武汉大学 2013—2014 学年度第 一 学期

《工程随机数学》试卷（A）参考答案

__________学院________专业__班　学号____________姓名_______分数____

1. **（本题 12 分）**某多径信道，有 4 种传播模式 A、B、C、D，信号由这四种传播模式进行传播的概率分别是 0.2, 0.1, 0.3, 0.4。现有一信号通过该信道进行传播，如果该信号通过 A、B、C 传播而失真的概率分别是 1/3, 1/12, 1/4，通过 D 信道传播不会失真。目前该信号失真了，求该信号通过 C 信道传播的概率是多少？

解：以 S 记为失真事件，以 A、B、C、D 分别记为信号的传播模式，则 A、B、C、D 构成完备事件组。由全概率公式：

$$\begin{aligned}P(S)&=P(A)P(S|A)+P(B)P(S|B)+P(C)P(S|C)+P(D)P(S|D)\\&=0.2\times1/3+0.1\times1/12+0.3\times1/4+0.4\times0=0.15\end{aligned}$$

又由贝叶斯公式，该信号通过 C 信道传播的概率是：$P(C|S)=(0.3\times1/4)/0.15=0.5$

2. **（本题 12 分）**设随机变量 $X\sim U(1,5)$，

（1） 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度函数。（2）求 Y 的数学期望和方差。

解：（1）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},1\le x\le5\\0,其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2(y-1)}},3\le y\le51\\0,其他\end{cases}$$

（2）$E(Y)=\int_1^5(2X^2+1)f(x)dx=\int_1^5(2X^2+1)\frac{1}{4}dx=\frac{65}{3}$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2\qquad E(Y^2)=\int_1^5(2X^2+1)^2f(x)dx$$

$$D(Y)=\frac{9004}{45}$$

3. **（本题 12 分）**设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4,&|x|<1,|y|<1\\0,&其他\end{cases}$$

证明 X 与 Y 不相互独立，X^2 与 Y^2 相互独立

证：

根据联合概率密度函数可以得到：$f_X(x)=\begin{cases}1/2,|x|<1\\0,else\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2,|y|<1\\0,else\end{cases}$

因此，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不相互独立。

又因为 X^2 的分布函数 $F_1(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \sqrt{x}, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$

Y^2 的分布函数 $F_2(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \sqrt{y}, 0\le y<1\\ 1, y\ge 1\end{cases}$

$\left(X^2,Y^2\right)$的分布函数$F_3(x,y)$

$$F_3(x,y)=\begin{cases}0, x<0\text{或}y<0\\ \sqrt{x}, 0\le x<1, y\ge 1\\ \sqrt{y}, 0\le y<1, x\ge 1\\ \sqrt{xy}, 0\le x<1, 0\le y<1\\ 1, x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

因此$F_3(x,y)=F_1(x)F_2(y)$成立，因此 X^2 和 Y^2 相互独立。

4. **（本题 12 分）**设总体 X~N(3.4, 36)，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的一个简单随机样本，

（1） 要使$P\{1.4<\bar{X}<5.4\}\ge 0.95$，样本容量 n 至少应取多大？

（2） 统计量$Y=\sum_{i=1}^{n}a\left(X_i-b\right)^2\sim\chi^2(n)$，求 a，b

解：（1）由题设知，$\left(\bar{X}-3.4\right)\Big/\left(6/\sqrt{n}\right)\sim N(0,1)$，故

$$\begin{aligned}P\left\{1.4<\bar{X}<5.4\right\}&=P\left\{\left|\bar{X}-3.4\right|<2\right\}\\&=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-3.4}{6}\right|\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}}{3}\right\}\\&=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\ge 0.95\\&\Rightarrow\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\ge 0.975\end{aligned}$$

查正态分布表知$\sqrt{n}/3\ge 1.96$，所以$n=35$

（2）由 χ^2 分布的性质可知

$b=3.4$，$a=\dfrac{1}{6}$

5. **（本题 12 分）**设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3

p	β	$4\beta(1-\beta)$	$1-2\beta$	β^2

其中β是未知参数($0<\beta<1/2$)，从总体 X 中取样得到如下 9 个样本值：3，1，3，2，3，2，1，0，2；

求β的矩估计和最大似然估计值。

解：（1）矩估计

$E(X)=0\times\beta+1\times(4\beta(1-\beta))+2\times(1-2\beta)+3\times\beta^2=2-\beta^2$

$\bar{X}=\frac{17}{9}$

$2-\beta^2=\frac{17}{9}$

$\beta=\pm\frac{1}{3}$

由于$0<\beta<1/2$，矩估计$\beta=\frac{1}{3}$

（2）极大似然估计

由样本构造的似然函数为：

$L(\beta)=(\beta)^1(4\beta(1-\beta))^2(1-2\beta)^3(\beta^2)^3$

$\frac{d}{d\beta}\ln L(\beta)=\frac{9}{\beta}+\frac{2}{1-\beta}+\frac{3}{1-2\beta}=0$

