武汉大学 **2017 —2018** 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院________专业___班 学号________姓名____分数___

一、（10 分）若 $z=re^{i\theta}$，1. 试计算 $\mathrm{Re}[\ln(z-1)]$。($\mathrm{Re}[\ln(z-1)]=\frac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos\theta)$)；

2. 证明：$\mathrm{Re}(z^{\lambda})\ge\{\mathrm{Re}(z)\}^{\lambda}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mathrm{Re}(z)>0$，z^{λ} 取主值。

二、（10 分）计算积分：

1. $\int_C(|z|-e^z)dz$，若 C 为：（1）$|z|=2$，（2）$-i\le\mathrm{Im}\,z\le i,\mathrm{Re}\,z=0$。

2. $\int_c\frac{\bar{z}}{|z|}dz$，其中 C 为上半平面半径为 1 的半圆周的正方向，从1到-1。

三、（10 分）若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，试求满足下列条件的解析函数 $f(z)$：1）$v=u^2$；2）$u=x^2-y^2+xy$。

四、（10 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}$ 在下列指定区域展开成级数

（1）$|z|<2$　　（2）$|z-2|>5$

五、（15 分）指出函数 $\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}$ 的奇点和类型(含 ∞ 点)；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数，并计算积分 $\oint_C(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z})dz$，其中 C 是正向圆周 $|z|=\sqrt{2}$。

六、（15 分）利用留数定理计算 $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$ 积分。

七、（15 分）(1) （5 分）试证明像原函数 $f(t)$ 是实函数的充要条件是它的像函数 $F(\omega)$ 满足 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$。

（2）（10 分）计算函数 $f(t)=\begin{cases} te^{-at} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换。

八、（15 分）利用 Laplace 变换求微分方程 $y''(\mathrm{t})+a^2y(t)=f(t)$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=-1$ 的解，其中 a >0 为常数。若 1）$f(t)=\delta(t)$；2）$f(t)=\sin t$。