

# Teoria Nebulosa Fuzzy Theory

## Introdução

# Bibliografia

- Earl Cox, "Fuzzy Systems Handbook", AP Professional, 1995, ISBN 0-12-194270-8
- Transparências
  - <http://www.nce.ufrj.br/adriano/fuzzy/bibliogr.htm>
- Apostila
  - <http://www.nce.ufrj.br/adriano/fuzzy/bibliogr.htm>
- Bart Kosko, "Fuzzy Thinking", HarperCollins Publishers, 1994, ISBN 0-00-654713-3
- Lefteri H. Tsoukalas, Robert E. Uhig, "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering", John Wiley and Sons, Inc, 1997, ISBN 0-471-16003-2

# Bibliografia

- J. Wesley Hines, "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering, Matlab Supplement", John Wiley and Sons, Inc, 1997.
- Timothy J. Ross, "Fuzzy Logic with Engineering Applications", McGraw-Hill, Inc., 1995, ISBN 0-07-053917-0

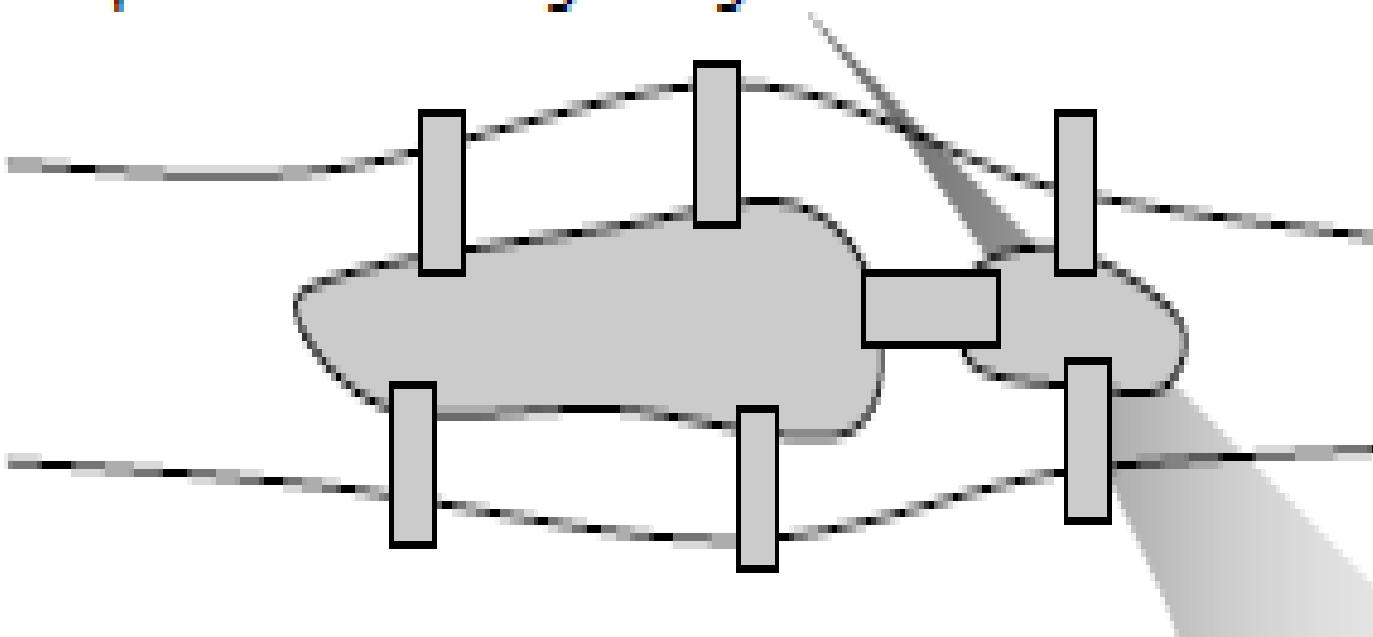
# Teoria de Problemas

A IA se ocupa da resolução de problemas, para tal é necessário conhecimento sobre o problema e técnicas de manipular este conhecimento para obter a solução.

