武汉大学 2008 – 2009 学年第一学期

《高等数学B》试题

一. 试解下列各题：(每题 7 分, 共 42 分)

1. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left[n-\dfrac{n^3-1}{n(n+2)}\right]$. $=2$

2. 计算 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)\cdot\ln(1+2x)}{1-\cos 2x}$. $=1$

3. 设 $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=f(x-t)\end{cases}$ f 二阶可导, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. $=\dfrac{f''(\sin t)\cdot(1+\cos t)\cos^2 t-f'(\sin t)\cdot\sin t}{(1+\cos t)^3}$

4. 计算 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x(x+\cos x)\,dx$. $=2$

5. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$ 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.$f'(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$ $\int f'(x)\,dx=\begin{cases}x+c_1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x+c_2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$ 由原函数在 $x=0$ 处连续得 $c_2=c_1-1$, 再由 $f(0)=0$ 得 $c_1=0$, 故 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,0]\\ e^x-1, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$

6. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}(1+2x)e^{-2x}\,dx$. $=1$

二. (15 分)已知函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, 求:

1. 函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间, 极大、极小值; 2. 函数图形的凸性区间、拐点、渐近线.

$y'=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, $y''=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. $x=-1$ 为铅直渐近线, $y=x-5$ 为斜渐近线.

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		+	0	+
y''	−	−	−		−	0	+
$y=f(x)$	增，上凸	极大值 $f(-5)=-\dfrac{27}{2}$	减，上凸	无定义	增，上凸	拐点 $(1,0)$	增, 下凸

三. (12 分) 设有点 $A(3,1,-2)$ 和直线 $l:\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$,

1. 试求过点 A 且通过直线 l 的平面方程;
2. 求点 A 到直线 l 的距离.此题为下册内容

四. (12 分) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b, & x\le 0\\ \sin ax, & x>0\end{cases}$ 问:

1. a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;$a=2$, $b=-1$, $f'(0)=2$.
2. 若另有 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 证明 $F[f(x)]$ 在 $x=0$ 处可导.

$F'[f(0)]=\lim_{x\to 0}\dfrac{F[f(x)]-F[f(0)]}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{F[f(x)]-F[f(0)]}{f(x)-f(0)}\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=F'(0)f'(0)=2F'(0)$

五. (12 分) 一铅直倒立在水中的等腰三角形水闸门, 其底为 6 米, 高为 3 米, 且底与水面相齐, 求:

1. 水闸所受的压力(水的比重为 1);以三角形的底边为 x 轴, 底边上的高为 y 轴(向下)建立直角坐标系, 水的比重为 1. 则压力微元 $\mathrm{d}F = P\,\mathrm{d}S = 2y(3-y)\,\mathrm{d}y$, 从而 $F = 2\int_0^3 y(3-y)\,\mathrm{d}y = 9$.

2. 作一水平线将此闸门分为上下两部分, 使两部分所受的压力相等.设所作水平线为 $y = b$, 则 $2\int_0^3 y(3-y)\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$.

六. (7 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: 对于任意正整数 k, 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$k\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi).$$

辅助函数 $F(x) = e^{-kx}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 对函数 $F(x)$在区间 $[0,1]$ 上用罗尔定理.

武汉大学 2009 – 2010 学年第一学期

《高等数学B》试题

一. 试解下列各题：(每题 7 分, 共 42 分)

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{e^{x^3}-1}=\dfrac{1}{3}$.

2. 求解微分方程 $y''-6y'+9y=0$ 的通解.$y=(c_1+c_2x)e^{3x}$.

3. 计算 $\int_{-1}^{1}x^2(1+\sqrt{1+x^2}\sin x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.注意利用"偶倍奇零".

4. 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.=2.$

5. 求曲线 $\begin{cases} x=\int_1^t\dfrac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \\ y=\int_1^t\dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\end{cases}$ 自 $t=1$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 一段弧的长度. $s=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{\cos t}{t}\right)^2+\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\ln\dfrac{\pi}{2}$.

6. 设 $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 求 $y^{(n)}$. $y=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$, $y^{(n)}=(-1)^n n![(1+x)^{-(n+1)}-(2+x)^{-(n+1)}]$.

