# 广义势能

前面我们讨论的都是势能不依赖于速度的情形，也就是说，粒子间的相互作用都是瞬时传递的。此时，体系状态的变化规律（即所谓动力学）是由最小作用原理确定的。在这一节我将对相互作用以有限速度传递的情形作简单地介绍，我们只讨论相互作用可以用某个标量函数描述的情形，这个标量函数不再只是坐标的函数，它也会明显地依赖于粒子的速度，记为

并把它称为广义势能。当然，此时力不再等于广义势能对坐标的偏导数之负值，它与广义势能的依赖关系应该会比较复杂。

我的目的是想要看一下，能否将这样的问题纳入到最小作用原理的框架中？或者说，当力与广义势能具有什么样的关系时，体系的运动方程才可以写成Lagrange方程

的形式？

为了回答这个问题，利用笛卡尔坐标，我们将Lagrange方程写成下面的形式：

跟以前不同的是，由于势能也依赖于速度，从而不再仅仅等于第个粒子的动量，而是等于

因此，括号中的第一项等于

也不再等于第个粒子受到的力。因此，把这些因素考虑进去，那么可以写为

因此，在理想约束假设下，如果第个粒子受到的主动力与广义势能具有如下关系

或者说而与对应的广义主动力（留为习题）

那么上面的分析表明，该体系的运动满足最小作用原理，而Lagrange函数等于动能减去广义势能；反之，如果体系的运动满足最小作用原理，那么力与标量函数必满足关系(7)。

我们来看一个具体的例子：带电粒子在电磁场中的运动。带电粒子在电磁场中会受到Lorentz力 的作用，如果我们可以找到一个标量函数，并将Lorentz力表示为(7)的形式，那么它的运动方程就是Lagrange方程，而我们就可以将这个问题纳入到最小作用原理的框架之中了。

这里要用到描述电磁场本身如何变化的方程，电磁场的行为由和的四个偏微分方程所决定，称为Maxwell方程，在这里，我们只用到其中两个

方程(8b)的含义是说磁场是一个无源场，也就是说，不存在磁荷，对这样的场总是可以表示为某个矢量函数的旋度

方程(8a)则说明：与静电场不一样，磁场随时间的变化使得电场不再是无旋场，因此它也不再可以写成某个标量函数的梯度。但是，当我们把(9)代入(8a)时就发现的旋度是等于零的，因此，这个量是可以表示为某个标量函数的梯度的

因此

这里和都是位置和时间的函数，分别称为电磁场的标量势和矢量势（也统一称为规范势）。

下面我将试着利用关系(9)和(11)凑出广义势能的表达式。我们看一下的第个分量：

将用规范势表示的分量和代入上式就得到

利用关系式得到

注意到

因此第一项可以写为，其中

如果观测的仔细一些就会发现第二项等于

最后一个等号是由于规范势不依赖于速度，因此。因此Lorentz力就可以写为(7)的形式

这里

这样我们就把在电磁场中带电粒子的运动纳入了最小作用原理的框架之中，而Lagrange 函数为

建议你把它代入Lagrange方程

练习一下，你会发现最后的运动方程就是

值得注意的是，这时，即便是在笛卡尔坐标系中，广义动量

也不再是通常的动量，而是等于通常的动量（机械动量）加上一个附加项。

另一点要强调的是，前面我们讲过，在经典力学中是不容许相互作用以有限速度传递的情形出现的，因为这会违反Newton的一些基本假设，即时间的绝对性以及Galileo相对性原理，因此，像(20)这样的Lagrange函数在逻辑上是与经典力学相矛盾的。严格的理论必须将相对论效应考虑进去，此时

在粒子速度远远小于光速，它就近似为式(20)；而在电磁场不随时间变化的情况下相互作用可以看作是瞬时传递的，因此我们就可以用(20)作为Lagrange函数求解带电粒子在电磁场中的运动。但是，即便这两个条件或近似成立，逻辑上的矛盾仍然无法克服。考虑一个带电粒子在稳恒磁场中的运动，在某个惯性系中，如果粒子具有某个初始速度，由Lagrange方程或者方程(22)就可以知道粒子的一个运动，一般来说，粒子会沿着螺旋线运动。但是在以速度相对于第一个参考系运动的观察者看来，由于初始时粒子速度为零，并且粒子在此时刻受到的力也是等于零的，从而我们就应该得到粒子将始终停留在其初始位置的结论。那么那个结论是正确的呢？实际上，即便在粒子速度远远小于光速并且电磁场是稳定的情况下，方程(22)或者Lagrange函数(20)仍然不能在任何一个惯性系中都成立，它们仅在相对于稳恒磁场（或者说产生稳恒磁场的物体）静止的那个惯性系中才是成立的。

举一个例子：考虑质量为、电荷为的粒子在均匀电场和均匀磁场中的运动。由于电磁场均匀并且不随时间变化，因此，所以

从并不能完全确定矢量势，事实上，把加上任意函数的梯度，即也满足，因为，所以，就像标量势可以相差一个常数那样，矢量势的选择具有一定的任意性，它可以相差一个标量函数的梯度。物理上根据问题需要通常给加上某些限制条件，譬如Coulomb规范条件。你可以验证，对于均匀磁场，其满足Coulomb规范条件的矢量势可以取为[利用习题一第12题的结论]

而对于我们考虑的情况，由于，因此

所以Lagrange 函数为

运动方程为

这里，由于是循环坐标，因此另外一个方程为

# 附录：关于相对论情形下Lagrange函数(24)的导出或拼凑

前面我们已经知道相互作用由广义势能

描述，设自由（即不受任何作用）粒子的Lagrange函数为

那么，根据第6节的讨论，总的Lagrange函数应当等于自由情形下的Lagrange函数减去相互作用项，即广义势能

为了要找出的形式，我们将Lagrange方程重新写为

第二个括号中的项正是Lorentz力，而第一个括号中的第一项则是等于零的，因此Lagrange方程就可以写为下面的形式

而我们已经知道正确的方程该是

这就要求

由于L仅仅是速度的函数，上式左边的偏导数实际上就是通常的导数，而上式对速度积分就得到

这就得到了我们前面的结论，即相对论情形下带电粒子在电磁场中的 Lagrange函数为