- O que é um PROBLEMA?
  - Resolver um problema é diferente de ter um método para resolvê-lo.
  - Antes de tentar buscar a solução de um problema, deve-se responder as seguintes perguntas:
    - Quais são os dados?
    - Quais são as soluções possíveis?
    - O que caracteriza uma solução satisfatória?
- Exemplos:

# Teoria de Problemas

- As pontes de Königsberg



## Percepção

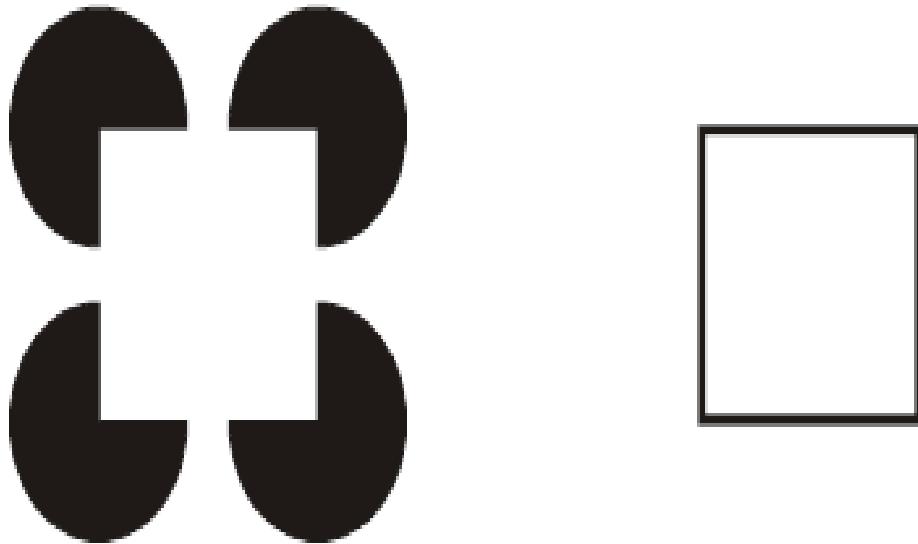


Figura 2 – Quadro de Kanizsa, 1976

O quadro de Kanizsa ilustra a capacidade que temos em lidar com padrões incompletos. Neste caso “interpolamos” a informação que falta e vemos um quadrado branco. Este quadrado não existe formalmente e um programa de computador para interpretação de imagens muito provavelmente não o encontraria, por não existir um *elemento de quatro lados* nesta figura. Padrões incompletos ocorrem muitas vezes em engenharia na forma de sinais ruidosos e faz-se necessário reconstruir a informação original. As redes neurais artificiais podem ser treinadas para lidar com padrões incompletos.

# Teoria de Problemas

## Modos de definir uma FUNÇÃO PROBLEMA

### 1. Por ENUMERAÇÃO EXAUSTIVA

- Fornece-se todos os conjuntos de pares (*dado, resultado*).
  - Ex.: Agenda de telefone.

### 2. DECLARATIVAMENTE

- Definir declarativamente um problema é dar propriedades que devem ser satisfeitas pela solução do problema.
  - Ex.: O avô de alguém é aquela pessoa que é pai do pai da pessoa.

### 3. Por um PROGRAMA (um algoritmo)

- Um programa de computador define a correspondência entre dados e resultados sempre que ele pára, conseguindo chegar a uma solução.
  - Ex.: Programa para declaração do imposto de renda.

### 4. Por EXEMPLOS

- O problema não completamente definido para todo valor de seus dados. Conhece-se para um subconjunto.
  - Ex.: Ensinar a pegar uma bola atirada no ar.

