# 武汉大学数学与统计学院　　　B卷

## 2007－2008 第一学期《高等数学 A》期末考试试题

一、（$8\times6'$）试解下列各题：

1、计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$　　2、计算 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$　　3、计算积分：$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{arctanx}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{d}x$

4、已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $xy+e^{x+y}=1$ 所确定，在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2}{n})$

5、设，$\begin{cases}x=\cos t^2\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u\end{cases}$，试求：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ 的值。

6、确定函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点，并判定间断点的类型。

7、设 $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$，求 $y^{(n)}$

8、求位于曲线 $y=xe^{-x}$　$(x\ge0)$ 下方，$x$ 轴上方之图形面积。

二、（12 分）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(a)=0$，　$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a} & x\ne a\\ A & x=a\end{cases}$

1、试确定 $A$ 的值，使 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续；

2、求 $g'(x)$

3、证明 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

三、（15 分）设 $P$ 为曲线 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin^2 t\end{cases}$　$(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$ 上一点，作原点 $O(0,0)$ 和点 $P$ 的直线 $OP$，由曲线、直线 $OP$ 以及 $x$ 轴所围成的平面图形记为 $A$，

1、将 $y$ 表成 $x$ 的函数；

2、求平面图形 $A$ 的面积 $S(x)$ 的表达式；

3、将平面图形 $A$ 的面积 $S(x)$ 表成 $t$ 的函数 $S=S(\cos t)=S(t)$，并求 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 取得最大值时点 $P$ 的坐标；

四、（15 分）已知函数 $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ 求：

1、函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间，极大、极小值；

2、函数图形的凸性区间、拐点、渐近线　。

五、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\ne0$，

1、证明：对于任意 $x\in(0,l)$，至少存在一个 $\theta\in(0,1)$ 使

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

2、求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta$

武汉大学数学与统计学院　　　　B 卷

# 2007—2008 第一学期《高等数学 A》期末考试试题参考答案

一、试解下列各题：（$8\times 6'$）

1、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-x^2}{1+x^2}}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2、解：原式$=\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(2-x)}dx=\ln 2-\dfrac{1}{3}\int_0^1(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2-x})\mathrm{d}x$

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}(\ln(x+1)\Big|_0^1-\ln(2-x)\Big|_0^1)=\dfrac{1}{3}\ln 2$

3、解：$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}+[\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)]_1^{+\infty}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$

4、解：由 $f(0)=0$　$f'(0)=y'(0)$，又 $y+xy'+e^{x+y}(1+y')=0$；
$y'(0)=-1$　$f'(0)=-1$　　故所求切线方程为：$x+y=0$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=2f'(0)=-2$

5、解：$\dfrac{dy}{dt}=-2t^2\sin t^2\quad(t>0),\dfrac{dt}{dx}=-2t\sin t^2$

$\dfrac{dy}{dx}=t\quad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{-2t\sin t^2}\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{1}{-\sqrt{2\pi}}$

6、解：$f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点。

$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$，故 $x=k\pi\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$ 的第二类无穷间断点。

7、解：由 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$　　$y^{(n)}=[(-1)^n\cdot x^{-(n+1)}+(1-x)^{-(n+1)}]n!$

8、解：$S=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$

二、（10 分）解：1、　$A=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=f'(a)$

2、当 $x\neq a$，$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$

当 $x=a$，$g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f'(x)(x-a)}{(x-a)^2}=\dfrac{f''(a)}{2}$

所以　$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2} & x\neq a\\[2ex] \dfrac{f''(a)}{2} & x=a\end{cases}$

3、$\lim\limits_{x\to a} g'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\dfrac{f''(a)}{2}=g'(a)$

故 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

三、（10 分）解：1、$y=2(1-x^2)$

2、设曲线上有点 $P(x,2(1-x^2))$，而 $OP$ 的方程为：$Y=\dfrac{y}{x}X=\dfrac{2(1-x^2)}{x}X$ ，

则所求面积为：$S(x)=\int_0^x \dfrac{2(1-x^2)}{x}XdX+\int_x^1 2(1-X^2)dX=\dfrac{4}{3}-x-\dfrac{1}{3}x^3$

3、$S(t)=\dfrac{4}{3}-\cos t-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$，$S'(t)=\sin t(1+\cos^2 t)$

$S''(t)=\cos t(3\cos^2 t-1)$，令 $S''(t)=0\Rightarrow \cos^2 t=\dfrac{1}{3},\sin^2 t=\dfrac{4}{3}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},y=\dfrac{4}{3}$ 　　$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{dt}}$ 取得最大值时点 $P$ 的坐标；$P(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{3})$

四、（15 分）解：定义域为：$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

$y'=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}$ 　令 $y'=0\Rightarrow$ 驻点 $x=1,3$ 　　$y''=\dfrac{8}{(x-3)^3}$

| $\chi$ | $(-\infty,1)$ | 1 | $(1,3)$ | 3 | $(3,5)$ | 5 | $(5,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | | − | | — | | + |
| $y''$ | — | | − | | + | | + |
| $y$ | 单增 | 极大值点 | 单减 | | 单减 | 极小值点 | 单增 |
| $y=f(x)$ | 上凸 | | 上凸 | | 下凸 | | 下凸 |

1） 故单调增加区间为：$(-\infty,1)$、$(5,+\infty)$ 单调减少区间为：$(1,3),(3,5)$

极小值为：$f(5)=10$，极大值 $f(1)=2$。

2）下凸区间为：$(3,+\infty)$ 　　上凸区间为：$(-\infty,3)$

由 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$，故 $x=3$ 为函数图形的铅直渐近线。

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 　　$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=3$

故 $y=x+3$ 为函数图形的斜渐近线。

五、（9 分）解：1、设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[-l,l]$ 应用拉格朗日中值定理有：

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

2、由 1、所以 $\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2x\theta}\theta$

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}==\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{4x}=\dfrac{f'(0)}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2x\theta}\theta=f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$ 　故 $\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{1}{2}$