线性代数课程

向量组与线性方程组

2021 年 8 月 31 日

■ 武汉大学数学与统计学院 ■ 古月老师

第 3 章　向量组与线性方程组

第 3 章　向量组与线性方程组

本章要求:

(1) 理解向量概念及其运算，线性组合与线性表示；

第 3 章　向量组与线性方程组

本章要求：

(1) 理解向量概念及其运算，线性组合与线性表示；

(2) 理解线性相关、线性无关等概念、性质和判定，掌握相关的要结论，会用这些结论证明一些命题；

第 3 章　向量组与线性方程组

本章要求：

(1) 理解向量概念及其运算，线性组合与线性表示；

(2) 理解线性相关、线性无关等概念、性质和判定，掌握相关的要结论，会用这些结论证明一些命题；

(3) 理解极大线性无关组、秩、向量组等价，掌握求极大无关组与秩的方法；理解向量组的秩和矩阵秩的关系以及有关秩的性质；

第 3 章　向量组与线性方程组

本章要求：

(1) 理解向量概念及其运算，线性组合与线性表示；

(2) 理解线性相关、线性无关等概念、性质和判定，掌握相关的要结论，会用这些结论证明一些命题；

(3) 理解极大线性无关组、秩、向量组等价，掌握求极大无关组与秩的方法；理解向量组的秩和矩阵秩的关系以及有关秩的性质；

(4) 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件及非齐次线性方程组有解的充要条件．理解齐次线性方程组的基础解系、通解，并掌握其求法．理解非齐次线性方程组无解、有唯一解、有无限多解的充要条件；理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念．熟练掌握用初等行变换求 (通) 解的方法和基本步骤．

第一节 n 维向量

第二节 向量组的线性相关性

第三节 向量组的秩

第四节 线性方程组解的结构

定义 1 由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 或 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为n 维向量(vector)，前者称为行向量(row vector)，后者称为列向量(column vector)，其中第 i 个数 a_i 称为向量 α 的第 i 个分量，$i = 1, 2, \cdots, n$. n 称为向量的维数(dimension). n 维行向量即为 $1 \times n$ 矩阵，n 维列向量即为 $n \times 1$ 矩阵.

由若干个同维数行（列）向量构成的集合称为向量组(vector set).

分量为实数的称为实向量，用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实向量的全体；分量为复数的称为 复向量，用 $\mathbb{C}^n$ 表示 n 维复向量的全体.

通常用大写黑体字母如 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \cdots$ 等表示矩阵，用小写黑体字母如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \cdots$ 等表示向量．为便于区分，通常行向量的各元素之间可用逗号隔开，在区分明显时也可用空格隔开．在讨论向量概念和性质时，行向量和列向量是完全一样的.

在没有指明是行向量还是列向量时，通常指列向量.
行向量可以利用矩阵的转置来表示，如可以用 α^{T} 表示一个行向量，这里 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

所有分量都为零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$(或 θ).

定义 2　设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个 n 维向量.

(1) **向量相等** $\alpha=\beta$ 当且仅当 $a_i=b_i$，$i=1,\cdots,n$.

(2) **向量加法** 向量

$$\alpha+\beta=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)$$

称为向量 α 与 β 的和.

向量减法 向量

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

称为向量 α 与 β 的差.

(3) 数量与向量的乘积 (简称**数乘**) $k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,$

负向量　　向量 $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 称为 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的负向量.

向量的加法和数乘 (统称为向量的线性运算) 具如下性质：

(1) 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 对任一向量 α，有 $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$；

(4) 对任一向量 α，有 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$；

(5) 对数 1，有 $1\alpha=\alpha$；

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

(8) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$.

(1) ∼ (8) 中，α,β,γ 为 n 维向量，$\mathbf{0}$ 为 n 维零向量，k,l 为实数.

定义了向量加法和数乘运算的 n 维实向量的全体称为n 维实向量空间(real vector space)，记作$\mathbb{R}^n$.

例 1　设

$\alpha_1=(1,4,-3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,-3,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(5,-2,1)^{\mathrm{T}}$,

计算 $\alpha_1+2\alpha_2$；并判别 α_3 与 α_1，α_2 的关系.

例 1　设

$\alpha_1 = (1, 4, -3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (2, -3, 2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (5, -2, 1)^{\mathrm{T}}$,

计算 $\alpha_1 + 2\alpha_2$；并判别 α_3 与 α_1，α_2 的关系.

解　$\alpha_1 + 2\alpha_2 = (5, -2, 1)^{\mathrm{T}}$，且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$，

或等价地 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + (-1)\alpha_3 = \mathbf{0}$.

第二节	向量组的线性相关性
A	线性表示
B	线性相关性

线性表示

定义 1　对于给定的一个由 m 个 n 维向量组成的向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，及 m 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，称向量 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$ 为向量组 (A) 的线性组合(linear combination)；

若对于某个已知的 n 维向量 β，存在 m 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$ 使

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m, \quad (3-1)$$

则称向量 β 是向量组 (A) 的线性组合，也称 β 能由向量组 (A)线性表示(linear representation).

线性表示

对 n 维向量组 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, 则任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots,$
均能由 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 线性表示为

$$\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

称 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 为n 维基本向量组(unit vector set)
或n 维基向量组(fundamental vector set).

