

武汉大学 2016-2017 学年第二学期
《复变函数与积分变换》期末考试试题 (A 卷)

姓名 _____ 学号 _____ 学院 _____

一、(每小题 4 分, 共 40 分) 解答下列各题, 写清楚过程或理由.

1. 求 $\cos(4-i)$ 写成 $a+bi$ 的形式.
2. 将坐标变换公式
$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$
 写成复数形式.
3. 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有根.
4. 指出函数 $f(z) = x^2 - yi$ 在何处可导? 在何处解析?
5. 指出 $z = 1$ 是函数 $f(z) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{z-1}}$ 什么类型奇点?
6. 将函数 $\frac{z-1}{z+1}$ 在点 $z_0 = 1$ 处展开成幂级数.
7. 求 $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$ 在 $z = 0$ 处的留数.
8. 求积分 $\int_0^1 (\sin \pi z + 1) dz$.
9. 求函数 $f(t) = \sin t$ 的 Laplace 变换式.
10. 求函数 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+4}$ 的 Laplace 逆变换.

二、(每小题 7 分, 共 28 分) 计算下列各题, 写清楚过程.

1. 设 $f(z) = \frac{z^3}{1+z^2}$, 求 $f(z)$ 在 ∞ 的 Laurent 展式并求 $\text{Res}[f(z), \infty]$.
2. 试求 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n} dz$, 其中 $C: |z| = 1$ 为逆时针方向, $|a| < 1 < |b|$.
3. 求 $\oint_C \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)} dz$, 其中 $C: |z| = 2$ 为逆时针方向.
4. 利用留数定理计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.

三、(本题 10 分) 求以 $v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ 为虚部, 且满足 $f(\infty) = 0$ 的解析函数 $f(z) = u + iv$.

四、(本题 10 分) 证明: 如果函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 且满足条件 $au + bv = c$, 其中 a, b 与 c 为不全为零的实常数, 则 $f(z)$ 是常数.

五、(每小题 6 分, 共 12 分) 利用 Laplace 变换 (注意: 用其它方法无效) 解下列方程:

1. 求方程 $y'' - 4y' + 3y = e^{-t}$ 满足初值条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解.
2. 求积分方程 $y(t) + \int_0^t y(t-\tau)e^\tau d\tau = 2t - 3$ 的解.