武汉大学 2014—2015 学年度第 一 学期

《数学物理方法》期中试卷

电子信息 学院________专业___班 学号________姓名____分数___

一、（本题 10 分）计算下列各题

1. 已知 $f\left(\frac{1}{z+i}\right)=\bar{z}$，则求极限 $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ 。

2. 解方程: $(1+z)^n=(1-z)^n$ 。

二、（本题 10 分） 设函数 $f(z)=x^2-y^2+ixy$，试确定 $f(z)$ 在何处可导，何处解析，并求可导点处的导数。

若 $f(z)=x^2-y^2+iv(x,y)$，求 $v(x,y)$，使 $f(z)$ 为解析函数。

三、（本题 10 分）计算积分 $\int_C |z||dz|$，若 C 为:（1） $|z|=2$，（2） $0\le \operatorname{Re} z\le 2$。

四、（本题 15 分）指出函数 $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 的奇点和类型；若是弧立奇点，计算各弧立奇点的留数，并计算积分 $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，其中 C 是正向圆周 $|z|=2$。

五、（本题 15 分）设 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 为定义在单值分支中的解析函数，若 $f(0)=0$。求：

1. $f(2i)$ 和 $f'(2)$。.

2. 函数 $f(z)=Ln(1-z^2)$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 级数。

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{n}$ 的和函数。

六、（本题 25 分）留数定理计算积分和 Fourier 变换

1.（10 分）若 $\varepsilon > 0, \omega > 0$，利用留数定理计算积分

$$I(\omega,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} e^{i\omega x} dx$$

并求 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(\omega,\varepsilon)$。

2. （5 分）若 $I(\omega,\varepsilon)$ 是参变数函数 $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 的 Fourier 变换，比较 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(\omega,\varepsilon)$ 和 $\delta(x)$ 函数的 Fourier 变换关系，可以把 $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 视为 δ 型序列函数，写出 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ 和 $\delta(x)$ 的关系。

3.（10 分）计算函数 $f(x) = e^{-\varepsilon x} H(x)$ 的 Fourier 变换，其中 $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$ 为阶跃函数，并求 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \{\mathscr{F}[e^{-\varepsilon x} H(x)]\}$ 的值。

七、（本题 15 分）利用 Laplace 变换求微分方程

将电阻 R，电感 L 和电容 C 串联到电源 $\varepsilon(t)$ 上，设电路中的电流为 $i(t)$，则有 $L\dfrac{di(t)}{dt} + i(t)R + \dfrac{q(t)}{C} = \varepsilon(t)$，因为 $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$，因此，

$$L\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = \varepsilon(t)$$

若初始条件 $q(0) = 0, i(0) = q'(0) = 0$，求回路中的电荷和电流。如果（1）$\varepsilon(t) = 1$；（2）$\varepsilon(t) = \delta(t)$。

武汉大学 2015—2016 学年度第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

________学院________专业___班　学号________姓名______分数___

一、（本题10分）写出下列物理问题的定解问题

1. 一散热片的横截面为矩形，边长分别为 a 和 b。它的一边处于较高的温度 T_0，其它三边处于绝热状态，初始温度分布为 $u(x,y,t)\big|_{t=0}=x^2-y^2$，写出该横截面上的温度分布满足的定解问题。

2. 一内外半径分别为 R_1 和 R_2 的薄圆环，若圆环的上下面绝热，圆盘边缘的温度分布为，$u(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R}=\cos^2\varphi$，$u(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R}=\cos\varphi$，试写出圆环上稳定的温度分布的定解问题。

二、（本题 10 分）定解问题 $\begin{cases} u_t-Du_{xx}=f(x) & (0<x<l,t>0) \\ u\big|_{x=0}=At, u\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$，若要使边界条件齐次化，求其辅助函数，并写出边界条件齐次化后相应的定解问题。

三、（本题 10 分）求解一维无界波动问题 $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=1 & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u\big|_{t=0}=2\sin x \\ u_t\big|_{t=0}=-2\cos x \end{cases}$

四、（本题 15 分）利用分离变量法求解下列定解问题：两端固定弦的波动问题。

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 & (0<x<\pi,t>0) \\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\pi}=0 \\ u\big|_{t=0}=0 \\ u_t\big|_{t=0}=2\sin 2x \end{cases}$$

五、（本题 15 分）1.（5 分）证明：若 $u(x,t)$ 是方程 $u_t-u_{xx}=0$ 的解，则 $u(kx+\alpha,k^2t+\beta)$（其中 k,α,β 为任意常数）仍然是方程 $u_t-u_{xx}=0$ 的解。

2.（10 分） 设 a 为常数，求解下列定解问题

1) $\begin{cases} u_t-au_x=0 & (-\infty<x<\infty,t>0) \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$　　2) $\begin{cases} u_t+au_x=f(x,t) & (-\infty<x<\infty,t>0) \\ u\big|_{t=0}=\phi(x) \end{cases}$

六、（本题20分）1. （5分）计算积分 $I=\int_{-1}^{1}x^2P_{l+1}(x)dx$

2. （15分）一内、外半径分别为a和2a的均匀球壳，球壳内外均无电荷，球壳内表面上的电势分布为0，球壳外表面上的电势分布为 $u_0\cos\theta$，求：1) 球壳内 $(a<r<2a)$ 的电势分布；2) 将单位正电荷从球壳外表面移到 $r=3a$ 的球面电场力所做的最小和最大功是多少？

