武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试线性代数 A 解答

一、（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

二、（8 分）设 $A^2+2A-B=0$，其中 B 是 n 阶矩阵 $|B|\neq 0$，证明矩阵方程 $2AX=BX+C$ 对任意 n 阶矩阵 C 都有唯一的解矩阵 X.

三、（10 分）设 $\alpha_1=(2,-1,3)^T$，$\alpha_2=(4,-2,5)^T$，$\alpha_3=(2,-1,2)^T$，试求一组不全为 0 的常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$。

四、（10 分）问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=3+2\lambda \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式。

五、（10 分）用初等变换求矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩，并写出行向量组的一个最大线性无关组。

六、（8 分）设三阶方阵 A 有一特征值是 2，其相应的特征向量有 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$；另一特征值为 -1，其相应的特征向量有 $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，求 $A\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

七、（10 分）已知 A，B 为 3 阶矩阵，且满足方程 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（1） 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；（2）求矩阵 A.

八、（10 分）用正交变换化二次型 $f=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并判断二次型的正定性。

九、（8 分）设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，证明：如果 β,γ 都不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，则向量组 $U:\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与向量组 $V:\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价.

十、（10 分）(1) $1+x,x+x^2,x^2-1$ 是否可作为 $\mathrm{span}\{1+x,x+x^2,x^2-1\}$ 的一个基？求 $\mathrm{span}\{1+x,x+x^2,x^2-1\}$ 维数.

(2) 求 $V\to W$ 的线性变换 $T(a,b,c)=\begin{pmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{pmatrix}$ 的值域的基和零度空间的基

十一、（8 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$A\neq 0$ 且 $A\neq I$.证明: $A^2=A$ 的充分必要条件是 $r(A)+r(A-I)=n$.

武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试线性代数 A 解答

一、（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

解　依第一列展开

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} x+(-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1} y\cdot y^{n-1}=x^n+(-1)^{n+1} y^n \ (n\ge 2)$$

二、（8 分）设 $A^2+2A-B=0$，其中 B 是 n 阶矩阵 $|B|\neq 0$, 证明矩阵方程 $2AX=BX+C$ 对任意 n 阶矩阵 C 都有唯一的解矩阵 X.

解　由 $A^2+2A=B$ 知 $|A|\neq 0$ 从而 $2A-B=-A^2$ 知 $|2A-B|\neq 0$.

故 $(2A-B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 有唯一解, 从而 $(2A-B)X=c$ 有唯一解　　$X=(2A-B)^{-1}C.$

三、（10 分）设 $\alpha_1=(2,-1,3)^T$，$\alpha_2=(4,-2,5)^T$，$\alpha_3=(2,-1,2)^T$，试求一组不全为 0 的常数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$。

解　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 所以有

$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$，即　$k_1=1, k_2=-1, k_3=1$

四、（10 分）问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=3+2\lambda \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式。

解 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{bmatrix}$，当$\lambda=1$时，方程组有解，此时

$$A\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\therefore X=k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

五、（10 分）用初等变换求矩阵$\begin{bmatrix}3&0&5&-3&0\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\2&1&1&1&0\\3&-1&2&-1&2\end{bmatrix}$的秩，并写出行向量组的一个最大线性无关组。

解 $\begin{pmatrix}3&0&5&-3&0\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\2&1&1&1&0\\3&-1&2&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\1&0&-1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&3&-1&-2\\0&0&8&-5&-3\end{pmatrix}$ 　秩$(A)=4$

$\alpha_1=(3,0,5,-3,0),\alpha_2=(1,0,-1,1,1),\alpha_4=(2,1,1,1,0),\alpha_5=(3,-1,2,-1,2)$

是其行向量组的一个最大线性无关组。

六、（8 分）设三阶方阵A有一特征值是 2, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$; 另一特征值为$-1$, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$, 求$A\begin{bmatrix}3\\4\\-6\end{bmatrix}$.

解 由已知$A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$， 而$\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$$

七、（10 分）已知 A, B 为 3 阶矩阵，且满足方程 $2A^{-1}B = B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

（1） 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；　（2）求矩阵 A.

解 (1) $AB-2B-4A+8E=(A-2E)(B-4E)=8E$　$(A-2E)^{-1}\dfrac{1}{8}(B-4E)$

(2) $AB-4A=A(B-4E)=2B$，$A=2B(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

八、（10 分）用正交变换化二次型 $f=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并判断二次型的正定性。

解　$\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=4$, $e_1=(0,1,0)^T$, $e_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

经正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$　f 化成标准形：$2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$　正定。

九、（8 分）设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, β,γ 线性相关，证明：如果 β,γ 都不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，则向量组 $U:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, β 与向量组 $V:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, γ 等价.

证明 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, β,γ 线性相关, 有不全为 0 的数 $k_i(i=1,\cdots,s+2)$，使

$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta+k_{s+2}\gamma=0 \cdots\cdots(*)$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，故 k_{s+1},k_{s+2} 不全为 0。

若 $k_{s+1}\neq 0, k_{s+2}=0,$ 则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，与已知矛盾，故此情形不存在。

同样不会有 $k_{s+1}=0, k_{s+2}\neq 0,$。因此 $k_{s+1}\neq 0, k_{s+2}\neq 0.$

由此据 $(*)$ 式知 β 可由 V 线性表出，U 中的其它向量显然可由 V 线性表出，故 U 可由 V 线性表出。

同理 V 可由 U 线性表出，因而 U 与 V 等价。

十、（10 分）(1) $1+x, x+x^2, x^2-1$ 是否可作为 $\mathrm{span}\{1+x, x+x^2, x^2-1\}$ 的一个基？求

$\mathrm{span}\{1+x, x+x^2, x^2-1\}$ 维数.

(2) 求$V \to W$的线性变换$T(a,b,c)=\begin{pmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{pmatrix}$的值域的基和零度空间的基

解：(1) $[1+x, x+x^2, x^2-1]=[1,x,x^2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，而$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故$1+x, x+x^2$可作为$\mathrm{span}\{1+x, x+x^2, x^2+1\}$的一个基，维数是 2.

(2) $T(a,b,c)=\begin{pmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{pmatrix}=(E_{11}E_{12}E_{22})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故 $R(T)$的基为$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\ker(T)$的基为$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

十一、（8 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为n阶方阵，$A \neq 0$且$A \neq I$.证明: $A^2=A$的充分必要条件是$r(A)+r(A-I)=n$.

证明必要性：由$A^2=A \Rightarrow A(A-I)=0 \Rightarrow r(A)+r(A-I) \leq n$，

又$r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A) \geq r(I)=n$故$r(A)+r(A-I)=n$。（3 分）

充分性: 设$r(A)=r, 0<r<n, r(A-I)=n-r$, 得方程组$Ax=0$的基础解系含$n-r$个向量，即得属于特征值零的线性无关的特征向量有$n-r$个；又因方程组$(A-I)x=0$的基础解系含$r$个向量，即得属于特征值 1 的线性无关的特征向量有r个，即代数重数等于几何重数，A 有n个线性无关的特征向量，所以 A 可对角化。即存在可逆的P，使$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$,

$A=PDP^{-1}, A^2=PDP^{-1}PDP^{-1}=PD^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$，