武汉大学数学与统计学院

2008—2009 第一学期《微积分 A1》期末考试试题

（信息 216 学时）

一、（$6\times 7'$）试解下列各题：

1、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\dfrac{n^3-1}{n(n+2)}]$

2、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)\cdot\ln(1+2x)}{1-\cos 2x}$

3、设 $\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=f(x-t)\end{cases}$，$f$ 二阶可导, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

4、计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(x+\cos x)\mathrm{d}x$

5、设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1 & ,0<x\le 1\\ x & ,x>1\end{cases}$ 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$

6、设 $y=\sin^a x+a^{\sin x}+x^{\sin x}$（$a$ 为正常数），求 y'

二、（15 分）已知函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,求：

1、函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间，极大、极小值；

2、函数图形的凸性区间、拐点、渐近线 。

三、（12）设 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b & ,x\le 0\\ \sin ax & ,x>0\end{cases}$

问: (1) a,b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

(2) 若另有 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,证明 $F[f(x)]$ 在 $x=0$ 处可导；

四、（12）一铅直倒立在水（水的比重为 1）中的等腰三角形水闸门，其底为 6 米，高为 3 米，且底与水面相齐，求：

1、水闸所受的压力。

2、作一水平线将此闸门分为上下两部分，使两部分所受的压力相等。

五、（12 分）设函数 $y(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $y'(0)=-1$

1、试由方程 $y(x)=1-\dfrac{1}{2}\int_0^x[y''(t)+y(t)-e^{-t}]\mathrm{d}t$ 确定函数 $y(x)$；

2、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$.

六、（7 分）设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$,证明：对于任意正常数 k ，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使

$$f'(\xi)-k\,f(\xi)g'(\xi)=0$$

武汉大学数学与统计学院

2008—2009 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、试解下列各题：（$6\times 7'$）

1、解：$\lim\limits_{n\to\infty}[n-\dfrac{n^3-1}{n(n+2)}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-n^3+1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n(n+1)}=2$

2、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+2x)}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{2x^2}=1$

3、解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(\sin t)\cdot\cos t}{1+\cos t}$，　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{f''(\sin t)\cdot(1+\cos t)\cos^2 t-f'(\sin t)\cdot\sin t}{(1+\cos t)^3}$

4、解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(x+\cos x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x+\sin x\cos x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2$

5、解：$f'(x)=\begin{cases}1 & x\in(-\infty,0]\\ e^x & x\in(0,+\infty)\end{cases}$　$\int f'(x)dx=\begin{cases}x+c_1 & x\in(-\infty,0]\\ e^x+c_2 & x\in(0,+\infty)\end{cases}$

当 $x=0$ 时,原函数连续,得 $c_2=c_1-1$　即　$f(x)=\begin{cases}x+c_1 & x\in(-\infty,0]\\ e^x+c_1-1 & x\in(0,+\infty)\end{cases}$

又 $f(0)=0$　得 $c_1=0$　故得　$f(x)=\begin{cases}x & x\in(-\infty,0]\\ e^x-1 & x\in(0,+\infty)\end{cases}$

6、解：$y'=a\sin^{a-1}x\cos x+a^{\sin x}\cos x\ln a+x^{\sin x}(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)$

二、（15 分）解：定义域为：$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$y'=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$　令 $y'=0\Rightarrow$ 驻点 $x=1,-5$　　$y''=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$　令 $y''=0\Rightarrow x=1$

χ	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		+	0	+
y''	—	−	−		−	0	+
y	单增	极大值点	单减		单增		单增
$y=f(x)$	上凸		上凸		上凸	拐点 (1,0)	下凸

1）故单调增加区间为：$(-\infty,-5)$、$(-1,+\infty)$　单调减少区间为：$(-5,-1)$

极大值为：$f(-5)=-\dfrac{27}{2}$，无极小值。

2）下凸区间为：$(1,+\infty)$　　上凸区间为：$(-\infty,-1);(-1,1)$

拐点为：$(1,0)$　由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\infty$，故 $x=-1$ 为函数图形的铅直渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x]=-5$

