《常微分方程》期末考试试卷（A）

（2018-2019 学年度上学期，经济与管理学院 金融工程、金融学）

一、求解如下问题（每题 10 分，共 70 分）

1. 求初值问题 $\begin{cases} (y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0 \quad (x>0) \\ y(1)=0 \end{cases}$ 的解.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$，令 $u=\frac{y}{x}$，$y=xu$

从而 $u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}dx$，$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{1}{x}dx$

$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln c$

$u+\sqrt{1+u^2} = xc$，即 $\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} = xc$

将 $y(1)=0$ 代入，得 $c=1$

故解为 $\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} = x$

化简得 $y = \frac{x^2-1}{2}$

2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+3xy^2-7x}{-3x^2y+2y^3-8y}$ 的通解.

解 $(2x^3+3xy^2-7x)dx + (3x^2y-2y^3+8y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 6xy = 0$

故为全微分方程

$\int_0^x (2x^3+3xy^2-7x)dx + \int_0^y [-2y^3+8y]dy = c$

即得 $x^4+3x^2y^2-7x^2-y^4+8y^2=c$

3. 求微分方程 $(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$ 的积分因子及通解.

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=1$，$\frac{\partial N}{\partial x}=4xy-1$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2(1-2xy)$$

且 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\frac{2}{x}$，故有积分因子

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

此时，方程 $(3x+\frac{y}{x^2})dx+(2y-\frac{1}{x})dy=0$ 为全微分方程

即 $3x\,dx+2y\,dy+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}=0$

$$d\left(\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}\right)=0$$

从而解为 $\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=C$

化简为 $3x^3+2xy^2-2y=Cx$

4. 求微分方程 $y=(y'^3-2y'^2)e^{y'}$ 的通解.

解：令 $y'=t$，则 $y=(t^3-2t^2)e^t$

即 $dx=\frac{1}{t}dy=\frac{1}{t}[(3t^2-4t)e^t+(t^3-2t^2)e^t]dt$

$$dx=(t^2+t-4)e^t dt$$

从而 $x=\int(t^2+t-4)e^t dt$

即 $x=t^2e^t+te^t-5e^t+C$

其解为 $\begin{cases}x=(t^2+t-5)e^t+C\\ y=(t^3-2t^2)e^t\end{cases}$

5. 求微分方程 $y''+4y'+4y=\sin 2x$ 的通解.

解：齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，$\lambda_{1,2}=-2$

齐次方程通解为 $\bar{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$.

非齐次方程的特解形如下形式 $y^*(x)=A\sin 2x+B\cos 2x$.

代入原方程，比较系数

$$\begin{cases}8A=0\\ -8B=1\end{cases}\qquad y^*=-\frac{1}{8}\cos 2x$$

通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}-\frac{1}{8}\cos 2x$

6. 求微分方程组 $\dfrac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}e^x\\ xe^x\\ 0\end{pmatrix}$ 的通解.

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=0$

即 $(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2+1\right)=0$

有特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=1\pm i$

对于 $\lambda_1=1$，对应其特征向量 Γ_1 为

$(E-A)\Gamma_1=0$ 即 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Gamma_1=0$，取 $\Gamma_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，对应解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^x$

对于 $\lambda_2=1+i$，其特征向量 Γ_2 为

$\begin{pmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & i & -1\\ 0 & 1 & i\end{pmatrix}\Gamma_2=0$，取 $\Gamma_2=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$，此时 $\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}e^{x+ix}=e^x\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}(\cos x+i\sin x)$

$$=\begin{pmatrix}0\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}e^x+i\begin{pmatrix}0\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}e^x$$

故齐次方程的通解为 $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^x+C_2\begin{pmatrix}0\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}e^x+C_3\begin{pmatrix}0\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}e^x$

7. 判断微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-x+\sqrt{x^2+2y}$ 是否有奇解，若有奇解并求出奇解.

解: $y'+x=\sqrt{x^2+2y}$，两边同时平方

$y'^2+2xy'=2y$

即 $y=xy'+\frac{1}{2}y'^2$（克莱罗方程）

其通解为 $y=cx+\frac{1}{2}c^2$

$\Phi(x,y,c)=y-cx-\frac{1}{2}c^2$

令 $\begin{cases}\Phi(x,y,c)=y-cx-\frac{1}{2}c^2=0\\ \Phi'_c(x,y,c)=-x-c=0\end{cases}$

从而 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

可验证非退化条件成立.

从而 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 为奇解

二、(10 分)讨论微分方程初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y^2-3y-4)\mathrm{e}^{x+y}\\ y(0)=3\end{cases}$ 解的存在性、唯一性以及解的存在区间.

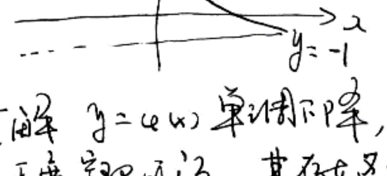
解: $\frac{dy}{dx}=(y^2-3y-4)e^{x+y}=f(x,y)$

显然 $f(x,y)\in C(R^2)$，$f'_y(x,y)\in C(R^2)$　$f(x,y)$ 连续且满足局部 L-条件

从而解存在且唯一.

又从方程易知 $y=4$，$y=-1$ 为上述方程的常数解.

由延展定理和唯一性定理，过初始点 $(0,3)$ 的解如图所示



此时 $f(x,y)$ 在 $y=4$ 与 $y=-1$ 之间的区域内 $f(x,y)<0$

其解 $y=\varphi(x)$ 单调下降，但不能与 $y=4$；$y=-1$ 相交

由延展定理可得，其存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

三、（20 分）证明题

（1）证明：利用变换 $x=e^t$ 可以将方程

$$x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = f(x) \quad (x > 0)$$，其中 a_1, a_2, a_3 为常数，

化为常系数非齐次微分方程.对于如下 n 阶的微分方程：

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2x^{n-2}y^{(n-2)} + a_ny = f(x) \quad (x > 0)$$，

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数, 结论是否同样成立?

(1) 证: $x=e^t$, $t=\ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ 从而 $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$

两边对 x 求导 $\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}$，从而 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$

再次对 x 求导: $2x\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{x}$，从而 $x^3\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} - 2\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)$

$= \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$.

代入原方程

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + a_1\frac{d^2y}{dt^2} - a_1\frac{dy}{dt} + a_2\frac{dy}{dt} + a_3y = f(e^t)$$

即 $$\frac{d^3y}{dt^3} + (-3+a_1)\frac{d^2y}{dt^2} + (2-a_1+a_2)\frac{dy}{dt} + a_3y = f(e^t)$$

即为常系数3阶线性微分方程.

当为n阶时，结论仍成立（可用归纳法证）.

（2）设 $\Phi(x), \Psi(x)$ 为齐次线性方程组 $\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 两个基本解矩阵，证明存在非奇异方阵 M，满足 $\Phi(x)=\Psi(x)\mathrm{M}$.

证: 设 $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$
$\Psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x))$ 均为基本解组

则 $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\psi_j(x)$

从而 $$\Phi(x) = \Psi(x)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \Psi(x)\cdot M.$$

因为 $\det\Phi(x) \neq 0$，故 $|M| \neq 0$.

即证