Lógica de Predicados

Representação de Conhecimento

Conhecimento pode ser representado de duas formas:

- **explícita**: por meio da formalização de sentenças
- **implícita**: por meio de conseqüência lógica (fatos derivados das sentenças)

Passos para formalização de sentenças

- Identificamos as palavras da sentença que correspondem a conectivos.
- Identificamos as partes da sentença que correspondem a proposições atômicas e associamos a cada uma delas um símbolo proposicional.
- Escrevemos a fórmula correspondente à sentença, substituindo suas proposições atômicas pelos respectivos símbolos proposicionais e seus conectivos lógicos pelos respectivos símbolos conectivos

Representação de Conhecimento

Exemplo

- *Está chovendo.*
- ***Se** está chovendo, **então** a rua está molhada.*
- ***Se** a rua está molhada, **então** a rua está escorregadia.*

- **Vocabulário**
  - **c** : *"está chovendo"*
  - **m** : *"a rua está molhada"*
  - **e** : *"a rua está escorregadia"*
- **Formalização**
  - $\Delta = \{c, c \rightarrow m, m \rightarrow e\}$

base de conhecimento

Formalização de Argumentos

Um **argumento** é uma seqüência de premissas seguida de uma conclusão

Exemplo

- *Se neva, então faz frio.*
- *Está nevando.*
- ***Logo**, está fazendo frio.*

- Vocabulário
  - **n** : *"neve"*
  - **f** : *"frio"*
- Formalização
  - $\{n \rightarrow f, n\} \models f$

consequência lógica

Exercício

Usando a sintaxe da lógica proposicional, formalize o argumento:

Se o time joga bem, então ganha o campeonato.

Se o time não joga bem, então o técnico é culpado.

Se o time ganha o campeonato, então os torcedores ficam contentes.

Os torcedores não estão contentes.

Logo, o técnico é culpado.

Validação de Argumentos

Nem todo argumento é válido!

Exemplo: Intuitivamente, qual dos argumentos a seguir é válido?

- **Argumento 1**
  - *Se eu fosse artista, então eu seria famoso.*
  - *Não sou famoso.*
  - *Logo, não sou artista.*
- **Argumento 2**
  - *Se eu fosse artista, então eu seria famoso.*
  - *Sou famoso.*
  - *Logo, sou artista.*

Validação de Argumentos

Um argumento é **válido** se a sua conclusão é uma **conseqüência lógica** de suas premissas, ou seja, a veracidade da conclusão está implícita na veracidade das premissas.

- Vamos mostrar três métodos de validação de argumentos:
  - **Tabela-verdade** (semântico)
  - **Prova por dedução** (sintático)
  - **Prova por refutação** (sintático)
- Métodos semânticos são baseados em interpretações
- Métodos sintáticos são baseados em regras de inferência (raciocínio)

Prova por Refutação

Embora a prova por dedução seja um método mais prático que a tabela-verdade, ainda é muito difícil obter algoritmos eficientes para validação de argumentos com base neste método.

Refutação

- **Refutação** é um processo em que se demonstra que uma determinada hipótese contradiz uma base de conhecimento.
- Uma base de conhecimento $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é consistente se a fórmula correspondente $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ é satisfatível.
- Se $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é consistente, provar $\Delta \vDash \gamma$ equivale a mostrar que o conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\gamma\}$ é inconsistente.

Prova por Refutação

- **Argumento**

  (1) Se o time joga bem, então ganha o campeonato.
  (2) Se o time não joga bem, então o técnico é culpado.
  (3) Se o time ganha o campeonato, então os torcedores ficam contentes.
  (4) Os torcedores não estão contentes.
  (5) Logo, o técnico é culpado.

- **Refutação**

(a) O técnico **não** é culpado	**hipótese**
(b) O time joga bem	**MT(a,2)**
(c) O time ganha o campeonato	**MP(b,1)**
(d) Os torcedores ficam contentes	**MP(c,3)**
(e) Contradição!	**Confrontando (d) e (4)**

- **Conclusão:** a hipótese contradiz as premissas, logo o argumento é válido!

