线代部分总结

（欢迎关注孤尘 Redrain 微信公众号发现有趣的灵魂）

1、行列式（求解用到行列式的）性质：

①行列式的行与列互换，其值不变（即说明行列地位一致）

②行列式对任一行按下式展开，其值相等（余子式恒正，代数余子式有正负）

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.12}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

M_{ij} 是 D 中去掉第 i 行第 j 列全部元素后按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，它称为 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

③

注意（i）式：行列式提出一行元素的公因子，而矩阵是提出所有元素的公因子

④行列式中某两行元素成比例（包括相等）或某一行全为零，则行列式的值为零

⑤对行列式作倍加行变换，其值不变（所以求解行列式过程中用等号，而矩阵的初等行变化则是用的箭头）

⑥行列式两行对换，行列式的值反号（而矩阵的初等行变换并不影响）

⑦行列式某一行元素乘以另一行的代数余子式之和为零（乘以自己的代数余子式之和即行列式的值）

2、范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j),$$

注意，连乘的括号中，是**下标大的－下标小的，**因而连乘共计 **n(n-1)/2** 项

$$\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots$$

$$(x_n - x_2)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leqslant j < i \leqslant n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积．

【范德蒙行列式如果缺一行或一列的话通常采用补一行和一列的方法进行处理；行列式题型有爪形行列式，上（下）三角形行列式，三对角行列式等，求法有升阶法，通项递推法，拉普拉斯定理等等建议大家自行查阅，我这里就没有总结了】

矩阵的行与列数目可以不同（行列式则必须一致），但矩阵的行与列数目（n×n）一样时称之为 **n 阶矩阵**（也称 **n 阶方阵**）。注意：（反）对称矩阵、矩阵的可逆性、特征值问题都只针对方阵而言

高斯消元法： 用初等行变换化简增广矩阵，从而解出线性方程组

系数矩阵： 线性方程组所有系数组成的矩阵，记为 **A**

增广矩阵： 线性方程组所有系数和等号右边的数组成的矩阵，记为（**A，b**）

对角矩阵： 非主对角元皆为零的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵，记作**Λ**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

也记作 diag（a_1，a_2，$\cdots a_n$）

单位矩阵： 主对角元全为 1，其余元素均为零的 n 阶矩阵，记作 $\mathbf{I}_n$，**I** 或 **E**

数量矩阵： 主对角元全为非零数 k，其余元素均为零的 n 阶矩阵，记作 k$\mathbf{I}_n$，k**I** 或 k**E** （注意：考题中常用 **E**，教材中常用 **I**）

奇异矩阵： 矩阵 A 的行列式的值为 0，记为 **det|A|=0**

注意： **|kA|=k^n|A|**（k 是常数，即要分清行列式性质③ 中的注意点）

矩阵乘法：

数乘：1**A**=**A**　　（kl）**A**=k（l**A**）　　（k+l）**A**=k**A**+l**A**　　k（**A**+**B**）=k**A**+k**B**

矩阵相乘：**A** 为 m×n 矩阵，**B** 为 n×s 矩阵，则 **AB** 为 m×s 矩阵（**A** 的列数要等于 **B** 的行数，否则不可乘。相乘之后得到的矩阵去掉相等的数 n，即 m×s 矩阵）

C=**AB** 中的第 i 行第 j 列元素 C_{ij}，是 **A** 中的第 i 行 n 个元素与 **B** 的第 j 列 n 个元素分别相乘的乘积之和　（矩阵相乘不满足交换律和消去律）

矩阵可交换： 当 **AB**=**BA** 时，我们称 **A** 与 **B** 可交换，此时 AB 为同阶方阵

矩阵加法： **A**+**B**=对应元素之和（此时，A 与 B 必须为同型矩阵，即行与列数目相同。注意区分同型矩阵与同阶矩阵）　当 **A**、**B** 对应元素完全相等时，记为 **A**=**B**

转置矩阵： 将原 m×n 矩阵 **A** 的行与列互换得到的 n×m 矩阵，称之为转置矩阵，记为 A^T 或 A'

