2003～2004学年第一学期《高等数学》期末考试试题B卷答案

一、填空题：（5×4分）

1、 **1;**　 2、 1；　 3、 3;;　 4、 $y=x+\frac{1}{e}$；　 5、3。

二、选择题：（5×4分）

1）、 D;　 2）、 D；　3）、 B；　 4）、 B;　 5）、A.

三、计算下列各题：（5×6分）

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

2）解 应填 $\frac{(-1)^n 2\times(n!)}{(1+x)^{n+1}}$。由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 得 $y'=\frac{-2}{(1+x)^2}$，$y''=\frac{2\times 2}{(1+x)^3}$，

$y'''=\frac{(-1)^3 2\times(3!)}{(1+x)^{3+1}}$，由递推公式得：$y^{(n)}=\frac{(-1)^n 2\times(n!)}{(1+x)^{n+1}}$。

$$3)\ \int\frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\int\frac{1}{2+\tan x}dx=\int\frac{1}{t+2}d\arctan t=\int\frac{1}{t+2}\frac{1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int(\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t+2})dt=\frac{1}{5}[2x-\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)+\ln(\tan x+2)]+C\ ;$$

或 $\int\frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=\frac{2}{5}\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x+2\cos x}dx+\frac{1}{5}\int\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+\text{C.}$$

4）原积分＝$\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^k}=\left.\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_2^{+\infty}$，

1、当 $k<1$ 时，原积分＝$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k}-\frac{(\ln 2)^{1-k}}{1-k}$，积分发散；

2、当 $k=1$ 时，原积分＝$\ln(\ln x)\big|_2^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)$，积分发散；

3、当 $k>1$ 时，原积分＝$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-k)(\ln x)^{k-1}}-\frac{1}{(1-k)(\ln 2)^{k-1}}=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，

积分收敛. 令 $f(k)=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$， $f'(k)=\frac{-1}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}}-\frac{\ln\ln 2}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，

即 $f'(k)=\frac{-\ln\ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}}\left(\frac{1}{\ln\ln 2}+k-1\right)$， $f(k)$ 有唯一驻点 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$，

易知在驻点附近，当 $k<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时， $f'(k)<0$；当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时， $f'(k)>0$，

可见，在驻点处 $f(k)$ 取极小值，由于 $f(k)$ 的驻点唯一，则在 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 处，原积分收敛到最小值.

5）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2}{3}\dfrac{t-1}{t^2+3}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_t'\frac{dt}{dx}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{t-1}{t^2+3}\right)_t'\frac{1}{x_t'}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-t^2+2t+3}{(t^2+3)^2}\cdot\frac{1}{3t^2+9}=\frac{2}{9}\cdot\frac{(3-t)(1+t)}{(t^2+3)^3}.$$

当$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$时曲线下凸.，得$-1<t<3$；注意到$x=t^3+9t$单调升，即$x\in(-10,54)$时，曲线下凸.

6）证：设$p(x)$有两个实根x_1,x_2，且$x_1<x_2$，，可以验证：$p(x)$在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理条件，从而存在$\xi\in(a,b)$，使得$p'(\xi)=0$. 这与条件矛盾. 设$p(x)$有一个重根x_0，则$p(x)=(x-x_0)^k p_1(x)$，其　　中$p_1(x)$为一多项式. $k\ge 2$，

因为$p'(x)=k(x-x_0)^{k-1}p_1(x)+(x-x_0)^k p_1'(x)$，则$p'(x_0)=0$，也矛盾，则结论成立.

四、(8 分)

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow f(1)=0, f'(1)=0$

$$\Rightarrow\varphi(x)=\int_0^{x-1}\frac{1}{x-1}f'(1+u)du=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1},x\ne1$$

易知　$\varphi(1)=0,\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)}{x-1}-\dfrac{f(x)}{(x-1)^2},x\ne1$

$$\Rightarrow\varphi'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}f''(1).$$

$\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=f''(1)-\dfrac{1}{2}f''(1)=\dfrac{1}{2}f''(1)\Rightarrow\varphi'(x)$在 x=1 处连续.

五、（7 分）解：设$(\xi,\ln\xi)$ 为曲线$y=\ln x$上任意一点，则此点处的切线方程为：

$y=\dfrac{1}{\xi}(x-\xi)+\ln\xi$，即$y=\dfrac{x}{\xi}+\ln\xi-1$，于是所求面积为：

$$A=\int_2^6\left[\frac{x}{\xi}+\ln\xi-1-\ln x\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{\xi}+x\ln\xi-x\ln x\right]_2^6=4\left(\ln\xi+\frac{4}{\xi}\right)+2\ln2-6\ln6$$

令$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}=4\left(\dfrac{1}{\xi}-\dfrac{4}{\xi^2}\right)=0$，得$\xi=4$，又当$\xi<4$时，$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}<0$，当$\xi>4$时，$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}>0$，

故$\xi=4$时，A取得极小值，也是最小值，从而得到所求的切线方程为：$y=\ln4+\dfrac{1}{4}(x-4)$。

六、(8 分)（1）因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以$F(x)$在$[a,b]$上可微，且$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2$。

（2）由（1）可知$F'(x)\ge2>0$，所以$F(x)$在$[a,b]$上单调递增，又对一切

$x\in[a,b], f(x)>0,$ 所以 $F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，

$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$ 由零点定理及 $F(x)$ 的单调性可知：$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

七、（7 分）$\int_0^1 x(1-x)f^{''}(x)dx = x(1-x)f^{'}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f^{'}(x)dx$

$$= \int_0^1 (2x-1)f^{'}(x)dx = \int_0^1 (2x-1)df(x) = (2x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f(x)dx$$

$$= f(1)+f(0) - \int_0^1 2f(x)dx$$

即：$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$