武汉大学 2019-2020 第一学期线性代数期中试题

1、（10 分）计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

2、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$，求 A 的列向量组的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示出列向量组中其它向量。

3、（15 分）设，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

求 $A^{-1}B'(CB^{-1}+E)'-[(C^{-1})'A]^{-1}$.

4、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，试就 a,b 的各种情况，讨论线性方程组 $AX=B$ 的解，如果有解，求其解.

5、（10 分）设已知 n 阶矩 A 满足条件：$A^4\neq 0$，$A^5=0$，B 也是已知的 n 阶矩阵，试证明矩阵方程 $AX=B-X$ 存在唯一的解矩阵 X.

6、（10 分）设 A 是 $m\times 4$ 矩阵且 A 的秩为2，B 是 $m\times 1$ 的非零矩阵，$X=(x_1,\cdots,x_4)$ 若 a_1,a_2,a_3 是 $AX=B$ 的解向量，且设 $a_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, a_1+a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$，$a_2+a_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}^T$ 求方程组 $AX=B$ 的通解。

7、（10 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 n 阶行列式 $|A|$ 中元素 a_{ik} 与 a_{ki} 是共轭复数，试证明此行列式之值必为实数.

8、（10 分）设 A 是 n 阶知阵，满足 $AA'=E, |A|<0$，证明 $|A+E|=0$.

9、（10 分）设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，如果 $AB=E$（E 是 n 阶单位矩阵)，证明：矩阵 B 的列向量组线性无关。

武汉大学2019-2020第一学期线性代数期中试题解答

1、（10 分）计算$D=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$

解 $D\xlongequal[c_1-c_n]{c_{n-1}-c_n \\ \cdots}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_1 & a_1 \\ 0 & \cdots & -b_2 & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_n & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n$

2、（10 分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$，求$A$的列向量组的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示出列向量组中其它向量。

解　设A的第j列为$\alpha_j\left(j=1,\cdots,5\right)$，对$A$作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

故α_1 ,α_2是A的列向量组的一个最大无关组，

且有$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2$

3、（15 分）设, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

求$A^{-1}B'(CB^{-1}+E)'-[(C^{-1})'A]^{-1}$.

解　先化简,有$D=A^{-1}B'(CB^{-1}+E)'-[(C^{-1})'A]^{-1}=A^{-1}[(CB^{-1}+E)B]'-A^{-1}[(C^{-1})']^{-1}$

$$=A^{-1}[(C+B)'-C']=A^{-1}B'$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},B'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad D=A^{-1}B'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4、（15 分）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，试就$a,b$的各种情况，讨论线性方程组$AX=B$的解，如果有解，求其解.

解 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 1 \\ 0 & -3a & a-b & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$

当$a=0$时，方程组无解；

当$a\neq 0$时，且$b\neq a$时，方程组有唯一解: $x_1=1-\dfrac{1}{a}, x_2=\dfrac{1}{a}, x_3=0$

当$a\neq 0$，且$b=a$时，方程组有无穷多解$x_1=1-\dfrac{1}{a}, x_2=x_3+\dfrac{1}{a}, x_3=x_3\,3\,x_3$为任意常数。

5、（10 分）设已知n阶矩A满足条件：$A^4\neq 0$，$A^5=0$，B也是已知的n阶矩阵，试证明矩阵方程$AX=B-X$存在唯一的解矩阵X.

解 由$XE=A^5+E=\left(A+E\right)\left(A^4-A^3+A^2-A+E\right)$知. $\left|A+E\right|\neq 0$，故$\left(A+E\right)X=B$有唯一解$X=\left(A+E\right)^{-1}B$

6、（10 分）设A是$m\times 4$矩阵且A的秩为2，B是$m\times 1$的非零矩阵，$X=(x_1,\cdots,x_4)$若a_1,a_2,a_3是$AX=B$的解向量，且设$a_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, a_1+a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$，$a_2+a_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}^T$求方程组$AX=B$的通解。

解 记$b_1=a_2-a_1=(a_1+a_2)-2a_1=(-1,0,1,2)$,

$b_2=a_3-a_1=(a_3+a_2)-(a_1+a_2)=(0,-2,1,-1)$,

则$Ab_1=0, Ab_2=0,$且b_1,b_2线性无关。又A的秩为2，故$AX=B$的通解为:

$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T=k_1b_1+k_2b_2+a_1=k_1\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^T+k_2\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & -1\end{pmatrix}^T$

$+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, (k_1,k_2\in R)$

7、（10 分）设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若n阶行列式$|A|$中元素a_{ik}与a_{ki}是共轭复数，试证明此行列式之值必为实数.

解 设 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=x+iy$，将$|A|$转置，一方面$|A'|=|A|$

另一方面，$|A'|$中的各元素恰为$|A|$中相应元素的共轭复数，进而$|A'|$的值与$|A|$值也互为共轭复数，则有$|A'|=x+iy=x-iy$，故得$y=0$，即$|A|$为实数。

8、（10 分）设A是n阶知阵，满足$AA'=E, |A|<0$，证明$|A+E|=0$.

解 $A+E=A+AA'=A\left(E+A'\right)=A\left(E+A\right)'$ $\quad |A+E|=|A||(E+A)'|=|A||E+A|$

$(1-|A|)|E+A|=0 \qquad 1-|A|>0, |E+A|=0$

9、（10 分）设A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，其中$n<m$，如果$AB=E$（E是n阶单位矩阵），证明：矩阵B的列向量组线性无关。

解 设矩阵B按列分块为$B=\left[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{\mathrm{n}}\right]$，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n=0$ 即$BX=0$，其中$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T$，于是$ABX=0$，即$X=0$