二. (8 分)已知 $u=e^{xy}$, 其中 $y=f(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^{xy}\left(y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, 方程两边微分得 $e^{y^2}\,\mathrm{d}y=2x\cos x^2\,\mathrm{d}x$, 解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\cos x^2e^{-y^2}$, 于是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^{xy}\left(y+2x^2\cos x^2e^{-y^2}\right)$.

三. (8 分) 设 $x_1=1$, $x_n=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

先证明 x_n 单调递增有上界, 从而极限存在. 再在递推公式两边取极限可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

四. (8 分) 证明结论: 可导函数在其导数为正值的区间上为单调增加函数, 并说明此结论的几何意义.
与教材定理4.1类似, 几何意义:切线与 x 轴正向的夹角为锐角.

五. (15 分) 已知函数 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, 求

1. 函数 $f(x)$ 的单调增加, 单调减少区间, 极大、极小值. 2. 函数图形的凸性区间、拐点、渐近线.

定义域为 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$. $y'=1-\dfrac{8}{x^3}$, $y''=\dfrac{24}{x^4}$.单增区间为 $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$, 单增区间为 $(0,2)$, 极小值为 $f(2)=3$, 无极大值. 下凸区间为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 无拐点, $x=0$ 为铅直渐近线, $y=x$ 为斜渐近线.

六. (12 分) 已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-y'=2(1-x)$, 且 x 轴为曲线 $y=y(x)$ 的过原点的一条切线, 在曲线 $y=y(x)$ $(x\geq 0)$ 上某 B 点处作一切线, 使之与曲线、x 轴所围成平面图形的面积为 $\dfrac{1}{12}$, 试求:

1. 曲线 $y=y(x)$ 的方程;用观察法或直接阶微分方程可得曲线方程为 $y=x^2$. 2. 切点 B 的坐标;$B(1,1)$.
3. 由上述所围图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积.$V=\dfrac{\pi}{30}$.

七. (7 分) 若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$ 及 $f'(a)f'(b)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=0.$$

见第三章习题课例4.

武汉大学 2010 – 2011 学年第一学期

《高等数学B》试题

一. 计算题: (每题 7 分, 共 56 分)

1. 求由方程 $\ln xy = e^{x+y}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x \sin t^3 \,\mathrm{d}t}{\int_0^x \cos t^2 \,\mathrm{d}t}$.

4. (7 分) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{2}{n}\right)+\left(x+\dfrac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{2n}{n}\right)\right]$.

5. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$.

6. 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x(1-\sin x)\,\mathrm{d}x$.

7. 求方程 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解.

8. 设 $f'(x) = e^{-x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

二. (7 分) 证明当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$.

三. (10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \le x \le 1$ 时, $y \ge 0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围成的图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$, 试确定 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V 最小.

四. (7 分) 试判断函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及其类型.

五. (10 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0$, $g(0) = 2$, 求 $f(x)$, $g(x)$ 的表达式.

六. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$, 试证: 必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

武汉大学 2011 – 2012 学年第一学期

《高等数学B》试题

一. 计算题: (每题 8 分, 共 56 分)

1. 设 $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y = 1+t^2 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$.

3. 已知 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty} 2xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$, 求常数 a 的值.

4. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}+d}(a\neq 0)$.

5. 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3y^3 - xy$.

7. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_x^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 求 a 的值使得 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 并用导数的定义求 $\varphi'(0)$.

二. (5 分) 设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$, 证明数列 $\{a_n\}$没有极限.

三. (10 分) 设 $y = y(x)c$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求 $y = y(x)$.

四. (11 分) 已知函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, 求函数的增减区间，凹凸区间，极值、拐点和渐近线.

五. (10 分) 求曲线 $y = e^x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = 1$ 所围成的平面图形的面积 S, 并求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

六. (8 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

武汉大学 2012 – 2013 学年第一学期

《高等数学B》试题

一.(5 分)若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必等于 0, 为什么?

二.(8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\text{且}x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 试确定 a,b,c 的一组值, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

三.(6 分) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导, 且 $f(a)=f'(a)=0,\ f''(a)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)\sin(x-a)}{(e^x-e^a)^3}$.

四.(5 分) 指出 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及其类型.