线性表示

例 1　设 $\alpha_1 = (1,1,1)$，$\alpha_2 = (0,1,1)$，$\alpha_3 = (0,0,1)$，$\beta = (1,3,4)$，问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？

线性表示

例 1 设 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(0,0,1)$，$\beta=(1,3,4)$，问 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

解 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在 k_1,k_2,k_3 使

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3 \quad (3-2)$$

成立，用分量表示 (3-2)，即

$$\begin{cases} k_1=1 \\ k_1+k_2=3 \\ k_1+k_2+k_3=4 \end{cases}$$

即 $k_1=1,k_2=2,k_3=1$．所以 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

线性表示

对于 m 元线性方程组

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n.
\end{array}
\right.
\qquad (3-3)
$$

若令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

线性方程组 (3-3) 可表示为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{b} \quad (3-4)$$

称其为线性方程组的向量表示法. 方程组是否有解等价于向量 $\mathbf{b}$ 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示, 因此有

定理 1　已知 n 维向量 $\mathbf{b}$ 与 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),$$

向量

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示 $b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$;

定理 1 已知 n 维向量 $\mathbf{b}$ 与 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),$$

向量

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示 $b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$；
2. 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解；

定理 1　已知 n 维向量 $\mathbf{b}$ 与 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),$$

向量

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示 $b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$；
2. 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解；
3. $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

例 2 设向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ b \end{pmatrix},$$

试讨论 a, b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？a, b 为何值时，β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？并写出所有的表达式.

解 令

$$\bar{\mathbf{A}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 - r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}]{\substack{r_4 - r_2 \\ r_3 - \frac{a}{2} r_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{3a}{2} & 6 - 2a \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow{r_3-(1-\frac{a}{2})r_2}\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\0&1&2&5\\0&0&-\frac{a}{2}-1&1+\frac{a}{2}\\0&0&0&b+1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\cdot(-2)}\begin{pmatrix}2&0&1&-1\\0&1&2&5\\0&0&a+2&-(a+2)\\0&0&0&b+1\end{pmatrix},$$

显然,

(1) 当 $b \neq -1$ 时，$R(\mathbf{A}) \neq R(\bar{\mathbf{A}})$，线性方程组 $\mathbf{Ax} = \beta$ 无解，故 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(2) 当 $b = -1$，$a \neq -2$ 时，$R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 3$，线性方程组 $\mathbf{Ax} = \beta$ 有唯一解，可解得 $x_1 = 0$，$x_2 = 7$，$x_3 = -1$，故 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一，表达式为

$$\beta = 0\alpha_1 + 7\alpha_2 - \alpha_3.$$

(3) 当 $b=-1$，$a=-2$ 时，$R(\mathbf{A})=R(\bar{\mathbf{A}})=2<3$，线性方程组 $\mathbf{Ax}=\beta$ 有无穷多解，其解为

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k, \\ x_2=5-2k, \quad\quad k\in\mathbb{R} \text{ 为任意实数}, \\ x_3=k, \end{cases}$$

故 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一，其表达式可写为：

$$\beta=-\tfrac{1}{2}(1+k)\alpha_1+(5-2k)\alpha_2+k\alpha_3,\ k \text{ 为任意实数}.$$

有了一个向量由向量组线性表示，可以进一步讨论两个向量组之间的线性表示问题.

定义 2 若向量组 (A)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的每一个向量 α_i 均能由向量组 (B)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则称向量组 (A) 能由向量组 (B) 线性表示.

若向量组 (A) 与向量组 (B) 可相互线性表示，则称向量组 (A) 与向量组 (B) 等价(equivalent).

例如对于向量组 (A)：$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 (B)：$\beta_1=(1,,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，不难验证有下面关系：

$$\alpha_1=\beta_1-\beta_2,\ \alpha_2=\beta_2+\beta_3,$$

$$\beta_1=\tfrac{2}{3}\alpha_1+\tfrac{1}{3}\alpha_2,\ \beta_2=-\tfrac{1}{3}\alpha_1+\tfrac{1}{3}\alpha_2,\ \beta_3=\tfrac{1}{3}\alpha_1+\tfrac{2}{3}\alpha_2.$$

由于这两个向量组能够相互线性表示，因此两向量组等价.

下面用矩阵来描述向量组间的线性表示. 若向量 β 能由向量组 (A): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, 即存在 $l_1, l_2, \cdots, l_s \in \mathbb{R}$, 使得:

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{l},$$

其中 $n \times s$ 矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_s)^{\mathrm{T}}$ 是向量.

