武汉大学 2015-2016 第一学期高等数学 A1 期末试题 A 解答

一、计算题（每小题 7 分，共 63 分）

1、若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1)}=\dfrac{1}{2015}$ 7 分

或 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{2015}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)}\dfrac{x-1}{x^{2015}-1}=f'(1)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2015x^{2014}}=\dfrac{1}{2015}$

2、计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}})^n$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}})^n(1+\dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}})^n=\lim\limits_{n\to\infty}e(1+\dfrac{1}{ne^{\frac{1}{\pi}}})^{ne^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{\pi}}}}=e^2$ 7 分

或 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}}=e^2$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}})^n=e^2$

3、已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，满足 $F(x)f(x)=xe^x$，$F(x)>0, F(0)=1$，求 $f(x)$.

解：对 $F(x)f(x)=xe^x$ 两边积分得 $\int F(x)f(x)dx=\int xe^x dx$，即

$\int F(x)dF(x)=xe^x-e^x+c$，$\dfrac{1}{2}\big(F(x)\big)^2=xe^x-e^x+c$，又 $F(0)=1$ 代入上式得 $c=\dfrac{3}{2}$

注意到 $F(x)>0$，解得 $F(x)=\sqrt{2e^x(x-1)+3}$，所以 $f(x)=\dfrac{xe^x}{F(x)}=\dfrac{xe^x}{\sqrt{2e^x(x-1)+3}}$

或 $f(x)=F'(x)=\dfrac{xe^x}{\sqrt{2e^x(x-1)+3}}$ 7 分

4、设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数, 求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

解 $2x+2yy'-y'e^{xy}-ye^{xy}(y+xy')=0$ 将点 $(0,2)$ 代入得 $y'(0)=\dfrac{4}{3}$ $y=\dfrac{4}{3}x+2$

$($或$4x-3y+6=0)$ 7 分

5、计算定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^{2015}+1008}{\sqrt{x^2+1}}dx$

解：原式=$2\int_0^1\dfrac{1008}{\sqrt{x^2+1}}dx=2016\Big[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big]\Big|_0^1=2016\ln(1+\sqrt{2})$ 7 分

6、设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x<2\\ 0, & other\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

解　$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{3}x^3, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}, & 1\le x<2\\ \dfrac{11}{6} & x\ge 2\end{cases}$　　7 分

7、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定，其中 C 是非零常数，f 具有二阶导数，且 $f'(y)\ne 1$，求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解　$y-f(y)=\ln\dfrac{x}{C}$，　$y'-f'(y)y'=\dfrac{1}{x}$，$y'=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$，

$y''-f''(y)y'^2-f'(y)y''=-\dfrac{1}{x^2}$，

$y''=\dfrac{1}{1-f'(y)}[f''(y)y'^2-\dfrac{1}{x^2}]=\dfrac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$　　7 分

8、求初值问题 $\begin{cases}y''+y=x+\sin x\\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 的解。

解　对应的齐次方程的通解为　$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为 $\boldsymbol{y_1=x}$，非齐次方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特解为 $\boldsymbol{y_2=-\dfrac{x}{2}\cos x}$，原方程的通解为　$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-\dfrac{x}{2}\cos x$，利用初值条件可求得　$C_1=1,\quad C_2=-1$，原问题的解为 $y=\cos x-\sin x+x-\dfrac{x}{2}\cos x$　　7 分

9、设 $f(x)$ 连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(t\int_i^0 f(u)du)dt}{x^3\sin x}$。

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(t\int_t^0 f(u)du)dt}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(t\int_t^0 f(u)du)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_x^0 f(u)du}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}(-\dfrac{1}{8})\dfrac{f(x)}{x}$

$=-\dfrac{1}{8}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{8}f'(0)=-\dfrac{1}{2}$　　7 分

二、应用题（每小题 8 分，共 24 分）

1、求在抛物线 $y^2=4x$ 与 $y^2=8x-4$ 之间的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

解：图略　$V=\pi\int_0^1 4xdx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(8x-4)dx=\pi\left[2x^2\right]_0^1-\pi\left[4x^2-4x\right]_{\frac{1}{2}}^1=\pi$　　8 分

2、求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积。

解：　当 θ 等于 0 和 $\dfrac{\pi}{3}$ 时，两曲线相交，所围公共部分的

面积为 $A=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta+\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2\theta\,d\theta=\dfrac{5\pi}{24}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　8 分

3、设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时 $(t=0)$ 速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系。

解：降落伞所受外力为 $F=mg-kv,$ 由牛顿运动第二定律得 $F=ma=m\frac{dv}{dt}$

因此 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$，初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$，分离变量得 $\frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m}$，

两边积分得 $\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$，即 $-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+c_1$，$mg-kv=e^{-\frac{k}{m}t-kc_1}$，

$v=\frac{mg}{k}+ce^{-\frac{k}{m}t}\quad (c=-\frac{e^{-kc_1}}{k})$，把 $v\big|_{t=0}=0$ 代入得 $c=-\frac{mg}{k}$，所以

$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$　　　8 分

三、证明题（第 1 题 7 分，第 2 题 6 分，共 13 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，$\left|f''(x)\right|\le M\,(x\in[0,a])$ 且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，试证明 $\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|\le Ma$.

证明　证明：因 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导, 且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值

设在 $x_0\in(0,a)$ 取得最大值, 则 $f'(x_0)=0$

从而在 $[0,a],[x_0,a]$ 上分别对 $f'(x)$ 用拉格朗日中值定理有

至少 $\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使 $f'(0)-f'(x_0)=f''(\xi_1)(0-x_0)$

而 $f'(x_0)=0,\left|f''(x)\right|\le M$, 则 $\left|f'(0)\right|\le Mx_0$　(1)

同理有: $\left|f'(a)\right|\le M(a-x_0)$　　(2)

由 $(1)+(2)$ 得: $\left|f'(a)\right|+\left|f'(a)\right|\le Ma$　　7 分

2、（6 分）设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 且 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\tan x\mathrm{d}x=0$, 证明 在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证: 记 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导, 且 $F(-1)=F(1)=0$，若 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点, 不妨设 $F(x)>0, x\in(-1,1)$ $0=\int_{-1}^{1}f(x)\tan x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\tan x\mathrm{d}F(x)$

$=F(x)\tan x\big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}F(x)\sec^2 x\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}F(x)\sec^2 x\mathrm{d}x<0$ 此矛盾说明 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内至少存在一个零点 x_0, 对 $F(x)$ 在 $[-1,x_0]$, $[x_0,1]$ 上分别使用 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(-1,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,1)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$　　6 分