# Por que?

---

*Toda linguagem é vaga.*

*Toda lógica tradicional habitualmente assume que símbolos precisos estão sendo empregados. Portanto, não é aplicável à vida terrestre mas somente a uma imaginária existência celestial.*

*Não se imagina como tudo é vago até que se tenta fazê-lo de maneira precisa.*

Bertrand Russel

*Quando as leis da Matemática referem-se à realidade elas não estão certas. Quando estas leis estão certas elas não se referem a realidade.*

Albert Einstein

# Limitações da Lógica Aristotélica

---

- Lógica Aristotélica

- Na lógica tradicional Aristotélica os objetos são classificados em categorias muito bem definidas.
- Um objeto pertence a uma categoria ou não.  
Uma figura geométrica ou é um quadrado ou não.
- Ou se é ou não.
- Serve para separar objetos em categorias bem definidas.

- Como classificar exatamente?

- O carro está andando muito rápido.
- Ele é uma pessoa muito feliz.
- Esta sala é pequena.
- Nesta cidade a temperatura frequentemente esá abaixo de zero.

## Ser ou Não Ser?

---

Bertrand Russel ao tentar formalizar a Matemática encontrou a possibilidade de ser e não ser ao mesmo tempo, no paradoxo do mentiroso de Creta.

*O Filósofo Cretense dizia que todos os Cretenses mentem.*

Se ele mente então ele pode falar a verdade, se ele fala a verdade então ele está mentindo.

## Aristóteles X Buda

---

As frases abaixo foram retiradas do capítulo 5, Aristóteles versus Buda do livro

*The New Science of Fuzzy Logic - Fuzzy Thinking*  
de Bart Kosko

*Tudo deve ser ou não ser, seja no presente ou no futuro.*

Aristóteles

*Eu não expliquei que o mundo é eterno ou não eterno. Eu não expliquei que o mundo é finito ou infinito.*

O Buda

*A idéia fundamental do Budismo é passar além do mundo dos opostos, um mundo construído por diferenças intelectuais e poluições emocionais*

D. T. Suzuki - A Essência do Budismo

Por que não acrescentarmos a dúvida de Hamlet?

*Ser ou não ser eis a questão.*

William Shakespeare - Hamlet

A resposta seria?

*Ser e não ser eis a resposta.*

## Pensando Nebulosamente

---

- Se a taxa de juros subir muito e o déficit for alto teremos uma recessão branda.
- Se estamos na hora rush aumente muito a freqüência dos trens.
- Se temos muita roupa na máquina de lavar aumente o tempo de lavagem.
- Se a terra esta muita seca e temperatura está alta regue durante muito tempo.
- Se  $X_i$  então  $Y_j$

