武汉大学 2021-2022 学年第一学期《线性代数 B》期中考试试卷答案

一、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分)

(1) C　**(2)** C　**(3)** C　**(4)** A　**(5)** D

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

(1) $(a-b)^3$　**(2)** -156　**(3)** $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$　**(4)** $k(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意实数．　**(5)** $a=1$

三、(10 分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix};$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1)\end{vmatrix}$$

$=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

四、(10 分) 解下列矩阵方程：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}，其中\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

解　由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

方法 1：先求出 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

方法 2：也可用由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 作初等行变换

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}\right)\xrightarrow{r}\left(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{X}\right),$$

此解法优点是少算一次矩阵乘法，可以适当减少计算量.

$$\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\div 3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

五、(10 分) 设 3 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时:

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，将分量代入得到方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)\ x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)\ x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+(1+\lambda)\ x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换.

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-2\lambda&-\lambda&0&\lambda^2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\-\lambda&\lambda&0&\lambda\\-\lambda^2-3\lambda&0&0&\lambda^2+\lambda\end{array}\right).$$

若 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda^2+3\lambda\neq 0$, 即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表达式唯一.

若 $\lambda=0$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

若 $\lambda=-3$，则 $R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

六、(10 分) 求向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,3,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-2,-1,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_4=(-2,6,10,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_5=(4,-1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组.

解 对下列矩阵作初等行变换，

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\-1&3&-2&6&-1\\1&5&-1&10&6\\3&1&b&a&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&6&-4&12&2\\0&4&b-9&a+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&b-11&a-2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-(b-11)r_3]{r_3\div(-7)}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&2&1&4&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&a-2&3-b\end{pmatrix}.$$

故

(1) 当 $a=2,b=3$ 时，向量组的秩为 3，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$（或 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$）为一个极大无关组；

(2) 当 $a\neq 2$ 时，向量组的秩为 4，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 为一个极大无关组；

(3) 当 $b\neq 3$ 时，向量组的秩为 4，且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5$ 为一个极大无关组.

七、(10 分) 设四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}.$$

还知道另一齐次线性方程组(II)的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(I)与(II)的公共解.

解 由已知，方程组(I)的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，故(I)的通解为

$$k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

方法 1：令 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$，解得：

$$k_1=-k,\quad k_2=k_3=k_4=k,\quad k\text{ 为任意常数},$$

故其公共解为

$$-k(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad k\text{ 为任意常数}.$$

方法 2：将(II)的通解代入方程组(I)，则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\ k_1+2k_2-k_2=0\end{cases},$$

得 $k_1=-k_2$．故向量 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组(I)(II)．即方程组(I)，(II)有公共解，所有公共解是 $k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$（k 为任意常数）.

八、(10 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 均可逆，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

证 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 均可逆，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.

此时有 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

九、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

证 由相关结论有 $n=R(\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\le\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$，故 $R(\boldsymbol{B})\ge n$，由于 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，有 $R(\boldsymbol{B})=n$，从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.