武汉大学 2015-2016 学年第二学期期末考试

线性代数 B（A 卷解答）

1、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&3&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$, 问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&3&-2\\-3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&2\\2&3&0\\-3&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&2\\2&3&0\\-2&-3&0\end{vmatrix}=0$ $\quad A$ 不可逆

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&4&4\\7&7&7\end{pmatrix}$$

2、（10 分）已知矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可交换. 试求 $\begin{vmatrix}1&2&3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$ 的值.

解 由 $\begin{pmatrix}1&2&3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可交换. 得 $a_2=b_3=1, b_1=a_3=2, a_1=b_2=3.$

所求行列式为 $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&2\\0&3&0\end{vmatrix}=18$

3、（10 分）向量 α 在基 $\alpha_1=(1,1,1),\quad \alpha_2=(0,1,1),\quad \alpha_3=(1,-1,1)$ 下的坐标 $(4,2,-2)$，求 α 在基 $\beta_1=(1,2,2),\quad \beta_2=(1,0,2),\quad \beta_3=(2,0,2)$ 下的坐标。

解 法一 由 $\alpha=4\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3$ 令 $\alpha=x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3$ 则有：

$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3$，得 $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&0\\2&2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

它有唯一解: $(x_1,x_2,x_3)=(4,-2,0)$. 故 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为: $(4,-2,0)$

法二 由 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

有题设知 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=x(\alpha_1+\alpha_2)+y(\alpha_2+\alpha_3)+z(\alpha_3+\alpha_1)$

故有 $\begin{cases}x+z=4\\x+y=2\\y+z=-2\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=4\\y=-2\\z=0\end{cases}$

故 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为: $(4,-2,0)$

4、（12 分）设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1,-1,0,$ 方阵 $B=2A^2-3A-4E$

1）试求矩阵B的特征值及与B相似的对角矩阵；2）验证B可逆，并求B^{-1}的特征值及行列式$\left|B^{-1}\right|$之值。

解　1）B的特征值分别为$u_1=-5;u_2=1;u_3=-4$　与B相似的对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

2）$|B|=(-5)\times1\times(-4)=20\neq0$ 故B可逆。B^{-1}的 3 个特征值分别为$-\frac{1}{5},1,-\frac{1}{4}$

$\left|B^{-1}\right|=-\frac{1}{5}\times1\times(-\frac{1}{4})=\frac{1}{20}$

5、（10 分）设$\alpha_1=(2,1,3,1)$，$\alpha_2=(1,2,0,1)$，$\alpha_3=(-1,1-3,0)$，$\alpha_4=(1,1,1,1)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

解　设$A=\left[\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_4'\right]$，对$A$作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是该向量组的一个最大无关组，且有$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$

6、（10 分）设二次型$f=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$其中$k$为参数，确定$k$的取值范围使$f$为正定的。

解　$A=\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$　由$\Delta_1=1>0$　$\Delta_2=2-k^2>0$　$\Delta_3=|A|=k(k-2)(k+1)>0$

可得$-1<k<0$

7、（10 分）设A是4×4矩阵且A的秩为2，B是4×1的非零矩阵，若a_1,a_2,a_3是方程组$AX=B$的解向量，且设$a_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$a_1+a_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$a_2+a_3=(1,0,4,3)^{\mathrm{T}}$，求方程组$AX=B$的通解.

解 记$b_1=a_2-a_1=(a_1+a_2)-2a_1=(-1,0,1,2)$, $b_2=a_3-a_1=(a_3+a_2)-(a_1+a_2)=(0,-2,1,-1)$,

则$Ab_1=0,Ab_2=0,$且b_1,b_2线性无关。又A的秩为2，故$AX=B$的通解为：

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1b_1+k_2b_2+a_1=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},(k_1,k_2\in R)$$

8、（12 分）已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+bx_3+x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+cx_4=1 \end{cases}$ 与方程组（Ⅱ）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ -x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_3+2x_4=-1 \end{cases}$ 同解，试确定a,b,c之值.

解　方程组（Ⅱ）的 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&2&-1&2\\0&0&1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-6&6\\0&1&0&5&-4\\0&0&1&2&-1\end{bmatrix}$

$\therefore X=k_1\begin{bmatrix}6\\-5\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-4\\-1\\0\end{bmatrix}$ 将特解 $\eta_0=\begin{bmatrix}6\\-4\\-1\\0\end{bmatrix}$ 代入（Ⅰ）入得到 $\begin{cases}6-4a-1=1\\12-4-b=4\\12-8-3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

令 $k_1=-1$ 将 $X=\begin{bmatrix}-6\\5\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-4\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 代入（Ⅰ）

$2+3-c=1\Rightarrow c=4\quad\therefore a=1,b=4,c=4.$

9、（10 分）用正交变换化二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_1x_2$ 为标准形，并写出所用正交变换及 f 的标准形。

解 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$

$e_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$e_2=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，$e_3=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$

经正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$　f 化为标准形：$y_2^2+3y_3^2$

10、（6 分）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 R^n 中 $n-1$ 线性无关的向量，β_i 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交 $(i=1,2)$，证明：β_1,β_2 线性相关。

证明　因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$，$\beta_1,\beta_2$ 是 $n+1$ 个 n 维向量，故必线性相关，存在 $k_1,\cdots,k_{n-1},\ell_1,\ell_2$ 使

得　$k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0\qquad\cdots\cdots(1)$

因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，故 ℓ_1,ℓ_2 不全为 0　　用 $\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2$ 与 (1) 式两边作内积得

$[\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2\ ,\ \ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2]=0$　故 $\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0$，$\ell_1,\ell_2$ 不全为 0，β_1,β_2 线性相关。