七、（本题 20 分）1.（5 分）计算积分 $I=\int_0^1 x^3 J_0(kx)dx$

若 $k=x_m^0$，x_m^0 是零阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的零点，则积分值为多少？

2.（15分）半径为1的圆形膜，边缘固定，初始形状为 $u(\rho,t)\big|_{t=0}=\rho^2$，初始速度为零。试：1）写出膜的振动的定解问题；2）定解问题的本征值和本征值函数；3）分离变量后，关于 $T(t)$ 满足的方程的解；4）求出该问题的解。

参考公式

(1) 球坐标中算符 ∇^2 的表达式 $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

柱坐标中算符 ∇^2 的表达式 $\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(2) Legendre方程 $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}]+n(n+1)y(x)=0$

(3)Legendre多项式 $P_l(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$

(4) Legendre 多项式的递推公式 $(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$，$(l\neq 0)$

(5) Legendre 多项式的正交关系 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$

(6) 整数阶 Bessel 函数

$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\ (m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$ $\qquad$ $J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\ (m-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$

(7) Bessel函数的递推关系 $\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

(8) 广义 Fourier 展开 $f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_n(k_m^n\rho)$ $\qquad$ $C_m=\frac{1}{\frac{a^2}{2}J_{n+1}^2(x_m^n)}\int_0^a\rho J_n(k_m^n\rho)f(\rho)d\rho$

武汉大学 2016—2017 学年度第 一 学期

《数学物理方法》试卷（A）

考试类型 闭卷考试 命题 课程组 审核 [handwritten signature] 签发 [handwritten signature]

电子信息 学院＿＿＿＿＿ 专业 学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 分数＿＿＿

一、（本题10分） 一根弦绳被张紧于（0，0）与（π，0）两点之间，固定其两端，把它拉成 $A\sin x$ 的形状之后，由静止状态被释放而作自由振动。写出此物理问题的定解问题，并写出本征值和本征函数。

二、（本题 10 分）定解问题 $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l,t>0) \\ u\big|_{x=0}=t, u\big|_{x=l}=t+5 \\ u\big|_{t=0}=0, u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$，若要使边界条件齐次化，求其辅助函数，并写出边界条件齐次化后相应的定解问题。

三、（本题 10 分）求解一维无界波动问题 $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=1 \quad (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u\big|_{t=0}=x^2 \\ u_t\big|_{t=0}=2x \end{cases}$.

四、（本题 15 分）定解问题：$\begin{cases} u_t-Du_{xx}=0 \quad (0<x<\pi,t>0) \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=\pi}=0 \\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{x}{2}+3\sin\dfrac{3x}{2} \end{cases}$

1）利用分离变量法求解此定解问题。

2）写出此定解问题可能描述的物理问题。求当 $t\to\infty$ 时的解，结合你所描述的物理问题，给出此解的物理意义。

五、（本题 15 分）1. 设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，求方程 $u_{xx}-u_y=0$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}u(x,y)=0$ 的解。

2.设 $u(x,t)=g(t)\cos x$ 是一维热传导方程初值问题 $\begin{cases} u_t-Du_{xx}=f(t)\cos x \\ u(x,0)=A\cos x \end{cases}$ 的解。

1）证明：$g(t)$ 是满足微分方程 $\begin{cases} g'(t)+Dg(t)=f(t) \\ g(0)=A \end{cases}$ 的解。

2）利用 1）的结论求初值问题 $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \cos x \\ u(x,0) = 2\cos x \end{cases}$

六、（本题20分）1. （5分）计算积分 $I = \int_{-1}^{1} x P_l(x) P_{l+1}(x) dx$

2.（15分）一半径为 a 均匀球体，球内外均无电荷，球表面上的电势分布为 $u_0(\cos^2\theta + 1)$，求：1)球内的电势分布；2）在 $r = 3a$ 的球面上电势的最小和最大值是多少？

七、（本题 20 分）1.（5 分）计算积分 $I = \int J_3(kx)dx$

2.（本题15分）柱坐标系中的热传导问题：有一无穷长的圆柱体，半径为R，若柱表面的温度为0，初始温度分布为 $f(\rho) = F_0 J_0(\frac{x_1^0}{R}\rho)$，其中 x_1^0 是 $J_0(x) = 0$ 的第一个正根。试：1）写出此物理问题的定解问题；2）写出本征值问题及本征值、本征值函数；3）设 $u(\rho,t) = R(\rho)T(t)$，分离变量后，关于 $T(t)$ 满足的方程和解；4）求柱内的温度分布变化。

参考公式

(1) 柱坐标中算符 ∇^2 的表达式 $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(2) Legendre方程 $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}] + n(n+1)y(x) = 0$

(3)Legendre多项式 $P_l(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$

(4) Legendre 多项式的递推公式 $(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$，$(l \neq 0)$

(5) Legendre 多项式的正交关系 $\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$

(6) 整数阶 Bessel 函数 $J_{\pm n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m \pm n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m \pm n}$

(7) Bessel函数的递推关系 $\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$ $\qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

(8) 广义 Fourier 展开 $f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_n(k_m^n \rho)$ $\quad C_m = \frac{1}{\frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(x_m^n)} \int_0^a \rho J_n(k_m^n\rho) f(\rho) d\rho$

(9) Laplace 变换 $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$