《常微分方程》期末考试试卷（A）-解答参考

（2019-2020 学年度上学期，经济与管理学院 金融工程）

一、求解如下微分方程（每题 10 分，共 80 分）

1. 求微分方程 $(x+2y)dx+(2x-y+4)dy=0$ 满足 $y(0)=1$ 解.

解：$M(x,y)=x+2y$，$N(x,y)=2x-y+4$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2=\frac{\partial N}{\partial x}$ 故方程为全微分方程

则其解为 $\int_0^x (x+2y)dx+\int_1^y (-y+4)dy=0$

即：$\frac{1}{2}x^2+2yx-\frac{1}{2}(y^2-1)+4(y-1)=0$

$x^2+4xy-y^2+8y-7=0$ $(\frac{1}{2}x^2+2yx-\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{7}{2}=0)$

2. 求微分方程 $y=\frac{1}{2}y'^2+2xy'+x^2$ 的通解.

解：令 $y'=p$，$y=\frac{1}{2}p^2+2xp+x^2$，两边对 x 求导，即有

$p=p\frac{dp}{dx}+2p+2x\frac{dp}{dx}+2x$，$(p+2x)\frac{dp}{dx}=-p-2x$.

从而 $(p+2x)(\frac{dp}{dx}+1)=0$ 可得 $\frac{dp}{dx}=-1$，$p=c-x$

或 $p=-2x$，

从而得其解为 $y=\frac{1}{2}(c-x)^2+2x(c-x)+x^2=-\frac{1}{2}x^2+2xc+\frac{1}{2}c^2$

或 $y=-x^2$

3. 求欧拉方程 $x^2y''-4xy'+4y=2\ln x$ 的通解.

解：令 $x=e^t$，$t=\ln x$，记 $D=\frac{d}{dt}$

则方程可化为 $D(D-1)y-4Dy+4y=2t$

化简得：$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+4y=2t$.

特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+4=0$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$

通解为：$y=c_1e^t+c_2e^{4t}+\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}$，即 $y=c_1x+c_2x^4+\frac{1}{2}\ln x+\frac{5}{8}$

4. 已知方程 $(1+x^3)y''-x^2y'+xy=0$ 的一个解 $y_1(x)=2x$，求其通解.

解：由刘维尔公式 $y_1(x)=2x$ 为解.

则可得另一个与之线性无关的解 $y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$

$y_2(x)=2x\int\frac{1}{4x^2}e^{\int\frac{x^2}{1+x^3}dx}dx=2x\int\frac{1}{4x^2}e^{\frac{1}{3}\ln(1+x^3)}dx=x\int\frac{1}{2x^2}\sqrt[3]{(1+x^3)}dx$

从而其通解为 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

扫描全能王 创建

5. 求方程 $y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$ 的通解.

解：特征方程 $\lambda^3-3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=-2$

齐次方程通解为：$\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-2x}$.

现求一个特解 $y^*(x)=(Ax+B)e^{3x}$，待定得 $A=\frac{1}{20}$，$B=-\frac{3}{50}$

故通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{20}x-\frac{3}{50}\right)e^{3x}$

6. 已知 $f(0)=1$，试确定 $f(x)$，使方程 $[f(x)+e^x]y\,dx+f(x)\,dy=0$ 为全微分方程，并求此微分方程的解.

解. 因为全微分方程，则 $f(x)+e^x=f'(x)$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$ 此方程解为 $f(x)=C_1e^x+xe^x$

因 $f(0)=1$ 故 $C_1=1$，$f(x)=e^x(1+x)$

故原方程为：$e^x(2+x)y\,dx+e^x(1+x)dy=0$ 且为全微分方程

$\int_0^x e^x(2+x)y\,dx+\int_0^y dy=C$，$y(x+1)e^x=C$.

7. 设 $Y(x)$ 为微分方程组 $\frac{dY}{dx}=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}e^{-2x}$ 的通解，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}Y(x)$

解：$A=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=0$ 可得 $(\lambda-3)^2+4^2=0$

$\lambda_{1,2}=3\pm4i$，其解为

对于 $\lambda_1=3+4i$，基解 $e^{3x}(\cos4x+i\sin4x)T_i$，$T_i$ 为特征向量

设特征向量 $T_i=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4i&-4\\4&-4i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$ $a=i$ $b=1$

解 $e^{3x}(\cos4x+i\sin4x)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=e^{3x}\begin{pmatrix}-\sin4x\\\cos4x\end{pmatrix}+ie^{3x}\begin{pmatrix}\cos4x\\\sin4x\end{pmatrix}$

故齐通解为 $Y(x)=C_1e^{3x}\begin{pmatrix}-\sin4x\\\cos4x\end{pmatrix}+C_2e^{3x}\begin{pmatrix}\cos4x\\\sin4x\end{pmatrix}$.

8. 利用幂级数解法求解微分方程 $y''+xy'+y=x$ 的通解.

解：由方程形式，可令方程有形如 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解

$y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}$，$y''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^{n-2}$

代入方程：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^{n-2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x$

待定系数可得：x^0：$2a_2+a_0=0$　　所得递推公式.

x^1：$6a_3+a_1+a_1=1$

x^n：$a_{n+2}(n+2)(n+1)+na_n+a_n=0$

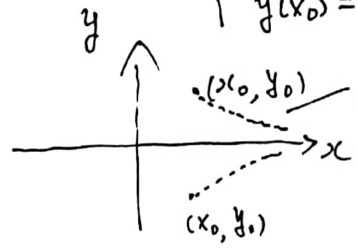
扫描全能王 创建

二、证明题(每题 10 分，共 20 分)

9. 设方程 $\frac{dy}{dx}=(x^2+y^2)f(y)$ 中，$f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，且 $yf(y)<0$，$(y\neq 0)$．求证：该方程的任一满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y(x)$ 必在区间 $[x_0,+\infty)$ 上存在.

证：因 $yf(y)<0$ 故有：$\begin{cases} f(y)<0, & y>0 \\ f(y)>0, & y<0 \\ f(y)=0, & y=0 \end{cases}$

故对方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=(x^2+y^2)f(y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 易知解存在且唯一.



单调下降，如左图，当 (x_0,y_0) 在上半平面时其解单调下降，但与 $y=0$ 不相交，同理 (x_0,y_0) 在下半平面时 其解单调递增且与 $y=0$ 不相交，由延展定理，可得 其解都能延拓到 $[x_0,+\infty)$ 存在.

10. 设微分方程的通解为 $y=C^2+Cx+x^2$，求此微分方程，并证明此微分方程存在奇解.

证：$\begin{cases} y=c^2+cx+x^2 \\ y'=c+2x \end{cases}$ 消去 c，其方程为：

$$y=(y'-2x)^2+(y'-2x)x+x^2$$

$$y=(y')^2-3xy'+3x^2$$

根据 c-判别式法，由通解 $\Phi(x,y,c)=0$

$\begin{cases} \Phi(x,y,c)=0 \\ \Phi'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=c^2+cx+x^2 \\ 0=2c+x \end{cases}$ 可得：$y=\frac{3}{4}x^2$

满足非退化性条件.

奇解为 $y=\frac{3}{4}x^2$.

扫描全能王 创建