对称矩阵： 一个 n 阶矩阵 **A** 的 $a_{ij}=a_{ji}$，则称之为对称矩阵；

反对称矩阵： 若 $a_{ij}=-a_{ji}$，则称之为反对称矩阵

可逆矩阵： 对于 n 阶矩阵 **A**,存在 n 阶矩阵 **B** 使得 **AB**=**BA**=**I**，就称 A 为可逆矩阵，**B** 是 **A** 的逆矩阵，记作 A^{-1}，即 A^{-1}=**B**（**A** 与 **B** 地位相同）

伴随矩阵： 设 n 阶矩阵 **A**，A_{ij} 为 det**A** 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则由其代数余子式的所构成的矩阵称为 **A** 的代数余子式矩阵，记为 cof**A**，而将 cof**A** 的转置矩阵记为 **A** 的伴随矩阵，记为 adj**A** 或 A^*

满秩矩阵： 矩阵 **A** 的行秩的数值称为矩阵 **A** 的秩，记作秩（**A**）或 r（**A**）。秩（**A**）=n 的 n 阶矩阵称之为满秩矩阵

过渡矩阵： 设R^n的两组基$B_1=\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots\boldsymbol{\alpha_n}\}$，$B_2=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n\}$满足（4.6）

式的关系，则矩阵 A 称为旧基B_1到新基B_2的过渡矩阵（或称变换矩阵）

正交矩阵：$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$如果$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，就称为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

特征矩阵：$\lambda\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$ 称为 A 的特征矩阵

复矩阵：元素为复数的矩阵（向量），称为复矩阵（复向量）

共轭矩阵：设a_{ij}为复数，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})m \times n$，$\overline{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})m \times n$，$\bar{a}_{ij}$是$a_{ij}$的共轭复数，

则称$\overline{\boldsymbol{A}}$是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵

正定矩阵：如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots x_n)^T$恒有：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

就称$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**正定二次型**，称 $\boldsymbol{A}$ 是**正定矩阵**

【注：正定矩阵是满秩矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，**则$\boldsymbol{A}^{-1}$**也是正定矩阵**】**

初等行变换：（注意，初等行变换过程中不涉及等号，这只是一种矩阵化简方式，与行列式求解的过程化简不同）

(i) 倍乘变换：以非零常数乘以矩阵某一行

(ii) 倍加变换：将矩阵某一行乘以常数再加到某一行

(iii) 对换变换：将矩阵某两行对换位置

$\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$的第 i 行乘 c;

$\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$的第 i 行乘 c 加至第 j 行;

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$第 i 行与第 j 行对换位置;

$\boldsymbol{BE}_i(c)$ 表示 $\boldsymbol{B}$的第 i 列乘 c;

$\boldsymbol{BE}_{ij}(c)$ 表示 $\boldsymbol{B}$的第 j 列乘 c 加至第 i 列;

（iv） $\boldsymbol{BE}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与第 j 列对换位置 .

（注意：矩阵 A 左乘则行变，矩阵 B 右乘则列变，其中 $\mathbf{E}_{ij}$ 表示第 i、j 行或列对换，$\mathbf{E}_i$（c）表示第 i 行乘 c）

向量运算： 设α=（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）β=（$b_1,b_2,\cdots,b_n$）定义：

（1） α=β当且仅当 $a_i=b_i\,(i=1,\cdots,n)$

（2） α+β=$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots a_n+b_n)$

（3） kα=（$ka_1,ka_2,\cdots,ka_n$）【当 k=-1 时，成为负向量】

若β=$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}$，就说β可由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$**线性表示**

对于 m 个向量，有 m 个不全为零的数k_1，$k_2\cdots k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{a_m}=\boldsymbol{O_m}$$

成立，则称$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$线性相关；否则称线性无关（即只有$k_1$，$k_2\cdots k_m$全为零时线性无关或者线性无关时，$k_1$，$k_2\cdots k_m$全为零）

内积： 设α=（$a_1,a_2,\cdots,a_n$）β=（$b_1,b_2,\cdots,b_n$），规定α，β的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = a_1b_1 + a_zb_2 + \dots + a_nb_n$$

当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为列向量时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{a}$

向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度$\|\alpha\| = \sqrt{(a,a)}$

