理论力学第 15 次作业

6.1

对于线性三原子分子

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$$U=\frac{k}{2}(x_2-x_1-b)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_2-b)^2$$

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2-\frac{k}{2}(x_2-x_1-b)^2-\frac{k}{2}(x_3-x_2-b)^2$$

令

$$y_1=x_2-x_1$$
$$y_2=x_3-x_2$$

则

$$mx_1+mx_3+Mx_2=0$$

$$U=\frac{k}{2}(y_1-b)^2+\frac{k}{2}(y_2-b)^2$$

$$x_2=\frac{m}{2m+M}(y_1-y_2)$$

$$x_1=\frac{m}{2m+M}(y_1-y_2)-y_1=-\left[y_1\frac{m+M}{2m+M}+y_2\frac{m}{2m+M}\right]$$
$$x_3=\frac{m}{2m+M}(y_1-y_2)+y_2=y_1\frac{m}{2m+M}+y_2\frac{m+M}{2m+M}$$

$$\dot{x}_1^2=\dot{y}_1^2\left(\frac{m+M}{2m+M}\right)^2+\dot{y}_2^2\left(\frac{m}{2m+M}\right)^2+2\dot{y}_1\dot{y}_2\frac{m+M}{2m+M}\frac{m}{2m+M}$$
$$\dot{x}_2^2=\dot{y}_1^2\left(\frac{m}{2m+M}\right)^2+\dot{y}_2^2\left(\frac{m+M}{2m+M}\right)^2+2\dot{y}_1\dot{y}_2\frac{m+M}{2m+M}\frac{m}{2m+M}$$
$$\dot{x}_3^2=\dot{y}_1^2\left(\frac{m}{2m+M}\right)^2+\dot{y}_2^2\left(\frac{m}{2m+M}\right)^2-2\dot{y}_1\dot{y}_2\left(\frac{m}{2m+M}\right)^2$$

$$T=\frac{m(m+M)}{2(2m+M)}\left[\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2\right]+\dot{y}_1\dot{y}_2\frac{m^2}{2m+M}$$

写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\frac{m(m+M)}{(2m+M)} & \frac{m^2}{2m+M}\\ \frac{m^2}{2m+M} & \frac{m(m+M)}{(2m+M)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{U}-\omega^2\boldsymbol{T}|=\begin{vmatrix}k-\frac{m\omega^2(m+M)}{(2m+M)} & \frac{m^2}{2m+M}\\ \frac{m^2}{2m+M} & k-\frac{m\omega^2(m+M)}{(2m+M)}\end{vmatrix}=0$$

解得

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2=\frac{k}{m}+2\frac{k}{M}$$

只有两个频率，所以问题被化简为两个自由度。

6.2

势能

$$V=\frac{k}{2}(x_2-x_1-b)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_2-b)^2+\frac{k}{2}(x_2-x_{02})^2$$

$$b=x_{02}-x_{01}=x_{03}-x_{02}$$

令

$$\eta_i=x_i-x_{0i}$$

则

$$V=\frac{k}{2}(\eta_2-\eta_1)^2+\frac{k}{2}(\eta_3-\eta_2)^2+\frac{k}{2}\eta_2^2$$

$$=\frac{k}{2}\left[\eta_1^2+\eta_2^2-2\eta_1\eta_2+\eta_2^2+\eta_3^2-2\eta_2\eta_3+\eta_2^2\right]$$

$$=\frac{k}{2}\left[3\eta_2^2+\eta_1^2-\eta_1\eta_2-\eta_1\eta_2+\eta_3^2-\eta_2\eta_3-\eta_2\eta_3\right]$$

写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}k & -k & 0\\ -k & 3k & -k\\ 0 & -k & k\end{bmatrix}$$

动能

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right)+\frac{M}{2}\dot{x}_2^2=\frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_3^2\right)+\frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2$$

写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{V}-\omega^2\boldsymbol{T}|=\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 3k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & m \end{vmatrix}=0$$

解得

$$(k-\omega^2 m)(3k^2-3km\omega^2-kM\omega^2+mM\omega^4-2k^2)=0$$

当 $k-\omega^2 m=0$ 时

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

当 $3k^2-3km\omega^2-kM\omega^2+mM\omega^4-2k^2=0$ 时

$$mM\omega^4-(kM+3km)\omega^2+k^2=0$$

解得

$$\omega_2=\sqrt{\frac{kM+3km+k\sqrt{9m^2+2mM+M^2}}{2mM}}$$

$$\omega_3=\sqrt{\frac{kM+3km-k\sqrt{9m^2+2mM+M^2}}{2mM}}$$

因为没有一个本征值为零，所以平移模消失。

6.3

(a)

