一、计算下列各题

1．已知 $f\left(\dfrac{1}{z+i}\right)=\overline{z}$，则求极限 $\lim\limits_{z\to i} f\left(z\right)$。

2．解方程: $(1+z)^{n}=(1-z)^{n}$。

二、设函数 $f(z)=x^2-y^2+ixy$，试确定 $f(z)$ 在何处可导，何处解析，并求可导点处的导数。

若 $f(z)=x^2-y^2+iv(x,y)$，求 $v(x,y)$，使 $f(z)$ 为解析函数。

三、计算积分 $\int_C |z||dz|$，若 C 为：（1）$|z|=2$，（2）$0\le \mathrm{Re}\, z\le 2, \mathrm{Im}\, z=0$。

四、指出函数$\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$的奇点和类型；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数，并计算积分$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz$，其中 C 是正向圆周$|z|=2$。

五、设 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 为定义在单值分支中的解析函数，若 $f(0)=0$ 。求：

1. $f(2i)$ 和 $f'(2)$。.

2. 函数 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 级数。

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{n}$ 的和函数。

六、留数定理计算积分和 Fourier 变换

1．若 $\varepsilon > 0, \omega > 0$，利用留数定理计算积分

$$I(\omega,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} e^{i\omega x} dx$$

并求 $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\omega,\varepsilon)$。

2. 若 $I(\omega,\varepsilon)$ 是参变数函数 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 的 Fourier 变换，比较 $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\omega,\varepsilon)$ 和 $\delta(x)$ 函数的 Fourier 变换关系，可以把 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 视为 δ 型序列函数，写出 $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 和 $\delta(x)$ 的关系。

3. 计算函数 $f(x) = e^{-\varepsilon x} H(x)$ 的 Fourier 变换，其中 $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 为阶跃函数，并求 $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\mathscr{F}[e^{-\varepsilon x} H(x)]\}$ 的值。

七、利用 Laplace 变换求微分方程

将电阻 R，电感 L 和电容 C 串联到电源 $\varepsilon(t)$ 上，设电路中的电流为 $i(t)$，则有 $L\frac{di(t)}{dt}+i(t)R+\frac{q(t)}{C}=\varepsilon(t)$，因为 $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$，因此，

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=\varepsilon(t)$$

若初始条件 $q(0)=0, i(0)=q'(0)=0$, 求回路中的电荷和电流。如果（1）$\varepsilon(t)=1$；（2）$\varepsilon(t)=\delta(t)$。