五.(5 分) 设 u,v 均是 x 的可微函数, $y(x)=\ln\sqrt{u^2+v^2}$, 求 $\mathrm{d}y$.

六.(5 分) 求函数 $I(x)=\int_e^x\dfrac{\ln t}{t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值.

七.(5 分) 求 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

八.(5 分) 求微分方程 $y''+3y'=\cos 2x$ 的通解.

九. (5 分) 若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)|\le\alpha(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, 试证明: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

十. (5 分) 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=f[2x+\varphi(y)]$ 所确定, 其中 f 与 φ 都是可微函数, 求 y'.

十一. (6 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{4xt}$, 求 $f''(x)$.

十二. (6 分) 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

十三. (8 分) 求由不等式 $\sin^3 x\le y\le\cos^3 x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 所确定的区域的面积.

十四. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, 对任意 $x\in(0,1)$ 有 $f(x)\neq 0$, 证明存在 $c\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.($n$ 为自然数).

十五. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $0<a<b$. 若 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

十六. (10 分)设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 其上任意一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 x 轴平分. (1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程. (2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l, 试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长.

武汉大学 2011–2012 学年第一学期《高等数学B》解答

一. 1. 解: 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t$; $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-t^2)}}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)=\dfrac{-t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}$,

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-2\sqrt{t^2(1-t^2)}$. 又因为 $\dfrac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2t-4t^3}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2-4t^2$.

注意: 本题在计算过程中出现的 $\sqrt{t^2}$ 不必开方, 可以避免讨论符号.

另解: 由 $y=1+t^2$ 可得 $1-t^2=2-y$, 代入到 $x=\arcsin\sqrt{1-t^2}$ 整理得显函数 $y=2-\sin^2 x$, 从而

$$y'=-\sin 2x,\quad y''=-2\cos 2x$$

2. 解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{(x+x^2)\cdot x\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}}{1+x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

3. 解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{-2a}{x+a}\right)^{(-\frac{x+a}{2a})\cdot(-\frac{2ax}{x+a})}=e^{-2a}$.

$$\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}\,\mathrm{d}x=-\int_a^{+\infty}2x\,\mathrm{d}(e^{-2x})=-xe^{-2x}|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}\,\mathrm{d}x=ae^{-2a}-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty}=ae^{-2a}-\frac{1}{2}(0-e^{-2a})=(a+\frac{1}{2})e^{-2a}.$$

有 $e^{-2a}=(a+\frac{1}{2})e^{-2a}$ 及 $e^{-2a}\neq0$ 得 $a=\dfrac{1}{2}$.

4. 解: 令 $\sqrt{ax+b}=t$, 则 $x=\dfrac{t^2-b}{a}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{a}\mathrm{d}t$. 从而

原式 $=\displaystyle\int\frac{2t}{a(t+d)}\mathrm{d}t=\frac{2}{a}\int\left(1-\frac{d}{t+d}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{a}[t-d\ln|t+d|]+C=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}-\frac{2d}{a}\ln|d+\sqrt{ax+b}|+C.$

5. 解: $\displaystyle\int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x^2)$. 令 $x^2=\sin t$, 则原式 $=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi.$

6. 解: 令 $y^{-2}=z$, 则原方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2xz=-2x^3$. 由一阶线性微分方程的通解公式得:

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]=e^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\left[\int(-2x^3)e^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\\&=e^{x^2}\left[\int(-2x^3)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+C\right]=e^{x^2}\left[\int x^2d(e^{-x^2})+C\right]\\&=e^{x^2}\left[x^2e^{-x^2}-\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}(x^2)+C\right]=x^2+1+C.\end{aligned}$$

即 $y^2(x^2+C')=1\quad(C'=1+C)$ 为所求通解.

7. 解: 要使得 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则应有 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\varphi(0)=a$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{2x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[2e^{4x^2}-e^{x^2}\right]=2-1=1$. 所以当 $a=1$ 时 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\frac{\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_x^{2x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{4x^2}-e^{x^2}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{16xe^{4x^2}-2xe6x^2}{2}=0.$$

二. 证: 选取两个子列 $\{a_{4k+1}\}$, $\{a_{4k}\}$. 因为

$$\lim_{k\to\infty}a_{4k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{4k+1}{2}\pi=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)=1;$$

$$\lim_{k\to\infty}a_{4k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k}{2}\pi=0;$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{4k+1} \neq \lim\limits_{k\to\infty} a_{4k}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在.

