2017-2018 学年第二学期期末考试线性代数 C 试题（A）

1、（10 分）若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行列式$\left|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\right|=m,\left|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\right|=n,$计算四阶行列式$\left|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\left(\beta_1+\beta_2\right)\right|$.

2、（10 分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&0\\2&3&2\end{pmatrix}$，$B$是三阶矩阵，且$BA-E=B-A^2$，求$B$.

3、（10 分）已知向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，试判断向量$\alpha=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\beta=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\gamma=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面。

4、（10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

5、（12 分）求由向量组$\alpha_1=\left(1,3,3,1\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=\left(1,4,1,2\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=\left(1,0,2,1\right)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=\left(1,7,2,2\right)^{\mathrm{T}}$所生成空间的一组基，并求向量组中其它向量在这组基下的坐标向量。

6、（10 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，互换$A$的第一、第二列得矩阵$B$，且$BX=A$，求矩阵$X$.

7、（10 分）若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$可以对角化，设与$A$相似的对角矩阵为$\Lambda$；试求常数$a$的值及对角矩阵$\Lambda$，可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$；

8、（10 分）设有向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1=(1,0,2)^T,\alpha_2=(1,1,3)^T,\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$和向量组$(\mathrm{II}):\beta_1=(1,2,a+3),\beta_2=(2,1,a+6)^T,\beta_3=(2,1,a+4)^T$. 试问:当$a$为何值时, 向量组$(\mathrm{I})$与$(\mathrm{II})$等价?当$a$为何值时, 向量组$(\mathrm{I})$与$(\mathrm{II})$不等价。

9、（8 分） 设A和B为n阶矩阵，且满足$A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，证明：$r(A)=r(B)$.

10、（10 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$其中$a$为参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形。