武汉大学 2018—2019 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院________专业___班 学号________姓名____分数___

一、（本题 10 分）计算下列各题

1、若函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，其中 $z=x+iy$，计算 $\mathrm{Re}[f(z)]$，$|f(z)|$ 和 $\arg f(z)$。

2、计算 2^{-i} 的值。

二、（本题 10 分） 1、设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，若使 $au(x,y)+bv(x,y)$ 为解析函数 $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ 的实部，求 $F(z)$。

2、函数 $f(z)=xy^2+x^2yi$ 的可导性和解析性，若可导，计算可导点的导数。

三、（本题 10 分）设 $H(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ 为阶跃函数。

1、计算函数 $e^{-\beta t}\sin tH(t)$ 的 Fourier 变换。

2、分别计算函数 $e^{-\beta t}H(t)$ 和 $\sin t$ 的 Fourier 变换，再利用卷积定理

$$\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

计算函数 $e^{-\beta t}\sin tH(t)$ 的 Fourier 变换。

四、（本题 10 分）已知函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$

1、指出函数的奇点和类型（含 ∞ 点）；

2、试计算函数 $f(z)$，$\dfrac{f(z)}{z}$ 在 $z=0$ 的留数；

3、设 $f(z)$ 在 $z=0$ 的罗兰级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，写出：

1）展开区域；2）$c_n \quad (n=-\infty,\cdots,0,1)$。

五、（本题 15 分）1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^n$ 的收敛半径，并写出在收敛圆内的和函数。

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在下列圆环域内展开成 Laurent 级数

(1) $0<|z-1|<1$, (2) $1<|z|<\infty$

六、（本题 15 分）计算下列积分

1、$\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{(e^z-1)^2(z-1)}dz$，其中 C 为 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 和 $|z-1|=1/2$ 正向圆周。

2、$\int_C (\dfrac{\bar{z}}{|z|}+\cos z)dz$，其中 C 为 $|z|=1$ 的上半圆周，从 $-i$ 到 i。

七、（本题 15 分）设 $f(x,t)=\dfrac{\cos tx}{1+x^2}$ $t>0$，

（1）计算积分 $\int_0^\infty f(x,t)dx$

（2）求 $f(x,t)$ 关于变量 t 的拉普拉斯变换 $F(x,p)=\mathscr{L}[f(x,t)]$。

八、（本题 15 分）利用 Laplace 变换求解下列微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+2ay'(t)+a^2y(t)=f(t) \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}$$

其中 $a>0$ 为常数。

1）利用 Laplace 变化求解此方程，根据卷积定理，将方程的解用积分形式表示。

2）当 $f(t)=\delta(t-t_0)$ 和 $f(t)=1$ 时，求方程的解（可以不利用积分形式求解，直接代入微分方程计算）。