## Teorema da Aproximação

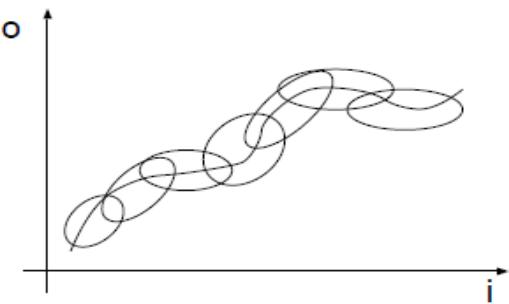


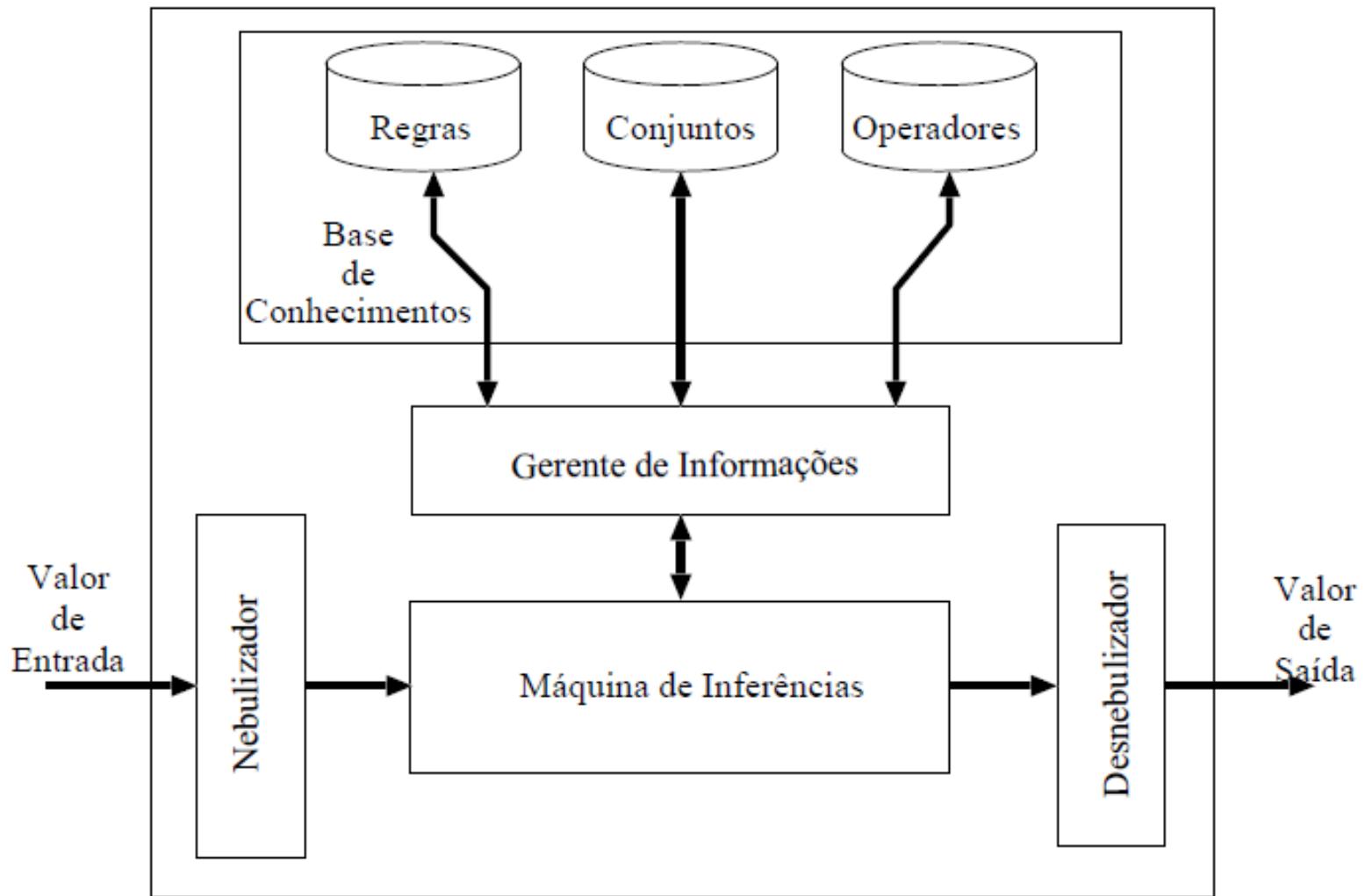
Figura 1: Aproximação por Conjuntos Nebulosos

*É sempre possível cobrir uma curva com um número finito de remendos.*

Bart Kosko

- Remendos são pedaços de conhecimento sobre o problema.
- Cada remendo corresponde a uma regra, ou proposição da forma  
IF ... THEN ...

# Sistema Nebuloso



**Nebulizador:** transforma a entrada em um conjunto nebuloso.

**Desnebulizador:** transforma o valor nebuloso de saída em um valor nítido.

**Máquina de Inferência:** faz todos os cálculos.

**Gerente de Informações:** obtém da base de conhecimentos informações sobre como regras devem ser resolvidas.

**Base de Conhecimentos:** contém definições sobre as regras, conjuntos e operadores.

# Como construir um Sistema Nebuloso?

---

1. Definir Entradas e Saídas (Variáveis Nebulosas de Entrada e Saídas)
  - (a) Definir Faixas de Valores  
(Universo de Discurso das Variáveis)
  - (b) Dividir o Universo de Discurso em Conjuntos Nebulosos (Rótulos)
  - (c) Definir a semântica dos conjuntos  
(Funções de Inclusão)

2. Construir a Base das Regras

3. Simular o Sistema

4. Testar o Sistema

## Vantagens de Sistemas Nebulosos

---

- Utilizam regras que conseguem expressar as imprecisões e aproximações dos métodos de decisões dos especialistas. Por esta razão são mais fáceis de construir, entender, manter, testar.
- Podem ser protótipados em menos tempo.
- São mais robustos e conseguem trabalhar com falta de regras.

