武汉大学数学与统计学院 2012－2013 第二学期
《线性代数 C》（A 卷，文 54）

一（10）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{pmatrix}$，（1）求 $|A|$；（2）求 $A_{41}+2A_{44}$（A_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式）

二（10）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$，（1）验证 $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$，（2）计算 A^n（n 为正整数）

三（10）$A=\begin{pmatrix}2&5&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-3&-2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 满足 $AC+(C^TB)^T+A=0$，（1）求 A^{-1}；（2）求 C.

四（10）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\-1\\b\end{pmatrix}$，问 a,b 分别为何值时，方程组 $AX=B$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多组解，并求之.

五（10）计算向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\-3\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\6\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$

的秩，并求出该向量组的一个极大无关组，同时将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

六（10）已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，（1）求 a,b；（2）求可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

七（12）三阶实对称矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，且 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，（1）求 A，（2）求 $|A|$

八（12）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

(1). 写出二次型 f 的矩阵 A；(2). 把二次型 f 化为标准形；(3). 判定二次型 f 是否正定。

九（8）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，X 为 n 维实向量，证明：方程组 $A^TAX=O$ 与 $AX=O$ 同解。

十(8) 设 η^* 是非齐次线性方程组 AX = b(b≠0) 的一个解，ξ_1，ξ_2，⋯，ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组 AX = 0 的一个基础解系，证明：η^*，ξ_1，ξ_2，⋯，ξ_{n-r} 线性无关.