练习 5．2

3．判断下列矩阵可否对角化：

$$(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}\qquad(2)\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\qquad(3)\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

解 先求特征值，再求特征向量，若有 3 个线性无关的特征向量，则可对角化．

(1) $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\6&11&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$，

故有 3 个特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，可以对角化．

$\lambda_1=-1$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$．

$\lambda_2=-2$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(1,-2,4)^{\mathrm{T}}$．

$\lambda_3=-3$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1,-3,9)^{\mathrm{T}}$．

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{pmatrix}$，则可对角化为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&-3\end{pmatrix}$．

(2) $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$，可以对角化．

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系：$\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$．

$\lambda_3=-2$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系：$\boldsymbol{p}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$．

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则可对角化为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$．

(3) $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，

故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$．

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系：$\boldsymbol{p}_1=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，只有 1 个线性无关的解向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化．

4．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&b\end{pmatrix}$ 相似，求 a,b 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$．

解 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b,\\ 6(a-1)=\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{B}\right|=4b,\end{cases}$$

解得 $a=5$，$b=6$．由题设条件 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}$，由相似矩阵的性质，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$．

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，由 $\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的线性无关的特征向量；

当 $\lambda_3=6$，由 $\left(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\div(-2)]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\5&1&-1\\3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_3-r_2}]{r_2-5r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&6&4\\0&0&0\end{pmatrix},$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=6$ 的特征向量．

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$．

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$．

解 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量．因

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$．

对 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，解 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_3=5$，解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$．

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^k&&\\&(-1)^k&\\&&5^k\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^k+2(-1)^k&5^k-(-1)^k&5^k-(-1)^k\\5^k-(-1)^k&5^k+2(-1)^k&5^k-(-1)^k\\5^k-(-1)^k&5^k-(-1)^k&5^k+2(-1)^k\end{pmatrix}.$$

7. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值仅为 0 和 1，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，从而可以对角化．设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 r 个 1，$n-r$ 个 0，$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{r},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r})$，则 $\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{\Lambda}$，且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，故

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值为零或纯虚数.

证 依题设有 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$．设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 λ 对应的特征向量，即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，从而 $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda\boldsymbol{x}}$，即 $\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$，取转置，有 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$，即 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$，从而 $-\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$，得 $-\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，代入 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，得 $-\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，从而 $(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$．因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，得 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$，故 $\lambda+\overline{\lambda}=0$，得 λ 为零或纯虚数.

9. 设 m 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 均可对角化，证明：$m+n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 也可对角化.

证 依题设，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_m$，$\boldsymbol{Q}_n$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$，$\boldsymbol{\Lambda}_n$，使得

$$\boldsymbol{P}_m^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_m=\boldsymbol{\Lambda}_m,\quad Q_n^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{\Lambda}_n,$$

故

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_m^{-1}&\boldsymbol{O}\\O&\boldsymbol{Q}_n^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&Q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\Lambda}_n\end{pmatrix},$$

且 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_m^{-1}&\boldsymbol{O}\\O&\boldsymbol{Q}_n^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&Q_n\end{pmatrix}^{-1}$，故 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 也可对角化.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，且存在正整数 m，使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为其对应的特征向量，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，从而 λ^m 为 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为其对应的特征向量，即 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}=\lambda^m\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda^m=0$，故 $\lambda=0$．此时，因 $R(\boldsymbol{A})\geq 1$，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 至多有 $n-1$ 个线性无关的解向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不存在 n 个线性无关的解向量，不可对角化.

11. 判断下列命题是否正确：

(1) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则对任意的实数 t，有 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则它们一定相似于同一对角矩阵；

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定不能相似于对角矩阵.

解 (1) 正确．若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，从而对任意的实数 t，有 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{t}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$，故 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.

(2) 错误．任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定相似于它自身，但 $\boldsymbol{A}$ 不一定相似于对角矩阵，只有当 $\boldsymbol{A}$ 存在 n 个线性无关

的特征向量时才相似于对角矩阵.

(3) 正确. 由 $R(\boldsymbol{A})=3$ 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅有 1 个解向量，即 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 仅有 1 个线性无关的特征向量，从而 $\boldsymbol{A}$ 不存在 4 个线性无关的特征向量， $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.