武汉大学2018-2019学年第二学期期末考试

线性代数C（A卷解答）

一、（10分）已知，试计算,的值。

解：由代数余子式的性质有  5分

由克莱姆法则知   10分

二、（12分）求向量组

的秩和一个极大线性无关组并将其余向量用极大无关组表示。

解 令，对作初等行变换得： 8分

故且的一个极大无关组是：且

12分

三、（16分）设矩阵为 ，，

（1）求； （2）求的逆矩阵.

解：（1） 因为

，

而 ，

所以  10分

（2） 16分

四、（14分）已知，

（1）问为何值时，？ （2）求矩阵方程的全部解。

解： 有解，须, 对矩阵作初等行变换：



由此看出 欲 须 . 4分

所以 当时有解。

当 时，将上面最后一个矩阵进一步化为行简化阵



由  得 

由　 得 

由　 得 

故所求矩阵方程的通解为

 （）．14分

五、（15分）设齐次线性方程组的系数阵为，若3阶非零阵满足，（1）求的值； （2）求；（3）求的值。

解：（1）由知，矩阵的各个列向量均为齐次线性方程组的解向量，而，所以至少有一个列向量为非零向量，从而有非零解，故，5分

（2）因为 ，

所以. 10分

（3）由均为3阶方阵，且，得，所以的各列均为的解，而为非零矩阵，所以有非零解，从而知 .

（或可由判断。事实上若，则可逆。于是由得，显然不对，故可知.） 15分

六、（15分）设实向量，其中，，矩阵

（1）试说明矩阵能相似于对角阵；

（2）求可逆矩阵，使为对角阵，并写出此对角阵；

（3）求行列式。

**解：**(1) 为实对称矩阵，所以相似于对角阵。 (4分)

(2) 因为，所以是的特征值。

又秩，，所以是的另两个特征值。

设为对应的特征向量，则由

，得对应的线性无关的特征向量

，令

则 。 12分

(3) 的特征值为－2＋1=－1，1+1=2，1+1=2，因此。 15分

七、（10分）设均是同阶方阵，是可逆矩阵，且满足，证明、以及 都是可逆矩阵。

证 因为, 则

所以, 因而和可逆。 5分

注意 ，，因而可逆。

注意 ，



因为、均可逆, 故

所以有  ， 即可逆。 10分

八、（8分）记，则方程组有形如解的一个充分必要条件是可由线性表示。

证明 由是的解，当且仅当，

即 当且仅当可由线性表示。 8分