同样，若向量组 (B)：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，设

$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + l_{21}\alpha_2 + \cdots + l_{s1}\alpha_s \\ \beta_2 = l_{12}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \cdots + l_{s2}\alpha_s \\ \qquad\qquad\vdots \\ \beta_t = l_{1t}\alpha_1 + l_{2t}\alpha_2 + \cdots + l_{st}\alpha_s \end{cases}, \quad (3\text{-}5)$$

引进 $s \times t$ 矩阵 $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1t} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{s1} & l_{s2} & \cdots & l_{st} \end{pmatrix},$$

则上式可以写成

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\mathbf{L},$$

即

$$\mathbf{B}=\mathbf{AL} \qquad (3-6)$$

这里 $\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

即，若向量组 (B)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 能由向量组 (A)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则存在 $s\times t$ 矩阵 $\mathbf{L}$，使得上式成立；

反之，若上式成立，则向量组 (B)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 一定能由向量组 (A)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示．因此有：

定理 2 对 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), \ \mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t), \ \mathbf{X} = (x_{ij})_{s\times t},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示；

定理 2　对 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s),\ \mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t),\ \mathbf{X} = (x_{ij})_{s\times t},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示；
2. 矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解；

定理 2 对 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s),\ \mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t),\ \mathbf{X} = (x_{ij})_{s \times t},$$

则下列 3 条陈述相互等价：

1. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示；
2. 矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解；
3. $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

注 因矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量即为 $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ 的列向量，矩阵 $\mathbf{B}$ 的行向量即为 $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ 的列向量，且

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \text{ 等价于 } \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B},$$

故 $\mathbf{B}$ 的行向量组能由 $\mathbf{A}$ 的行向量组线性表示的充分必要条件是 $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 有解.

向量组的等价具如下性质：

1. 自反性：任一向量组和它自身等价.
2. 对称性：如果向量组 (A) 与向量组 (B) 等价，则向量组 (B) 也与向量组 (A) 等价.
3. 传递性：如果向量组 (A) 与向量组 (B) 等价，而向量组 (B) 与向量组 (C) 等价，则向量组 (A) 也与向量组 (C) 等价.

只说明性质 (3).

若向量组 (A) 能由向量组 (B) 线性表示，向量组 (B) 能由向量组 (C) 线性表示，即存在矩阵 $\mathbf{L}_1$，$\mathbf{L}_2$，使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{L}_1,\ \mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{L}_2,$$

从而有 $\mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)$，记 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2\mathbf{L}_1$，则 $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{L}$，即向量组 (A) 能由向量组 (C) 线性表示.

反过来类似，从而向量组 (A) 与向量组 (C) 等价.

推论 1　若向量组 (B): $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 (A): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则

$$R(\mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A}).$$

证　由定理 3.2 得 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. 由于

$$R(\mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

所以有 $R(\mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A})$.

推论 2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价的充分必要条件是

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

推论 3　n 维基本向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示的充分必要条件是

$$R(\mathbf{A}) = n.$$

推论 3　n 维基本向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示的充分必要条件是

$$R(\mathbf{A}) = n.$$

证　因为由向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 组成的矩阵是 n 阶单位矩阵，所以 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 能由向量组 (A): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示的充要条件是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{E})$，因为矩阵 (A, E) 的最高阶非零子式是 $|E| = 1$，E 是 n 阶单位矩阵，所以 $R(A, E) = n$，因此

$$R(A) = R(A, E) \quad \Leftrightarrow \quad R(A) = n.$$

推论 4　设 A 是 $m \times n$ 矩阵,

1. 如果 A 经有限次初等行变换化为 B, 则 A 与 B 的行向量组等价;
2. 如果 A 经有限次初等列变换化为 B, 则 A 与 B 的列向量组等价.

证 ① 应用定理 2.8，存在可逆矩阵 P, 使得 $PA = B \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}$. 由定理 3.2 得 B^{T} 的列向量组可由 A^{T} 的列向量组线性表示，即 B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表示；由于初等行变换可逆，所以 A 的行向量组也可由 B 的行向量组线性表示，因此 A 与 B 的行向量组等价.

②应用定理 2.8，存在可逆矩阵 Q, 使得 $AQ = B$，由定理 3.2 得 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示；由于初等列变换可逆，所以 A 的列向量组也可由 B 的列向量组线性表示，因此 A 与 B 的列向量组等价.

第二节	向量组的线性相关性
A	线性表示
B	线性相关性

定义 3 对于给定的 n 维向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，若存在不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = \mathbf{0}, \quad (3-9)$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关(linearly dependent). 否则称向量组 (A) 线性无关(linearly independent),

即若上式仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ 时才成立，则称向量组 (A) 线性无关.

注意

(1) 线性相关性与向量组中向量的排序无关，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 具有相同的线性相关性.

(2) 两个 3 维向量线性相关的几何意义是这两个向量共线；三个 3 维向量线性相关的几何意义是这三个向量共面.

(1) 含有零向量的向量组一定线性相关.

(1) 含有零向量的向量组一定线性相关.

证　不失一般性，设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \mathbf{0}$，取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$，$\lambda_{m+1} = 1$，则

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m + \lambda_{m+1}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \mathbf{0}$ 线性相关.

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，则向量组

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$$

也线性相关.

(2) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，则向量组

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$$

也线性相关.

证　因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，所以存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0},$$

于是

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_m=\mathbf{0},$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

(3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则它的任何一部分向量组也线性无关.

(4) n 维向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组 (A) 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

(4) n 维向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组 (A) 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证　必要性. 设向量组 (A) 线性相关，则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

不妨设 $k_1 \neq 0$，于是可得

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots\cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即 α_1 能由 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ 线性表示.

