武汉大学 2020—2021 学年度第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

考试类型 闭卷考试 命题 课程组 审核________ 签发________

电子信息 学院________ 专业 学号________ 姓名________ 分数______

一、（本题10分）写出下列物理问题的定解问题

1．一长度为π的细杆，杆的侧面绝热，在x=0 的一端温度保持为零，而在另一端$x=\pi$处保持绝热，初始杆上温度梯度均匀，写出此定解问题。

2．一半带形区域（$0\le x\le a, y\ge 0$），已知边界$x=0$和$y=0$上的电势都为零，而边界$x=a$上的电势为 u_0，试写出此半带形区域内电势满足的定解问题，并写出此定解问题的本征值和本征函数。

二、（本题 10 分）定解问题 $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t=4x \quad (0<x<\pi/2, t>0) \\ u_x\big|_{x=0}=2t, u\big|_{x=\pi/2}=\pi t \\ u\big|_{t=0}=0, u_t\big|_{t=0}=2x \end{cases}$ ，若经$u=v+w$变换后所得v的边界条件是齐次的，求辅助函数$w(x,t)$，并写出边界条件齐次化后相应的定解问题。

三、（本题 10 分）求解一维无界波动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=k \quad (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u\big|_{t=0}=\sin x \\ u_t\big|_{t=0}=-\cos x \end{cases}$$

其中 k 为常数。

四、（本题 10 分）若一维齐次波动方程$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$的解为$u(x,t)$，其能量密度和动量密度分别定义为$e=\dfrac{1}{2}(u_t{}^2+a^2u_x{}^2)$和$p=au_tu_x$，试证明

1. $\dfrac{\partial e}{\partial t}=a\dfrac{\partial p}{\partial x}$和$\dfrac{\partial p}{\partial t}=a\dfrac{\partial e}{\partial x}$成立；　2. $e(x,t)$和$p(x,t)$亦满足波动方程。

五、（本题 15 分）定解问题：$\begin{cases} u_t-Du_{xx}=0 \quad (0<x<\pi, t>0) \\ u_x\big|_{x=0}=0，u_x\big|_{x=\pi}=0 \\ u\big|_{t=0}=x \end{cases}$

试：1）利用分离变量法求解此定解问题；2）写出此定解问题可能描述的物理问题；3）求$t\to\infty$时的解，解释其物理意义。

六、（本题10分）用幂级数解法求 $P_3(x)$：设 $P_3(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ ，代入Legendre方程，确定 $c_i \quad i=0,1,2,3$ 。由 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$ ，并利用递推关系验证你的结论。

七、（本题10分）有一内、外半径分别为1和2的均匀球壳，其内表面的电势分布为 u_0，外表面的电势分布为 $\cos^3\theta$，若球壳内、外无电荷，求球壳内的电势分布。

八、（本题 10 分）利用整数阶 Bessel 函数的母函数，试：

1．证明：$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)$；　2．计算 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(x)$ 。

九、（本题 15 分） 柱坐标系中的波动问题：半径为 R 的圆形膜，边缘固定，初始位移为零，初速度为 $u_t(\rho,0)=A\delta(\rho-c)\quad(0<c<R)$ ，试：1）写出此物理问题的定解问题；2）定解问题的本征值和本征值函数；3）求解膜的振动情况。

参考公式

(1) 柱坐标中算符 ∇^2 的表达式 $\nabla^2=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

(2) Legendre方程　$\dfrac{d}{dx}[(1-x^2)\dfrac{dy(x)}{dx}]+n(n+1)y(x)=0$

(3)Legendre多项式　$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\dfrac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$

(4) Legendre 多项式的递推公式 $(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$，$(l\neq 0)$

(5) Legendre 多项式的正交关系 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)=\dfrac{2}{2l+1}\delta_{kl}$

(6) Bessel方程　$x^2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+x\dfrac{dy(x)}{dx}+(x^2-n^2)y(x)=0$

(7) 整数阶 Bessel 函数 $J_{\pm n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m!\,(m\pm n)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m\pm n}$，Bessel 函数的母函数：$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$

(8) Bessel函数的递推关系　$\dfrac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$　　$\dfrac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

(9) 广义 Fourier 展开　$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_n(k_m^n\rho)$　$C_m=\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{2}J_{n+1}^2(x_m^n)}\int_0^a\rho J_n(k_m^n\rho)f(\rho)d\rho$