武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 B2

1、（8 分）设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4$，试求$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})$.

2、（8 分）设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-2z=f(y^2-2z)$所确定的隐函数，其中f可微，求证$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

3、（8 分）设$D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 1\}$，计算二重积分$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.（8 分）已知椭圆$L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$周长为$b$，求$\oint_L(4xy+9x^2+4y^2)\mathrm{d}s.$

5、（8 分）判断两直线 L_1：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$和 L_2：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$是否在同一平面内，并求两直线的的夹角。

6、（10 分）已知$\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，求该函数并确定$a$的值.

7、（10 分）在椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+\tan z^2$在该点沿曲线$x=t^2,y=1-2t,z=t^3-3t$在点$(1,-1,-2)$处的切线方向的方向导数最大。

8、（10 分）求曲面积分$I=\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=9$的外侧在$z\ge 0$的部分。

9、（8 分）设$f(u)$连续，区域Ω由$0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le t^2$围成，$f(t)=\iiint\limits_\Omega[z^2+f(\sqrt{x^2+y^2})]\,dV$，求$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}$。

10、（8 分）已知$b_n=\int_0^1 x\sin n\pi x dx$，$(n=1,2,3,\cdots)$，试判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}$敛散性并求其和。

11、（8 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n+(-2)^n}x^n$的收敛区间与收敛域。

12、（6 分）设a，b为任意常数，$f(x)$在$x=0$的邻域内具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ f''(x)\ge m>0$，试讨论级数：

$$af(\frac{1}{\sqrt{1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2}})+af(\frac{1}{\sqrt{3}})-bf(\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})+\cdots$$的敛散性。

由（1）知$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n}$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$不存在，级数发散。

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 B2 参考解答

1、（8 分）设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4$，试求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})$.

解：$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=8$

2、（8 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-2z=f(y^2-2z)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，求证 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

解 令 $F(x,y,z)=x^2-2z-f(y^2-2z)$ 则 $F_x=2x, F_y=-2yf', F_y=-2+2f'$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-x}{f'-1},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yf'}{f'-1}\quad 则\ y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=xy$$

3、（8 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $\iint\limits_D y^2dxdy=4\iint\limits_{D_1} y^2dxdy=4\int_0^1dy\int_0^{1-y}y^2dx=4\int_0^1y^2(1-y)dy=\dfrac{1}{3}$

4.（8 分）已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 周长为 b，求 $\oint_L(4xy+9x^2+4y^2)\mathrm{d}s.$

解 因为 L 关于 x 轴 $(y$轴$)$ 对称，$4xy$ 关于 y(关于x) 为奇函数，所以 $\oint_L 4xy\mathrm{d}s=0$，故 $\oint_L(4xy+9x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(9x^2+4y^2)\mathrm{d}s=36\int_L(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9})\mathrm{d}s=36b$。

5、（8 分）判断两直线 L_1：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 和 L_2：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ 是否在同一平面内，并求两直线的的夹角。

解 1：直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $s_1=\{1,1,2\}, s_2=\{1,3,4\}$，且分别过 $P(-1,0,1),Q(0,-1,2)$

从而 $(\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2)\cdot\mathbf{PQ}=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&3&4\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，故直线 L_1 与 L_2 为异面直线.

两直线之间的夹角余弦为 $\cos\varphi=\dfrac{12}{\sqrt{6}\sqrt{26}}=\sqrt{\dfrac{12}{13}}$，故夹角为 $\varphi=\arccos\sqrt{\dfrac{12}{13}}$

6、（10 分）已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，求该函数并确定 a 的值.

解：设该函数为 $u(x,y)$，则由全微分公式有 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$，则有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(x+ay)}{(x+y)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，分别对 y,x 求偏导得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{-2y}{(x+y)^3}$，由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，则 $a=2$。由曲线积分与路径无关可得

$$u(x,y)=\ln(x+y)-\frac{y}{x+y}+C$$

7、（10 分）在椭球面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+\tan z^2$ 在该点沿曲线 $x=t^2, y=1-2t, z=t^3-3t$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的切线方向的方向导数最大。

解：由曲线 $x=t^2, y=1-2t, z=t^3-3t$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的法线方向向量为：

$\left\{2t,-2,3t^2-3\right\}|_{t=1}=2\left\{1,-1,0\right\}$ 其单位向量为：$\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1,-1,0\}$