充分性. 设 α_i 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，即

$$\alpha_i=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}+\lambda_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m,$$

于是

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}+(-1)\alpha_i+\lambda_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0},$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},-1,\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_m$ 不全为 0，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

该结论的一个等价说法是:

向量组 (A) 线性无关的充分必要条件是向量组 (A) 中任何一个向量都不能用向量组 (A) 中其余向量线性表示.

该结论的一个等价说法是:

向量组 (A) 线性无关的充分必要条件是向量组 (A) 中任何一个向量都不能用向量组 (A) 中其余向量线性表示.

如在 3 维空间中, 3 个不共面的向量 (线性无关) 中的任何一个向量都不能用其余 2 个向量线性表示.

(5) 设向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 (B)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量 β 能由向量组 (A) 线性表示，且表示式唯一.

(5) 设向量组 (A)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 (B)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则向量 β 能由向量组 (A) 线性表示，且表示式唯一.

证　存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=\mathbf{0},$$

下证 $k_{m+1}\neq 0$. 否则若 $k_{m+1}=0$，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，与条件 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关矛盾. 因此有

$$\beta=(-\frac{k_1}{k_{m+1}})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_{m+1}})\alpha_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k_{m+1}})\alpha_m.$$

再证表示式唯一．设有两个表示式:

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m,$$

$$\beta=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_m\alpha_m,$$

两式相减得

$$\mathbf{0}=(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\alpha_m,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，可得 $\lambda_i=\mu_i$，$i=1,2,\cdots$
故向量 β 的表示法唯一．

例 3　设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

线性无关.

证　令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\mathbf{0}$，即

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\mathbf{0},$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性无关性，有

$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$，由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以上式只有零解 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，故向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

定理 3　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots$
$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，

① 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，此等价于 $R(\mathbf{A})<m$；

② 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有零解，此等价于 $R(\mathbf{A})=m$.

推论 1　n 个 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是它们所对应的行列式 $|\mathbf{A}|$ 为零；线性无关的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$，这里 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

推论 2　当 $m > n$ 时，m 个 n 维向量一定线性相关.

推论 2 表明：向量组的向量个数超过向量维数时，该向量组一定线性相关．特别地，任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

推论 3

① 若 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则将向量组的每一个向量添加 r 个分量 (这些分量所在的位置相同) 所得到的 $n+r$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 也线性无关.

② 若 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则将该向量组的每一个向量减少 $l(l<n)$ 个分量 (这些分量所在的位置相同) 所得到的 $n-l$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 也线性相关.

不妨设减少的分量是位于后面的 l 个分量，因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$
线性相关，所以存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

按向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的分量写出，上式含 n 个等式，取其前面的 $n - l$ 个等式得到

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m = 0,$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为 0，上式表明向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots$
线性相关.

例如，$\mathbb{R}^3$ 中的基本向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$，在每一个向量中任意添加一个分量，构成向量组：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix},$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 仍然线性无关.

注　推论 3 的逆不成立．如：

$\beta_1 = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\beta_2 = (2, 4, 5)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，

但 $\alpha_1 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$ 与 $\alpha_2 = (2, 4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关．

定理 4 若矩阵 A 经有限次初等行 (列) 变换化为 B, 则有:

1. 矩阵 A 和 B 的任何对应的部分列 (行) 向量组都具有相同的线性相关性;
2. 矩阵 A 中某列 (行) 向量用 A 的任一部分列 (行) 向量组线性表示的系数与矩阵 B 中对应的列 (行) 向量用 B 中对应的部分列 (行) 向量组线性表示的系数完全相同.

证　仅考虑初等行变换的情况.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 应用定理 2.8，必存在可逆矩阵 P 使得 $B=PA$, 即

$$
\begin{aligned}
&(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=B\\
&\quad=PA=P(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow\quad \beta_i=P\alpha_i,\quad \alpha_i=P^{-1}\beta_i\quad (i=1,2,\cdots,n).
$$

①任取矩阵 A 的部分列 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ $(1\leqslant r\leqslant n)$, 在矩阵 B 中对应的部分列为 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$, 记矩阵 $A_1=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$, $B_1=(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r})$, 则

$$
\begin{aligned}
B_1&=(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r})\\
&=(P\alpha_{i_1},P\alpha_{i_2},\cdots,P\alpha_{i_r})=P(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=PA_1,
\end{aligned}
$$

据定理 2.13 得线性方程组 $A_1x=0$ 与 $PA_1x=B_1x=0$ 同解, 应用定理 3.3 得: 当此方程组有非零解时, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 同为线性相关; 当此方程组只有零解时, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 同为线性无关.