三. 解: 微分方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$, 即 $(r-1)(r-2)=0$, 特征根为 $r_1=1,\ r_2=2$. 从而齐次方程的通解为: $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原微分方程的特解为 $y^*=axe^x,\ Y^{*\prime}=a(x+1)e^x,\ y^{*\prime\prime}=a(x+2)e^x$, 代入原方程得:

$$a(x+2)e^x-3a(x+1)e^x+2axe^x=2e^x \quad\Rightarrow\quad a=-2.$$

即 $y^*=-2xe^x$, 从而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$. 由已知条件可得 $y(0)=1,\ y'(0)=(x^2-x+1)'|_{x=0}=(2x-1)|_{x=0}=-1$, 代入得: $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+2C_2-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$ 于是 $y=e^x-2xe^x$.

四. 解: 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. $y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},\ \ y''=\dfrac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y'=0$ 得 $x=1-\sqrt{2},\ \ x=1+\sqrt{2}$, 令 $y''=0$ 得 $x=-1,\ \ x=2-\sqrt{3},\ \ x=2+\sqrt{3}$. 列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2},2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3},1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2},2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3},+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\downarrow\cap$	拐点	$\downarrow\cup$	极小	$\uparrow\cup$	拐点	$\uparrow\cap$	极大	$\downarrow\cap$	拐点	$\downarrow\cup$

由上表可知函数的单调增加区间为 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, 单调增加区间为 $(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$. 曲线的上凸区间为 $(-\infty,-1)\cup(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$, 下凸区间为 $(-1,2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},+\infty)$. 极小值为 $y(1-\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$, 极大值为 $y(1+\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. 拐点为 $(-1,-1)$ 和 $(2+\sqrt{3},\dfrac{3-\sqrt{3}}{6})$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2+1}=0$, 所以 $y=0$ 为水平渐近线.

五. 解: $S=\displaystyle\int_0^1(e^x-\sin x)\,\mathrm{d}x=[e^x+\cos x]_0^1=e+\cos 1-2.$

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}-x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^1=\pi\left(\frac{\pi^2}{2}-1+\frac{\sin 2}{4}\right).$$

六. 证: 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内二阶可导. 由已知条件有 $F(a)=F(b)=0$. 由条件不妨设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值为 M, 且 $f(x_1)=M,\ g(x_2)=M,\ x_1,x_2\in(a,b)$

(1). 若 $x_1=x_2$, 记 $x_1=x_2=c$, 则 $F(c)=0, a<c<b$.

(2). 若 $x_1\neq x_2$, 则 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)>0,\ F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M>0$, 由介值定理可知在点 x_1 与 x_2 之间存在点 c, 使得 $F(c)=0, a<c<b$.

由罗尔定理可知存在 $\xi_1\in(a,c),\ \xi_2\in(c,b)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 从而存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

武汉大学 2012–2013 学年第一学期《高等数学B》解答

一. 解: 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right]=A\cdot 0=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必等于 0.

二. 解: 要使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必须 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}(ae^x+be^{-x}-c)=0$, 即 $a+b-c=0$ (1)

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{2x}=1$,可知 $\lim\limits_{x\to 0}(ae^x-be^{-x})=0$, 即 $a-b=0$ (2)

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}}{2}=\dfrac{a+b}{2}=1$,可得 $a+b=2$ (3)

联立 (1)(2)(3) 解得 $a=b=1, c=2$. 即当 $a=b=1, c=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

另解: 要使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必须 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{a[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)]+b[1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)]-c}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+b-c)+(a-b)x+\frac{a+b}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=1.$$

所以有 $\begin{cases} a+b-c=0\\ a-b=0\\ a+b=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1\\ b=1\\ c=2\end{cases}$

三. 解:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\sin(x-a)}{(e^x-e^a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\sin(x-a)}{e^{3a}[e^{x-a}-1]^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(x)}{e^{3a}(x-a)^3}=\frac{1}{e^{3a}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{e^{3a}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{2(x-a)}$$
$$=\frac{1}{2e^{3a}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{(x-a)}=\frac{1}{2e^{3a}}f''(a)=\frac{1}{2e^{3a}}.$$

四. 解: $x=0$ 为间断点, 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$, 所以$x=0$ 为跳跃间断点.

