武汉大学 2021-2022 第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷

1、（9 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x\cos x}}{\tan x^3}$.

2、（10 分）已知曲线 $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, 并求该曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

3、（10 分）已知 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$，求 $f(x)$，并计算 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

4、（10 分）（1）求齐次线性微分方程 $y^{(4)}-6y'''+13y''=0$ 的通解；

（2）对于非齐次方程 $y^{(4)}-6y'''+13y''=x+\mathrm{e}^{3x}\cos 2x$，用待定系数法给出特解的形式（无需求出其中的待定系数的数值）.

5、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0 \\ \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 及导函数 $f'(x)$.

6、（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y+x-2y=0$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=0}, \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{x=0}$，并讨论曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 附近的凹凸性.

7、（7 分）计算反常积分 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}\,x$.

8、（7 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{x}{n}\right)^n$.

9、（7 分）求微分方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y\ \ (x>0)$ 的通解.

10、（7 分）求曲线 $y=\dfrac{|x|}{1+x^4}$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

11、（7 分）计算抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

12、（5 分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$（$a>0$）上二阶可导，且 $f(a)=a$. 证明：

（1）至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）至少存在一点 $\eta\in(-a,a)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

13、（3 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 内可导，$f'(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}\,x$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

武汉大学 2021-2022 第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷　参考解答

1、（9 分）　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x\cos x}}{\tan x^3}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x\cos x}}{\tan x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1+x\cos x)}{x^3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x\cos x})}$　5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x^2}\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{4}$　9 分

2、（10 分）已知曲线 $\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, 并求该曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解： 由 $\mathrm{d}\,x=(1+\cos t)\,\mathrm{d}\,t$， $\mathrm{d}\,y=\cos t\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\cos t=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}\,t$，可得：

$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)\,\mathrm{d}\,t}{(1+\cos t)\,\mathrm{d}\,t}=\dfrac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}{1+\cos t}$,　5 分

又点 $(0,1)$ 对应 $t=0$ 解得 $y'\big|_{x=0,y=1}=\dfrac{1}{2}$.　8 分

因此，切方程为： $y=\dfrac{1}{2}x+1$.　10 分

3、（10 分）已知 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$，求 $f(x)$，并计算 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

解： 对等式两边求导可得 $xf(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因此　$f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$　5 分

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x(1+x^2)}=\int\dfrac{1+x^2-x^2\,\mathrm{d}\,x}{x(1+x^2)}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x}-\int\dfrac{x\,\mathrm{d}\,x}{1+x^2}$　8 分

$=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C=\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C$　10 分

4、（10 分）（1）求齐次线性微分方程 $y^{(4)}-6y'''+13y''=0$ 的通解；

（2）对于非齐次方程 $y^{(4)}-6y'''+13y''=x+\mathrm{e}^{3x}\cos 2x$，用待定系数法给出特解的形式（无需求出其中的待定系数的数值）.

解：（1）该微分方程的特征方程为：$\lambda^4-6\lambda^3+13\lambda^2=0$，　5 分

它有特征根：$\lambda_{1,2}=0$（二重），$\lambda_{3,4}=3\pm 2i$，故而该齐次线性微分方程的通解为: $y=C_1+C_2x+(C_3\sin 2x+C_4\cos 2x)\mathrm{e}^{3x}$.　8 分

（2）非齐次方程的特解的形式为：$y^*=x^2(C_1+C_2x)+x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)\mathrm{e}^{3x}$.　10 分

5、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>0\\ \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 及导函数 $f'(x)$.

解： 显然 $f(0)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b=0$，得 $b=0$　3 分

另一方面， $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x^2}=1$，而

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{x}=a$，由在 $x=0$ 处可导可知 $a=1$. 6 分

易得导函数 $f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ e^{x^2}, & x\le 0\end{cases}$. 8 分

6、（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y+x-2y=0$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$，并讨论曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 附近的凹凸性.

解：由方程可知， $x=0$ 时 $y=0$，方程两边对 x 求导得：$\dfrac{dy}{dx}\cos y+1-2\dfrac{dy}{dx}=0$ 4 分

代入 $x=0$， $y=0$ 解得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{1}{2-\cos y}\right|_{(x,y)=(0,0)}=1$. 6 分

方程 $\dfrac{dy}{dx}\cos y+1-2\dfrac{dy}{dx}=0$ 两边对 x 求导得：$\dfrac{d^2y}{dx^2}\cos y-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\sin y-2\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$，

可得 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=0$ 8 分

此外，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sin y}{2-\cos y}=\dfrac{-\sin y}{(2-\cos y)^3}$. 由于在点 $(0,0)$ 处函数的一阶导数大于 0，可知在 $x=0$ 的左侧充分小的邻域内 $y<0$，从而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$，曲线下凸；在 $x=0$ 的右侧充分小的邻域内 $y>0$，从而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$，曲线上凸. 10 分

7、（7 分）计算反常积分 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

解： $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1\ln x\,d\sqrt{x}$ 3 分

$=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{0^+}^1-2\int_0^1\sqrt{x}\,d\ln x=-2\int_0^1\dfrac{\sqrt{x}}{x}dx$ 5 分

