

## 武汉大学 2016-2017 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

- 1、(9 分) 计算极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n + k}$
- 2、(9 分) 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$ .
- 3、(9 分) 求位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x(1 + \ln^2 x)}}$  ( $e \leq x < +\infty$ ) 下方,  $x$  轴上方的无界区域  $G$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。
- 4、(9 分) 设函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ , 求函数  $f(x)$  的间断点并判断其类型。
- 5、(9 分) 设函数  $f(x) = \int_0^1 |t(x-t)| dt$  ( $0 < x < 1$ ), 求函数  $f(x)$  的极值、单调区间及曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间。
- 6、(9 分) 已知  $y = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin u} (v^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}v\right) dv$ , 其中  $u = u(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin t \end{cases}$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ) 所确定, 求曲线  $y = y(x)$  在参数  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处切线的直角坐标方程。
- 7、(9 分) 设函数  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$ , 求定积分  $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ .
- 8、(9 分) 求圆  $r = 2a \cos \theta$  所围平面图形的面积。
- 9、(9 分) 设有半径为  $R$  的半球形容器中注满水, 求将满池水全部抽出所做的功。
- 10、(9 分) 求解微分方程  $\begin{cases} y'' + y = 2xe^x + 4 \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ .
- 11、(5 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 证明: 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上存在原函数。
- 12、(5 分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上三阶可导, 且  $f(x), f'''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界。试证明:  $f'(x), f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界。

# 武汉大学 2016-2017 第一学期 高等数学 A1 期末试题 A 解答

1、(9 分) 计算极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n + k}$ .

解:  $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n+k} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$$

由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n+k} = \frac{1}{2}$  9 分

2、(9 分) 计算极限:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos \sqrt{x})}$

解  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x \cdot (\frac{1}{2}x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1-\cos x)}{x^2 \cdot (1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$  9 分

3、(9 分) 求位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$  ( $e \leq x < +\infty$ ) 下方,  $x$  轴上方的无界区域  $G$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 由旋转体体积公式得  $V = \int_e^{+\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \pi \int_e^{+\infty} \frac{1}{1+\ln^2 x} d(\ln x)$   
 $= \pi \arctan(\ln x) \Big|_e^{+\infty} = \pi \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}$  9 分

4、(9 分) 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$ , 求  $f(x)$  的间断点并判断其类型。

解: 因  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{\sin t - \sin x + \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} \left( 1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x} \cdot \frac{\sin x - x}{\sin x - x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$

由于  $f(x)$  在  $x=0$  处无意义, 而  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$ , 所以  $x=0$  时可去间断点。

而  $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = \infty$ , 所以  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为  $f(x)$  的无穷间断点。 9 分

5、(9 分) 设函数  $f(x) = \int_0^1 |t(x-t)| dt$  ( $0 < x < 1$ ), 求函数  $f(x)$  的极值、单调区间及曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间。

解  $f(x) = \int_0^1 |t(x-t)| dt = \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

令  $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  由 ( $0 < x < 1$ ), 故  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又  $f''(x) = 2x > 0$  ( $0 < x < 1$ ), 所以  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  为  $f(x)$  的极小值点, 极小值为:

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 且曲线  $y = f(x)$  在  $(0,1)$  内是凹的。

由  $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}$  知,  $f(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  内单调递减, 在  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$  内单调递增。 9 分

6、(9分) 已知  $y = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sin u} (v^2 + 1) \sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}v) dv$  , 其中  $u = u(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin t \end{cases}$

( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ) 所确定, 求曲线  $y = y(x)$  在参数  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处切线的直角坐标方程.

解 由  $\frac{dy}{dx} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} (\sin^2 u + 1) \sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin u) \cdot \cos u \cdot \frac{du}{dx}$  , 而  $\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\pi^2}{16} \sqrt{2} \cos t}{-\sqrt{2} \pi \sin t} = -\frac{\pi^2}{16} \frac{x}{u}$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = -\frac{8\sqrt{2}}{3\pi} (\sin^2 u + 1) \sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin u) \cdot \cos u \cdot \frac{\pi^2}{16} \frac{x}{u}$$

$$\text{由 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 得 } \begin{cases} x = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad y = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (v^2 + 1) \sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}}v) dv = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = -1$$

故曲线  $y = y(x)$  在参数  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处切线的直角坐标方程为:  $y = 1 - x$  9分

7、(9分) 设函数  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$  , 求定积分  $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

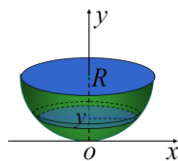
解: 由  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$  知,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = e^{-x^2+2x}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx &= \frac{1}{3} (x-1)^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1) = \frac{e}{6} \int_0^1 t e^{-t} dt = \frac{1}{6} (e-2) \quad 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

8、(9分) 求圆  $r = 2a \cos \theta$  所围平面图形的面积.

$$\text{解: } A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \pi a^2 \quad 9 \text{ 分}$$

9、(9分) 设有半径为  $R$  的半球形容器中注满水, 求将满池水全部抽出所做的功.



