理论力学第 9 次作业

3.21

势能为

$$V(r)=-\frac{k}{r}+\frac{h}{r^2}$$

有心力为

$$f(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{k}{r^2}+\frac{2h}{r^3}$$

总能量为

$$\begin{aligned}E=T+V&=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{k}{r}+\frac{h}{r^2}\\&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{k}{r}+\frac{h}{r^2}\\&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{l^2+h}{2mr^2}-\frac{k}{r}\end{aligned}$$

有效势为

$$V^{'}=\frac{l^2+h}{2mr^2}-\frac{k}{r}$$

与开普勒势下的运动的有效势相比只有系数的区别，所以运动规律类似。

令 $u=\frac{1}{r}$，矢径 r 的周期性变化可以写为

$$u=u_0+a\cos\beta\theta$$

当矢径 r 经过一个周期的变化时，即 u 经过一个周期的变化时

$$\beta\theta=2\pi$$

则

$$\theta=\frac{2\pi}{\beta}$$

表示矢径 r 在这段时间内转过的角度

若仅考虑开普勒势$-\frac{k}{r}$，可得无微扰的圆轨道半径r_0为

$$r_0=\frac{l^2}{km}$$

根据

$$\beta^2=3+\frac{r}{f}\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0}=\frac{-kr_0}{2h-kr_0}=\frac{l^2}{l^2-2mh}$$

所以进动角为

$$\Omega=\theta-2\pi=2\pi\sqrt{1-\frac{2mh}{l^2}}-2\pi$$

$$\approx 2\pi\left(1-\frac{mh}{l^2}\right)-2\pi$$

$$=-\frac{2\pi mh}{l^2}$$

所以椭圆轨道的进动的速度为

$$\dot{\Omega}=\frac{2\pi mh}{l^2\tau}$$