2.平原地区水文站网的布设和实验研究

平原地区站网布设时可考虑以下几方面：

（1）要建立统一的观测地面水和地下水的水文站网。

（2）要根据自然条件不同，建立代表流域网。

（3）选择少数代表流域（或建立有代表性的水平衡场），增加对地面、地下统一的水文过程中各个环节的直接观测试验。

根据以上所述，目前急需对平原水文站网包括蒸渗仪布设的统筹规划。为此要做的一项基础工作是将平原地区土壤按其物理性质，制定标准，统一分类，统一土壤名称。

3.建立三水转化模型

为进一步满足生产要求，需解决以下问题：

（1）地表水是经过还原后的天然水量，而地下水资源量则是现状条件下的多年平均补给地下水量，二者资料基础并不一致。

（2）地下水量只有均值，并没有逐年系列，并不能满足水资源开发利用的需要。

（3）目前分开统计，简单相关（如降雨和地下水补给量）没有考虑地面水、地下水和土壤水之间的相互作用。因而在平原地区其计算成果并不能保证各水文要素（降雨、径流、陆面蒸发、潜水蒸发、地下水补给量、地面径流利用量和地下水开采量等）之间的协调和平衡。现有计算模式也很难预测在各种开发利用水平条件下的水资源量。

因此，在地下水埋深比较浅的平原地区，必须建立一个地面水、地下水统一，也就是三水转化基础上的流域模型，才能较为合理地解决上述问题。当然，目前平原地区水资源评价中主要还只考虑了农业对浅层地下水的利用，还没有考虑工业和乡镇企业的用水，如果工业用地下水的含水层较深，而又和浅层地下水不是同一含水层，则此模型中还要考虑不同含水层之间的水量交换问题。

参考文献

[1] World Water Balance and Water Resources of the Earth, Unesco, studies and Reports of Hydrology 25, 1978.

[2] IHP, Unesco, Water Balance of Europe, 1976.

正交函数在水位流量关系分析中的应用

王 锦 生

（水利电力部水文局）

一、概 述

将水位、流量取对数后给水位流量关系选配直线的方法，已有悠久的历史。近年来，有人建议用稍高方次的对数函数来选配曲线，对一些站用三阶式取得良好效果[4]。即令

$$y=\ln Q \quad (1)$$

$$x=\ln(Z-Z_0) \quad (2)$$

选配 $$\hat{y}=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \quad (3)$$

式中：Q——流量；

Z——水位；

Z_0——断流水位。

在此基础上，笔者试用正交函数。实践证明，这样不但可以显著简化选配曲线的计算，而且会给关系曲线的误差分析带来很大的方便。现将此法的原理、步骤和几个站的计算成果，简介于后，供参考。

二、原　理

"正交"即垂直之意[2]。n维矢量a、b正交的条件是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0 \quad (4)$$

对前面的第(3)式，可改写为

$$\hat{y} = b_0 v_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \quad (5)$$

式中：$v_0 = x^0$，$v_1 = x$，$v_2 = x^2$，$v_2 = x^3$。

如果用n个水位流量关系点子来选配曲线，则v_0、v_1、v_2、v_3都有n个值($v_0=1$，看作特例)，都可看作是n维矢量。但$\Sigma v_0 v_1$、$\Sigma v_0 v_2$、$\Sigma v_0 v_3$、$\Sigma v_1 v_2$、$\Sigma v_1 v_3$、$\Sigma v_2 v_3$诸值不为零，故各矢量不正交。

不过，对于这种情况，可以通过变换，找到一组相互正交的x的函数[1]。对于三阶曲线来说，即

$$P_0 = 1 \quad (6)$$

$$P_1 = (x-\alpha_1)P_0 = x - \alpha_1 \quad (7)$$

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma x}{n} \quad (8)$$

$$P_2 = (x-\alpha_2)P_1 - \beta_1 P_0 \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma x P_1^2}{\Sigma P_1^2} \quad (10)$$

$$\beta_1 = \frac{\Sigma P_1^2}{\Sigma P_0^2} = \frac{\Sigma P_1^2}{n} \quad (11)$$