$\beta=\frac{22\pm\sqrt{88}}{2\times22}$

由于$0<\beta<1/2$

所以极大似然估计$\beta=\frac{22-\sqrt{88}}{2\times22}$

6. **（本题 12 分）**随机地从 A 批导线中抽取 8 根，又从 B 批导线中抽取 10 根，测得电阻数据（单位：Ω）为：A 批：0.148, 0.142, 0.143, 0.137, 0.146, 0.138, 0.140, 0.141
B 批：0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140, 0.142, 0.141, 0.137, 0.141, 0.139

设 A 批电阻$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，B 批电阻$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，两批导线取样相互独立，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为 0.95 的置信区间。

解：$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但$\sigma^2$未知，选用估计量 T。经计算，$\bar{x}=0.1419$，$\bar{y}=0.1396$，$S_1^2=1.4125\times10^{-5}$，$S_2^2=4.2667\times10^{-6}$，$S_W=0.0029$，$t_{0.025}(8+10-2)=2.120$，所以，$\mu$的置信度为 0.95 的置信区间为

$\left(\bar{X}-\bar{Y}\mp t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=(0.0023\mp0.0029)=(-0.0006,0.0052)$由于$\mu_1-\mu_2$的置信区间包含 0，可以认为两个总体的均值无明显差异

7. **（本题卓越班 10 分，其它班 14 分）**一般在建设雷达站之前均会对雷达站拟建设位置的电磁环境进行测量，现有两块雷达站地址进行选择，分别测得两块地址的样本数为 9 和 10 的电磁背景噪声（dB）样本，其背景噪声长期观察服从正态分布。经计算后得到样本均值和样本方差分别为：地址 A：$\overline{x}_1 = 61.22, S_1^2 = 12.55, n_1 = 9$；地址 B：$\overline{x}_1 = 63.44, S_1^2 = 13.57, n_1 = 10$

试问在显著性水平 0.05 的条件下，两个地址的电磁环境是否可以认为一致？

解：（1）两总体方差是否相等的检验

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{12.55}{13.57} = 0.9248$

$F_{0.975}(9,8) < F < F_{0.025}(9,8)$

$0.2439 < 0.913 < 4.3572$

接受原假设，认为两总体方差相等。

（2）两总体均值是否相等的检验

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$|t| = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = 0.5786$$

$t_{0.025}(17) = 2.110$

故接收，认为两块场地的电磁环境是一致的。

8. **（本题卓越班 10 分，其它班 14 分）**设随机过程 $X(t) = \cos(\omega t + \theta)$，式中 ω>0 为常数，随机变量 $\theta \sim U(0, 2\pi)$，证明 $X(t)$ 是平稳随机过程，并求其自相关函数和谱密度。

（一）证明：（1） $E(X(t)) = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) \bullet \dfrac{1}{2\pi} \mathrm{d}\theta = 0$

（2）
$$\begin{aligned} R_X(t+\tau, t) &= E(X(t+\tau)\overline{X(t)}) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \omega\tau + \theta)\cos(\omega t + \theta) \bullet \frac{1}{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)] \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\cos(\omega\tau) \end{aligned}$$

与 t 无关。

（3） $E|X(t)|^2 = R_X(0) = 1/2 < \infty.$

由（1），（2），（3）知 $\{X(t)\}$ 是平稳过程。

（二）解：

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)\overline{X(t)}] \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\cos(\omega_0 t + \theta)\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]
\end{aligned}
$$

9. **（本题卓越班 8 分，其它班不做）**对一未知电压信号量作 15 次等精度采样测量，测量值如下（单位：mV），设此测量列已消除了系统误差，试判断测量列中是否有过失误差。测量结果：20.42；20.43；20.40；20.43；20.42；20.43；20.39；20.30；20.40；20.43；20.42；20.41；20.39；20.39；20.40

解：由所列的测量数据求算术平均值：

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 20.404(m\mathbf{V})$$

计算残余误差 $v_i = x_i - \bar{x}$ 分别为：0.016；0.026；-0.004；0.026；0.016；0.026；-0.014；-0.104；-0.004；0.026；0.016；0.006；-0.014；-0.014；-0.004；

测量列的标准误差为 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{0.01496}{14}} = 0.033(mV)$ 则 $3\sigma = 0.099$

根据 3σ 准则，发现第 8 次测定值的残余误差 $|v_8| = 0.104 > 3\sigma = 0.099(mV)$

所以第 8 次测定值中含有过失误差，应将它舍去。然后再根据剩下的 14 个测定值重新计算，得算术平均值为：$\bar{x}' = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{14} x_i}{14} = 20.411(mV)$

计算残余误差 $v_i' = x_i - \bar{x}$ 分别为：0.009；0.019；-0.011；0.019；0.009；0.019；-0.021；-0.011；0.019；0.009；-0.001；-0.021；-0.021；-0.011

再求新的测量列标准误差：$\sigma' = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i'^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{0.00337496}{13}} = 0.016(mV)$

则 $3\sigma' = 0.048(mm)$

所以余下的 14 个测量值均满足 $|v_i| < 3\sigma$ 的要求，故认为这些测量值不再含有过失误差。