Prova por Refutação

Exemplo: validar o argumento $\{j \to g,\ \neg j \to t,\ g \to c,\ \neg c\} \vDash t$

(1)	$j \to g$	Δ
(2)	$\neg j \to t$	Δ
(3)	$g \to c$	Δ
(4)	$\neg c$	Δ

----

(5)	$\neg t$	Hipótese
(6)	j	MT(5,2)
(7)	g	MP(6,1)
(8)	c	MP(7,3)
(9)	$\square$	Contradição!

Conclusão: como $\Delta \cup \{\neg t\}$ é inconsistente, segue que $\Delta \vDash t$.

Exercícios

- **Usando refutação, mostre que o argumento é válido.**

  (1) *Se Ana sente dor de estômago ela fica irritada.*

  (2) *Se Ana toma remédio para dor de cabeça ela fica com dor de estômago.*

  (3) *Ana não está irritada.*

  (4) *Logo, Ana não tomou remédio para dor de cabeça.*

- **Prove usando refutação:**

  $\{p \rightarrow q,\ \neg q,\ \neg p \rightarrow r\} \vdash r$

  $\{\neg p \rightarrow \neg q,\ q, p \rightarrow \neg r\} \vdash \neg r$

  $\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r,\ \neg p \rightarrow s\} \vdash s$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Para simplificar a automatização do processo de refutação, vamos usar **fórmulas normais** (Forma Normal Conjuntiva - FNC).

Passos para conversão para FNC

- **Elimine a implicação**:

$$\alpha \to \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$$

- **Reduza o escopo da negação**:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee \neg \beta$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$$

- **Reduza o escopo da disjunção**:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

Forma Normal Conjuntiva - FNC

Exemplo de conversão para FNC

$p \vee q \rightarrow r \wedge s$

$\equiv \neg (p \vee q) \vee (r \wedge s)$

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$

$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee s)$

$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$ FNC

Fórmulas normais: $\{\neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s\}$

Inferência por Resolução

- FNC permite usar inferência por resolução
- A idéia da resolução é:
  - RES($\alpha \vee \beta$, $\neg \beta \vee \gamma$) = $\alpha \vee \gamma$
  - RES(α, $\neg \alpha$) = $\square$

Equivalência entre resolução e regras de inferência clássicas

MP($\alpha \rightarrow \beta$, α) = β	RES($\neg\alpha \vee \beta$, α) = β
MT($\alpha \rightarrow \beta$, $\neg\beta$) = $\neg\alpha$	RES($\neg\alpha \vee \beta$, $\neg\beta$) = $\neg\alpha$
SH($\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \gamma$) = $\alpha \rightarrow \gamma$	RES($\neg\alpha \vee \beta$, $\neg\beta \vee \gamma$) = $\neg\alpha \vee \gamma$

Inferência por Resolução

Exemplo: validar o argumento $\{j \rightarrow g,\ \neg j \rightarrow t,\ g \rightarrow c,\ \neg c\} \vDash t$

```
(1) ¬j∨g    Δ
(2) j∨t     Δ
(3) ¬g∨c    Δ
(4) ¬c      Δ
-------------
(5) ¬t      Hipótese
(6) j       RES(5,2)
(7) g       RES(6,1)
(8) c       RES(7,3)
(9) □       RES(8,4)
```

Este é o mecanismo de raciocínio implementado pelo Prolog!

Conclusão: como $\Delta \cup \{\neg t\}$ é inconsistente, segue que $\Delta \vDash t$.

Lógica de Predicados

Há vários argumentos que não podem ser adequadamente formalizados e validados em lógica proposicional.

Exemplo

Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal

- intuitivamente, podemos ver que este argumento é válido
- sua formalização em lógica proposicional resulta em $\{p, q\} \models r$
- porém, não há como mostrar que $\{p, q\} \models r$ é válido
- a validade deste argumento depende do significado da palavra "todo"
- para tratar este tipo de argumento precisamos da **lógica de predicados**

Linguagem formal – elementos básicos

A linguagem formal da lógica de predicados é **mais expressiva** que aquela da lógica proposicional.

