

算法设计与分析

第四次作业参考答案

作业情况

教材：算法设计技巧与分析 [沙特]M. H. Alsuwaiyel
题目范围：动态规划、分治
邮箱：wjyyy1@126.com
提交日期：2023 年 5 月 4 日线下提交

习题 1

使用算法 QUICKSORT 对以下数组进行排序
(a)

24	33	24	45	12	12	24	12
----	----	----	----	----	----	----	----

(b)

3	4	5	6	7
---	---	---	---	---

答案

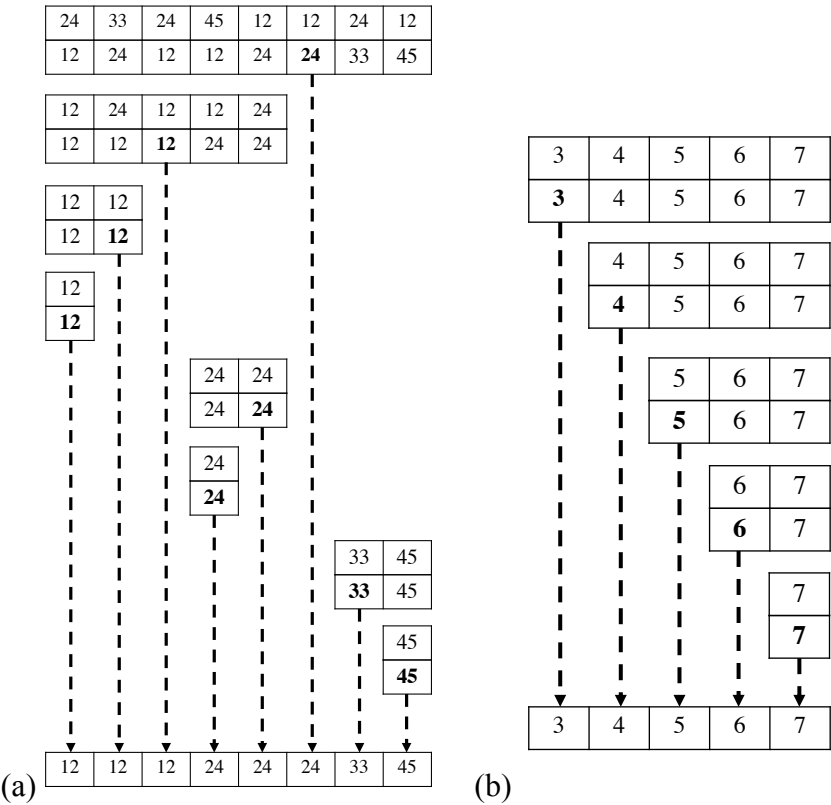
(a)

12	12	12	24	24	24	33	45
----	----	----	----	----	----	----	----

(b)

3	4	5	6	7
---	---	---	---	---

解析：（可参考书上图 6.5 在每一段中标上调用的次数）



习题 2

请设计三个有效算法来计算二项式系数 $\binom{n}{k}$ 。你的算法的时间复杂性是什么？哪些为指数复杂性算法？请解释。

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

提示：根据 Stirling 公式，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

答案

1. 阶乘直接计算： $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

单次查询，复杂度 $O(n)$ 。

2. 使用杨辉三角： $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

若预处理 C 数组，反复查询，复杂度 $O(n^2)$ 。

单次查询使用递归，到 C_x^0 或 C_0^y 才停止，复杂度 $O(2^n)$ ，为指数。

3. 斯特林公式： $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}}$

单次查询，使用快速幂的复杂度为 $O(\log n)$ 。

4. 搜索：枚举 $0 \sim 2^n - 1$ 所有数字，统计 1 出现次数为 k 的有多少次，这个次数就是二项式系数 $\binom{n}{k}$ 。

单次查询，复杂度 $O(2^n)$ ，为指数。

习题 3

现有 n 位 ($n = 2^k$, k 为正整数) 运动员要进行网球循环赛, 要设计一个满足以下要求的比赛日程表: 每个选手必须与其他选手各赛一次; 每个选手一天只能赛一次; 循环赛一共进行 $n - 1$ 天。可将比赛日程表设计成 n 行 n 列的表, 最左边一列表示队号, 在表中第 i 行和第 $j + 1$ 列处填入第 i 个选手在第 j 天所遇到的对手。例如人数为 2 人, 比赛日程表为

