算法设计与分析
第 1-2 章作业参考答案

作业情况

教材：算法设计技巧与分析 [沙特]M. H. Alsuwaiyel
题目编号：1.13, 1.14, 1.15, 1.38, 2.16, 2.20, 2.26, 2.32
题目范围：算法分析基本概念、数学预备知识
邮箱：wjyyy1@126.com

习题 1.13

用 true 或 false 填空。

$f(n)$	$g(n)$	$f = O(g)$	$f = \Omega(g)$	$f = \Theta(g)$
$2n^3 + 3n$	$100n^2 + 2n + 100$			
$50n + \log n$	$10n + \log\log n$			
$50n \log n$	$10n \log\log n$			
$\log n$	$\log^2 n$			
$n!$	5^n			

答案：

$f(n)$	$g(n)$	$f = O(g)$	$f = \Omega(g)$	$f = \Theta(g)$
$2n^3 + 3n$	$100n^2 + 2n + 100$	false	true	false
$50n + \log n$	$10n + \log\log n$	true	true	true
$50n \log n$	$10n \log\log n$	false	true	false
$\log n$	$\log^2 n$	true	false	false
$n!$	5^n	false	true	false

解析：对所有函数，在描述复杂度时一般只取增长最快的，因此对每一行，我们分别有：

$f(n)$	$g(n)$	$f=O(g)$	$f=\Omega(g)$	$f=\Theta(g)$
$\Theta(n^3)$	$\Theta(n^2)$	false	true	false
$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	true	true	true
$\Theta(n\log n)$	$\Theta(n\log\log n)$	false	true	false
$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log^2 n)$	true	false	false
$\Theta(n!)$	$\Theta(5^n)$	false	true	false

再去比较函数之间上下界关系，填出是否满足上述三个关系。

习题 1.14

用 Θ 符号表示下列函数：

(a) $2n+3\log^{100} n$

(b) $7n^3+100n\log n+3n$

(c) $3n^{1.5}+(\sqrt{n})^3\log n$

(d) $2^n+100^n+n!$

答案：

(a) $\Theta(n)$

(b) $\Theta(n^3)$

(c) $\Theta(n^{1.5}\log n)$

(d) $\Theta(n!)$

解析：在分析时间复杂性时，只考虑增长最快的（见例 1.6），根据 1.8.6 节，有

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec \sqrt{n} \prec n^{3/4} \prec n \prec n\log n \prec n^2 \prec 2^n \prec n! \prec 2^{n^2}$$

根据这一规则，取增长最快的一项放入 Θ 函数中即可。

习题 1.15

用 Θ 符号表示下列函数：

(a) $18n^3+\log n^8$

(b) $(n^3+n)/(n+5)$

(c) $\log n^2+\sqrt{n}+\log\log n$

(d) $n!/2^n+n^{n/2}$

答案：

(a) $\Theta(n^3)$

(b) $\Theta(n^2)$

(c) $\Theta(\sqrt{n})$

(d) $\Theta(n!/2^n)$

解析：原理同习题 1.14。

(d) 可用比值法求出两者中增长较快的一项。

$$f(n) = n!/2^n, g(n) = n^{n/2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{n!/2^n}{n^{n/2}} \\
&= \frac{n!}{2^n \cdot n^{n/2}} \\
&\approx \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{2^n \cdot n^{n/2}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^{n/2}}{(2\mathrm{e})^n} \\
\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)^2 &= \frac{2\pi n^{n+1}}{(2\mathrm{e})^{2n}} \\
&= \frac{2\pi n^{n+1}}{(4\mathrm{e}^2)^n}
\end{aligned}$$

由于 $n^n \succ (4\mathrm{e}^2)^n$，所以 $f(n) \succ g(n)$，原函数 $= \Theta(n!/2^n)$

习题 1.38

令 S 为一个 n 个正整数的集合，n 为偶数。请设计一个有效算法将 S 分成两个子集 S_1 和 S_2，使每个子集中有 $n/2$ 个元素，且 S_1 中所有元素的和与 S_2 中所有元素的和的差最大，这个算法的时间复杂性是什么?