Esta maior expressividade decorre do fato de as fórmulas da lógica de predicados serem compostas pelos seguintes elementos básicos:

- **objetos**
- **predicados**
- **conectivos**
- **variáveis**
- **quantificadores**

Linguagem formal – sintaxe

Objeto

é **qualquer coisa** a respeito da qual precisamos dizer algo

Na lógica de predicados, a noção de objeto é usada num sentido bastante amplo. Objetos podem ser:

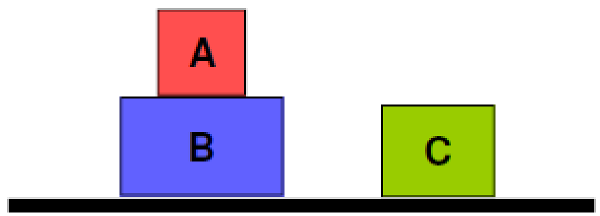
- **concretos**: a bíblia, a lua, ...
- **abstratos**: o conjunto vazio, a paz, ...
- **fictícios**: unicórnio, Saci-Pererê, ...
- **atômicos ou compostos**: um teclado é composto de teclas

Nomes de objetos devem iniciar com letra minúscula!

Linguagem formal – sintaxe

Predicado

denota uma **relação entre objetos** num determinado contexto



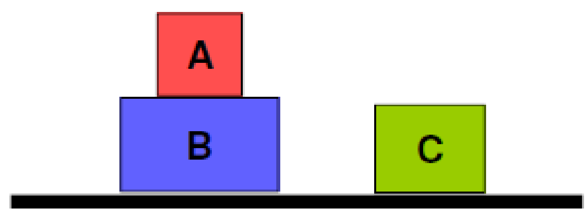
- **`sobre(a,b)`** : o bloco *A* está sobre o bloco *B*
- **`cor(b,azul)`**: o bloco *B* tem cor azul
- **`maior(a,c)`**: o bloco *A* é maior que o bloco *C*

proposições atômicas!

Nomes de predicados também devem iniciar com letra minúscula!

Linguagem formal – sintaxe

Conectivo
forma **proposições compostas**, a partir de proposições atômicas



- **sobre(a,b)** ∧ **sobre(b,m)**: *A* está sobre *B* e *B* está sobre a mesa
- ¬ **cor(b,azul)**: a cor de *B* não é azul
- **maior(b,c)** ∨ **maior(c,b)**: o bloco *B* é maior que *C* ou *C* é maior que *B*

Linguagem formal – sintaxe

Variável

permite estabelecer fatos sobre objetos, sem nomeá-los explicitamente

- **`bloco(X)`** : *X* é um bloco
- **`mesa(Y)`** : *Y* é uma mesa
- **`sobre(X,Y)`** : *X* está sobre *Y*

não são proposições atômicas!

Note que proposições atômicas são sentenças que podem ter valor verdadeiro ou falso; mas não podemos dizer se **`bloco(X)`** é verdadeiro ou falso até que a variável **`X`** tenha sido **substituída** ou **quantificada**.

Nomes de variáveis devem iniciar com letra maiúscula!

Linguagem formal – sintaxe

Quantificador
permite estabelecer fatos sobre objetos, sem enumerá-los explicitamente

- Há dois quantificadores:

  Universal....: $\forall X[\text{bloco}(X)]$ estabelece que todo objeto *X* é um bloco

  Existencial..: $\exists Y[\text{mesa}(Y)]$ estabelece que algum objeto *Y* é uma mesa

- Estes quantificadores podem ser combinados numa mesma fórmula

  Todo bloco está sobre alguma coisa que é um bloco ou uma mesa

  $\forall X[\text{bloco}(X) \rightarrow \exists Y[\text{sobre}(X,Y) \wedge (\text{bloco}(Y) \vee \text{mesa}(Y))]]$

