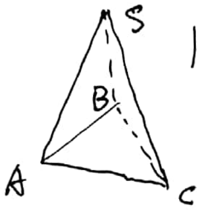
1. 空间四面体 S_ABC,其四个顶点的坐标为 $S(0,0,5),A(2,-1,0),B(2,3,0),C(-1,-2,1)$,解决如下问题 （1）求其体积，（2）求顶点 S 到底面 ABC 的距离，（3）求过顶点 S 垂直于底面 ABC 的直线 L 方程，（4）直线 L 与底面 ABC 的交点坐标。



底面ABC方程组π_1：法线 $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$，利用点法式方程即得

底面积 $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}|\vec{n}|$

S到底面ABC的距离 d 即为点 S 到平面 π_1 的距离.

L的方程（过点S，且以 $\vec{n}$ 为方向向量）用点向式方程

易求直线 L 与平面 π_1 的交点坐标。

2. 经过 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴的平面方程

法① 平行于 x 轴的方程（平面）为 π_1： $By+Cz+D=0$

将两点代入，即得.

法② 设方程 $Ax+By+Cz+D=0$

且 $\vec{n}=(A,B,C)$ ， $\vec{n}\perp(1,0,0)$ ，且将两点代入方程

联合即可求出。

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,则在点（0，0）处（ C ）

（A）连续且偏导数存在； ×（B）连续但偏导数不存在；

（C）不连续但偏导数存在； （D）不连续且偏导数不存在。

取 $\lim\limits_{\substack{x=y^2k\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ （与 k 有关）

故极限不存在，

（故不连续 B× A×）

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$

$f'_y(0,0)=0$ （D×）

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{-xy}{(3+\sqrt{9+xy})xy}=-\dfrac{1}{6}$

5. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\sin y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1(xy,\frac{x}{y})\cdot y+f'_2(xy,\frac{x}{y})\cdot\dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f''_{11}(xy,\frac{x}{y})\cdot x+f''_{12}(xy,\frac{x}{y})\cdot(-\frac{x}{y^2})]y+f'_1(xy,\frac{x}{y})+[f''_{21}\cdot x+f''_{22}\cdot(-\frac{x}{y^2})]\cdot\dfrac{1}{y}$

$+f'_2\cdot(-\frac{1}{y^2})$

6. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ ，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

法① 两边微分 $2\cos(x+2y-3z)(dx+2dy-3dz)=dx+2dy-3dz$

求出 $dz=\square dx+▨ dy$，则 $\square$ 为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，▨ 为 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

法② 两边对x求偏导：$2\cos(x+2y-3z)\cdot(1-3\frac{\partial z}{\partial x})=1-3\frac{\partial z}{\partial x}$ 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$，同理求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 已知隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

方法同题⑥，两种方法.

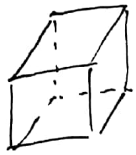
8. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值 .

设截线上一点 (x, y, z)，则问题转为：$\begin{cases} \min \ x^2+y^2+z^2 \\ \text{s.t.} \ z=x^2+y^2 \\ \quad\ \ x+y+z-1=0 \end{cases}$ 或最大.

其求解可用拉格朗日乘子法

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases}$

9. 求表面积为 a^2 而体积最大的长方体体积　　求驻点.



设长为 x, y, z

$\begin{cases} \max \ xyz \\ \text{s.t.} \ 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}$

L乘子法

$L(x,y,z,\lambda) = xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$

10. 设 $u=\int_{xz}^{yz} e^{t^2} dt$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$　　解法同上.

$u=\int_{xz}^{yz} e^{t^2} dt$ 变上下限求导

$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{(yz)^2}\cdot y - e^{(xz)^2}\cdot(-x)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{(xz)^2}\cdot(-z)$，$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{(yz)^2}\cdot z$，

此处用公式：$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f[\psi(x)]\cdot\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

变限求导（上学期内容）

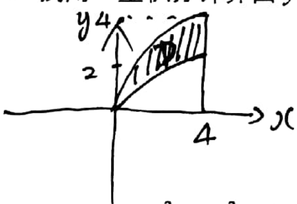
11. 求由曲面 $z=2x^2+2y^2$ 及 $z=6-4x^2-4y^2$ 所围成的立体体积

$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D [(6-4x^2-4y^2)-(2x^2+2y^2)]\,dxdy$

其中 D：$2x^2+2y^2=6-4x^2-4y^2$　即 D：$x^2+y^2 \le 1$.