②在 A 与 B 中任取一对应的列向量 α_i 与 β_i, 若 $\alpha_i = \lambda_1\alpha_{i_1} + \lambda_2\alpha_{i_2} + \cdots + \lambda_r\alpha_{i_r}$, 则

$$\begin{aligned}\beta_i = P\alpha_i &= P\left(\lambda_1\alpha_{i_1} + \lambda_2\alpha_{i_2} + \cdots + \lambda_r\alpha_{i_r}\right)\\ &= \lambda_1 P\alpha_{i_1} + \lambda_2 P\alpha_{i_2} + \cdots + \lambda_r P\alpha_{i_r}\\ &= \lambda_1\beta_{i_1} + \lambda_2\beta_{i_2} + \cdots + \lambda_r\beta_{i_r},\end{aligned}$$

反之，若 $\beta_i = \lambda_1\beta_{i_1} + \lambda_2\beta_{i_2} + \cdots + \lambda_r\beta_{i_r}$，则

$$\begin{aligned}\alpha_i = P^{-1}\beta_i &= P^{-1}\left(\lambda_1\beta_{i_1} + \lambda_2\beta_{i_2} + \cdots + \lambda_s\beta_{i_r}\right)\\ &= k_1P^{-1}\beta_{i_1} + k_2P^{-1}\beta_{i_2} + \cdots + k_sP^{-1}\beta_{i_r}\\ &= k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_s\alpha_{i_r}.\end{aligned}$$

例 4 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 及向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

解 对矩阵 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 施行初等行变换:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&1&0&1\\1&2&0&0\\1&5&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1;r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&2&-1&-2\\0&5&-2&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3-2r_2;r_4-5r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{def}}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\mathbf{B}.$$

因仅作初等行变换，根据定理 3.3 中推论 3，**A** 和 **B** 中任意对应的列向量组都有相同的线性相关性，从而由等式

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = R(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 3,$$

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4) = R(\beta_1,\beta_2,\beta_4) = 2,$$

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = R(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = 3,$$

应用定理 3.3 即得，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

性质 3.1 已知向量组 (A)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 (B)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，

①若向量组 (B) 能由向量组 (A) 线性表示，且 $t>s$，则向量组 (B) 线性相关.

②若向量组 (B) 能由向量组 (A) 线性表示，且向量组 (B) 线性无关，则 $t\leqslant s$.

证　①与②互为逆否命题，下面证明其中一个 (选②) 即可.

记 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，因为向量组 (B) 线性无关，可由向量组 (A) 线性表示，应用定理 3.3 与定理 3.2 的推论 1 得

$$t=R(B)\leqslant R(A),$$

显然有 $R(A)\leqslant s$，所以 $t\leqslant s$.

即：向量个数多的向量组若可以被向量个数少的向量组线性表示，则向量个数多的向量组一定线性相关；另一方面，一个线性无关的向量组若可以被某向量组线性表示，则线性无关的向量组所含向量个数一定不超过另一向量组所含向量个数.

推论 向量组（A）：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组（B）：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价，且向量组（A）和（B）都线性无关，则 $s = t$.

即：向量个数多的向量组若可以被向量个数少的向量组线性表示，则向量个数多的向量组一定线性相关；另一方面，一个线性无关的向量组若可以被某向量组线性表示，则线性无关的向量组所含向量个数一定不超过另一向量组所含向量个数.

推论 向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 (B)：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价，且向量组 (A) 和 (B) 都线性无关，则 $s = t$.

证 因为向量组 (A) 线性无关且能由向量组 (B) 线性表示，所以 $s \leqslant t$.

又因为向量组 (B) 线性无关且能由向量组 (A) 线性表示，所以 $t \leqslant s$；因此 $s = t$.

例 5　已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，证明 α_1 能由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，α_4 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

证　因 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故 α_2,α_3 线性无关，又因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 α_1 能由 α_2,α_3 线性表出，设 $\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，则有 $\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4$，$\alpha_1$ 能由向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

若 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，设 $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，因 α_1 能由 α_2,α_3 线性表出，设 $\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，有$\alpha_4=l_1(k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=(l_1k_2+l_2)\alpha_2+(l_1k_3+l_3)\alpha_3$，$\alpha_4$ 能由 α_2,α_3 线性表出，与题设向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关矛盾，故 α_4 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

例 6　设 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,n$．若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，证明必存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(c,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 $c\neq 0$.

证法 1　令 $\beta_i=(a_{2i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 n 个 $n-1$ 维向量，故存在不全为零的数 $k'_1,k'_2,\cdots,k'_n$，使得

$$k'_1\beta_1+k'_2\beta_2+\cdots+k'_n\beta_n=\mathbf{0},$$

从而 $k'_1a_{11}+k'_2a_{21}+\cdots+k'_na_{n1}\ \underline{\underline{\mathrm{def}}}\ A_0\neq 0$(否则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关)，取 $k_i=\frac{c}{A_0}k'_i$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_{1i}=c$，从而满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(c,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

证法 2　记 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\mathbf{b}=(c,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，得 $|A|\neq 0$，据克拉默法则，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 必存在唯一非零解 $x=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$，即存在不全为 0 的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(c,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

第一节 n 维向量

第二节 向量组的线性相关性

第三节 向量组的秩

第四节 线性方程组解的结构

第三节	向量组的秩
A	极大无关组与向量组的秩
B	向量组的秩与矩阵的秩

定义 1 向量组 (A) 中若存在由 r 个向量组成的部分组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

(1) 向量组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 (A) 中任一向量能由向量组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

则称向量组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为向量组 (A) 的一个极大线性无关组(maximal linearly independent systems)，简称极大无关组.

例如，考虑向量组

$\alpha_1=(1,0,0),\quad \alpha_2=(0,1,0),\quad \alpha_3=(1,1,0),$

显然部分组 α_1,α_2 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中的任意向量都可以由 α_1,α_2 线性表示：

$\alpha_1=\alpha_1+0\cdot\alpha_2$，$\alpha_2=\alpha_2+0\cdot\alpha_1$，$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，

所以 α_1,α_2 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组.