Linguagem formal – semântica

Interpretação

- um conjunto não-vazio $\mathcal{D}$
- um mapeamento que associa cada objeto a um elemento fixo de $\mathcal{D}$
- um mapeamento que associa cada predicado a uma relação sobre $\mathcal{D}$

- **O quantificador universal denota conjunção**

  Por exemplo, para $\mathcal{D} = \{a, b ,c, m\}$

  A fórmula `∀x[bloco(X)]` equivale a `bloco(a) ∧ bloco(b) ∧ bloco(c) ∧ bloco(m)`

- **O quantificador existencial denota disjunção**

  Por exemplo, para $\mathcal{D} = \{a, b ,c, m\}$

  A fórmula `∃Y[mesa(Y)]` equivale a `mesa(a) ∨ mesa(b) ∨ mesa(c) ∨ mesa(m)`

- **Equivalências**

  $\neg\forall x[\alpha(X)] \equiv \exists x[\neg\alpha(X)]$

  $\neg\exists x[\alpha(X)] \equiv \forall x[\neg\alpha(X)]$

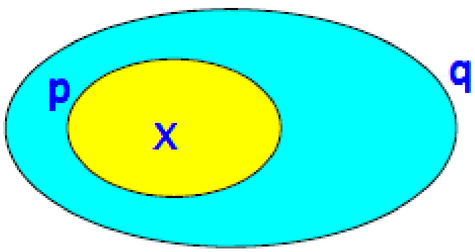
Representação de Conhecimento

- Para facilitar a formalização se sentenças na lógica de predicados, destacamos quatro tipos de sentenças de especial interesse, denominadas **enunciados categóricos**:
  - **Universal afirmativo:** *__Todos__ os homens são mortais*.
  - **Universal negativo:** *__Nenhum__ homem é extra-terrestre*.
  - **Particular afirmativo:** *__Alguns__ homens são cultos*.
  - **Particular negativo:** *__Alguns__ homens __não__ são cultos*.

Representação de Conhecimento

Enunciado universal afirmativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$
- estabelece que **p** é um subconjunto de **q**



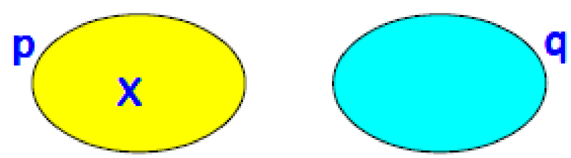
Exemplo:

- **Sentença....:** *Todos os homens são mortais*
- **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow m(X)]$
- **Semântica..:** para todo X, se $X \in h$ então $X \in m$

Representação de Conhecimento

Enunciado universal negativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow \neg q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** são disjuntos



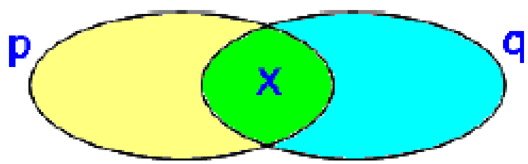
Exemplo:

- **Sentença....:** *Nenhum homem é extra-terrestre*
- **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow \neg e(X)]$
- **Semântica..:** para todo X, se $X \in h$ então $X \notin e$

Representação de Conhecimento

Enunciado particular afirmativo

- é da forma $\exists X[p(X) \wedge q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** têm intersecção não-vazia



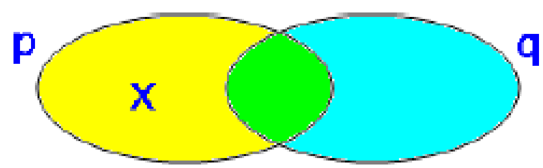
<u>Exemplo</u>:

- **Sentença....:** *Alguns homens são cultos*
- **Sintaxe.......:** $\exists X[h(X) \wedge c(X)]$
- **Semântica..:** existe X tal que $X \in h$ e $X \in c$

Representação de Conhecimento

Enunciado particular negativo

- é da forma $\exists X[p(X) \land \neg q(X)]$
- estabelece que existem elementos em **p** que não estão em **q**



<u>**Exemplo**</u>:

- **Sentença....:** *Alguns homens não são cultos*
- **Sintaxe.......:** $\exists X[h(X) \land \neg c(X)]$
- **Semântica..:** existe X tal que $X \in h$ e $X \notin c$

Equivalência entre sentenças

- Há sentenças que podem ser escritas em mais de uma forma.
- Exemplo
  - Sentenças

    Nem tudo que brilha é ouro.

