武汉大学数学与统计学院 2019-2020 第二学期
《线性代数 B》期中考试试卷解答

一、(5 分)若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量,且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$, $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$,计算四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$.

解 由题设 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$ $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$,于是由行列式之性质得:

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|=-m+n\text{ 。}$$

二、(6 分)设 A 是 n 阶可逆矩阵, $|A|=a$, A 的每行元素之和为 b.

试求:(1). A^{-1} 的行元素之和;(2). $|A|$ 的代数余子式: $A_{1k}+A_{2k}+\cdots+A_{nk}$ 。

解 (1)方法 1:由假设知, $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{pmatrix},(b\neq 0)$ (1)由 A 可逆,从而得,

$$A^{-1}\begin{pmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow bA^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\\\frac{1}{b}\\\vdots\\\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$,故 A^{-1} 的行元素之和为 $\dfrac{1}{b}$.

方法 2:将 $|A|$ 中第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列后从第 1 列中提出 b,再按第 1 列展开得:

$|A|=b(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})$,由于 $|A|\neq 0$ 故 $b\neq 0$ 而且由上式可得:

$\dfrac{A_{11}}{|A|}+\dfrac{A_{21}}{|A|}+\cdots+\dfrac{A_{n1}}{|A|}=b^{-1}$,即 A^{-1} 的第一行中诸元素之和为 b^{-1},同理可证其余每行元素之和也都是 b^{-1}.

(2)因为 A 的每一行元素之和为 b,所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{pmatrix}$ 又题设 $|A|\neq 0$ 故 A^{-1} 存在故有 $A^{-1}\begin{pmatrix}b\\b\\\vdots\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,即

$bA^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 也就是 $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\\\frac{1}{b}\\\vdots\\\frac{1}{b}\end{pmatrix}$ 另外由 $A^*=|A|A^{-1}$, 即 $A^*=aA^{-1}$ $(a=|A|\neq 0)$,所以有

$$A^*\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=aA^{-1}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\\\vdots\\\frac{a}{b}\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\\\frac{a}{b}\\\vdots\\\frac{a}{b}\end{pmatrix}$,故 $A_{1k}+A_{2k}+\cdots+A_{nk}=\dfrac{a}{b}$.

三、（5 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$

解 将原行列式增加一行一列，得：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,(n+1)]{r_i - x_{i-1}r_i,} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 - x_{j-1}c_j} \begin{vmatrix} 1+x_1^2+\cdots+x_n^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 。$$

四、（8 分）计算向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)^T$ 的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

解 设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$，先对 A 施行行初等变换化为行最简形矩阵

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，知向量组的秩 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(A)=2$，易知 1、2 两列即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组。且有 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

五、（14 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$；　　（2）求 $|A^*|$，这里 A^* 是 A 的伴随阵。

解 （1）$4A^2-B^2-2BA+2AB=(4A^2-2BA)+(2AB-B^2)$

$=(2A-B)2A+(2A-B)B=(2A-B)(2A+B)$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ -8 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}.$$

（2）$\left|A^*\right| = 0$。

六、（14 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$，

（1）问 a,b,c 为何值时，$R(A,B)=R(A)$？　　（2）求矩阵方程 $A\boldsymbol{X}=B$ 的全部解。

解　$AX=B$ 有解，须 $R(A)=R(A\mid B)$，对矩阵 $(A\mid B)$ 作初等行变换：

$$(A\mid B)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&a-1&b-1&c-1\end{array}\right),$$

由此看出 $R(A)=2$, 欲 $R(A\mid B)=2$ 须

$$a=1,b=1,c=1.$$

所以 当 $a=1,b=1,c=1$ 时 $AX=B$ 有解。

当 $a=b=c=1$ 时，将上面最后一个矩阵进一步化为行简化阵

$$(A\mid B)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&2&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-k_1\\k_1\end{pmatrix}$　（k_1为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_2\\1-k_2\\k_2\end{pmatrix}$　（k_2为任意常数）

由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_3\\-1-k_3\\k_3\end{pmatrix}$　（k_3为任意常数）

故所求矩阵方程的通解为

$$X=\begin{pmatrix}1-k_1&1-k_2&1-k_3\\-k_1&1-k_2&-1-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}，（k,k_2,k_3\text{为任意常数}）.$$

七、（14 分）已知 A,B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 E 是三阶单位矩阵.

（1）证明:矩阵 $A-2E$ 可逆;　　(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求矩阵 A.

解　(1) 原方程可化为 $AB-2B-4A=O$. 即 $(A-2E)B+8E-8E-4A=O$

所以有 $(A-2E)B-4(A-2E)=8E \Leftrightarrow (A-2E)(B-4E)=8E$

故 $|A-2E||B-4E|=8^3\neq 0$ 即 $|A-2E|\neq 0$ 且 $|B-4E|\neq 0$. 因此 $A-2E$ 可逆。

由 (1) 可知, $|B-4E|\neq 0$ 所以 $B-4E$ 可逆, 由题设知 $A=2B(B-4E)^{-1}$ 或 (1) 知 $A=2E+8(B-4E)^{-1}$ 又

$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}，故 A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

八、（14 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8),\ \boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一的线性表示式?并写出该表示式。

解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$

$\boldsymbol{\beta}$ 能否表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，转换为上述方程组是否有解的问题。对方程组的增广矩阵施行行初等变换有 $\overline{A}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0\end{pmatrix}$，所以当 $a=-1,b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合。

当 $a\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，且表示式惟一即

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4.$$

九、(10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量组，矩阵 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$

试证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是对任意 n 维列向量 b，方程组 $AX=b$ 均有解。

证 记 $D=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n]$

$\Rightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关知 $|D|\neq 0$ 而 $|A|=|D^{\mathrm{T}}D|=|D|^2\neq 0$，即 A 可逆，故对任意 n 维列向量 b，方程组 $AX=b$ 均有解 $X=A^{-1}b$.

$\Leftarrow$ 分别取 $b=\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$，由方程组 $AX=b$ 均有解知，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 与 A 的列向量组等价，故 $r(A)=n$，从而 $|A|=|D^{\mathrm{T}}D|=|D|^2\neq 0$，得 $|D|\neq 0$ 故 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关。

十、(10 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，证明：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 不等价，则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 中有且仅有一个可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示。

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_m,l_1,l_2$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+l_1\boldsymbol{\beta}+l_2\boldsymbol{\gamma}=0.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 l_1,l_2 不可能同时为零，又由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 不等价，故 l_1,l_2 不可能同时为零。因此只有 $l_1\neq 0,l_2=0$ 或 $l_1=0,l_2\neq 0$ 成立，所以 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 中有且仅有一个可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，如果 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 等价，与题设矛盾。