解: 法一 过球心的纵截面建立坐标系如图.

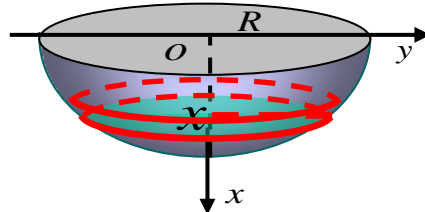
则半圆方程为  $x^2 + (y-R)^2 = R^2$ . 取  $y$  为积分变量, 对应于  $[y, y+dy]$  薄层所需的功元素  $dw = r g p x^2 (R-y) dy = r g p (2Ry - y^2) (R-y) dy$

$$\text{故所求功为: } w = r g p \int_0^R (2R^2 y - 3Ry^2 + y^3) dy = \frac{p}{4} r g R^4 \quad 9 \text{ 分}$$

法二 解: 过球心的纵截面建立坐标系如图. 则半圆方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ .

取  $x$  为积分变量,

对应于  $[x, x+dx]$  薄层所需的功元素  $dW = \rho g \pi (R^2 - x^2) dx \cdot x = \rho g \pi (R^2 x - x^3) dx$



故所求功为  $W = \rho g \pi \int_0^R (R^2 x - x^3) dx = \frac{\pi}{4} \rho g R^4$ 。

10、(9 分) 求解微分方程  $\begin{cases} y'' + y = 2xe^x + 4 \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解. 特征方程  $\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda = \pm i$  齐次方程通解  $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$   
非齐次方程特解:

1) 由  $r = 1$  不是特征根, 故  $y_1^* = (Ax + B)e^x$ ,

代入方程得:  $A = 1, B = -1$ ,  $y_2^* = (x - 1)e^x$

2) 由  $r = i$  是特征根, 故  $y_2^* = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x$ ,

代入方程得:  $A = 0, B = 0, C = -2, D = 0$ ,  $y_3^* = -2x \cos x$

所以  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x(x - 1) - 2x \cos x$  由  $y(0) = y'(0) = 0$  可得

$c_1 = 1, c_2 = 2$  得解  $y = \cos x + 2 \sin x + e^x(x - 1) - 2x \cos x$  9 分

11、(5 分) 设  $f(x)$  函数在闭区间  $[a, b]$  上连续, 证明:  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上存在原函数。

证 由于  $f(x)$  函数在闭区间  $[a, b]$  上连续, 可设  $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx, x \in [a, b]$

由于  $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx, x + \Delta x \in [a, b]$

从而  $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot f(\xi) \Delta x, \xi$

位于  $x + \Delta x$  与  $x$  之间, 再由连续性, 从而  $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$ , 由

原函数的定义知  $\Phi(x)$  是  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 因此  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上存在原函数 5 分

12、(5 分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上三阶可导, 且  $f(x), f'''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界。试证明:  $f'(x), f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界。

证明: 由已知可得存在  $M > 0$  有  $|f(x)| \leq M, |f'''(x)| \leq M, x \in (-\infty, +\infty)$

对任取的  $x_0$  由泰勒公式有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

因此有  $f(1 + x_0) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}$  (1)

$$f(-1 + x_0) = f(x_0) - f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}$$
 (2)

(1) + (2) 得  $f''(x_0) = f(1 + x_0) + f(-1 + x_0) - 2f(x_0) + \frac{f'''(\xi_2)}{3!} - \frac{f'''(\xi_1)}{3!}$

$$|f''(x_0)| \leq 4 \frac{1}{3} M \quad 5 \text{ 分}$$

$$(1)-(2) \text{ 得 } f'(x_0) = \frac{1}{2} \left( f(1+x_0) - f(-1+x_0) - \frac{f'''(\xi_1)}{3!} - \frac{f'''(\xi_2)}{3!} \right)$$

$$|f'(x_0)| \leq 1 \frac{1}{6} M \quad 5 \text{ 分}$$