    Existe algo que brilha e não é ouro.
  - Fórmulas

    $\neg\forall X[b(X) \rightarrow o(X)]$

    $\exists X[b(X) \wedge \neg o(X)]$
  - Equivalência

    $\neg\forall X[b(X) \rightarrow o(X)]$

    $\equiv \neg\forall X[\neg b(X) \vee o(X)]$

    $\equiv \exists X \neg [\neg b(X) \vee o(X)]$

    $\equiv \exists X [b(X) \wedge \neg o(X)]$

Validação de Argumentos

Exemplo

Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal

- Formalização: $\{h(s), \forall X[h(X) \rightarrow m(X)]\} \models m(s)$
- Normalização: $\{h(s), \forall X[\neg h(X) \vee m(X)]\} \models m(s)$
- Refutação

(1) $h(s)$ Δ
(2) $\neg h(X) \vee m(X)$ Δ
----
(3) $\neg m(s)$ Hipótese
(4) $\neg h(s)$ RES(3,2) / {X=s}
(5) $\square$ RES(4,1)

instanciação de variável

Extração de Respostas

Exemplo

Sócrates é homem.

Todo homem é mortal.

Consulta: *Quem é mortal?*

- Formalização: $\{ h(s), \forall X[h(X) \rightarrow m(X)] \} \models \exists Y[m(Y)]$
- Normalização: $\{ h(s), \forall X[\neg h(X) \vee m(X)] \} \models \exists Y[m(Y)]$
- Refutação

(1)	$h(s)$	Δ
(2)	$\neg h(X) \vee m(X)$	Δ
(3)	$\neg m(Y)$	Hipótese
(4)	$\neg h(Y)$	RES(3,2) / {X=Y}
(5)	$\square$	RES(4,1) / {Y=s}

$\neg \exists Y [m(Y)] \equiv \forall Y [\neg m(Y)]$

resposta da consulta

Instanciação de Variáveis Universais

Apenas variáveis universais podem ser corretamente instanciadas.

Variável universal: *"Todo cão é fiel a alguém"*

- **Fórmula......:** `∀X[cão(X) → ∃Y[fiel(X,Y)]]`
- **Instância.....:** `cão(rex) → ∃Y[fiel(rex,Y)] / {X=rex}`
- **Significado.:** *Se Rex é um cão, então Rex é fiel a alguém.*
- **Conclusão..:** a fórmula e sua instância têm significados coerentes

Variável existencial: *"Todo cão é fiel a alguém"*

- **Fórmula......:** `∀X[cão(X) → ∃Y[fiel(X,Y)]]`
- **Instância.....:** `∀X[cão(X) → fiel(X,ana)] / {Y=ana}`
- **Significado.:** *Todo cão é fiel a Ana.*
- **Conclusão..:** a fórmula e sua instância **não** têm significados coerentes

Skolemização de variáveis existenciais

Supomos a existência de uma *função* que dá o valor correto para a variável.

Variável existencial: *"Todo cão é fiel a alguém"*

- **Fórmula......:** `∀X[cão(X) → ∃Y[fiel(X,Y)]]`
- **Instância.....:** `∀X[cão(X) → fiel(X,dono(X))] / {Y=dono(X)}`
- **Significado.:** *Todo cão é fiel a seu dono.*
- **Conclusão..:** a fórmula e sua instância têm significados coerentes

- A suposição destas funções foi originalmente proposta por *Thoralf Skolem*.
- A função deve ter como argumentos todas as variáveis que são globais a ela.
- Se não houver variáveis globais, em vez de função, podemos usar uma constante.
- Daqui em diante vamos considerar apenas variáveis universais.