答案：$\Theta(n \log n)$（或使用插入排序，$\Theta(n^2)$）

解析：为了使 S_1 中所有元素的和与 S_2 中所有元素的和的差最大，应让 S_1 和 S_2 分别为集合 S 中最大和最小的 $\frac{n}{2}$ 个数，所以需要进行排序，为使算法有效，使用 BOTTOMUPSORT 算法，该算法的时间复杂度为 $\Theta(n \log n)$

习题 2.16

分别按如下方法证明

$$\sum_{j=1}^{n} j\log j = \Theta(n^2\log n)$$

(a) 用代数方法；

(b) 用积分近似求和的方法。

答案：证明 $\sum_{j=1}^{n} j\log j = O(n^2\log n)$, $\sum_{j=1}^{n} j\log j = \Omega(n^2\log n)$

所以 $\sum_{j=1}^{n} j\log j = \Theta(n^2\log n)$

解析：(a)（参考例 1.12）

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j\log j &\le \sum_{j=1}^{n} n\log n \\ &= n^2\log n\end{aligned}$$

所以 $\sum_{j=1}^{n} j\log j = O(n^2\log n)$；

又

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j\log j &\ge \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \\ &\ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \log\frac{n}{2}\end{aligned}$$

所以 $\sum_{j=1}^{n} j\log j = \Omega(n^2\log n)$；

因此有 $\sum_{j=1}^{n} j\log j = \Theta(n^2\log n)$。

(b)（参考例 2.17）考虑到函数是递增的，即 $j\log j < (j+1)\log(j+1)$，

$$\int_0^n x\log x\mathrm{d}x \le \sum_{j=1}^n j\log j \le \int_1^{n+1} x\log x\mathrm{d}x$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n j\log j &\ge \int_0^n x\log x\mathrm{d}x\\ &= \frac{2n^2\log n - n^2}{4}\end{aligned}$$

所以 $\sum_{j=1}^n j\log j = O(n^2\log n)$；

又

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n j\log j &\le \int_1^{n+1} x\log x\mathrm{d}x\\ &= \frac{2(n+1)^2\log(n+1) - n^2 - 2n}{4}\end{aligned}$$

所以 $\sum_{j=1}^n j\log j = \Omega(n^2\log n)$；

因此有 $\sum_{j=1}^n j\log j = \Theta(n^2\log n)$。

习题 2.20

求解下列递推关系

(a) $f(n) = f(n-1) + n^2$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 0$；

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 1$;

(c) $f(n) = 3f(n-1) + 2^n$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 3$;

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n^2$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 1$;

(e) $f(n) = 2f(n-1) + n + 4$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 4$;

(f) $f(n) = -2f(n-1) + 2^n - n^2$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 1$;

(g) $f(n) = nf(n-1) + 1$，当 $n \ge 1$；$f(0) = 1$。

答案：（答案表示形式不唯一）

(a) $f(n) = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}, n \ge 0$

(b) $f(n) = 3 \cdot 2^n - n - 2, n \geq 0$

(c) $f(n) = 5 \cdot 3^n - 2^{n+1}, n \geq 0$

(d) $f(n) = 7 \cdot 2^n - 6 - 4n - n^2, n \geq 0$

(e) $f(n) = 10 \cdot 2^n - n - 6, n \geq 0$

(f) $f(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{27}(-2)^n - \dfrac{9n^2+12n+2}{27}, n\text{为奇数} \\ \dfrac{29}{27}(-2)^n - \dfrac{9n^2+12n+2}{27}, n\text{为偶数} \end{cases}, n \geq 0$

参考交上来的答案：$f(n) = \dfrac{31}{54} \cdot (-2)^n + 2^{n-1} - \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{4}{9}n - \dfrac{2}{27}$

(g) $f(n) = n! + \dfrac{n!}{1!} + \dfrac{n!}{2!} + \cdots + \dfrac{n!}{n!}, n \geq 0$

解析：（参考 2.8.2 节）

(a) $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n$，设 $g(n) = 2$，$h(n) = n$，

$$f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)f'(n), n \geq 1; f'(0) = f(0) = 1$$

