2016-2017 学年第二学期期末考试线性代数 C 试题（A）

一、（8 分）不求出行列式的值,用行列式的性质,判断行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$能被$17$整除.

二、（10 分）什么样的矩阵X满足下面等式：$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、（10 分）设矩阵A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$。求矩阵$B$.

四、（10 分）计算n阶行列式$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$的值。

五、（12 分）求向量组$\alpha_1 = (1,3,3,1)$，$\alpha_2 = (1,4,1,2)$，$\alpha_3 = (1,0,2,1)$，$\alpha_4 = (1,7,2,2)$的秩及一个最大无关组，并用最大无关组线性表示向量组中其它向量。

六、（6 分）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是齐次方程组$AX = 0$的一个基础解系，向量$\beta$不是方程组$AX = 0$的解，求证：$\beta, \beta + \alpha_1, \cdots, \beta + \alpha_r$线性无关。

七、（10 分）已知三阶方阵 A 满足$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$，

(1)求A.（2）计算行列式$|A|$和$|A^2 - 2A + 3I|$的值；（3）判断A是否为正定矩阵。

八、（10 分）已知向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$是$\boldsymbol{R}^3$的基，说明$\{2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$也是$\boldsymbol{R}^3$的基。若向量$\alpha$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下坐标为$(1,1,1)^T$，求向量$\alpha$在基$\{2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$的坐标。

九、（10 分）已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$，求正交变换$X = PY$将$\boldsymbol{f}$化为标准形。

十、（14 分）讨论a, b为何值时，方程$ax_1 + x_2 + x_3 = 4$与方程组$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9 \end{cases}$无公共解，有唯一公共解，有无穷多公共解，并写出相应的公共解？