- Necessitam menos regras.
- Podem trabalhar com informações imprecisas.
- Podem chegar a conclusões de maneira paralela.
- Acumulam evidências contra e a favor de proposições.

# Desvantagens de Sistemas Nebulosos

---

**Verificação e Validação:** Embora sejam mais fáceis de construir e prototipar que sistemas convencionais, eles necessitam que sejam executadas mais simulações e necessitam de mais sintonia antes de serem definitivamente aprovados.

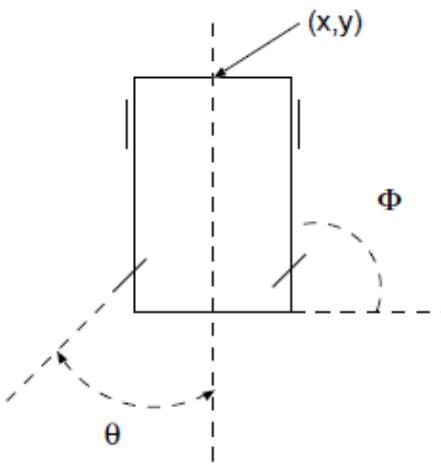
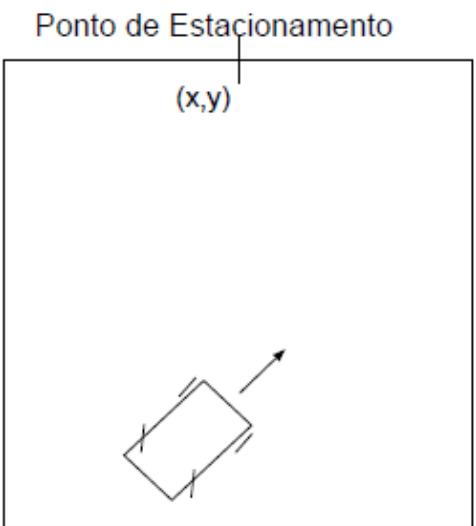
**Formalismo:** Não tem uma definição matemática precisa e nítida como os sistemas tradicionais.

**Capacidade de Aprendizado:** Não aprendem com a experiência. Sistemas Híbridos são utilizados para diminuirem esta desvantagem.

**Determinação das funções e regras:** É difícil o estabelecimento de regras nebulosas corretas.

# Exemplo de Projeto

Estacionar um Caminhão



- Estacionar o caminhão com  $\phi_f = 90^0$  e alinhar  $(x, y)$  do caminhão com  $(x, y)$  do ponto de parada.

- O caminhão somente se move para trás.
- O sistema nebuloso recebe como entradas a posição  $x$  e o ângulo  $\phi$  do caminhão com a posição horizontal.
- A saída é o ângulo  $\theta$  das rodas.

## Os Detratores

---

*Lógica Nebulosa é errada, errada e perniciosa. O que precisamos é mais pensamento lógico, não menos. O perigo da lógica nebulosa é que ela irá encorajar aquele tipo de pensamento impreciso que nos trouxe tantas dificuldades. Lógica nebulosa é a cocaína da ciência.*

Professor William Kahan - U. California - Berkeley

*“Nebulização” é uma espécie de permissividade científica. Ela tende a resultar em slogans socialmente atrativos desacompanhados da dura disciplina do trabalho científico e da observação paciente.*

Professor Rudof Kalman - U da Flórida - Gainesville

# Comentários

Lotfi A. Zadeh

# Comentários

- Em grande parte da literatura científica, elegância, tem precedência sobre relevância;
- A ciência tem a tradição de valorizar fortemente o quantitativo, preciso e o rigoroso. No entanto, nosso mundo está recheado de imprecisões e incertezas.