故 $y=x-5$ 为函数图形的斜渐近线。

三、（12 分）解：1、由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f_-(0)=f_+(0)$

有 $b+1\Rightarrow b=-1$　故有 $f(0)=0$　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f_-'(0)=f_+'(0)$　即

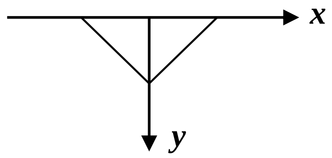
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=a$$ 所以 $a=2$ 故 $f'(0)=2$

2、$F'[f(0)]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F[f(x)]-F[f(0)]}{x-0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F[f(x)]-F[f(0)]}{f(x)-f(0)}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=F'(0)f'(0)=2F'(0)$$

四、（12 分）解：1、



如图所示：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{3-y}{3}\Rightarrow x=3-y$ 取一在面积元 $ds=2xdy$

此面积所受的压力：$dF=pds=p2xdy$ p 为 ds 上的压强，

因为水的比重为 1，所以 $p=y$ 故 $dF=pds=2xydy=2y(3-y)dy$

则 $F=2\int_0^3 y(3-y)dy=3y^2\mid_0^3-\dfrac{2}{3}y^3\mid_0^3=3^3\times\dfrac{1}{3}=9$

2、作一水平线 $y=b$ 使得闸门上下两部分所受的压力相等。即：

$2\int_0^b y(3-y)dy=\dfrac{9}{2}$ 即 $\int_0^b y(3-y)dy=\dfrac{9}{4}$ 而 $\int_0^b y(3-y)dy=\dfrac{3}{2}b^2-\dfrac{1}{3}b^3$ 故有

$\dfrac{9}{4}=b^2(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}b)\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}$ 时，即等要三角形水闸的中位线的上、下两部分所受的压力相等。

五、（12 分）解：1、由 $y(x)=1-\dfrac{1}{2}\int_0^x[y''(t)+y(t)-e^{-t}]\mathrm{d}t\Rightarrow y'(x)=-\dfrac{1}{2}[y''(x)+y(x)-e^{-x}]$

即 $y''(x)+2y'(x)+y(x)=e^{-x}$ 且 $y(0)=1,y'(0)=-1$

又 $r^2+2r+1=0\Rightarrow r_{1,2}=-1$ 又 $y^*(x)=Ax^2e^{-x}$

$y^*(x)=Ax^2e^{-x},y^{*\prime}(x)=2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x},y^{*\prime\prime}(x)\ =2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+Ax^2e^{-x}$

$2Ae^{-x}=e^{-x}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$ 得 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

由 $y(0)=1\Rightarrow c_1=1$ 而 $y'(x)=[(1+c_2x)e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}]'=[c_2-1-2c_2x]e^{-x}+xe^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

由 $y'(0)=-1\Rightarrow c_2=0$ 所以有 $y(x)=(1+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-x}$

2、$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(1+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}(1+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-x}\mathrm{d}(-x)=-\int_0^{+\infty}(1+\dfrac{1}{2}x^2)\mathrm{d}(e^{-x})$

$$=-[(1+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}\mid_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}(1+\frac{1}{2}x^2)]=-[-1+\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(e^{-x})]=-[-1+e^{-x}\mid_0^{+\infty}]=2$$

六、（7 分）解： 令 $F(x)=f(x)e^{-kg(x)}$ 则有： $F(0)=0,F(1)=0\Rightarrow F'(\xi)=0$ $\xi\in(0,1)$ 而

$F'(x)=-ke^{-kg(x)}g'(x)f(x)+e^{-kg(x)}f'(x)$ 所以有： $f'(\xi)-k\,f(\xi)g'(\xi)=0$