设$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_n}\epsilon R^n$，若

$$(\alpha_i,a_j) = \begin{cases}1,i=j\\0,j\neq j\end{cases} \quad (\text{i，j=1，2}\cdots\text{n})$$

则称$\{\boldsymbol{\alpha_1}，\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_n}\}$是$R^n$的一组标准正交基【基向量之间线性无关】

施密特正交化法：

正交化：令$\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\alpha_1}$，而后$\boldsymbol{\beta_2} = \boldsymbol{\alpha_2} - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\boldsymbol{\beta_1}$

$$\boldsymbol{\beta_3} = \boldsymbol{\alpha_3} - \frac{(\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_1})}\cdot\boldsymbol{\beta_1} - \frac{(\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_2})}\cdot\boldsymbol{\beta_2}$$

$$\boldsymbol{\beta_j} = \boldsymbol{\alpha_j} - \frac{(\boldsymbol{\alpha_j},\boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_1})}\cdot\boldsymbol{\beta_1} - \frac{(\boldsymbol{\alpha_j},\boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_2})}\cdot\boldsymbol{\beta_2} - \dots - \frac{(\boldsymbol{\alpha_j},\boldsymbol{\beta_{j-1}})}{(\boldsymbol{\beta_{j-1}},\boldsymbol{\beta_{j-1}})}\cdot\boldsymbol{\beta_{j-1}}$$

标准（单位）化：

$$\eta_j = \frac{\boldsymbol{\beta_j}}{\|\boldsymbol{\beta_j}\|}$$

秩： 如果向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$中存在 r 个线性无关的向量，则其中任一个向量可由这 r 个线性无关的向量线性表示，则数 r 成为向量组的秩，记作秩$\{\boldsymbol{\alpha_1}，\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}\}=r$

【显然，如果$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$线性无关，则秩$\{\boldsymbol{\alpha_1}，\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}\}=s$；只含零向量的向量组的秩为零】

等价： 如果向量组中$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$每个向量可由向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$线性表示，就称前一个向量组可由后一个向量组线性表示。如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的 【注意：等价向量组的秩相等】

极大线性无关组： 秩为 r 的向量组中含有 r 个向量的线性无关组，称为该向量组的极大线性无关组，一般情况下不唯一

相抵于： 若矩阵 A 经过初等变换化为 B（或存在可逆阵 P,Q 使得 PAQ=B），就称 A 相抵于 B，记作 A≅B

相似于： 对于矩阵 A 和 B，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，就称 A **相似**于 B，记作 A~B 【注意:相似矩阵的特征值相同】

合同于： 对于矩阵 A 和 B，若存在可逆矩阵 C，使得 $C^{T}AC=B$，就称 A **合同**于 B，记作 A≅B【注：这里的符号其实是波浪线下少一横，但打不出来，请留意!】

特征值（向量）： 设 A 为复数域 C 上的 n 阶矩阵，如果存在数λ∈C 和非零的 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad 【\boldsymbol{x}\neq 0】$$

就λ称是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于（或对应于）特征值λ的**特征向量**

【注意：特征值是 det（$\lambda\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$）=0 的根,用此法来求出特征值，再回带λ求出特征矩阵的基础解系，即是该特征值λ对应的特征向量】

性质：

$(A^T)^T=A$　$(A+B)^T=A^T+B^T$　$(kA)^T=kA^T$[k 是常数]　$(AB)^T=B^TA^T$ $\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$　A 与 A^T 的特征值相同
$(A^{-1})^{-1}=A$　$(kA)^{-1}=kA^{-1}$[k 是常数]　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ det（A^{-1}）=1/detA，即$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A$
$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$（A 不需可逆）　$A^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}*}{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}$(条件是 A 可逆，即$\lvert A\rvert\neq 0$) 当$\lvert A\rvert\neq 0$ 时，$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$

r(**A+B**)≤r(**A**)+r(**B**)　　r(**AB**) ≤min(r(**A**),r(**B**))

A 是 m×n 矩阵，P,Q 分别是 m 阶矩阵和 n 阶矩阵，则

r(*A*)=r(*PA*)=r(*AQ*)=r(*PAQ*)　　　|A^TA|=0

设 **A，B** 皆是 n 阶正交矩阵，则：

|**A**|=1 或-1　**$A^{-1}=A^T$**　**A^T**（即 **A^{-1}**）也是正交矩阵　**AB** 也是正交矩阵

$k\lambda$是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值　λ^m是A^m的特征值　当 **A** 可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值