函数 $f(x,y,z)$ 的方向导数的表达式为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ 。

其中 $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right\}=2\left\{x,y,z\sec^2 z^2\right\}$ 　因此 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$ 。

于是，按照题意，即求函数 $\sqrt{2}(x-y)$ 在条件 $2x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值。设

$$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1),$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{2}+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\lambda z=0\\ 2x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$,解之得 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4\lambda}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2\lambda}\\ z=0\end{cases}$ 　$\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{3}$

$\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 S 上的点为 $(\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0)$，此时 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{3}$,

所以，所求的 S 上的点为 $(\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0)$

8、（10 分）求曲面积分 $I=\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧在 $z\geq 0$ 的部分。

解：添加辅助面 S_1：$z=0(x^2+y^2\leq 4)$, 法向量乡下，用 Gauss 公式得

$I+\iint_{S_1} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega zdV=\int_0^2 dz\iint_{D(z)} zdxdy=\int_0^2 z\pi(4-z^2)dz=4\pi$，于是

$I=-\iint_{S_1} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+4\pi=\iint\limits_{D_{xy}} 2dxdy+4\pi=12\pi$

9、（8 分）设 $f(u)$ 连续，区域 Ω 由 $0\leq z\leq 1$，$x^2+y^2\leq t^2$ 围成，

$f(t)=\iiint\limits_\Omega[z^2+f(\sqrt{x^2+y^2})]\,dV$，求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}$。

解 $f(t)=\iiint\limits_\Omega\left[z^2+f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^1[z^2+f(\rho)]dz$

$$=\frac{\pi}{3}t^2+2\pi\int_0^t\rho f(\rho)d\rho$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^2}=\frac{\pi}{3}+2\pi\frac{\lim\limits_{t\to 0+}\int_0^t\rho f(\rho)d\rho}{t^2}=\frac{\pi}{3}+\pi\lim_{t\to 0+}f(t)=\frac{\pi}{3}\ \ (\because f(0)=0)$$

10、（8 分）已知 $b_n=\int_0^1 x\sin n\pi x dx$, $(n=1,2,3,\cdots)$，试判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}$ 敛散性并求其和。

解 由 $b_n=\int_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ (n=1,2,3,\cdots)$，而 $\left|\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}\right|=\frac{1}{\pi n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$

由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n(n+1)}$ 收敛

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

且 $S_n=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ 所以级数的和 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\pi}$.

11、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+(-2)^n}x^n$ 的收敛区间与收敛域。

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}}{\frac{n}{3^n+(-2)^n}}=\frac{1}{3}$， 所以收敛半径 $R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$，

在 $x=\pm 3$ 处，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+(-2)^n}(\pm 3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n n}{1+(-\frac{2}{3})^n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+(-\frac{2}{3})^n}=\infty$，所以发散，

因此收敛域也为 $(-3,3)$。

12、（6 分）设 a，b 为任意常数，$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,\ f''(x)\geq m>0$，试讨论级数：

$$af(\frac{1}{\sqrt{1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2}})+af(\frac{1}{\sqrt{3}})-bf(\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})+\cdots$$ 的敛散性。

解 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 得：$f(0)=f'(0)=0$，再由 $f''(x)\geq m>0$ 知：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$f(x)$ 是单调增函数，且 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$，故 $f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调减且趋于 0，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 收敛 。

当 $a=b$ 时，级数 $=a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{\sqrt{n}})$，收敛。

当 $a\neq b$ 时，$S_{2n}=af(\frac{1}{\sqrt{1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2}})+af(\frac{1}{\sqrt{3}})-bf(\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})$

$$=a[f(\frac{1}{\sqrt{1}})-f(\frac{1}{\sqrt{2}})+\cdots+f(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})-f(\frac{1}{\sqrt{2n}})]$$

$$+(a-b)[f(\frac{1}{\sqrt{2}})+f(\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+f(\frac{1}{\sqrt{2n}})]=a\sigma_{2n}+(a-b)\delta_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{\sqrt{2n}})}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{f''(0)}{4}>\frac{m}{4}>0,\qquad \lim_{n\to\infty}\delta_n\text{ 不存在，}$$

由（1）知 $\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n}$ 存在，$\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ 不存在，级数发散。