武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 C（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

1

考生学号												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

二、填空题：

(1) __________ (2) __________ (3) __________ (4) __________

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则_____成立.

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$ (B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ (C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$ (D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且秩相等，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则_______.

(A) $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$， (B) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$，

(C) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2R(\boldsymbol{A})$， (D) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ _______.

(A) 一定无解 (B) 可能有解

(C) 一定有唯一解 (D) 一定有无穷多解

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的_____.

(A) 列向量组线性无关， (B) 列向量组线性相关，

(C) 行向量组线性无关， (D) 行向量组线性相关.

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=$________.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则常数 $t=$______.

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\4&5&1&0\\0&0&6&8\end{pmatrix}$，则 $\det(\boldsymbol{A})=$_______.

(4) D 中第 2 行元素的代数余子式的和 $\sum_{j=1}^{4}A_{2j}=$_______，其中

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}.$$

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\ge 2$ 为正整数，计算 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$.

四、(12 分) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

（1）证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆；　　（2）当 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{A}$.

五、证明（16 分，每小题 8 分）：

（1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵.

武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

线性代数 C（A 卷答题卡）

姓名 ____________　　　　班级 ____________

1

考生学号												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

填涂样例	正确填涂 ! 错误填涂 # $ %	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

六、(10 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=-1 \\ x_1+x_2+2x_3=b \\ 4x_1+5x_2+10x_3=2 \end{cases}$，试问：当 a,b 满足什么条件时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？在有无穷多解时，求该非齐次线性方程组的通解并写出对应的齐次线性方程组的基础解系.

七、（10 分）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,-3$，求方阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值及 $\det(\boldsymbol{B})$.

八、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵；

(3) 写出在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下 f 化成的标准形.

九、（8 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，而且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\gamma}$ 等价.