

武汉大学计算机学院

2017-2018 学年度第二学期期末考试

《组合数学》试卷 (A 卷) 参考答案

1. (20 分, 每小题 5 分)

(1) 书架上有一套《资治通鉴》共 20 卷, 从中选出 4 卷使得任意两本的卷号都不相邻的选法有多少种?

(2) 将英文字母表中的 26 个字母排序, 要求任意两个元音字母不能相邻, 则有多少种排序方法?

(3) 现在有 3 个女士和 4 个男士围一个圆桌就坐, 则其中

a) 女士两两不相邻的入座方式数有多少种?

b) 所有女士坐在一起的方式数有多少种?

(4) 在一局乒乓球比赛中, 运动员甲以 11:7 战胜运动员乙, 若在比赛过程中甲的得分一直不少于乙的得分, 求有多少种可能的比分记录?

2. (15 分) 解下列递推关系

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n, n \geq 2 \\ a_0 = 5, a_1 = 2 \end{cases}$$

3. (10 分) 一个 $1 \times n$ 的方格图形用红、蓝、绿和黄四种颜色涂色, 如果有偶数个方格被涂成红色, 还有偶数个方格被涂成绿色, 求有多少种方案?

4. (15 分) 求方程 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 1 \leq x_i \leq 9, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 的整数解组的个数。

5. 证明题 (15 分)

(a) (10 分) 一名实验员在 50 天里每天至少做一次实验, 而实验总次数不超过 75。证明一定存在连续的若干天, 她正好做了 24 次实验。

(b) (5 分) 证明: 平面上任取 5 个坐标为整数的点, 则其中至少有两个点, 由它们所连线段的中点的坐标也是整数。

6. (15 分) 一个项链由 7 颗珠子装饰而成的, 其中 2 颗珠子是红的, 3 颗是蓝的, 其余 2 颗是绿的, 问有多少种不同的装饰方案? 其对应的置换群 G 的循环指标

$$\text{为 } P_G(x_1, x_2, \dots, x_7) = \frac{1}{14} (x_1^7 + 7x_1x_2^3 + 6x_7)$$

7. (10 分) 证明第 2 类 **Stirling** 数具有如下性质

$$(a) \quad S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad (5 \text{ 分})$$

$$(b) \quad S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \quad (5 \text{ 分})$$