而 $\boldsymbol{x}$ 仍是矩阵 $k\boldsymbol{A}$、A^m、A^{-1}分别对应特征值 $k\lambda$、λ^m、λ^{-1}的特征向量

矩阵 **A** 与 **A^T** 的特征值相等

$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}, (\overline{A})^T = \overline{(\boldsymbol{A}^T)}$　$\overline{kA} = \overline{k}\overline{A}$（k 为复数）　$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$　当 A 可逆时 $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$　$det\,\overline{A} = \overline{det\,A}$

定理：

（1）设 A、B 是两个 n 阶矩阵，则|**AB**|=|**A**||**B**|

（2）矩阵可逆的充要条件是|**A**|≠0

（3）若 **A** 为可逆矩阵，则 **A** 的逆矩阵唯一

（4）可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵

⇒（A，I）→(I,A^{-1})【通过初等行变换】　**（求矩阵的逆**

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}$$ **【通过初等列变换】**　**常用此推论）**

定理(或结论):

1、向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$ $(m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$中至少含有一个向量可由其余 m-1 个向量线性表示

⇔向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$ $(m \geq 2)$ 线性无关的充要条件是其中任一个向量都不能由其余向量表示

2、包含零向量的向量组是线性相关的

3、如果向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关⇔如果$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关，则其任一部分向量组也线性无关

4、设$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_r}\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{F^n}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha_1} = (a_{11},a_{22},\ \cdots a_{n_1})^T$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\alpha_r} = (a_{1r},a_{2r},\cdots a_{nr})^T$$

则向量组线性相关的充要条件是齐次线性方程组 Ax=0 有非零解

其中

$$A=(\boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_r})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2r} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nr} \end{pmatrix},x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_r \end{pmatrix}$$

【如果 n<r,线性方程组必有非零解，因而任何 n+1 个 n 维向量都是线性相关的】

5、若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_r}$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_r}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_r}$线性表示，且表示法唯一

⇒若果$\boldsymbol{F^n}$中 n 个向量$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_n}$线性无关，则$\boldsymbol{F^n}$中任一向量可由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_n}$线性表示，且表示法唯一

6、如果向量组$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$线性表示，且 $t > s$，则$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$

线性相关

⇒如果向量组$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$线性表示，且$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$线性无关，则 $t\le s$

⇒若秩$\{\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}\}=r$，则$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$中任何 r+1 个向量都是线性相关的

⇒设秩$\{\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}\}=p$，秩$\{\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}\}=r$，如果向量组$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_t}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$线性表示，则 $r\le p$【可简记为：谁用谁表示，谁（的秩）小于谁】

7、如果对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换将其化为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行秩

8、对矩阵 A 做初等行变换化为 B，则 A 与 B 的任何对应的列向量组有相同的线性相关性，即

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\boldsymbol{B},$$

则列向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$与$\zeta_{i_1},\zeta_{i_2},\cdots,\zeta_{i_r}$ $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n)$有相同的线性相关性．

9、初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于其列秩

10、n 阶矩阵 A 的秩等于 n（满秩矩阵）的充要条件是 A 为非奇异矩阵（⇔$|A|\neq 0$⇔$\boldsymbol{A}$ 可逆⇔Ax=0 只有零解）

11、A 是 m×n 矩阵，则齐次线性方程组 Ax=0 有非零解的充要条件为秩（A）<n

⇔齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是秩（A）=A 的列数

12、若$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，则$k_1\boldsymbol{x},+k_2\boldsymbol{x_2}$（$k_1$，$k_2$是任意常数）也是它的解

13、设 A 是 m×n 矩阵，若 r（A）=r<n，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解析，且基础解系含 n-r 个解向量

14、对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，下列命题等价：（A 为系数矩阵）

i) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解⇔ii) $\boldsymbol{b}$ 可由 A 的列向量组线性表示⇔增广矩阵（A,b）的秩=r（A）

⇒ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是：

$$r((\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}))=r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\text{=A 的列数}$$

