一、计算下列各题（10分×4＝40分）

(1) 求解方程 $z^3+8i=0$

(2) 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，已知 $u=x^2+my^2+2nxy$ 且 $f(0)=0$，求 m、n 的值和 $f(z)$

(3) 计算积分 $\int_C \bar{z}\,dz$ 的值，其中积分路径 C 是连接 -1 和 1 的

(1) 直线段 (2) 单位圆的上半周

(4) 求函数 $f(t)=e^{-|t|}$ 的 Fourier 变换.

二（15分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 在下列圆环区域中展开罗兰（Laurent）级数

(1) $|z|>1$ (2) $0<|z-i|<1$

三（15分）求函数 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+e^{\pi z}}$ 的所有奇点，如果是极点，指出它的阶数；指出∞点的性态；求在所有孤立奇点的留数.

四 利用留数定理，计算积分.（15分）

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$$

五（15分）利用 Laplace 变换解下列含初始条件的微分方程.

$$\begin{cases} y''(t)+\omega^2 y(t)=f(t) \\ y(0)=0 \quad y'(0)=C \end{cases}$$

其中 $f(t)$ 是已知函数. ω, C 是常数.

若 $f(t)=\sin t$ 则求出微分方程的解.

武汉大学试卷纸

专业________ 年级________ 学号________ 姓名________

科目______ 成绩	总分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

装订线内请勿答题

一 ① 解: $z^3=-8i$ $\quad z=\sqrt[3]{-8i}$

$$z=2e^{\left(\frac{2k\pi-\pi/2}{3}\right)i}=\begin{cases}\sqrt{3}-i & (k=0)\\ 2i & (k=1)\\ -\sqrt{3}-i & (k=-1)\end{cases}$$

② 解: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2ny \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2my+2nx \quad \partial^2 u/\partial y^2=2m$

$\because \partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2=0 \quad 2+2m=0 \quad m=-1$

故则 $u=x^2-y^2+2nxy$

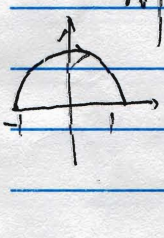
$\therefore df(z)/dz=\partial u/\partial x-i\,\partial u/\partial y=2x+2ny-i(-2y+2nx)$

$=2(1-in)z$

$f(z)=(1-in)z^2+c \quad f(0)=0$

故则 $f(z)=(1-in)z^2 \quad m=-1 \quad n\in R$ (为任意实数)

③ 解: ⓐ $\int_C \bar{z}\,dz=\int_{-1}^{1}x\,dx=0$



ⓑ $z=e^{i\theta} \quad dz=e^{i\theta}i\,d\theta \quad \bar{z}=e^{-i\theta}$

$\int_C \bar{z}\,dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}e^{i\theta}i\,d\theta=i[0-\pi]=-\pi i$

④ 解: $f(t)=e^{-|t|}$

$\therefore F(f(t))=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt$

$=\int_0^{\infty}e^{-(t+i\omega t)}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{(t-i\omega t)}dt$

$=\frac{-1}{(1+i\omega)}\left[e^{-(1+i\omega)t}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{1-i\omega}\left[e^{(1-i\omega)t}\right]_{-\infty}^{0}$

$=\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$

二 ① $|z|>1$ 故在 $z=0$ 处展开

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-i/z}\right]=\frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{1-i/z}\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(i/z)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(i)^n z^{-(n+3)}$$

② $0<|z-i|<1$ 故 $z=i$ 处展开.

$$f(z)=\frac{-1}{z-i}\left(\frac{1}{z}\right)'=\frac{-1}{z-i}\left(\frac{1}{i[1-i(z-i)]}\right)'=\frac{i}{z-i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}[i(z-i)]^n\right)'$$

$$=\frac{i}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}i^n n(z-i)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n i^{(n+1)}(z-i)^{n-2}$$

三 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+e^{\pi z}}$

$1+e^{\pi z}=0$ $e^{\pi z}=e^{(2k+1)\pi i}$ $z=(2k+1)i$ $1+z^2=0$ $z=\pm i$

故则 $z=\pm i$ 为可去奇点. $z=(2k+1)i$ ($k\neq 0$ $k\neq -1$ 的整数) 为一阶奇点.

$z=\infty$ 为非孤立奇点.

$\text{Res}[f(z),i]=0$ $\text{Res}[f(z),-i)=0$ $\text{Res}(f(z),\infty]$ 不存在.

$$\text{Res}[f(z),(2k+1)i]=\frac{1+z^2}{\pi e^{\pi z}}\bigg|_{z=(2k+1)i}=\frac{2k(2k+2)}{\pi}\quad (k\text{ 整数}, k\neq 0, k\neq -1)$$

四. 解: $x^2+a^2=0$ $x=\pm ai$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\,\text{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx\right]$$

令 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$ 则 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+a^2}$

$\because \lim\limits_{|z|\to\infty}f(z)=0$

故由约当引理可知:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx=2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{z}{z^2+a^2}\cdot e^{iz},ai\right]=2\pi i\cdot\frac{z\,e^{iz}}{2z}\bigg|_{z=ai}$$

$$=e^{-a}\pi i$$

故则 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$

五. 解: 令 $L(y(t))=Y(p)$ $L(f(t))=F(p)$

$\because L(y''(t)+\omega^2 y(t))=L(f(t))$

$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+\omega^2Y(p)=F(p)$

$\because y(0)=0$ $y'(0)=c$

$\because (p^2+\omega^2)Y(p) = c + F(p)$

$\therefore Y(p) = \frac{c+F(p)}{p^2+\omega^2} = \frac{c+F(p)}{\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\therefore y(t) = \frac{c}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}f(t) * \sin\omega t = \frac{c}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

若 $f(t) = \sin t \quad F(p) = \frac{1}{p^2+1}$

$Y(p) = \frac{c}{\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}$

$= \frac{c}{\omega}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega^2-1}\left[\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right]$

故此

$y(t) = \frac{c}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega^2-1}\sin t - \frac{1}{(\omega^2-1)\omega}\sin\omega t$

$= \frac{c}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega^2-1}\left(\sin t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$