$$P_3 = (x-\alpha_3)P_2 - \beta_2 P_1 \quad (12)$$

$$\alpha_3 = \frac{\Sigma x P_2^2}{\Sigma P_2^2} \quad (13)$$

$$\beta_2 = \frac{\Sigma P_2^2}{\Sigma P_1^2} \quad (14)$$

可以用普通代数来证明：

$$\Sigma P_0 P_1 = \Sigma P_1 = 0$$

$$\Sigma P_0 P_2 = \Sigma P_2 = \Sigma x P_1 - \alpha_2 \Sigma P_1 - n\beta_1 = \Sigma P_1^2 + \alpha_1 \Sigma P_1 - \Sigma P_1^2 = 0$$

$$\Sigma P_1 P_2 = \Sigma x P_1^2 - \alpha_2 \Sigma P_1^2 - \beta_1 \Sigma P_1 = 0$$

$$\Sigma P_0 P_3 = \Sigma P_3 = \Sigma x P_2 - \alpha_3 \Sigma P_2 - \beta_2 \Sigma P_1 = \Sigma(P_1+\alpha_1)P_2 = \Sigma P_1 P_2 = 0$$

$$\Sigma P_1 P_3 = \Sigma x P_1 P_2 - \alpha_3 \Sigma P_1 P_2 - \beta_2 \Sigma P_1^2 = \Sigma x P_1 P_2 - \Sigma P_2 (x P_1 - \alpha_2 P_1 - \beta_1) = 0$$

$$\Sigma P_2 P_3 = \Sigma P_2 (x P_2 - \alpha_3 P_2 - \beta_2 P_1) = \Sigma x P_2^2 - \alpha_3 \Sigma P_2^2 - \beta_2 \Sigma P_1 P_2 = 0$$

所以，P_0、P_1、P_2、P_3之间，任意两函数都相互正交。可以用

$$\hat{y} = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 \quad (15)$$

来选配水位流量关系曲线。用最小二乘法：

$$|A| = \begin{vmatrix} n & \Sigma P_1 & \Sigma P_2 & \Sigma P_3 \\ \Sigma P_1 & \Sigma P_1^2 & \Sigma P_1 P_2 & \Sigma P_1 P_3 \\ \Sigma P_2 & \Sigma P_1 P_2 & \Sigma P_2^2 & \Sigma P_2 P_3 \\ \Sigma P_3 & \Sigma P_1 P_3 & \Sigma P_2 P_3 & \Sigma P_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma P_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma P_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma P_3^2 \end{vmatrix} = n \Sigma P_1^2 \Sigma P_2^2 \Sigma P_3^2 \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} \Sigma y & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma P_1 y & \Sigma P_1^2 & 0 & 0 \\ \Sigma P_2 y & 0 & \Sigma P_2^2 & 0 \\ \Sigma P_3 y & 0 & 0 & \Sigma P_3^2 \end{vmatrix} = \frac{\Sigma y}{n} \quad (17)$$

同理，$a_1 = \dfrac{\Sigma P_1 y}{\Sigma P_1^2}$ (18)

$$a_2 = \frac{\Sigma P_2 y}{\Sigma P_2^2} \quad (19)$$

$$a_3 = \frac{\Sigma P_3 y}{\Sigma P_3^2} \quad (20)$$

可以看出，由于采用正交函数，使计算中的行列式的绝大多数元素变为零，从而大大简化了计算。

如以测点偏离曲线的值r作为测点的误差，其标准差为s_y，方差为s_y^2，则诸系数的误差方差可以从(17)～(20)式导出：

$$s_{a0}^2 = \frac{s_y^2}{n} \quad (21)$$

$$s_{a1}^2 = \frac{\Sigma P_1^2}{(\Sigma P_1^2)^2} s_y^2 = \frac{s_y^2}{\Sigma P_1^2} \quad (22)$$

$$s_{a2}^2 = \frac{s_y^2}{\Sigma P_2^2} \quad (23)$$

$$s_{a3}^2 = \frac{s_y^2}{\Sigma P_3^2} \quad (24)$$

诸系数误差之间的协方差[5]为

$$K_{a0、a1}=s_y^2\Sigma\frac{1}{n}\ \frac{P_1}{\Sigma P_1^2}=0 \tag{25}$$

$$K_{a1、a2}=s_y^2\Sigma\frac{P_1}{\Sigma P_1^2}\ \frac{P_2}{\Sigma P_2^2}=0 \tag{26}$$

同理，$K_{a0、a2}=K_{a0、a3}=K_{a1、a3}=K_{a2、a3}=0$ (27)