五. 解: $\mathrm{d}y=\mathrm{d}[\ln\sqrt{u^2+v^2}]=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}[\sqrt{u^2+v^2}]=\dfrac{1}{u^2+v^2}(u\,\mathrm{d}u+v\,\mathrm{d}v)=\dfrac{uu'+vv'}{u^2+v^2}\mathrm{d}x.$

六. 解: 因为 $I(x)$ 在区间 $[e,e^2]$ 上连续, 且在区间 (e,e^2) 上, $I'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-2x+1}=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}>0$, 所以 $I(x)$ 在区间 $[e,e^2]$ 上为单增函数, 从而最大值为

$$I(e^2)=\int_e^{e^2}\frac{\ln t}{t^2-2t+1}\mathrm{d}t=-\int_e^{e^2}\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t-1}\right)=\ln(1+e)-\frac{e}{1+e}.$$

七. 解: 令 $x=\sec t$, 则 $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}=-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3}.$

另解: 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\frac{\pi}{3}.$

八. 解: 特征方程为 $r^2+3r=0$, 特征根为 $r_1=0, r_2=-3$, 从而对应的齐次方程的通解为 $Y=c_1+c_2e^{-3x}$.
设非齐次方程的特解为 $y^\star=A\cos 2x+B\sin 2x$, 代入原方程整理得

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-6A\sin 2x+6B\cos 2x=\cos 2x$$

比较系数可得 $A=-\dfrac{1}{13}$, $B=\dfrac{3}{26}$, 从而所求通解为 $y=c_1+c_2e^{-3x}-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x.$

九. 解: 由 $|f(x)| \le \alpha(x)$ 可得 $-\alpha(x) \le f(x) \le \alpha(x)$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, 所以 $-\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$, 从而由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

十. 解: 方程两边对 x 求导得: $y' = f'[2x+\varphi(y)]\cdot[2+\varphi'(y)y']$, 解得$y' = \dfrac{2f'[2x+\varphi(y)]}{1-\varphi'(y)\cdot f'[2x+\varphi(y)]}$.

十一. 解: 因为 $f(x) = x\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^{4x} = xe^{4x}$, 所以$f'(x) = (1+4x)e^{4x}$, $f''(x) = (8+16x)e^{4x}$.

十二. 解: 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y' = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$. 令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{2}{5}$, 当 $x=0$ 时, y' 不存在. 列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}+\infty)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	极大值0	$\downarrow$	极小值$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\uparrow$

所以 $f(0)=0$ 为极大值, $f(\frac{2}{5}) = -\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ 为极小值.

十三. 解: $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 x - \sin^3 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}\sin x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x$

$$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}.$$

十四. 证: 构造辅助函数 $F(x) = f^n(x)f(1-x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且由 $f(0)=0$ 可得 $F(0) = F(1) = 0$, 从而由罗尔定理可知至少存在一点 $c\in(0,1)$ 使得 $F'(c)=0$, 即

$$F'(c) = nf^{n-1}(c)\cdot f'(c)\cdot f(1-c) - f^n(c)f'(1-c) = 0,$$

注意到 $f(c)\ne 0$, 所以得到所证等式成立.

十五. 解: 因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\forall\varepsilon>0$ 有 $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, 于是

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}\,\mathrm{d}x = f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = f(\varepsilon\xi)\ln\frac{b}{a}.\ \xi\in[a,b].$$

令 $\varepsilon\to 0$ 并注意到函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

十六. 解: 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y = -\dfrac{1}{y'}(X-x)$, 令 $X=0$ 得 $Y = y+\dfrac{x}{y'}$. 因为 PQ 被 x 轴平分, 所以 $y+\dfrac{x}{y'} = -y$, 即 $2yy'+x=0$. 亦即 $2y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$, 积分得 $y^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$, 代入初始条件得 $C=1$, 故所求曲线方程为 $x^2+2y^2 = 1\ \ (x\ge 0, y\ge 0)$.

由条件可知 $l = \displaystyle\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. 由曲线的参数方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$ 可得其弧长

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin t)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sin^2 t)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}l.$$