

# 武汉大学计算机学院

## 2019-2020 学年度第二学期期末考试

### 《组合数学》(A 卷)

1. (15 分, 每小题 5 分)

(1) 7 颗有标志的红球, 7 颗有标志的蓝球, 排成一个红蓝相间的队列, 问有多少种方案? 若这些球围成一个圆周又有多少种方案?

(2) 求  $(x - y - 2z + w)^8$  展开式中  $x^2y^2z^2w^2$  项的系数。

(3) 在一场足球比赛中, 甲队以 9:6 战胜乙队, 若在整个比赛过程中甲队的得分一直不少于乙队的得分, 求有多少种可能的比分记录?

2. (20 分, 每小题 10 分)

(1) 有红、黄、蓝三色的球各 8 个, 从中取出 9 个, 要求每种颜色的球至少一个, 问有多少种不同的取法?

(2) 用  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  四个字母组成长为  $n$  的字符串, 在字符串中要求  $a$  出现偶数次, 要求  $b$  出现奇数次, 要求  $c$  至少出现两次。求满足以上要求的长为  $n$  的字符串有多少个?

3. (15 分) 解下列递推关系。

$$\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3^n(n+1) \\ a_0 = 1, a_1 = 6 \end{cases}$$

4. (10 分) 求方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$  满足  $1 \leq x_i \leq 8$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 的整数解组的个数。

5. (15 分)

(1) 任取 5 个整数, 证明: 其中必存在 3 个数, 其和能被 3 整除。

(2) 在 7 周的暑假期间, 某同学每天至少上网 1 小时, 但每周最多上网 11 小时, 若每天上网时间为整数小时。证明: 存在若干连续天, 在此期间内该同学恰好上网 20 个小时。

6. (10 分) 用红、黄和蓝色三种颜色对一个正六面体的八个顶点进行染色,

(1) 问有多少种不同的染色方案?

(2) 若其中有 2 个顶点染红色, 2 个顶点染黄色, 其余 4 个顶点染蓝色, 问有多少种不同的染色方案? 其中正六面体的 8 个顶点的置换群  $Q$  的循环指标为

$$P_Q(x_1, x_2, \dots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$$

7. (10 分) 证明：从集合  $A$  到集合  $B$  的所有满射函数的个数为

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

其中  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ 。

8. (5 分) 证明：设  $n$  为大于或等于 2 的整数，则

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \times n\binom{n}{n} = 0$$