故关系线查得值$\hat{y}$的误差方差为

$$\begin{aligned} s_{\hat{y}}^2 &= s_{a0}^2+P_1^2s_{a1}^2+P_2^2s_{a2}^2+P_3^2s_{a3}^2 \\ &= s_y^2\left(\frac{1}{n}+\frac{P_1^2}{\Sigma P_1^2}+\frac{P_2^2}{\Sigma P_2^2}+\frac{P_3^2}{\Sigma P_3^2}\right) \\ &= \eta s_y^2 \end{aligned} \tag{28}$$

式中，$\eta=\frac{1}{n}+\frac{P_1^2}{\Sigma P_1^2}+\frac{P_2^2}{\Sigma P_2^2}+\frac{P_3^2}{\Sigma P_3^2}$ (29)

可以看出，由于可以不计协方差，所以用正交函数选配曲线，估算曲线误差时有很大的方便。

由于对数函数的性质，上面计算的各项误差，在对数坐标纸上是绝对误差，相当于在普通坐标纸上的相对误差[3]。

上面只作到P_3这一阶，但必要时可以推广到更高阶[1]。

$$P_n=(x-\alpha_n)P_{n-1}-\beta_{n-1}P_{n-2} \tag{30}$$

$$\alpha_n=\frac{\Sigma xP_{n-1}^2}{\Sigma P_{n-1}^2} \tag{31}$$

$$\beta_{n-1}=\frac{\Sigma P_{n-1}^2}{\Sigma P_{n-2}^2} \tag{32}$$

$$a_n=\frac{\Sigma P_n y}{\Sigma P_n^2} \tag{33}$$

$$\eta=\frac{1}{n}+\frac{P_1^2}{\Sigma P_1^2}+\frac{P_2^2}{\Sigma P_2^2}+\cdots+\frac{P_n^2}{\Sigma P_n^2} \tag{34}$$

用正交函数选配曲线有一个特点，就是可以“递推”计算。对于水位流量关系线来说，可以从选配$x\sim y$的一阶直线开始。

$$\hat{y}=a_0+a_1P_1$$

如不满意，可以配二阶曲线

$$\hat{y}=a_0+a_1P_1+a_2P_2$$

如仍不满意，可以配三阶曲线

$$\hat{y}=a_0+a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3$$

以至更高阶曲线。而上列诸式中a_0、a_1、a_2都是完全一样的。也就是说，前面计算过的系数，后面就可以不再重算。这是其他方法所不具备的。

三、步　　骤

现先用甘肃省西营河四沟咀站1964年资料中选取的13个测点来作一个示意性的例子。后面再列入另外一些实例(单一线或临时曲线)。资料均取自甘肃、浙江、四川、吉林、福建省编印的《水文年鉴》。

表 1　四沟咀站1964年水位流量关系选配(部分点据)

$Z-Z_0$ (米)	Q (米³/秒)	x	y	P_1	P_2	P_3	r_1 (%)	r_2 (%)	r_3 (%)	η_3	$X_{\hat{y}}$ (%)
0.34	2.19	-1.0788	0.7839	-0.9141	0.4026	-0.1118	-14.4	-10.5	-1.9	0.83	6.4
0.41	4.47	-0.8916	1.4974	-0.7269	0.1404	0.0684	7.7	9.1	3.8	0.36	4.2
0.58	11.0	-0.5447	2.3979	-0.3800	-0.1602	0.1066	6.5	4.9	-3.2	0.32	4.0
0.64	14.3	-0.4463	2.6603	-0.2816	-0.2017	0.0752	6.8	4.9	-0.9	0.25	3.5
0.70	18.5	-0.3567	2.9178	-0.1920	-0.2226	0.0395	9.0	6.8	3.8	0.20	3.1
0.80	24.2	-0.2231	3.1864	-0.0585	-0.2240	-0.0169	0.7	-1.5	-0.2	0.17	2.9
0.91	32.1	-0.0943	3.4689	0.0704	-0.1915	-0.0630	-4.9	-6.8	-2.0	0.20	3.1
1.04	43.5	0.0392	3.7728	0.2039	-0.1228	-0.0883	-9.6	-10.8	-4.1	0.22	3.3
1.17	62.4	0.1570	4.1336	0.3217	-0.0325	-0.0804	-4.5	-4.9	1.3	0.20	3.1
1.22	71.4	0.1989	4.2683	0.3635	0.0062	-0.0688	-2.1	-2.0	3.2	0.18	3.0
1.31	86.7	0.2700	4.4625	0.4347	0.0801	-0.0366	-1.4	-0.6	2.2	0.17	2.9
1.46	119	0.3784	4.7791	0.5431	0.2122	0.0468	1.8	3.8	0.3	0.29	3.8
1.57	148	0.4511	4.9972	0.6158	0.3138	0.1293	4.5	7.5	-2.4	0.60	5.4
$Z_0=2.30$米						s_y	7.4	7.4	3.1		