那么

$$g(n)g(n-1)\cdots g(1)f'(n) = g(n)(g(n-1)\cdots g(1)f'(n-1)) + h(n)$$

化简得到

$$f'(n) = f'(n-1) + \frac{h(n)}{g(n)g(n-1)\cdots g(1)}, n \geq 1$$

因此

$$f'(n) = f'(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}, n \geq 1$$

得出

$$f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1$$

由 $f(n) = 2f(n-1) + n$，$g(n) = 2$，$h(n) = n$ 得

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2^n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right)\\
&= 3\cdot 2^n - n - 2, n \geq 0
\end{aligned}
$$

(c) $f(n) = 3f(n-1) + 2^n$，设 $g(n) = 3$，$h(n) = 2^n$，$f'(0) = f(0) = 3$，那么代入

$$
f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1
$$

得

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 3^n\left(3+\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{3^i}\right)\\
&= 5\cdot 3^n - 2^{n+1}, n \geq 0
\end{aligned}
$$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n^2$，设 $g(n) = 2$，$h(n) = n^2$，$f'(0) = f(0) = 1$，那么代入

$$
f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1
$$

得

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2^n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{2^i}\right)\\
&= 7\cdot 2^n - 6 - 4n - n^2, n \geq 0
\end{aligned}
$$

(e) $f(n) = 2f(n-1) + n + 4$，设 $g(n) = 2$，$h(n) = n + 4$，$f'(0) = f(0) = 4$，那么代入

$$
f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1
$$

得

$$\begin{aligned} f(n) &= 2^n\left(4+\sum_{i=1}^{n}\frac{i+4}{2^i}\right) \\ &= 10\cdot 2^n - n - 6, n \geq 0 \end{aligned}$$

(f) $f(n) = -2f(n-1) + 2^n - n^2$，设 $g(n) = -2$，$h(n) = 2^n - n^2$，$f'(0) = f(0) = 1$，

那么代入

$$f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1$$

得

$$\begin{aligned} f(n) &= (-2)^n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i - i^2}{(-2)^i}\right) \\ &= \begin{cases} (-2)^n\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{(-2)^i}\right), n\text{为奇数} \\ (-2)^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{(-2)^i}\right), n\text{为偶数} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-2)^n\left(\frac{2}{27}+\frac{18n^2+24n+4}{27(-2)^{n+1}}\right), n\text{为奇数} \\ (-2)^n\left(\frac{29}{27}+\frac{18n^2+24n+4}{27(-2)^{n+1}}\right), n\text{为偶数} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{27}(-2)^n - \frac{9n^2+12n+2}{27}, n\text{为奇数} \\ \frac{29}{27}(-2)^n - \frac{9n^2+12n+2}{27}, n\text{为偶数} \end{cases}, n \geq 0 \end{aligned}$$

(g) $f(n) = nf(n-1) + 1$，设 $g(n) = n$，$h(n) = 1$，$f'(0) = f(0) = 1$，

那么代入

$$f(n) = g(n)g(n-1)\cdots g(1)\left(f'(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h(i)}{g(i)g(i-1)\cdots g(1)}\right), n \geq 1$$

得

$$\begin{aligned} f(n) &= n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\right) \\ &= n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!}, n \geq 0 \end{aligned}$$

习题 2.26

用代入法找出下面递推式的上界

$$f(n) = f(\lfloor n/4 \rfloor) + f(\lfloor 3n/4 \rfloor) + n\text{，当}n \geq 4\text{；若}n < 4, f(n) = 4$$

