常微分方程

主要内容
（前序课程：高数、线性代数）

① 初等积分法【初等解法】

② 基本定理【解的存在与唯一性等】

③ 一阶线性微分方程组【概念-理论-解法】

④ n阶线性微分方程【概念-理论-解法】

理论求解

关于《常微分方程》的复习

课程内容

– 理论

- 佩亚诺（Peano）存在性定理、皮卡（Picard）存在性定理
- 比较定理、延拓（延展）定理，解的存在区间
- 线性齐次方程【解空间、基本解组】和线性非齐次微分方程解
- 一阶微分方程
- 一阶微分方程组【线性、非线性】
- 高阶方程【线性、非线性】

一 求解方法

- 初等积分法【变量分离、可以化为变量分离的方程、线性、贝努利方程、全微分方程、【积分因子】，隐式方程（参数法、微分法）】
- 一阶线性（常系数）微分方程组的求解【特征方程-特征根-特征向量】
- 高阶线性（常系数）微分方程的求解【特征方程-特征根】；
- 非齐次方程（组）求解：常数变异法、待定系数法
- 部分变系数微分方程（组）求解：变换、幂级数解法

– 技巧

- **初等变（代）换**（非线性—>线性；高阶方程—>低阶方程（降阶解法）；变系数—>常系数（欧拉方程）；贝努利方程）
- 非齐次线性方程特解：常数变异法，待定系数法，叠加原理
- 存在区间（利用解的存在唯一性定理、比较定理、延拓定理、具体求解）
- 全书内容：相互关联（特殊 $\Longleftrightarrow$ 一般）
- 善于观察（特解、变换等等）

– 涉及概念

- 积分因子、初值问题、解的存在唯一性、延拓（延展）、奇解、通解、特解（通解结构）、基本解组、解矩阵
- 基于问题驱动的建模（微分方程模型）

一 特殊类型微分方程

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ ： 变量分离方程

$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ ： 右端齐次方程

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ ： 线性方程

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n (n \neq 0,1)$ ： 伯努利（Bernoulli）方程

$y = xy' + f(y'), f''(x) \neq 0$ ： 克莱罗（Clairaut）方程

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:全微分方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), p(x) \neq 0$$

黎卡提（Riccati）方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

高阶常系数方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

欧拉（Euler）方程

(代换：$x = e^t \Rightarrow$ 高阶常系数方程）

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(\mathrm{x})$$ 常系数线性微分方程组

$$x\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x)$$ A为常系数矩阵

（代换：$x = e^t \Rightarrow \frac{dY}{dt} = A \cdot Y + F(e^t)$）

谢谢！