（一）选配曲线

1.将测点按水位从低到高排列。

2.在最低水位与河底之间选择Z_0值。

3.用（1）、（2）式计算x、y，用（6）～（14）式计算P_1、P_2、P_3诸值。四沟咀站资料列如表1。

4.用（17）～（20）式计算a_0、a_1、a_2、a_3诸值。四沟咀站方程式：

一阶 $\hat{y}=3.3328+2.6306P_1$

二阶 $\hat{y}=3.3328+2.6306P_1-0.0979P_2$

三阶 $\hat{y}=3.3328+2.6306P_1-0.0979P_2+0.7653P_3$

（二）曲线检验

作三种检验：

1.适线检验。用下式计算测点与曲线的偏离值

$$r=y-\hat{y} \tag{35}$$

然后，统计水位相邻测点r值符号不同的出现次数k（在计算机程序中按相邻测点r值之乘积为负值者统计）。令

$$u=\frac{|k-0.5(n-1)|-0.5}{0.5\sqrt{n-1}} \tag{36}$$

如取置信水平为95%，则以$u<1.96$为合格[3]。如四沟咀站的示例，$n=13$，一阶式$k_1=3$，二阶式$k_2=3$，三阶式$k_3=6$。用（36）式计算$u_1=1.44$，$u_2=1.44$，$u_3=0$（得负值者按零计），均可通过。但一阶、二阶式曲线与测点配合得差一些，三阶式配合良好。

2.偏离检验。用下式计算s_y值

$$s_y=\sqrt{\frac{\Sigma r^2}{n-f}} \tag{37}$$

式中$n-f$是自由度。一阶式有两个系数，$f=2$；二阶式$f=3$；三阶式$f=4$。

s_y应与流量测验的标准误差大体相应。建议按4～5%掌握，较大河流用4%，较小河流用5%。

四沟咀站的例子，$s_{y1}=7.4\%$，$s_{y2}=7.4\%$，$s_{y3}=3.1\%$。一、二阶式s_y值均太大，不合格；三阶式合格。

3.不反曲检验。使用前两项检验合格的方程式，按相等的水位间隔推算流量，如果各水位级之间的流量增量是逐渐加大的，即认为在普通坐标纸上Z～Q曲线不反曲，认为合格。当然，对于那种由于特殊的测站控制条件而造成水位流量关系线反曲的情况，应当看作例外。

四沟咀站对三阶曲线的检验列如表2，可以看出，并无反曲现象。

（三）曲线不确定度计算

各级水位的曲线不确定度用下式计算

表2 四沟咀站1964年选配的三阶曲线的不反曲检验

Z（米）	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
Q（米³/秒）	1.3	4.0	7.7	12.4	17.8	24.2	31.9	41.1	52.3	66.0	82.9	103.8	129.7	161.9
ΔQ（米³/秒）	2.7	3.7	4.7	5.4	6.4	7.7	9.2	11.2	13.7	16.9	20.9	25.9	32.2	

表3 用正交函数选配曲线结果

省名	河名	站名	时间	点数 n	Z_1（米）	阶数	k	u	s_y（%）	检验结果		
										适线	偏离	不反曲
吉林	松花江	白山	1964年8月11日以后	32	286.00	1	15	0	2.3	✓	✓	✓
甘肃	黑河	黄藏寺	1964年7月20日以后	55	1.30	2	26	0.14	3.6	✓	✓	✓
浙江	小溪	白岩	1964年	62	2.70	3	28	0.51	3.2	✓	✓	✓
福建	闽江	十里庵	1965年	94	55.00	3	40	1.24	2.7	✓	✓	✓
四川	马边河	清水溪	1964年9月以后	28	4.50	3	13	0	4.3	✓	✓	✓
四川	龙溪河	底堡	1964年9月10日以后	40	90.00	3	18	0.32	4.2	✓	✓	✓

$$X_{\hat{y}}=ts_y\sqrt{\eta} \quad (38)$$

式中，t为置信水平95%时的学生氏t值。四沟咀站$n-f=13-4=9$，$t=2.26$。用(34)式和(38)式计算的三阶曲线的η_3和$X_{\hat{y}}$值也一并列在表1中。曲线的不确定度呈两端大、中间小的状态。实际上该站测次比表1所列的多得多，曲线的不确定度要比表1所列的小一些，这里只作为计算方法示例。

