武汉大学数学与统计学院
2020--2021 学年第二学期线性代数 A 期末考试试卷(A 卷) 答案

一、单项选择题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) (D)　　(2) (B)　　(3) (A)　　(4) (B)

二、填空题（每小题 3 分共 12 分）：

(1) $(-1)^{mn}ab$　　(2) $k_1+k_2=0$　　(3) $c>6$　　(4) $S=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3,-5,2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

三、（12 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&2&\cdots&2\\1&2&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&2\\1&2&\cdots&2&0\end{vmatrix}$ 的值，这里 $n\geq 3$.

解　$$D_n\overset{r_i-2r_1}{\underset{i\geq 2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&-2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&-2\end{vmatrix}\overset{c_1+\sum_{j\geq 2}\frac{1}{2}c_j}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}\frac{n-1}{2}&1&\cdots&1\\&-2&&\\&&\ddots&\\&&&-2\end{vmatrix}=\frac{n-1}{2}(-2)^{n-1}.$$

四、（12 分）已知矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　因

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\1&-1&0&2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&-2&1&1&2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&2&2&1&1&0\\0&0&3&2&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\div 2]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&1\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2+r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\0&1&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&1&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

或解：因 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$（过程略），所以 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}11&3&6\\-1&-3&0\\4&6&0\end{pmatrix}$.

五、（12 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases}-x_1-2x_2+ax_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$，试问：当$a,b$满足什么条件时，方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

解　系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|=a+4$，故

(1) 当$a\neq -4$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解；

(2) 当$a=-4$时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\1&1&2&b\\4&5&10&2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\0&-1&-2&b+1\\0&0&0&3-3b\end{array}\right),$$

当$b\neq 1$时，则$R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

(3) 当$a=-4,b=1$时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，此时方程组有无穷多解，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

非齐次线性方程组的一个特解为$\eta^*=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$. 非齐次方程组的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，$c$为任意实数.

六、（12 分）已知向量组$\alpha_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$与向量组$\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求$a,b$的值.

解　显然$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\geq 2$，因$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$，故$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，得$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，有$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$，即$\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a=0$。

又因β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，得$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)$，因

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{array}\right),$$

得$b=5$，$a=15$。

七、证明（16 分，每小题 8 分）：

(1) 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，试证：若 3 维非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}^2\alpha_3=\alpha_1$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2) 假设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶实对称矩阵，并且$\boldsymbol{A}$的特征值均大于$a$，$\boldsymbol{B}$的特征值均大于$b$，

证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 $a+b$．

证　(1) 设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\boldsymbol{0}\,, \tag{1}$$

等式两边左乘 $\boldsymbol{A}$，由 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，有

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_2+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=k_2\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_2\boldsymbol{A}\alpha_1+k_3\boldsymbol{A}^2\alpha_3=k_3\alpha_1=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

所以 $k_3=0$．由(2)得 $k_2=0$．再由(1)知 $k_1=0$．所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) 依题设条件有，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 的特征值全为正，故 $\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$ 均正定，因此 $(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-(a+b)\boldsymbol{E}$ 也正定，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 $\mathrm{a}+\mathrm{b}$．

八、(6 分）用正交变换将实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形，并判断此二次型是否正定.

解　所给二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&2\\2&2&-2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-2\\1&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)\,,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$．

对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=(-1\,,1\,,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(1\,,1\,,1)^{\mathrm{T}}$．

对应于特征值 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3=(1\,,1\,,-2)^{\mathrm{T}}$．

将 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ 单位化，得正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，二次型经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$

化为标准形

$$2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2\,.$$

二次型不是正定的.

九、(6 分）设

(Ⅰ)：$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(Ⅱ)：$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$，

是$\boldsymbol{R}^{2\times2}$中两组基，定义$\sigma(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，$\forall\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{2\times2}$.

(1) 试证σ是$\boldsymbol{R}^{2\times2}$的线性变换；

(2) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵；

(3) 求σ在基(Ⅰ)下的矩阵.

解 (1)记$\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=P$，则$\sigma(X)=PX$，$\forall X\in\mathrm{R}^{2\times2}$．显然，$\sigma$是$\mathrm{R}^{2\times2}$上的一个变换.

对任意$\forall X$，$Y\in\mathrm{R}^{2\times2}$，$\mathrm{k}$，$\mathrm{l}\in R$，有

$$\sigma(\mathrm{k}X+\mathrm{l}Y)=P(\mathrm{k}X+\mathrm{l}Y)=\mathrm{k}PX+\mathrm{l}PY=\mathrm{k}\sigma(X)+\mathrm{l}\sigma(Y),$$

则σ是$\mathrm{R}^{2\times2}$上的线性变换.

(2)取E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}为$\mathrm{R}^{2\times2}$的常用基．由常用基到基(Ⅰ)，基（Ⅱ）的过渡矩阵为

$$S_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},S_2=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix},$$

则由基(Ⅰ)到基（Ⅱ）的过渡矩阵为$S=S_1^{-1}S_2=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\-2&1&1&-2\\2&2&1&5\\1&-3&2&0\end{pmatrix}$.

(3)由σ的定义，有

$\sigma(A_1)=PA_1=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}=2(A_1-A_3)$，$\sigma(A_2)=PA_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=2(A_2-A_3)+(A_3-A_4)$，

$\sigma(A_3)=PA_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=A_3$，$\quad\sigma(A_4)=PA_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A_4$.

则σ在基(Ⅰ)下的矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&-1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$