武汉大学 2015-2016 第一学期线性代数 B 期末试题 A

一、（8 分）设 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{A}$ 均为 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)$，

$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)$，求 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$.

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+I=A^2+X$，其中 I 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

三、（10 分）若 3 阶方阵 A 与对角矩阵 $B=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$ 相似，计算矩阵

$C=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)$

四、（8 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，求 a.

五、（12 分） 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,3,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,5,6)$ 的一个极大无关组，并把其余的向量用该极大无关组线性表出.

六、（10 分）若 2 阶实矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的两个特征值都是 λ_0，且 $b\neq 0$，证明：矩 $C=\begin{bmatrix}b&0\\\lambda_0-a&1\end{bmatrix}$ 满足 $C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_0&1\\0&\lambda_0\end{pmatrix}$.

七、（8 分）若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$（式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$），适合 $|A|<0$.
求证：必存在向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\alpha^TA\alpha<0$.

八、（8 分）若 $n\times r$ 矩阵 A 的秩为 r，其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系，B 为 r 阶可逆方阵，证明 AB 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系.

九、（16 分）对线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3,\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3,\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3,\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$

(1) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等，问方程组是否有解，为什么？

(2) 若 $a_1=a_3=b$，$a_2=a_4=-b$（$b\neq 0$），且已知方程的两个解 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试给出方程组的通解.

十、（10 分）设二次曲面的方程 $axy+2xz+2byz=1$）$a>0$ 经正交变换 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$，化成 $\xi^2+\eta^2-2\zeta^2=1$，求 a、b 的值及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

武汉大学2015-2016第一学期线性代数B期末试题A解答

一、（8分）设 A、P 均为3阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)$，

$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)$，求 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$.

解：由于 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)=(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX+I=A^2+X$，其中 I 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

解　由题知 $(A-I)X=A^2-I=(A-I)(A+I)$,

$A-I=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ 可逆，故 $X=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=A+I=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

三、（10分）若3阶方阵 A 与对角矩阵 $B=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$ 相似, 计算矩阵

$C=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E).$

解　因 $A\sim B$，故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$ 则 $P^{-1}CP=P^{-1}(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)P$

$=P^{-1}(A-\lambda_1E)PP^{-1}(A-\lambda_2E)PP^{-1}(A-\lambda_3E)P=(B-\lambda_1E)(B-\lambda_2E)(B-\lambda_3E)=0$，故 $C=0$

四、（8分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，求 a.

解： 由$|A-\lambda I|=0$，得 A 的三个特征值$\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2$. 由于 A 相似于对角矩阵，

$R(A-6I)=1$，即 $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，显然，当$a=0$时，$R(A-6I)=1$，$A$的二

重特征值 6 对应两个线性无关的特征向量, 所以当$a=0$时，A相似于对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

五、 （12 分）求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,3,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,5,6)$的一个极大无关组，并把其余的向量用该极大无关组线性表出.

解：极大无关组α_1,α_2， $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$.

六、（10 分）若 2 阶实矩阵$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的两个特征值都是$\lambda_0$，且$b \neq 0$，证明：矩阵

$C=\begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda_0-a & 1 \end{bmatrix}$满足$C^{-1}AC=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

证 $C^{-1}=\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-\lambda_0 & b \end{pmatrix}$. $C^{-1}AC=\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-\lambda_0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ \lambda_0-a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

(用到$bc=(a-\lambda_0)(d-\lambda_0)$及$a+b=2\lambda_0$

七、(8 分）若二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$（式中$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$), 适合$|A|<0$.

求证：必存在向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$, 使$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\alpha' A\alpha<0$.

证 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$因$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n<0$, 故至少有一个特征值取负值, 不妨设

$\lambda_1<0$，存在正交矩阵T令$X=TY,(Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)')$则$X'AX=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

$=F(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，取$Y_0=(1,0,\cdots,0)$则$F(1,0,\cdots,0)=\lambda_1<0$，令$\alpha=TY_0$则$\alpha' A\alpha=\lambda_1<0$

八、(8 分）若$n\times r$矩阵A的秩为r, 其r个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系, B为r阶可逆方阵, 证明AB的r个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系.

证 ：记A的列向量为$A_1,A_2,\cdots A_r$，记AB列向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$, 则

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)=(A_1,A_2,\cdots A_r)B\cdots\cdots\cdots$①

即$\alpha_1,\cdots\alpha_r$可由$A_1,\cdots A_r$线性表出. 又$\because$ $A_1,\cdots A_r$为某一齐次方程组的解, $\therefore$ $\alpha_1,\cdots\alpha_r$也为其解.

又$\because$ B可逆, $\therefore$①式可得: $(A_1,\cdots,A_r)=(\alpha_1,\cdots\alpha_r)B^{-1}$，即$A_1,\cdots,A_r$, 可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出

$\therefore$ $A_1,\cdots,A_r$, 与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$等价，从而$\alpha_1,\cdots\alpha_r$亦为该齐次方程组的基础解系. .

九、（16 分）对线性方程组$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2{}^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3. \end{cases}$

(1) 若a_1, a_2, a_3, a_4两两不等，问方程组是否有解，为什么？

(2) 若 $a_1 = a_3 = b$ ， $a_2 = a_4 = -b$ （$b \neq 0$）， 且 已 知 方 程 的 两 个 解 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ ，

$\boldsymbol{\xi}_2 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试给出方程组的通解.

解：（1）$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0$，

$R(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) \neq R(\boldsymbol{A})$，无解.

（2）$R(\boldsymbol{A}) = 2$，$n = 3$，故通解 $\boldsymbol{x} = k(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) + \boldsymbol{\xi}_1 = k\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $(k \in \boldsymbol{R})$.

十、（10 分）设二次曲面的方程$axy + 2xz + 2byz = 1$）$a > 0$经正交变换$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$，化

成$\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2 = 1$，求$a$、$b$的值及正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

解：设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}$，由$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0, |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = 0$知$a = 2, b = -1$.

当$\lambda = 1$时，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0)^t$，$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-1,2)^T$

当 $\lambda=-2$ 时，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 故正交阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.