

一、(5 分) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$,

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必等于 0, 为什么?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = A \cdot 0 = 0$

二、(8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x}, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ 且 } x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 试确定常数 a, b, c 的一组值, 使

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

解: 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 须 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} = 1$$

又 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^2 x \rightarrow 0$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} (ae^x + be^{-x} - c) = 0$$

$$\text{即 } a + b - c = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - be^{-x}}{2x} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} (ae^x - be^{-x}) = 0, \text{ 即 } a - b = 0 \quad (2)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x}}{2} = \frac{a + b}{2} = 1$$

$$\text{即 } a + b = 2 \quad (3)$$

解(1)(2)(3) $a = b = 1, c = 2$ 即 $a = b = 1, c = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

三、(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) \right]$

$$\text{解 设 } u_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \cdot \sin x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

四、(5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2}$

解 解原式 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x^2}{\pi} \cdot \frac{2x}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} \ln 2 \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}}} = \frac{2}{\ln 2}$

五、(5分) 设 u, v 均是 x 的可微函数 $y(x) = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$, 求 dy

解 $dy = y'(x)dx = \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{u^2 + v^2} dx$

六、(5分) 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

解 由 $I'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\ln x}{(1-x)^2} > 0, x \in [e, e^2]$

知 $I'(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调增加

故 $\max_{e \leq x \leq e^2} I(x) = \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = - \int_e^{e^2} \ln t d\left(\frac{1}{t-1}\right)$

$$= - \frac{\ln t}{t-1} \Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)t} dt = \frac{1}{e-1} - \frac{2}{e^2-1} + \ln \frac{t-1}{t} \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{e+1} + \ln \frac{e+1}{e}$$

$$= \ln(1+e) - \frac{e}{1+e}$$

七、(5分) 求 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$

$$\text{原式} = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}$$

八、(5分) 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]$ (其中 $a > 0$)

$$\text{解 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 (1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})}{6} = \frac{a^2}{3}$$

九、(5分) 若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)| \leq \alpha(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 试证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

证: 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} [-\alpha(x)] = 0$ 又因 $-\alpha(x) \leq f(x) \leq \alpha(x)$

从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

十、(5分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = f[2x + \varphi(y)]$ 所确定, 其中 f 与 φ 都是可导函数, 求 y' .

$$\text{解 } y' = f'[2x + \varphi(y)] \cdot [2 + \varphi'(y)y'] \quad y' = \frac{2f'[2x + \varphi(y)]}{1 - f'[2x + \varphi(y)] \cdot \varphi'(y)}$$

十一、(8分) 求函数 $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值

解 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 连续

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0)$$

驻点 $x_1 = \frac{2}{5}$, 导数不存在点 $x_2 = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
y'	+	x	-	0	+
y	↑		↓		↑

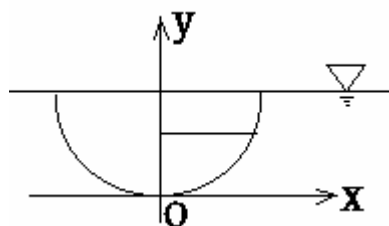
故函数有极大值 $y(0) = 0$, 极小值 $y(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$

十二、(8分) 求由不等式 $\sin^3 x \leq y \leq \cos^3 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 所确定的区域的面积。

$$\text{解: } S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \sin^3 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x) d \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 x) d \cos x$$

$$= \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}$$

十三、(8分) 有一抛物线弓形板, 其底边为 L 米, 顶点到底边距离为 H 米, 将此板竖直浸入水中, 使底边与水面相重合, 求板所受压力。



解 设坐标如图.设抛物线方程为 $y=kx^2$, 因过 $(\pm\frac{L}{2}, H)$ 点,

$$\text{故 } k = \frac{4H}{L^2} \quad \text{即 } y = \frac{4H}{L^2}x, \text{ 或 } x = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{y}{H}}$$

$$F = 2 \int_0^H (H-y) \cdot \frac{L}{2} \sqrt{\frac{y}{H}} dy = \frac{4}{15} LH^2 (\text{吨重}) = 1000g \cdot \frac{4}{15} LH^2 (\text{牛顿})$$

十四、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, 对任意 $x \in (0,1)$ 有

$$f(x) \neq 0, \quad \text{证明存在 } c \in (0,1) \text{ 使 } \frac{nf'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

证明: 令 $F(x) = f^n(x)f(1-x)$, (n 为自然数)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 因 $f(0)=0$, 则 $F(0)=F(1)=0$

即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件

则至少存在 $c \in (0,1)$ 使 $F'(c)=0$

$$\text{而 } F'(x) = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x) \cdot f(1-x)$$

$$- f^n(x)f'(1-x)$$

且因对任意 $x \in (0,1)$ 有 $f(x) \neq 0$

$$\text{则由 } nf^{n-1}(c) \cdot f'(c) \cdot f(1-x) - f^n(c)f'(1-c) = 0$$

$$\text{得到 } \frac{nf'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad (c \in (0,1))$$

十五、(8分) 设 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有二阶导数且, $y_0=f(0)>0$, $y_1=f'(0)<0$, $f''(x)<0$

试证明在 $(0,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 有唯一实根。

证明 因 $f'(0)<0$, $f''(x)<0$ 故 $f'(x)$ 单调减, 当 $x>0$

$$f'(x) < f'(0) < 0 \quad f(x) \text{ 在 } [0,+\infty) \text{ 上单调减}$$

从而 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 至多有一个实根

$$\text{另作 } f(x)-y_0-f'(0)x = F(x) \quad F'(x) = f'(x)-f'(0) < 0$$

$$F(x) \text{ 单调减: } F(x) < F(0) = 0 \quad \text{取 } b = -\frac{y_0}{f'(0)} \quad \text{即 } y_0 + bf'(0) = 0$$

$$\text{则 } F(b) = f(b) < 0 \quad \text{而 } f(0) > 0$$

$f(x)=0$ 在 $(0,b)$ 至少有一实根 综上所述 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根

十六、(7分)

设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调增加连续函数, 证明对任何 $b > a > 0$ 成立不等式

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx \right].$$

证明 设 $F(x) = x \int_0^x f(t)dt$, $x \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx &= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx \\ &= \int_a^b \left[\int_0^x f(t)dt + xf(x) \right] dx \leq \int_a^b \left[\int_0^x f(x)dt + xf(x) \right] dx \\ &= \int_a^b [xf(x) + xf(x)]dx = 2 \int_a^b xf(x)dx \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx \right]$$