同样可以证明 α_1,α_3 及 α_3,α_2 也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组，这说明一个向量组的极大无关组可能不唯一.

定义 向量组 (A) 中若存在由 r 个向量组成的部分组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

(1) 向量组 (A_0)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 (A) 中任意 $r+1$ 个向量 (如果有的话) 都线性相关.

则称向量组 (A_0) 是向量组 (A) 的一个极大线性无关组.

证　设向量组 (A_0):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 (A) 的极大无关组 (按定义 3.6). 对 (A) 中任意一个向量 α, α 能由向量组 (A_0) 线性表示, 从而对向量组 (A) 中任意 $r+1$ 个向量组成的向量组 (B): $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$ 中的每一向量均能由 (A_0) 线性表示, 因 $r<r+1$, 由性质 3.1, 向量组 (B) 线性相关, 故向量组 (A_0) 按定义 3.6* 也是极大无关组.

反之, 设向量组 (A_0):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 (A) 的极大无关组 (按定义 3.6*), 于是对任意向量 α, 由 (A) 中 $r+1$ 个向量组成的向量组 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关, 故 α 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 所以向量组 (A_0) 按定义 3.6 也是极大无关组.

特别地，只含零向量的向量组没有极大无关组.

性质 3.2 极大无关组具有如下性质：

1. 任一线性无关向量组的极大线性无关组均为向量组自身.
2. 向量组与它的极大线性无关组等价.
3. 向量组的任意两个极大线性无关组等价，且所含向量个数相同.

例 1 求 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组.

例 1　求 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大无关组.

解　$\mathbb{R}^n$ 中的基本向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 线性无关. 又由定理 3.3 中推论 2，任何 $n+1$ 个的 n 维向量都线性相关，于是基本向量组就是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个极大无关组.

虽然一个向量组的极大无关组可能不唯一，但性质 3.2 中③表明，极大无关组所含向量个数是一确定的数，与极大无关组的选择无关.

定义 2　向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关向量组所含有的向量个数 r 称为向量组 (A) 的秩，记作 $R\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r$.

规定仅含零向量的向量组的秩为 0.

根据向量组的秩的定义及向量组等价的定义有：

定理 1 若向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 能由向量组 (B)：$\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示，则

$$R\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \leqslant R\{\beta_1, \cdots, \beta_t\}. \quad (3-13)$$

证 设 $R\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\} = p$，$R\{\beta_1,\cdots,\beta_t\} = q$，设向量组 (A) 的一个极大无关组为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}$，向量组 (B) 的一个极大无关组为 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}$，则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价，$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价，因此 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}$ 能由 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdot\cdot$ 线性表示，由性质 3.1，有 $p \leqslant q$，即

$$R\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\} \leqslant R\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

推论 1 等价向量组具有相等的秩.

推论 2 若向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，则向量组 (A) 中任意 r 个线性无关向量都是向量组 (A) 的一个极大线性无关组.

第三节	向量组的秩
A	极大无关组与向量组的秩
B	向量组的秩与矩阵的秩

定义 3　$m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行向量组的秩称为矩阵 **A** 的行秩(row rank of matrix A)；

其列向量组的秩称为矩阵 **A** 的列秩(column rank of matrix A).

显然，$m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的列秩 $\leqslant n$，行秩 $\leqslant m$.

如 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，列向量组的秩为 3；行向量组的秩等于 3．该例中矩阵的行秩与列秩相等，这一现象不是偶然的，实际上有：

定理 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的行秩也等于它的列秩.

证　首先证明矩阵 **A** 的秩与它的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$
的秩相等.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，取一个极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$，则

$$R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} = R\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\} = r.$$

记矩阵 $B = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r})$, 由定理 3.3 得 $R(B) = r$，由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 等价，应用定理 3.2 的推论 2 得 $R(A) = R(B)$，于是 $R(A) = R\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

由于 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$，而 $\mathbf{A}$ 的行秩就是 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的列秩，故有

$$R(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \text{ 的行秩} = \mathbf{A} \text{ 的列秩}. \quad (3\text{-}14)$$

求一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组以及将其余向量用极大无关组线性表示的方法如下:

(1) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为列 (行) 向量构造矩阵 $\mathbf{A}$.

求一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组以及将其余向量用极大无关组线性表示的方法如下：

(1) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为列 (行) 向量构造矩阵 $\mathbf{A}$.

(2) 对 $\mathbf{A}$ 作初等行 (列) 变换，把 $\mathbf{A}$ 化成阶梯形矩阵 $\mathbf{B}$，此时矩阵 $\mathbf{B}$ 的秩就是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩，而与 $\mathbf{B}$ 的最高阶非零子式所在的列 (行) 向量 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$ 对应的向量 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组.

求一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组以及将其余向量用极大无关组线性表示的方法如下：

(1) 以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为列 (行) 向量构造矩阵 $\mathbf{A}$.

