

班级

[13]

注意事项

- 1.答题前,考生先将自己的姓名、学号填写清楚,并填涂相应的考号信息点。
- 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写,不得用铅笔或圆珠笔作解答题;字体工整、笔迹清楚。
- 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答题无效;在草稿纸、试题卷上答题无效。
- 4.保持卡面清洁,不要折叠、不要弄破。

考 生 学 号	
---------	--

[illegible]

一、(6分) 下列命题是否正确? 如正确, 请证明, 若不正确请举反例: 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数 k_1, \dots, k_s , 使得 $k_1 a_1 + \dots + k_s a_s \neq 0$.

二、(6分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 问 A 是否可逆? 如可逆求 A^{-1} , 如不可逆, 求 A 的伴随矩阵 A^* .

三、(6分) 给正交矩阵 A 的某一行 (或某一列) 乘上 -1 后所得的矩阵 B 是否仍是正交矩阵? 为什么?

四、(12分) 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\alpha_3 = (2, 1, 3, 0)$, $\alpha_4 = (2, 5, -1, 4)$, $\alpha_5 = (1, -1, 3, -1)$, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大无关组, 并用最大无关组线性表示向量组中其它向量.

五、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|(4E - A)^T (4E - A)|$.

六、(12 分) 写出二次型 $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$ 在正交变换下所化成标准形, 并指出是正定的还是负定的.

七、(16 分) 设有方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = a \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = b \end{cases}$$
, 试讨论 a, b 取何值时, 方程组有解, 并求解.

八、(10 分) 设 $AX = B + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

九、(10 分) 若实向量 $\alpha = (b, c, d, e)^T$ 是单位列向量, 矩阵 $H = 2\alpha\alpha^T - E$. 证明: H 是正交矩阵.

十、(10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的全部特征值之积为 24. (1) 求 a 的值; (2) 讨论 A 能否对角化, 若能, 求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.