。

五、（12 分）解：（1）由观察法知曲线方程为：$y=x^2$

或解微分方程：特征方程为 $r^2-r=0\Rightarrow r_1=0,r_2=1$，故对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=c_1+c_2e^x$，由于 $r_1=0$，所以微分方程的特解设为 $y^*=x(ax+b),y^{*''}=2a,y^{*'}=2ax+b$，从而有：$2a-(2ax+b)=2-2x\Rightarrow a=1,b=0$，故 $y=c_1+c_2e^x+x^2$ 为微分方程的通解，又 $y'=c_2e^x+2x$，由题设知 $y(0)=0,y'(0)=0\Rightarrow c_1=0,c_2=0$，所以微

分方程满足初值条件的解为 $y=x^2$，即曲线方程为：$y=x^2$

（2）设切点 B 的坐标为 (a,a^2)，则过点 B 的切线斜率为 $y'|_{x=a}=2a$，于是切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，和 x 轴

交点为 $(\frac{a}{2},0)$，由 $A=\int_0^a x^2dx-\frac{\frac{a}{2}\cdot a^2}{2}=\frac{a^3}{12}=\frac{1}{12}$，得 $a=1$，因此切点坐标为(1,1)。切线为 $y=2x-1$.

（3）$V=\pi\int_0^1 y^2dx-\pi\int_{1/2}^1(2x-1)^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx-\pi\int_{1/2}^1(2x-1)^2dx=\pi/30$

六、（10 分）证明：（1）令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)\in C_{[0,1]},F(1)=-1<0,F(1/2)=1/2>0$

故 $\exists\eta\in(1/2,1)$，使得 $F(\eta)=f(\eta)-\eta=0$，即 $f(\eta)=\eta$

（2）设 $G(x)=e^{-\lambda x}F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$，则 $G(x)\in C_{[0,\eta]},G(x)\in D_{(0,\eta)}$，$G(0)=0,G(\eta)=e^{-\lambda\eta}F(\eta)=0$

由罗尔定理：$\exists\xi\in(0,\eta)$，使 $G'(\xi)=0$，即 $e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]-1\}=0$

即 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

七、（5 份）证：应用泰勒公式，我们有：

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(x+\xi(x))\quad 0<\xi(x)<1 \qquad (1)$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x))\quad 0<\eta(x)<1 \qquad (2)$$

(1)±(2) 分别得：
$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(x+\xi(x))+\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)) \qquad (3)$$

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(x+\xi(x))-\frac{1}{6}f'''(x-\eta(x)) \qquad (4)$$

当 $x\to\infty\Rightarrow x+\xi(x)\to\infty,x-\eta(x)\to\infty$，所以有：$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=2-4+2-\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 0=0$，

$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}(2-2-\frac{1}{6}\cdot 0-\frac{1}{6}\cdot 0)=0$。