

武汉大学数学与统计学院 2009-2010 第二学期
《线性代数 C》 (A 卷, 文科 54 学时)

学院_____专业_____学号_____姓名_____

注: 所有答题均须有详细过程, 内容必须写在答题纸上, 凡写在其它地方一律无效。

一、(10 分) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求行列式 $|AA^T|$ 及秩 $R(B)$ 。

二、(15 分) 解矩阵方程 $AX = B + 2X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

三、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

- 1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性无关? 并说明理由;
- 2) 常数 l, m 满足何种条件时, 向量组 $l\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, m\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关? 并说明理由。

四、(15 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 = b \end{cases}$$

问 a, b 取何值时, 该方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其解。

五、(15 分) 设 α 是实数 n 维非零列向量, E 为 n 阶单位矩阵, $A = E - [2/(\alpha^T \alpha)]\alpha\alpha^T$, 试解答:

- 1) 计算 A^T , 并回答 $(kE - A)$ 能否相似于一个对角阵? 并说明理由, 其中 k 为常数;
- 2) 计算 A^2 , 并回答 $(kE - A)$ 是否可逆? 并说明理由, 若 $k \neq \pm 1$;
- 3) 给出 $(E - 2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件。

六、(18 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + x_2^2$, 试解答下列问题:

- 1). 给出求出二次型 f 的矩阵 A ;
- 2). 求正交变换 $x = Ty$, 使 $T^T AT$ 成为对角阵;
- 3). 写出 f 的标准形, 并判定 f 的正定性与负定性。

七、(12 分) 设 n 阶实对称矩阵 A 正定, 试证明:

- 1). 矩阵 A^{-1} 、 A^* 和 $A^{-1} + A^*$ 均为 n 阶正定矩阵;
- 2) $C = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶正定矩阵。