武汉大学2018-2019学年第二学期期末考试

线性代数A（A卷解答）

一、（10分）设是3阶矩阵，的特征值是1，2，3，试计算的值。

解 设 

由    6分

 10分

二、（10分）求向量组 ，

，的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组

线性表示。

解：设  4分

先对施行行初等变换化为行最简形矩阵  8分

知向量组的秩 ，易知1、2两列即为的一个极大无关组。

且有 ，. 10分

三、（15分）设矩阵的伴随矩阵，矩阵,

矩阵满足. 求.

解（1） 因为

可逆 5分

而 ，，  因此有 

又  10分

所以 

由 

故  15分

四、（15分）当为何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？在有解时，求出方程组的解。

解: 对方程组的增广矩阵施以初等行变换：

 5分

（1）当且时，从而方程组有惟一解.

（2）当时，由于方程组无解.

（3）当时，有可见故方程组有无穷多组解.11分

又由此可得与原方程组同解的方程组为令得其特解

与原方程组的导出组同解的方程组为：由此可得基础解系为



于是，原方程组的全部解为其中是任意常数。15分

五、（16分）已知实二次型

（1）用正交变换把二次型化为标准形，并写出相应的正交矩阵；

（2）求在单位球面上的最大值和最小值.

解：（1）二次型的矩阵为 2分

其特征多项式为 

由得的特征值 6分

当时，解方程组， 可得基础解系，单位化得

当时，解方程组，可得基础解系，单位化得；

当时，解方程组，可得其基础解系，单位化得

令 ，

即为所求之正交阵。且在正交变换之下，原二次型化为标准形

 10分

（2）注意到，正交变换不改变向量的长度，故，

于是 

另一方面，取，则在此点的值为4，于是，在单位球面上的最大值是4。类似地，，在单位球面上的最小值是1，如取 16分

六、（16分）设阶矩阵满足条件，其中，且

，1、求矩阵；2、求秩，其中分别为

的伴随矩阵；3、设，求；4、设线性变换为：，求在基下的变换矩阵.

1. 由题设有，而可逆 3分
2. 易算得： 6分

因而有 9分

2）由均可逆，故也均可逆，所以； 13分

3） 14分

4）由，可得：

故在基下的变换矩阵为： 16分

七、（10分）设均是同阶方阵，是可逆矩阵，且满足，证明、以及 都是可逆矩阵。

证 因为, 则

所以, 因而和可逆。 5分

注意 ，，因而可逆。

注意 ，



因为、均可逆, 故

所以有  ， 即可逆。 10分

八、（8分）设是阶矩阵，其个行向量是齐次线性方程组的一个基础解系，证明：对任一阶可逆矩阵,的行向量组也是的基础解系。

解 有题意，，线性无关，且

设，则  6分

由于可逆，的行向量组线性无关。而

故 的行向量组也是的解向量，从而也是基础解系。 8分