武汉大学 2020-2021 学年第二学期期末考试

线 性 代 数 A（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

考 生 学 号

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

缺考填涂：

填涂样例	正确填涂 ▬ 错误填涂 √ × ◧ ●	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

请将选择题、填空题的答案填于此：

一、单项选择题：

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

二、填空题：

(1) __________ (2) __________ (3) __________ (4) __________

符号说明：$\det(\boldsymbol{A})$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式；$\boldsymbol{A}^*$ 指方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；$R(\boldsymbol{A})$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。

一、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则必有______.

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$； (B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$；

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$； (D) $|\boldsymbol{A}|=0$.

(2) 已知 $D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{vmatrix}$，则 $2A_{12}+A_{22}-4A_{32}=$______. 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(A) -1； (B) 0； (C) 1； (D) 2.

(3) 已知 α_1，α_2，α_3 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个不同的解，则下列向量

$$\alpha_1-\alpha_2，\ \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3，\ \frac{2}{3}(\alpha_1-\alpha_2)，\ \alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3$$

中是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解的向量共有______.

(A) 4 个 (B) 3 个 (C) 2 个 (D) 1 个

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则______.

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的且是合同的 (B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的但不是合同的

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是相似的但是合同的 (D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是相似的也不是合同的

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

(2) 已知某齐次线性方程组的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$，如果此通解也是线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\end{cases}$ 的解，则常数 k_1,k_2 必满足________.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & c+2 & 0\\ 1 & 0 & c-5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 c 的取值范围为________.

(4) 设(Ⅰ)：α_1，α_2，α_3；(Ⅱ)：β_1，β_2，β_3 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两组基，且

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2，\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3，\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3，$$

则由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 $S=$________，$\xi=5\beta_1-4\beta_2+2\beta_3$ 在基(Ⅰ)下的坐标为________.

三、(12 分) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2\\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0\end{vmatrix}$ 的值，这里 $n\geq 3$.

四、（12 分）已知矩阵方程$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

五、（12 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases}-x_1-2x_2+ax_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$，试问：当 a,b 满足什么条件时，方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？在有无穷多解时，求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

武汉大学 2020-2021 学年第二学期期末考试

线性代数A（A卷答题卡）

考生学号

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

姓名 ____________ 班级 ____________

填涂样例：正确填涂 ▬ 错误填涂 √ × ◨ ●

注意事项
1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

缺考填涂：

六、（12 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

七、证明（16 分，每小题 8 分）：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，试证：若 3 维非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}^2\alpha_3=\alpha_1$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(2) 假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 a，$\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 b，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 $a+b$.

八、（6 分）用正交变换将实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形，并判断此二次型是否正定.

九、（6 分）设

（Ⅰ）：$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$；

（Ⅱ）：$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$,

是 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中两组基，定义 $\sigma(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$， $\forall \boldsymbol{X}\in \boldsymbol{R}^{2\times 2}$.

(1) 试证 σ 是 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的线性变换；

(2) 求由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵；

(3) 求 σ 在基（Ⅰ）下的矩阵.