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2+R^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)-(-mgR\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2+R^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)+mgR\cos\theta$$

欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$mR^2\ddot{\theta}=mR^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2-mgR\sin\theta$$

(b)

把拉格朗日量写成关于广义坐标θ的形式

$$L=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2-\left(-mgR\cos\theta-\frac{m}{2}R^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)$$

其中

$$U(\theta)=-mgR\cos\theta-\frac{m}{2}R^2\sin^2\theta\,\omega^2$$

由

$$\frac{dU}{d\theta}=mgR\sin\theta-mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta=0$$

可得

$$\sin\theta\,(g-R\omega^2\cos\theta)=0$$

所以

$$\theta=0,\ \theta=\pi,\ \cos\theta=\frac{g}{R\omega^2}$$

其中$\theta=\pi$是不稳定平衡，$\theta=0$ 是稳定平衡。

对于$\cos\theta=\frac{g}{R\omega^2}$，要存在，则有$\frac{g}{R\omega^2}\leq 1$，$\omega^2\geq\frac{g}{R}$，所以临界角速度

$$\Omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

角速度低于临界角速度时，没有$\theta=0$ 之外的稳定点。

(c)

$$\theta=\arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

6.4

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2-m_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$U=-m_1gl\cos\theta_1-m_2gl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

小振荡的情况下，可以用泰勒级数展开广义坐标函数，并将这些项从级数中去掉，使势能和动能具有二阶项。

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2-m_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$V=\frac{\dot{\theta}_1^2}{2}gl(m_1+m_2)+\frac{\dot{\theta}_2^2}{2}glm_2$$

写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{V}=gl\begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=l^2\begin{bmatrix} m_1+m_2 & -m_2 \\ -m_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

久期方程为

$$\boldsymbol{V}-\omega^2\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix} l^2(m_1+m_2)\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) & m_2l^2\omega^2 \\ m_2l^2\omega^2 & l^2m_2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) \end{vmatrix}=0$$

令

$$\omega_0^2=\frac{g}{l}$$

则

$$\omega^4-2\omega_0^2\frac{m_1+m_2}{m_1}\omega^2+\frac{m_1+m_2}{m_1}\omega_0^4=0$$

解得

$$\omega_{1,2}^2=\omega_0^2\frac{m_1+m_2}{m_1}\left[1\pm\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]$$

当$m_2\ll m_1$时，两个摆谐振频率几乎相等

设摆角

$$\theta_i=C_ka_{ik}e^{-i\omega_kt}$$

满足

$$l^2(m_1+m_2)\left(\omega_0^2-\omega_j^2\right)a_{1j}+m_2l^2\omega_j^2a_{2j}=0$$

$$m_2l^2\omega_j^2a_{1j}+l^2m_2\left(\omega_0^2-\omega_j^2\right)a_{2j}=0$$

解得

$$\theta_1(t)=\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$\theta_2(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

初始条件为

$$\theta_1(0)=\theta_0$$
$$\theta_2(0)=0$$
$$\dot{\theta}_1(0)=0$$
$$\dot{\theta}_2(0)=0$$

$$\theta_1(t)=\theta_0\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

$$\theta_2(t)=-\theta_0\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\sin\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

6.7

$$V_y=\frac{k}{2}(y_2-y_1)^2+\frac{k}{2}(y_3-y_2)^2$$

$$V_z=\frac{k}{2}(z_2-z_1)^2+\frac{k}{2}(z_3-z_2)^2$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{y}_1+\dot{y}_3+\dot{z}_1+\dot{z}_3)+\frac{1}{2}M(\dot{y}_2+\dot{z}_2)$$

三个坐标完全独立可分离，对于相同的小振动

$$V_y=\frac{k}{2}\left(y_1^2+2y_2^2+y_3^2-2y_1y_2-2y_2y_3\right)$$

令

$$\zeta_1=\frac{y_1+y_3}{\sqrt{2}},\ \zeta_2=y_2,\ \zeta_3=\frac{y_1-y_3}{\sqrt{2}}$$

$$V_y=\frac{k}{2}\left(\zeta_1^2+2\zeta_2^2+\zeta_3^2-2\sqrt{2}\zeta_1\zeta_2\right)$$

$$T_y=\frac{1}{2}m\left(\dot{\zeta}_1^2+\dot{\zeta}_3^2\right)+\frac{1}{2}M\dot{\zeta}_2^2$$

久期方程为

$$
\boldsymbol{V}-\omega^2\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -\sqrt{2}k & 0 \\ -\sqrt{2}k & 2k-\omega^2 M & 0 \\ 0 & 0 & k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0
$$

解得

$$
\omega_1=0
$$

$$
\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}
$$

$$
\omega_3=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}
$$