1	2
2	1

试回答如下问题:

- (1) 写出 $n = 4$ 比赛的参赛表格, 并据此描述出分治法思想 (有伪代码更好);
- (2) 当 $n = 8$ 时, 以表的形式, 给出合理的比赛日程。

答案

(1) 当 $n = 4$ 时, 人数为 4 人, $k = 2$, 循环表为

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

(1) 当 $n = 8$ 时, 人数为 8 人, $k = 3$, 循环表为

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

解析: 按分治策略, 我们可以将所有的选手分为两半, 则 n 个选手的比赛日程表可以通过 $n/2$ 个选手的比赛日程表来决定。递归地用这种一分为二的策略对选手进行划分, 直到只剩下两个选手时, 比赛日程表的制定就变得很简单。这时只要让这两个选手进行比赛就可以了。以此类推, 我们不难发现, 我们可以用分治的方法实现, 自顶向下分解, 直到分解到最简单的情况, 即人数为 2 人, 这时就可以两两比赛, 表的填充为对角填充的方式, 然后再自底向上递归地填充表格。

详见算法1。

Algorithm 1: Divide

Input: 运动员人数 n **Output:** n 人比赛合理的比赛日程 r

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2   for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
3      $r[i, j] = 0$ ;
4   end
5 end
6  $r \leftarrow \text{Div}(n)$ 

7 Function  $\text{Div}(n)$ :
8   if  $n = 1$  then
9      $r[1, 1] \leftarrow 1$ ;
10    return  $r$ ;
11  end
12  // 左上
13   $r \leftarrow \text{Div}(n/2)$ ;
14  // 左下
15  for  $i \leftarrow n/2 + 1$  to  $n$  do
16    for  $j \leftarrow 1$  to  $n/2$  do
17       $r[i, j] = r[i - n/2, j] + n/2$ ;
18    end
19  end
20  // 右上
21  for  $i \leftarrow 1$  to  $n/2$  do
22    for  $j \leftarrow n/2 + 1$  to  $n$  do
23       $r[i, j] = r[i, j - n/2] + n/2$ ;
24    end
25  end
26  // 右下
27  for  $i \leftarrow n/2 + 1$  to  $n$  do
28    for  $j \leftarrow n/2 + 1$  to  $n$  do
29       $r[i, j] = r[i - n/2, j - n/2] + n/2$ ;
30    end
31  end
32  return  $r$ ;

```

习题 4

Dijkstra 算法选择下一个节点的标准是什么？对于有负边的无向图，Dijkstra 算法还能保证获得最优解吗？为什么。

答案

Dijkstra 算法的选择标准是在与已处理的集合 T 邻接的顶点集合 w 中, 选择从源点 S 到 w 路径最短的顶点。

Dijkstra 本质上是一个贪心算法，如果一个顶点是未更新的所有节点中离源点最近的，那么就不会有人能再更新它。因此它的正确性得以保证。但当图有负权边时，有可能有其他现存距离更大的顶点通过负边仍能更新这个节点，所以不能保证获得最优解。

总结

日期：2023 年 5 月 4 日

批改人：王骏骁

邮箱：wjyyy1@126.com

习题 1：注意写过程，正常 QUICKSORT 不检查顺序，直到只剩一个元素。

习题 2：对复杂度的分析要注意，递归和搜索做法是指数级别，其他做法都可以在多项式时间内完成。

习题 3：最好写出过程的代码，用自然语言表述时要完备细节。部分同学使用取模时要注意下标。注意左下角块的赋值。

习题 4：基本都做对了。