练习 5．3

1． 求使矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

可对角化的正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ .

解 先求矩阵的特征值与特征向量：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)\,,$$

故 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=2$.

$\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，解 $(\lambda E-A)x=0$ 得线性无关的特征向量 $p_1=(1,1,0)^{\mathrm T}$， $p_2=(0,0,1)^{\mathrm T}$.

$\lambda_3=2$ 时，解 $(\lambda E-A)x=0$ 得线性无关的特征向量 $p_3=(1,-1,0)^{\mathrm T}$.

单位化后，令 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\end{pmatrix}$，则有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}.$$

2． 设 $A=\begin{pmatrix}7&-3&-1&1\\-3&7&1&-1\\-1&1&7&-3\\1&-1&-3&7\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

解 先求矩阵的特征值与特征向量：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-7&3&1&-1\\3&\lambda-7&-1&1\\1&-1&\lambda-7&3\\-1&1&3&\lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-8)(\lambda-12)\,,$$

故 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=8$，$\lambda_4=12$.

$\lambda_1=\lambda_2=4$ 时，解 $(\lambda E-A)x=0$ 得线性无关的特征向量 $p_1=(1,1,0,0)^{\mathrm T}$， $p_2=(0,0,1,1)^{\mathrm T}$.

$\lambda_3=8$ 时，解 $(\lambda E-A)x=0$ 得线性无关的特征向量 $p_3=(-1,1,-1,1)^{\mathrm T}$.

$\lambda_4=12$ 时，解 $(\lambda E-A)x=0$ 得线性无关的特征向量 $p_4=(1,1,1,1)^{\mathrm T}$.

单位化后，令 $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac12&\frac12\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac12&\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac12&\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac12&\frac12\end{pmatrix}$，则有

$$T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}4&&&\\&4&&\\&&8&\\&&&12\end{pmatrix}.$$

3． 设 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,2)^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&1&b\end{pmatrix}$ 的特征向量，求 a,b .

解 依题设，存在 λ ，使得 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ ，即

$\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}a+1=\lambda\\-1+2=\lambda\\2+2b=2\lambda\end{cases}$，故 $a=0$ ， $b=0$ ， $\lambda=1$.

4． 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T}$ ， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) 因为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $\lambda=3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm T}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda=3$ 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$ ， $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2$ ，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda=0$ 的特征向量．因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 3，0，0.

$\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm T}$ ，其中 $k\neq 0$ 为常数;

$\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm T}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm T}$ ，其中 k_1,k_2 是不全为 0 的常数.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，用施密特正交化方法先进行正交化：

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T}$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

单位化 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}，得 \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}.$$

(3) 设$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}$，从而有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

也可直接由$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$得到$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

记$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}_1,$$

于是

$$\boldsymbol{B}^6=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1^6\boldsymbol{Q}^{-1}=(\frac{3}{2})^6\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1}=(\frac{3}{2})^6\boldsymbol{E}.$$

5．设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是n阶实对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$的充分必要条件是它们的特征值相同.

证 因为实对称矩阵一定可以对角化，从而一定存在n个特征值（可以相同）及n个线性无关的特征向量.

先证充分性．设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的全部特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$分别是对应的$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的线性无关的特征向量，设$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$可逆，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q},$$

从而$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})$，故$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

再证必要性．若两对称矩阵相似，即$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，从而特征多项式

$$\begin{aligned}\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\right|&=\left|\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right|\\&=\left|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}\right|=\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|\cdot\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|\boldsymbol{P}\right|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|,\end{aligned}$$

故两矩阵有相同的特征值.

练习 5．4

1．写出下列二次型所对应的矩阵：

(1) $f=x^2+2xy+4y^2-2xz-6yz+5z^2$；

(2) $f=x^2-3z^2-4xy+yz$；

(3) $f=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$.

解 对应的矩阵分别为：

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&4&-3\\-1&-3&5\end{pmatrix};\quad (2)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-3\end{pmatrix};\quad (3)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_1a_2&a_2^2&a_2a_3\\a_1a_3&a_2a_3&a_3^2\end{pmatrix}.$$

2． 用正交变换化下列二次型为标准形：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0,$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=-6$.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_1=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda=1$ 的特征向量.

由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_2=(1,5,2)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda=6$ 的特征向量.

由 $(-6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda=-6$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，特征值对应的不同特征向量已正交，故只须单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2.$$

(2) 二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2 = 0,$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=\lambda_4=1$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_2=3$ 的特征向量.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{x}_4=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，不同特征值对应的不同特征向量已正交，故只须单位化，令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

3．用配方法化下列二次型为标准形：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

解 （1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2,$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_2-\frac{2}{3}x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}，有 \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}，则有 f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2.$$

（2） 先作变换 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，得

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3,$$

再配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$，得 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$，二次型可变为 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$.

所作的非退化线性变换矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}，即 \boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}\,.$$

5. 设二次曲面 $x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz=1$，试利用正交变换将曲面方程化为标准方程，并指出方程的图形是怎样的曲面.

解　二次型对应的矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，由 A 的特征方程

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0\,,$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$.

由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 的特征向量.

由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{x}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，即属于 $\lambda_3=-4$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量正交，上面同一特征值对应的特征向量已经正交化，故只须单位化，令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&-\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix},$$

经正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&-\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$，二次型化为标准形

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz=5x'^2+5y'^2-4z'^2\,.$$

从而将二次曲面化为标准方程 $5x'^2+5y'^2-4z'^2=1$，方程的图形为单叶双曲面.

6. 试求出 $f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值.

解　利用第 5 题答案易知 $f=5x'^2+5y'^2-4z'^2\le5$，最大值为 5.

7. 判断下列命题是否正确：

(1) 两个 n 阶矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩；

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 与对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同，则 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵；

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则存在唯一的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$；

(4) 正交矩阵的特征值一定是实数；

(5) 正交矩阵的特征值只能为 1 或 -1 .

解　(1) 错误．若两矩阵合同，则它们有相同的秩，但反过来不对．若两矩阵具有相同的秩，不一定合同．例如：$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，两者具有相同的秩，但它们不合同.

(2) 正确．设 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}$ 对称.

(3)错误．在化二次型为标准形时，有多种不同的方式，其对应的逆矩阵自然就不同．

(4)错误．对称矩阵的特征值一定是实数，但正交矩阵的特征值不一定是实数，例如：$\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为虚数．

(5)错误．正交矩阵的特征值不一定是实数，更不一定只限于为 1 或 -1．