(2) 对 $\mathbf{A}$ 作初等行 (列) 变换，把 $\mathbf{A}$ 化成阶梯形矩阵 $\mathbf{B}$，此时矩阵 $\mathbf{B}$ 的秩就是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩，而与 $\mathbf{B}$ 的最高阶非零子式所在的列 (行) 向量 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$ 对应的向量 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大无关组.

(3) 若要给出 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中某些向量用极大无关组线性表示的表达式，可以进一步用初等行 (列) 变换将 $\mathbf{B}$ 化为行 (列) 最简形，因初等行 (列) 变换不改变矩阵列 (行) 向量组的线性相关性，从而可以借助于行最简形中对应的线性关系得到.

例 2 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\-2\end{pmatrix},$$

$$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-4\\6\\2\\1\end{pmatrix},$$

求该向量组的秩及它的一个极大无关组, 并把其余向量用此极大无关组线性表示.

解 构造矩阵并作初等行变换：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-4\\-1&2&3&3&6\\0&1&2&2&2\\0&-1&-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-4\\0&1&2&2&2\\0&1&2&2&2\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-4\\0&1&2&2&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{def}}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=\mathbf{B},$$

易知 $R(\mathbf{B})=3$，从而 $R(\mathbf{A})=3$，且$R(\mathbf{B})=R(\beta_1,\beta_2,\beta_4)$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组 ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 也是其极大无关组).

为了用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 表示 α_3,α_5，继续作初等行变换把矩阵 $\mathbf{B}$ 化为行最简形：

$$\mathbf{B}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-3\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-3\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{def}}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5).$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量与行最简行矩阵的列向量有相同的线性相关性，而

$$\gamma_3=\gamma_1+2\gamma_2, \gamma_5=-3\gamma_1+\gamma_4,$$

所以

$$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_5=-3\alpha_1+\alpha_4.$$

例 3　设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{B})\leqslant R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B}). \quad (3-15)$$

证　记 $\mathbf{A}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\mathbf{B}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$. 设 $R(A)=r, R(B)=s$, 分别取 AB 的列向量组的极大无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}$ 作向量组 (C):

$$\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}\},$$

由于 $A+B$ 的列向量组 $\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\}$ 可以由向量组 (C) 线性表示，据定理 3.5 得

$$\begin{aligned} R(A+B) &= R\{\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n\} \\ &\leqslant R\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}\}. \end{aligned}$$

因为向量组 (C) 含 $r+s$ 个向量，故

$R\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_s}\}\leqslant r+s$，于是

$$R(A+B)\leqslant r+s=R(A)+R(B).$$

第四节	线性方程组解的结构
A	齐次线性方程组解的结构
B	非齐次线性方程组解的结构

设 n 元齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}, \quad (3-16)$$

其中 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

性质 3.3　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为齐次线性方程组 (3-16) 的解，则对任意的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$$

也是 (3-16) 的解.

证　直接验证可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s)\\&=k_1\mathbf{A}\xi_1+k_2\mathbf{A}\xi_2+\cdots+k_s\mathbf{A}\xi_s\\&=k_1\mathbf{0}+k_2\mathbf{0}+\cdots+k_s\mathbf{0}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

线性方程组的全体解构成的集合称为线性方程组的解集或解集合，
解集相等的两个线性方程组称为同解线性方程组.

由上述性质可知，当齐次线性方程组有非零解时，必有无穷多解，由于齐次线性方程组的解向量是 n 维向量，从而其线性无关的解向量的个数不会超过 n. 从而我们关注，是否存在与全体解向量等价的线性无关的向量组，使得方程组的任一解均能由它们线性表示出来?

定义 1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 (3-16) 的 s 个解向量，如果满足下列条件：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关；

(2) 方程组 (3-16) 的任意一个解向量 α 都能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 线性表出.

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为齐次线性方程组 (3-16) 的基础解系(system of fundamental solutions).

定理 1　线性方程组 (3-16) 在 $R(\mathbf{A}) = r < n$ 时有基础解系，并且基础解系中含 $n - r$ 个解向量.

证　(1) 首先证明存在 $n-r$ 个线性无关的解向量.

因为 $R(\mathbf{A})=r<n$，不妨设 $\mathbf{A}$ 的前 r 个列向量线性无关，于是经初等行变换后 $\mathbf{A}$ 的行最简形为

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

则原方程组与阶梯形方程组 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 同解.

与 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases} \qquad (3-17)$$

把 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 作为自由未知量，将它们分别取 $n-r$ 组值

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

可得 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个解向量:

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-b_{11}\\ \vdots\\ -b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-b_{12}\\ \vdots\\ -b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\ \vdots\\ -b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

因矩阵 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$ 中有一个 $n-r$ 阶子式 $|\mathbf{E}_{n-r}|=1\neq 0$，故 $R(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})=n-r$，所以 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-r}$ 线性无关.

(2) 再证明 (3-16) 的任一解向量可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表示.

