武汉大学 2017-2018 第一学期高等数 B1 期末试题 A 解答

1、（9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\dfrac{\pi}{6})}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x(\tan x+\sqrt{3})\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}$

$$=6\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}{\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)}=6\cdot\frac{(-1)}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=-24$$　9 分

2、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=\dfrac{-\csc^2\dfrac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}$　　9 分

3、（9 分）已知 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 t dt=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：方程两边关于 x 求导得 $e^{y^2}y'+\cos^2\sin x\cdot\cos x=0\Rightarrow y'=-\dfrac{\cos^2\sin x\cdot\cos x}{e^{y^2}}$　　9 分

4、（8 分）设 $a_n\neq 0$. 试用 $\varepsilon-N$ 语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$。

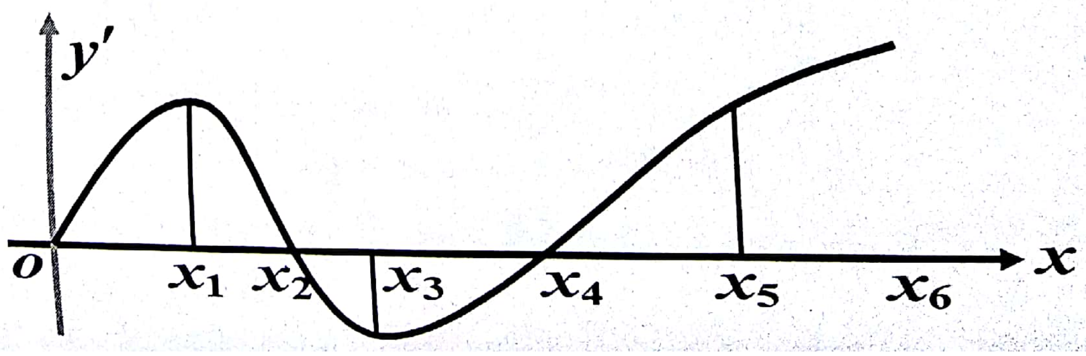
证明：$\Rightarrow$：由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，使得$\forall n>N$，有$|a_n|<\varepsilon$. 因此$\left|\dfrac{1}{a_n}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}=M$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$。

$\Leftarrow$：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$ 可知，$\forall M>0$，$\exists$正整数N，使得$\forall n>N$，有$\left|\dfrac{1}{a_n}\right|>M$. 因此 $|a_n|<\dfrac{1}{M}=\varepsilon$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

5、（9 分）设 $a>0$，求 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx$.

解：原式 $=\left[e^{-ax}\left(-\dfrac{1}{1+a^2}\cos x-\dfrac{a}{1+a^2}\sin x\right)\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{1+a^2}$　　9 分

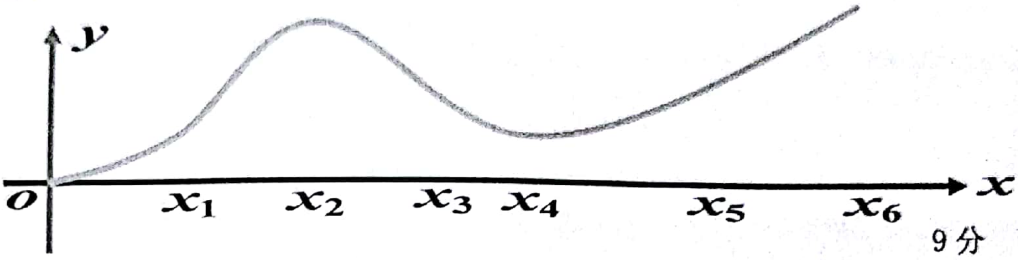
6、（9 分）根据以下导函数 $y'=f'(x)$ 的图像：



填写关于函数 $f(x)$ 的表格（其中 $f(0)=0$）：

单增区间	$(0,x_2),(x_4,x_6)$	上凸区间	(x_1,x_3)
单减区间	(x_2,x_4)	下凸区间	$(0,x_1),(x_3,x_6)$
极大值点	x_2	极小值点	x_4

画出函数 $y=f(x)$ 的图像：



9 分

7、（9 分）确定常数 a,b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(e^{2x}-1) & ，x<0 \\ a+\sin bx & ，x\geq 0\end{cases}$ 处处可导。

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，首先须在 $x=0$ 连续即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$

即 $a=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2e^{2x}}{1}=2$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，须 $f'_-(0)=f'_+(0)$

即 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}(e^{x}-1)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2}=2$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+\sin bx-2}{x}=b$

则 $a=b=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 可导，从而处处可导。 9 分

8、（9 分）求由 $\arctan x\leq y\leq x, 0\leq x\leq 1$ 所确定的区域的面积。

解：$s=\int_0^1(x-\arctan x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\arctan x\right)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ 9 分

9、(8 分) 设 $\int f(x)dx=x^2+C$，求 $\int xf(1-x^2)dx$.

解： 令 $F(x)=\int f(x)dx$，则 $\int xf(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\int f(1-x^2)dx^2=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)$

$=-\frac{1}{2}F(1-x^2)=x^2-\frac{1}{2}x^4+C$ 8 分

10、(1) (4 分) 求微分方程 $y'''-2y''+y'=0$ 的通解；

(2) (4 分) 写出微分方程 $y''+y=\sin x-\cos 2x$ 的特解实形式。

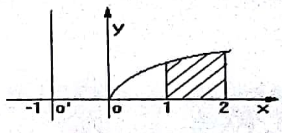
解：(1) 特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0$，因此特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，因此方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x$ 4 分

(2) 特征方程 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，所以非齐次方程的特解形式为

$y = x(A\cos x + B\sin x) + (C\cos 2x + D\sin 2x)$ 。 4 分

11、（8 分）求由曲线 $y=\sqrt{x}, x=1, x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕直线 $x=-1$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 建立新的坐标系，原点 o' 在原坐标的坐标点 $o'(-1,0)$，则由 $y=\sqrt{x'-1}, x'=2, x'=3$ 及 x 轴所围成的区域绕 $x'=0$ 旋转而成体积。



$$V_{x=-1} = 2\pi\int_2^3 xy\,dx = 2\pi\int_2^3 x\sqrt{x-1}\,dx \qquad 设 t=\sqrt{x-1}$$

$$= 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} 2t^2(t^2+1)dt = 4\pi\int_1^{\sqrt{2}}(t^4+t^2)dt$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}\pi(11\sqrt{2}-4).$$ 8 分

12、（5 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a\int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$（其中 $a>1$ 为定常数）。证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明： 令 $F(x)=e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$，则 $F'(x)=e^{1-x^2}\left[-2x\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)+f(x)\right]$

且由积分中值定理有 $F(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a\int_0^{\frac{1}{a}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$

$$= e^{1-y^2}\left(\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right) = F(y) \qquad y\in[0,\frac{1}{a}]$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(y,1)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)=2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ 5 分