一、计算下列各题

1．计算复数$(-1)^i$的主值。

解：$(-1)^i = e^{iLn(-1)}$

$$Ln(-1) = \ln 1 + i[\arg(-1) + 2k\pi] = i[\pi + 2k\pi]$$

2．已知$f\left(z^3+1\right)=|z|$，则求$f(0)$。

答：1

3．指出函数$f(z)=\dfrac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$（$a$、$b$为实数，且$a\neq b$）的奇点和类型（含∞点）；

若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数。

解：1） $z=0$,一阶极点,$(a-b)i$

2） $z=\infty$,本性奇点,-$(a-b)i$

4．计算积分$\int_c \bar{z}dz$，设

1）c为从原点$z=0$，到$z=1+i$的直线段；

2）c为$|z|=1$。

解: 1) 1

2) $2\pi i$

5．计算函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, |x|\le\pi \\ 0, \quad |x|>\pi\end{cases}$的 Fourier 变换。

解: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x e^{-i\omega x}dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-i\omega x}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(1-\omega)x}-e^{-i(1+\omega)x}}{2i}dx$$

$$=-\frac{2i}{1-\omega^2}\sin\omega\pi$$

二、设$r>0$且$|r|\neq1$，利用留数定理计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{r-\cos\theta}{1-2rcos\theta+r^2}d\theta=\begin{cases}0 & (|r|<1) \\ \dfrac{2\pi}{r} & (|r|>1)\end{cases}$$

三、1)（5 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n$的和函数。

2)（10 分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$在下列圆环域内展开成 Laurent 级数

(1) $0<|z-2|<1$ (2) $|z|>3$

解：$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$

(1) $0<|z-2|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-2)}-\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n-\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-2)^n$$

(2) $|z|>3$

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right]$$

六、1）（3 分）求调和函数$u=u(ax+by)$，a、b 为常数。

2）（7 分）已知$u=2(x-1)y$，求解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并满足 $f(0)=0$。

答案：1） $u=c_1(ax+by)+c_2$

2） $f(z)=2iz-iz^2$

七、（本题 10 分）利用 Laplace 变换求微分方程$y''(\mathrm{t})+a^2y(t)=f(t)$满足条件$y(0)=b,y'(0)=c$的解，其中 a、b、c 为常数。

如果$f(t)=t$，写出其解。

答案：$y(t)=\dfrac{1}{a^2}(t+ca-\dfrac{1}{a})\sin at+b\cos at$