设 $\eta = (d_1, d_2, \cdots, d_r, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r})^{\mathrm{T}}$ 是方程组 (3-16) 的任一解向量，由齐次线性方程组的解的性质 3.3 可得

$$\tilde{\eta} = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

也是方程组的解，从而

$$\eta-\tilde{\eta}=\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_r\\ k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_r \end{pmatrix} - k_1\begin{pmatrix} -b_{11}\\ \vdots\\ -b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} - k_2\begin{pmatrix} -b_{12}\\ \vdots\\ -b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\cdots-k_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r}\\ \vdots\\ -b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\text{def}}} \begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_r\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$$

仍是方程组的解，将其代入 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$，可得

$$p_i=0,\ i=1,2,\cdots,r,$$

故 $\eta-\tilde{\eta}=\mathbf{0}$，即

$$\eta=\tilde{\eta}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

即齐次方程组 (3-16) 的任一解均能由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表示．故 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是方程组 (3-16) 的基础解系.

例 1　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&-1&3\\1&-1&-2&4\end{pmatrix}$$

对 **A** 施行初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&-1&3\\1&-1&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&0&-2&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-\frac{3}{2}r_2,\ -\frac{1}{2}\times r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可看出，$R(\mathbf{A}) = 2 < 4$，故方程组有非零解，方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

把 x_2, x_4 看作自由未知量，分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由此，得方程组的通解为 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$(其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

例 2　设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵，如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$，证明

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leqslant n.$$

证　记 $\mathbf{B}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，由 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，得

$$\mathbf{A}\beta_j=\mathbf{0}(j=1,\cdots,s),$$

即 $\mathbf{B}$ 的每个列向量均是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解向量.

若 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$，则显然有 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leqslant n$.

若 $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$，则说明 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，从而有基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，其中 $r=R(\mathbf{A})$，而 $\mathbf{B}$ 的每个列向量 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 均能由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表示，从而

$$\begin{aligned}R(\mathbf{B})&=R(\beta_1,\cdots,\beta_s)\leqslant R(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})\\&=n-R(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

故有 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leqslant n$.

第四节	线性方程组解的结构
A	齐次线性方程组解的结构
B	非齐次线性方程组解的结构

设 n 元非齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3-18)$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$．如果把它的常数项都换成 0，就得到相应的齐次线性方程组

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \quad (3-19)$$

称它为非齐次线性方程组 (3-18) 的对应的齐次线性方程组，也称为 (3-18) 的导出组.

性质 3.4 对非齐次线性方程组 (3-18) 和导出组 (3-19)，有

1. 若 γ_1, γ_2 是方程组 (3-18) 的解，则 $\gamma_1 - \gamma_2$ 为其导出组 (3-19) 的解.
2. 若 γ_0 是方程组 (3-18) 的解，η 是其导出组 (3-19) 的任一解，则 $\gamma_0 + \eta$ 仍是 (3 -18) 的解.
3. 方程组 (3-18) 的任一解都可表示成

$$\gamma = \gamma_0 + \eta,$$

其中 γ_0 是方程组 (3-18) 的某个解，η 是其导出组 (3-19) 的某个解.

证　因

$$\mathbf{A}(\gamma_1-\gamma_2)=\mathbf{A}\gamma_1-\mathbf{A}\gamma_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}(\gamma_0+\eta)=\mathbf{A}\gamma_0+\mathbf{A}\eta=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b},$$

得证 (1),(2).

由于 $\gamma=\gamma_0+(\gamma-\gamma_0)$，由 (1) 知 $\gamma-\gamma_0$ 是导出组的解，由 (2) 即可得证 (3).

定理 2　设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系，γ_0 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一个特解，则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\gamma = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} + \gamma_0. \quad (3-20)$$

证 因为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，所以 (3-20) 中 γ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解.

又若 γ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任一解，则 $\gamma - \gamma_0$ 为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，从而

$$\gamma - \gamma_0 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

所以 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\gamma = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} + \gamma_0.$$

例 3 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵作初等行变换变化为行最简形矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&4\\1&-1&-2&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&4\\0&0&-1&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3;\ r_1+r_2]{r_2+2r_3;\ (-1)\times r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&2\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\mathbf{A}) = R(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 4$，故方程组有无穷多解，此时可得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 2 \\ x_3 = \qquad 2x_4 + 2 \end{cases},$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ (c_1, c_2 \in R).$$

也可以在同解方程组中令 $x_2 = x_4 = 0$ 得方程组的一个特解 $\gamma_0 = (2, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$.

在对应的齐次方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$ 中分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，从而得到导出组的基础解系为：$\eta_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2 = (1, 0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，得原方程组的通解为：

$$\mathbf{x} = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \gamma_0.$$

例 4　设 $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 的三个解，且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$，求 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 的通解.

解　$Ax=\beta$ 中未知量的个数 $n=3$. x_1,x_2,x_3 线性无关，若 $\beta=0$, 则 $Ax=0$ 有 3 个线性无关解，这表明 $n-R(A)\geqslant 3$, 故 $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$, 此与条件 $A\neq O$ 矛盾，所以 $\beta\neq 0$. 记

$$\alpha_1=x_2-x_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=x_3-x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则 α_1,α_2 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个线性无关解，故 $n-R(A)\geqslant 2 \Leftrightarrow R(A)\leqslant 1$. 而 $A\neq O \Rightarrow R(A)\geqslant 1$. 所以 $R(A)=1$. 因此 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，任取 $Ax=\beta$ 的一个特解 x_1，于是 $Ax=\beta$ 的通解为:

$$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + x_1$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.