

武汉大学计算机学院

2019-2020 学年度第二学期期末考试

《组合数学》试卷 (A 卷)

1. (15 分, 每小题 5 分) (1) 7 颗有标志的红球, 7 颗有标志的蓝球, 排成一个红蓝相间的队列, 问有多少种方案? 若这些球围成一个圆周又有多少种方案?

(2) 求 $(x-y-2z+w)^8$ 展开式中 $x^2y^2z^2w^2$ 项的系数。

(3) 在一场足球比赛中, 甲队以 9:6 战胜乙队, 若在整个比赛过程中甲队的得分一直不少于乙队的得分, 求有多少种可能的比分记录?

2. (20 分, 每小题 10 分)

(1) 有红、黄、蓝三色的球各 8 个, 从中取出 9 个, 要求每种颜色的球至少一个, 问有多少种不同的取法?

(2) 用 a、b、c、d 四个字母组成长为 n 的字符串, 在字符串中要求 a 出现偶数次, 要求 b 出现奇数次, 要求 c 至少出现两次。求满足以上要求的长为 n 的字符串有多少个?

3. (15 分) 解下列递推关系。

$$\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3^n(n+1) \\ a_0 = 1, a_1 = 6 \end{cases}$$

4. (10 分) 求方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$,

满足 $1 \leq x_i \leq 8$ ($1 \leq i \leq 4$) 的整数解的个数。

5. (15 分) (1) 任取 5 个整数, 试求其中必存在 3 个数, 其和能被 3 整除。

(2) 在 7 周的暑假期间, 某同学每天至少上网 1 小时, 但每周最多上网 11 小时。若每天上网时间为整数小时, 证明存在若干连续天, 在此期间内该同学恰好上网 20 个小时。

6. (10 分) 用红、黄和蓝色三种颜色对一个正六面体的八个顶点进行染色,

(1) 问有多少种不同的染色方案?

(2) 若其中有 2 个顶点染红色, 2 个顶点染黄色, 其余 4 个顶点染蓝色, 问有多少种不同的染色方案? 其中正六面体的 8 个顶点的置换群 Q 的循环指标为

$$P_Q(x_1, x_2, \dots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)。$$

7. (10 分) 证明: 从集合 A 到集合 B 的所有满射函数的个数为

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n, \text{ 其中 } |A|=n, |B|=m。$$

8. (5 分) 证明: 设 n 为大于或等于 2 的整数, 则

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \times n\binom{n}{n} = 0$$