武汉大学 2020-2021 期中试题

高等数学 B2

一、（7 分）已知向量 $\vec{a}=\{0,1,-1\},\vec{b}=\{1,-1,4\}$，求 m 使得 $\vec{a}+m\vec{b}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为零.

二、（7 分）求过两点 $A(1,0,1)$，$B(-1,2,1)$ 且与直线 $\begin{cases}x-y+2z-3=0\\x+2y-z-4=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

三、（6 分）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$, $f(x,x^2)=2x^2\ln x$，求 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 的全微分.

四、(9 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$，问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点：**(1)** 是否连续？**(2)** 偏导数是否存在？**(3)** 是否可微？（需证明）

五、(8 分) 设 $z=\sin(xy)+f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$, 其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

六、(8 分) 试在曲面 $S:2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 A(1,1,1) 到点 B(2,0,1) 的方向导数具有最大值.

七、(8 分) 设区域 D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geq 0,y\geq 0)$ 围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

八、(8 分) 计算二重积 $\iint\limits_D |x^2+y^2-2y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$.

九、（7 分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

十、(8 分) 求曲面 $x=u\,\mathrm{e}^v, y=u+v, z=\sin v+\cos u$ 在 $(u,v)=(0,0)$ 时，即在点 $(0,0,1)$ 处的切平面方程和法线方程.

十一、(8 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x+2y+3z)\,\mathrm{d}V$ 其中 Ω 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的区域.

十二、(8 分) 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $a_1x+a_2y+a_3z=1$（$a_i>0, i=1,2,3$）下的最小值.

十三、(8 分) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},\qquad G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq t^2\}, D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq t^2\}$，

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性； **(2)** 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

十四、(**附加题** 3 分) 设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续，又存在常数 $L>0$，使得对于任意两点 $(x,y_1),(x,y_2)$，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$, 证明函数 $f(x,y)$ 连续.