16、若$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{x},-\boldsymbol{x_2}$是对应齐次线性

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解

17、若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则其一般解为：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_0}+\overline{\boldsymbol{x}}$$

$\boldsymbol{x_0}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解（通常取自由变量全为 0 带入方程组求得）；而

$$\overline{\boldsymbol{x}}=k_1\boldsymbol{x_1}+\dots+k_p\boldsymbol{x_p}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一般解（即正常求解其基础解系）

18、设向量$\boldsymbol{\alpha}$两组基$B_1=\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots\boldsymbol{\alpha_n}\}$，$B_2=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n\}$下的坐标向量分别为：

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$

基B_1到基B_2的过渡矩阵为 A，则

$$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{x}\text{ 或 }\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A^{-1}x}$$

【一般用此定理先求过渡矩阵，再根据过渡矩阵求出向量在新基下坐标

过渡矩阵可以将两组基合在一起形成矩阵(B_1，B_2)，再经过初等行变换化为(I，$B_1^{-1}B_2$)，那么后半部分就是过渡矩阵】

19、设向量$\boldsymbol{\alpha}$两组$\{\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\dots,\boldsymbol{\varepsilon_n}\}$和$\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n\}$下的坐标向量分别为：

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\text{和 }\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$$

又 $(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)=(\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\dots,\boldsymbol{\varepsilon_n})\,\boldsymbol{C}$

于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$

（其中变换矩阵 C 是可逆矩阵），如此有二次型

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}) \boldsymbol{y}$$

即二次型 $f(\boldsymbol{\alpha})$在两组基$\{\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\ldots,\boldsymbol{\varepsilon_n}\}$和$\{\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n\}$下所对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}\ \text{和} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$$

20、由自然基 $B_1 = \{\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\ldots,\boldsymbol{\varepsilon_n}\}$ 到 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_n}\}$ 的过渡矩阵 A 就是把 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}\cdots\boldsymbol{\beta_n}$按列排列的矩阵

21、R^n中两两正交且不含零向量的向量组（称为非零正交向量组）$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_s}$是线性无关的

22、对角矩阵 A 或上（下）三角矩阵 B 的 n 个特征值就是 n 个主对角元

23、当|A|≠0 时（即 A 是可逆矩阵），其特征值全为非零数；反之，奇异矩阵 A 至少一个零特征值

24、n 阶矩阵 A 与对角阵相似（矩阵可对角化）的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量【相似矩阵的特征值相同】

⇒若 A 与对角阵Λ相似，则Λ的主对角元都是 A 的特征值，称Λ为 A 的**相似标准形**

25、矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的

⇒若 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 与对角阵相似

26、实对称矩阵 A 的任一个特征值都是实数；其对应于不同特征值的特征向量是正交的

27、对于任一个 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶**正交矩阵 T（即$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^T$）**，使得

$$T^{-1}AT = diag\,(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$$

【实对称矩阵 A，B 是相似矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得$\boldsymbol{T^{-1}AT = B}$】

27.1 对于任一个 n 元二次型$\boldsymbol{x^TAx}$，存在正交变换 $\boldsymbol{x = Qy}$（$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交矩阵），使得：$\boldsymbol{x^TAx = y^T(Q^TAQ)y} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \dots + \lambda_ny_n^2$

其中$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$是实对称矩阵 **A** 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{\alpha_n}$是 A 对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$的标准正交特征向量

28、对于任一 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C^TAC} = diag\,(d_1,d_2\cdots d_n)$$

29、对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$**，**则下列命题等价：

i）$\boldsymbol{x^TAx}$ 是正定二次型（或者 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵）

ii）$\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n，即 **A 相似于 I**

iii)存在可逆矩阵 **P** 使得 **A=P^{T}P**

iv）**A** 的 n 个特征值$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$全大于零

30、若二次型正定，则

i）**A** 的主对角元$a_{ii} > 0$（i=1,2,⋯n）

ii）**A** 的行列式|**A**|>0

31、n 元二次型$\boldsymbol{x^TAx}$ 正定的**充要条件**是 **A** 的 n 个顺序主子式全大于零

话，可以在公众号后台与我联系，禁止商用!】