邵宁录 2018202125

5.2-5

记事件$X_{i,j}$为 $A[i] > [j]$，其中 $i<j$.

由于 A 中的数都不相同.

所以有 $P(X_{i,j}) = \frac{1}{2}$

由指示器随机变量的定义得.

$$I(X) = \begin{cases} 1 & X_{i,j}\text{发生} \\ 0 & X_{i,j}\text{不发生} \end{cases}$$

所以

$$E\left(\sum_{i<j} X_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}$$

5.3-4

先证明 A[i] 出现在 B 中任何特定位置的概率是 $\frac{1}{n}$.

对于 A[i] 出现在 B 的第 j 个位置进行讨论.

则要满足 $i + offset = j$ 或者 $i + offset - n = j$ (*)

由于 $offset = Random(1, n)$

所以 (*) 式满足的概率是 $\frac{1}{n}$.

下面说明排列结果不是均匀随机排列.

因为在进入循环之后, offset 不会再改变.

所以 A 中数的相对位置关系不会改变.

(将 A 想象成一个首尾相连的循环数组)

因此排列结果不是均匀随机排列.

5.3-5

所有元素都唯一的概率为

$$P = \frac{n^3!}{(n^3)^n \cdot (n^3-n)!}$$

$$= \frac{n^3(n^3-1)\cdots(n^3-n+1)}{(n^3)^n}$$

$$= 1 \cdot \frac{n^3-1}{n^3} \cdot \frac{n^3-2}{n^3} \cdot \cdots \cdot \frac{n^3-n+1}{n^3}$$

$$= 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n^3}\right)\left(1-\frac{2}{n^3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{n-1}{n^3}\right)$$

$$\geq \left(1-\frac{n}{n^3}\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\geq 1-\frac{1}{n}$$

0.1

5.4-2

记 P_i 为第 i 次投球结束投球的概率

$P_1 = 0$

$P_2 = \frac{1}{b}$

$P_3 = (1-\frac{1}{b}) \cdot \frac{2}{b}$

$P_4 = (1-\frac{1}{b})(1-\frac{2}{b})\frac{3}{b}$

$\vdots$

$P_b = (1-\frac{1}{b})(1-\frac{2}{b})\cdots(1-\frac{b-2}{b})\frac{b-1}{b}$

$P_{b+1} = 1$

$E = \sum_{i=1}^{b+1} i \cdot P_i$