$=-4\sqrt{x}\Big|_{0^+}^1=-4$

8、（7 分）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{x}{n}\right)^n$.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{x}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)}$ 3 分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)=1$，因此 $\ln\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)\sim\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}-1$，又因为

$\cos\frac{x}{n}-1\sim 2\sin^2\frac{x}{2n}=o(\frac{x}{n})$，因此 $\ln\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)\sim\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}-1\sim\sin\frac{x}{n}\sim\frac{x}{n}$. 5 分

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sin\frac{x}{n}+\cos\frac{x}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\frac{x}{n}}=e^x$ 7 分

9、（7 分）求微分方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y\ (x>0)$ 的通解.

解：$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=xu'+u$，代入得 3 分

$xu'+u=\sqrt{1-u^2}+u$，化简为 $xu'=\sqrt{1-u^2}$ 5 分

因而，$1-u^2\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\arcsin u=\ln x+C$，变量回代得方程通解：

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln x+C,$$

(当 $1-u^2=0$ 时由特解 $y=x$ 及 $y=-x$.) 7 分

10、（7 分）求曲线 $y=\frac{|x|}{1+x^4}$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

解：图形面积 $S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 3 分

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x^2=\arctan x^2\Big|_0^{+\infty}$$ 5 分

$$=\frac{\pi}{2}$$ 7 分

11、（7 分）计算抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

解：解法一：抛物线与 x 轴交于点 $(0,0),(2,0)$，用柱壳法可得旋转体体积：

$$V=\int_0^2 2\pi xy\,\mathrm{d}x$$ 4 分

$$=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=2\pi\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{8\pi}{3}$$ 7 分

解法二：解得 $x=\varphi(y)=1-\sqrt{1-y}$ 及 $x=\psi(y)=1+\sqrt{1-y}$，$y\in[0,1]$ 旋转体体积：

$$V=\int_0^1\pi(\psi^2(y)-\varphi^2(y))\,\mathrm{d}y$$ 4 分

$$=\int_0^1 4\pi\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y=-\frac{8\pi}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}=\frac{8\pi}{3}$$ 7 分

12、（5 分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$（$a>0$）上二阶可导，且 $f(a)=a$. 证明：

（1）至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）至少存在一点 $\eta\in(-a,a)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证明：(1) 由于 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上二阶可导，因此 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续. 又因为 $f(x)$ 是奇函数，因此 $f(0)=0$. 由拉格朗日中值定理可知至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a-0}{a}=1.$$ 3 分

(2) $f(x)$ 是奇函数且 $f(a)=a$ 可知 $f(-a)=-a$，与（1）的证明相似，可以证明存在 $\xi_1\in(-a,0)$，使得 $f'(\xi_1)=1$，因此有

$$f'(\xi)-1=f'(\xi_1)-1=0,$$

令辅助函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x\left(f'(x)-1\right)$，由 $f'(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续可导可知，$\varphi(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续可导，又有 $\varphi(\xi)=\varphi(\xi_1)=0$，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\eta\in(\xi_1,\xi)\subset(-a,a)$ 使得

$$0=\varphi'(\eta)=\mathrm{e}^\eta\left(f'(\eta)-1\right)+\mathrm{e}^\eta f''(\eta)=\mathrm{e}^\eta\left(f''(\eta)+f'(\eta)-1\right)$$

即有 $f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$，也就是 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$. 5 分

13、（3 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 内可导，$f'(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

证明：方法一：计算可得 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$，

$$=f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\left(f(k+1)-f(x)\right)\mathrm{d}x\right).$$

由 $f'(x)<0$ 可知 $f(x)$ 单调递减，因此

$$0>f(k+1)-f(x)>f(k+1)-f(k),\ x\in(k,k+1),$$

因此，
$$0\ge\int_k^{k+1}\left(f(k+)-f(x)\right)\mathrm{d}x\ge f(k+1)-f(k).$$

所以，数列 a_n 单调递减，且

$$a_n=f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\left(f(k+1)-f(x)\right)\mathrm{d}x\right)\ge f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1)-f(k)\right)=f(n)\ge A.$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 3 分

方法二：计算可得 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)+f(n)$，

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\left(f(k)-f(x)\right)\mathrm{d}\,x\right)+f(n).$$

由 $f'(x)<0$ 可知 $f\left(x\right)$ 单调递减，因此

$$0<f(k)-f(x)<f(k)-f(k+1),\ x\in(k,k+1),$$

因此，
$$0\le\int_k^{k+1}\left(f(k)-f(x)\right)\mathrm{d}\,x\le f(k)-f(k+1).$$

所以，数列 $b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}f(k)-f(x)\mathrm{d}\,x\right)$ 单调递增，且

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\left(f(k)-f(x)\right)\mathrm{d}\,x\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k)-f(k+1)\right)=f(1)-f(n)\le f(1)-A\quad.$$

即 $b_n\le f(1)-A$，数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 由 $a_n=b_n+f(n)$ 可知

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 3 分