除四沟咀示意性的例子之外，用六个站的实测资料试算，结果列如表3。对这些站来说，都取得了满意的结果。各站在对数格纸上的Z～Q曲线见图1、图2。

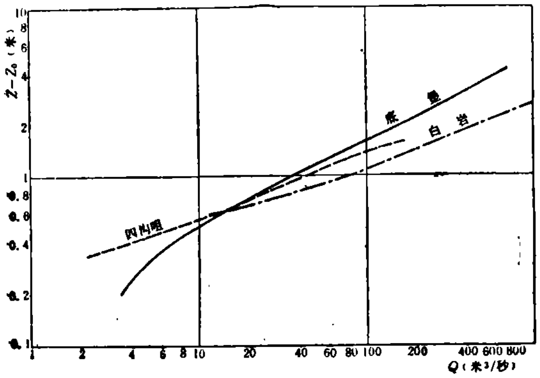

图1 Z～Q曲线(一)

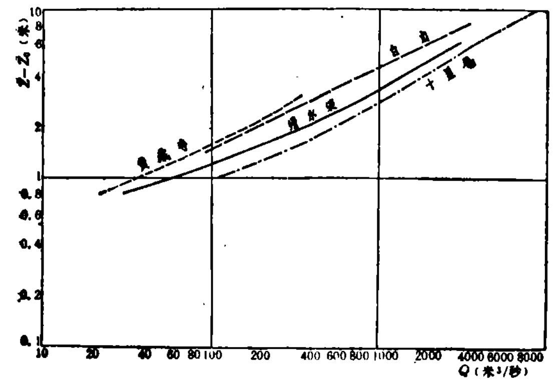

图2 Z～Q曲线(二)

这些计算，使用PC-1500这类计算机，可以迅速完成。

四、讨　论

1.前面已经介绍过，用正交函数选配曲线可以“递推”。另外，还可以“选项”。也就是说，在选配过程中可以把作用不大的项删去。如四沟咀站的三阶式中P_2的系数为-0.0979，比较小，如删去该项，则方程式变为

$$\hat{y}=a_0+a_1P_1+a_3P_3$$

可以算得$s_y=3.7\%$，比原三阶式稍差，但比也有三项的二阶式要好得多。

2.在检验通不过时，可以借助于调整“Z_0”值取得改善。当然也可以继续提高阶次，但阶次愈高，愈容易使普通坐标纸上的Z～Q曲线发生反曲现象，必须特别注意。

3.在试算中，发现对于适线检验来说，点子愈少，愈易通过，起不到控制作用。建议在点数很少时（譬如说，少于20），将置信水平适当改低一些。

主要参考文献

[1] 李庆扬、王能超、易大义，数值分析，华中工学院出版社，1983。

[2] 柳重堪，正交函数及其应用，国防工业出版社，1982。

[3] 长办水文局主编，水文测验国际标准与说明(第一集)，贵州人民出版社，1984。

[4] 刘云程，用对数函数选配水位流量关系曲线，《水文》1984年第6期。

[5] 王锦生，关于水文测验误差的几个问题，《水文》1985年第5期。

《水质分析方法》审改会议在京召开

1986年4月10日～23日，水利电力部水文局在京召开了《水质分析方法》审改会。部水质中心、各流域水质监测中心、河海大学环水所、华北水电学院；北京、浙江、安徽、福建水文总站等单位的十六位同志参加了这次审改会。

在《方法》的审改中，代表们贯彻水文局提出的“《方法》要具有先进性、适用性和通用性”的原则，对《方法》的征求意见稿进行了认真细致的修改。经过与会代表们的努力，完成了审改《水质分析方法》(试用本)和《选测项目的分析方法》(征求意见稿)的工作。

（王杨群）