用 O 符号来表示解。

答案：根据定理 2.7，可得递推上界为 $O(n\log n)$

解析：(参考例 2.26) 使用代入法，猜测对于某个常数 $c > 0$，$f(n) \leq cn\log n + n$，假定这个猜测对 $\lfloor n/4 \rfloor$ 和 $\lfloor 3n/4 \rfloor$ 都成立，$n \geq 4$，在递推式中代入 $f(n)$，得到

$$\begin{aligned} f(n) &= f(\lfloor n/4 \rfloor) + f(\lfloor 3n/4 \rfloor) + n \\ &\leq c\lfloor n/4 \rfloor \log\lfloor n/4 \rfloor + \lfloor n/4 \rfloor + c\lfloor 3n/4 \rfloor \log\lfloor 3n/4 \rfloor + \lfloor 3n/4 \rfloor + n \\ &\leq c\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} + \frac{n}{4} + c\frac{3n}{4}\log\frac{3n}{4} + \frac{3n}{4} + n \\ &= cn\log n + n + cn(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log\frac{3}{4}) + n \\ &= cn\log n + n + cne + n \end{aligned}$$

而 $e = \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} < 0$，为了使 $f(n) \leq cn\log n + n$，必有 $cen + b \leq 0$ 或 $ce \leq -1$ 成立。那么得到 $f(n) \leq \frac{-bn\log n}{e} + bn$。当 $n = 1$ 时不等式成立，那么可以推出

$$f(n) \leq \frac{-bn\log n}{\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log\frac{3}{4}} + n$$

对于所有 $n \geq 1$ 成立。即可以使用推论 2.2，得出上界为 $O(n\log n)$。

习题 2.32

用更换变元法解下面的递推式

$$f(n) = 2f(\sqrt{n}) + n\text{，当} n \geq 4\text{；若} n < 4, f(n) = 1$$

假定 n 具有形式 2^{2^k}。找出函数 $f(n)$ 的渐近表现。

答案：$f(n) = \log n + \log n \sum_{i=2}^{\log\log n} \frac{2^{2^i}}{2^i} = \Theta(n)$

解析：令 $n = 2^{2^k}, k \geq 2$，那么 $f(n)$ 可以写成

$$f(2^{2^k}) = \begin{cases} 1, & k < 2 \\ 2f(2^{2^{k-1}}) + 2^{2^k}, & k \geq 2 \end{cases}$$

设 $g(k) = f(2^{2^k})$，就有

$$g(k) = \begin{cases} 1, & k < 2 \\ 2g(k-1) + 2^{2^k}, & k \geq 2 \end{cases}$$

设 $2^k h(k) = g(k)$，$h(1) = g(1) = 1$，可得

$$2^k h(k) = 2(2^{k-1}h(k-1)) + 2^{2^k}$$

$$\begin{aligned} h(k) &= h(k-1) + 2^{2^k - k} \\ &= h(k-1) + \frac{2^{2^k}}{2^k} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{2^{2^i}}{2^i} \\ &= 1 + \frac{2^4}{2^2} + \frac{2^8}{2^3} + \frac{2^{16}}{2^4} + \cdots + \frac{2^{2^k}}{2^k} \end{aligned}$$

$$f(2^{2^k}) = g(k) = 2^k + 2^k \sum_{i=2}^{k} \frac{2^{2^i}}{2^i}$$

代回 $k = \log\log n$，得

$$f(n) = g(\log\log n) = \log n + \log n \sum_{i=2}^{\log\log n} \frac{2^{2^i}}{2^i}$$

在 $f(n)$ 中，2^{2^i} 增长最快，也即 $h(k)$ 中的 2^{2^k}。当 $i = \log\log n$ 时，$\log n = 2^i$，所以 $f(n)$ 的渐进表现是 $\Theta(n)$。

总结

题目编号： 1.13, 1.14, 1.15, 1.38, 2.16, 2.20, 2.26, 2.32
日期： 2022 年 10 月 9 日
批改人： 王骏峣
邮箱： wjyyy1@126.com
习题 1.13：两个函数关系之间的 O, Ω, Θ，要么满足 1 个，要么满足 3 个，不会有 0 个或两个。
习题 1.15：可以算一下 d 题，确定哪个式子决定了函数的主要复杂性。
习题 1.38：可以用 BOTTOMUPSORT，也可以用 INSERTSORT。
习题 2.20：有不同的解和讨论方式，易于化简的要化简。
习题 2.26：可以直接用定理 2.7 得出答案，但是要写代入法的过程。
习题 2.32：与 2.20 题目里的式子存在差异，所以不能直接套用。