即 $x^2+y^2=1$

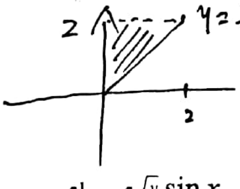
12. 试用二重积分计算由 $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ 和 $x=4$ 所围图形的面积



所围面积 $D=\iint_D dxdy = \int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy.$

$= \int_0^4 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx$

13. 计算 $I=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2} dy$

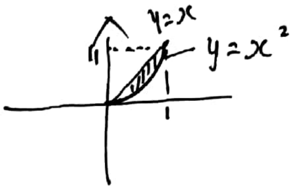


直接积分困难（$\int e^{-y^2}dy$ 求不出原函数）

故交换积分次序 $I=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 y e^{-y^2} dy$

$= -\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2} d(-y^2)$

14. 计算 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$

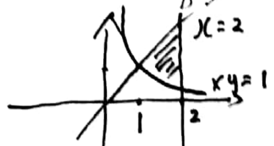


同题(13)

交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$

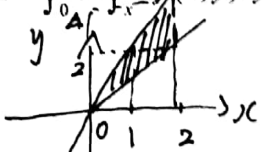
$= \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx.$

15. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 由直线 $x=2$，$y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围成的区域



$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$，直接积分即可

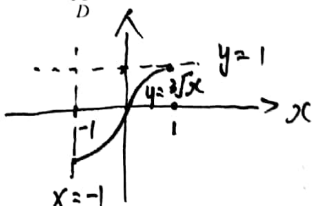
16. 设 $I=\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$，交换积分次序后



$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx$

$+ \int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$.

17. 计算 $\iint\limits_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}\,dxdy$，其中 D 是由 $y=\sqrt[3]{x}$，$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的区域

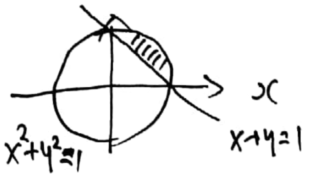


原式 $=\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+x^2-y^6}\,y^5dy$

$=\frac{1}{6}\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+x^2-y^6}\,dy^6 = -\frac{1}{6}\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \sqrt{1+x^2-y^6}\,d(1+x^2-y^6)$

易积分.

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\}$



易知，在极坐标系下易积分

原式 $\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}\frac{r(\cos\theta-\sin\theta)}{r^2}\cdot r\,dr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\left[1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right]d\theta$

19. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 发散，求 p 的取值

若 $p>1$，则 $\sum\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\sum\frac{1}{n^p}$，$p>1$（P级数）收敛

$p=1$，则 $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 交错，易知收敛

$0<p<1$，则 $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 交错，易知收敛

$p\le 0$ 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ne 0$，发散

故 $p\le 0$

20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$ $(\alpha>0)$ 是（　　）

(A) 发散;　(B) 条件收敛;　(C) 绝对收敛;　(D) 敛散性与 α 有关

$\sum\left|(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})\right| = \sum(1-\cos\frac{\alpha}{n}) = \sum 2\sin^2\frac{\alpha}{n}$（正项），$2\sin^2\frac{2\alpha}{n}\sim 2\cdot\frac{\alpha^2}{n^2}$

$\sum\frac{1}{n^2}$ 收　故 (C)

21. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

$\sum\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right| = \sum\ln(1+\frac{1}{n})$　$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n} \Rightarrow \sum\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散

而 $\sum(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$，$\ln(1+\frac{1}{n})\to 0$ 且 ↓，交错级数，L-判别法

此级数收敛，综上条件收敛

22. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^4}$

$\left|\frac{\sin na}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$，$\sum \frac{1}{n^4}$ 收 故 $\sum \frac{\sin na}{n^4}$ 绝对收敛

23. 下列级数收敛的是 （ A， ）

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2+1}$ C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ D．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

$\frac{1}{(n+1)(n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$，$\frac{1+n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ $\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

24. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n+1}}{2n+1}$的收敛区间

收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n+3}{1} = 1$，故当 $-1<x-2<1$ 时级数收敛 $1<x<3$ 收敛区间

25. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$的收敛域及和函数

收敛半径 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)}{3^n\cdot n} = 3$． 故 $-3 \le x < 3$ 为收敛域

当 $x=3$，$\sum\frac{1}{n}$ 发，当 $x=-3$，$\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ 收 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}$ 易求

26. 将函数 $f(x)=e^{3x}$展成关于$x-3$ 的幂级数

令 $t=x-3$，$x=3+t$

$f(x)=e^{3x}=e^{3(3+t)}=e^9\cdot e^{3t}=e^9\left(1+\frac{1}{1!}3t+\frac{1}{2!}(3t)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(3t)^n+\cdots\right)$

将 $t=x-3$ 代入即可

27. 将函数$f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$展开成x的幂级数

法① $f(x)=\ln(1+x)(1+x^2)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$

利用 $\ln(1+x)$ 展开式，即可

法② $f'(x)=\frac{1+2x+3x^2}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1+2x+3x^2}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Dx+B}{1+x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{D}{1+x^2}\cdot x+\frac{B}{1+x^2}$

分别展开即可．

28. 将函数$\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$展开成x的幂级数，并求其成立的区间

利用有理分式的部分因式分解

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\underline{\frac{1}{1-x}}-\frac{1}{2}\cdot\underline{\frac{1}{1-\frac{x}{2}}}$$

分别展开(间接方法)

29. 求解微分方程$\begin{cases}(1-y^2)dx+2dy=0\\ y(0)=0\end{cases}$

$(1-y^2)dx+2dy=0$ 分离变量法，即可求

$$\frac{2}{y^2-1}dy=dx$$

30. 求解方程$\dfrac{dy}{dx}+3xy=y^2$

伯努利方程 $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+3xy^{-1}=1$ 令$y^{-1}=u$

$-\dfrac{dy^{-1}}{dx}+3xy^{-1}=1$ 即为线性方程，易求

31. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

齐次方程，令$\dfrac{y}{x}=u$.

32. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^3}$

法① $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y^3}{y}$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}\cdot x+y^2$ 一阶线性非齐次方程 可解

法2：两边同乘以y^2，$\dfrac{y^2dy}{dx}=\dfrac{y^3}{x+y^3}$，$\dfrac{1}{3}\dfrac{dy^3}{dx}=\dfrac{y^3}{x+y^3}$，令$u=y^3$

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3u}{x+u}$ 齐次方程，易解

33. (2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2y-1}{x+y-2}=-\frac{2(x+y)-1}{x+y-2}，令 x+y=u$$

$\dfrac{du}{dx}-1=-\dfrac{2u-1}{u-2}$ (变量分离方程，易解)

34. 求微分方程 $y''-6y'+9y=x^2-6x+9$ 的通解

法① $\lambda^2-6\lambda+9=0$ ，$(\lambda-3)^2=0$ ，$\lambda_{1,2}=3$

齐次方程通解 $\bar{y}(x)=C_1e^{3x}+C_2x\cdot e^{3x}$

非齐次方程特解. $y^*(x)=ax^2+bx+c$ ，待定系数法

可得.　　　　法② 亦可用常数变易法

35. 求微分方程 $y''-9y=2\cos^2 x$ 的通解

$y''-9y=2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=1+\cos 2x.$

法①

$y''-9y=0$ 齐次通解易求 $\bar{y}(x)$

$\lambda^2-9=0$　$\lambda=\pm 3$

$y''-9y=1+\cos 2x.$

可分为：$y''-9y=1$　可求 $y_1^*(x)$（特解）

$y''-9y=\cos 2x$，可求 $y_2^*(x)$（特解）.

综上可得通解 $y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+y_1^*(x)+y_2^*(x)$.

法② 在求特解时，可用常数变易法求

$y^*(x)=C_1(x)e^{3x}+C_2(x)e^{-3x}$

则 $\begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos^2 x \end{pmatrix}$

求出 $C_1(x)$，$C_2(x)$ 即可