# Comentários

- O mundo real está cheio de imprecisões e incertezas;
- Precisão e certeza acarretam custo.

# *Pergunta – Investigação Trabalhos*

- Explorar a tolerância a imprecisão, incerteza e verdade parcial para atingir tratabilidade, robustez e solução de baixo custo.

# *Pergunta – Investigação Trabalhos*

- Com o nebuloso ganha-se maior generalidade, alto poder de expressão, maior habilidade de modelar problemas do mundo real e, o mais importante, uma metodologia para explorar a tolerância a imprecisão e um mecanismo que guia a uma tratabilidade, robustez e solução de baixo custo.

## Produtos Comerciais

---

**Metro Sendai:** 16 estações e 13.5 km de trilhos. Governo Japonês exigiu testes rigorosos. Sistema desenvolvido nos anos 80 pela Hitachi, que executou acima de 300 000 simulações e 3000 testes no metro vazio, até que em 1987 o sistema nebuloso substituiu operadores humanos. Para que os operadores não percam seu treinamento eles operam o sistema durante as horas mais vazias.

**Lavadoras de roupa:** diversas empresas no Japão e Coréia fabricam estes aparelhos. No Brasil a Continental fabrica uma lavadoura com tecnologia nebulosa. Alguns sistemas empregam 10 ou menos regras.

**Máquinas Fotográficas e Filmadoras:** usam regras nebulosas para focalizar melhor a imagem, calcular a melhor tempo de exposição, e acabar com as imagens tremidas.

**Aspiradores de Pó:** controlador nebuloso mede mudanças no fluxo de pó no ar para controlar a potência de sucção.

**Fornos de Microondas:** sensores medem temperatura, umidade e forma dos alimentos para controlar o tempo de ação.

**Ar Condicionado:** Um sistema nebuloso controla o funcionamento do aparelho de acordo com a temperatura e as preferências dos usuários.

**Indústria Automobilística:** sistemas nebulosos controlam a força com que os freios são acionados para evitar derrapagens, nos chamados ABS. A Mitsubishi desenvolveu um sistema que controla ao mesmo tempo a suspensão, transmissão, direção, tração e ar condicionado.

**Serviços financeiros:** Hitachi usa 150 regras nebulosas para negociar bonds japoneses e mercados futuros. Yamaichi tem um sistema com centenas de regras para gerenciar um fundo de ações.

**Helicóptero:** Sugeno pesquisador do Instituto de Tecnologia de Tóquio desenvolveu um sistema de comando por voz para controlar um helicóptero em escala reduzida. A primeira versão tinha 3.58 m, 20 kg e um rotor de 1 m.

# Firmas Japonesas, Coreanas e Produtos

Fonte Livro Fuzzy Thinking - Bart Kosko - 1992)

Produto	Companhias	Função da Lógica Nebulosa
Ar Condicionado	Mitsubishi, Hitachi, Matsushita, Sharp	Evita oscilação da temperatura e economiza energia
Motor Carro	NOK/Nissan	Controla injeção e ignição baseado na posição do acelerador, taxa de oxigenio, temperatura água, RPM e alguns outros itens.

Freios ABS	Nissan	Controla os freios em condições perigosas baseado na velocidade e aceleração do carro e velocidade e aceleração das rodas
Transmissão	Honda, Nissan, Subaru	Seleciona marcha baseado na carga, estilo de direção e condições da rua.
Copiadora	Canon	Ajusta voltagem do tambor baseado na densidade da figura, temperatura e humidade
Elevadores	Fujitec, Mitsubishi, Toshiba	Reduz tempo de espera baseado no tráfego
Controle de Fábrica	Omron	Escalona tarefas e estratégias na linha de montagem
Golfe	Maruman Golf Club	Escolhe tacos
Controle de forno de ferro	Nippon Steel	Mistura entradas e ajusta tempos e temperaturas
Palmtop	Sony	Reconhece caracteres Kanji manuscritos

## Empresas Brasileiras

---

Produto	Companhias	Função da Lógica Nebulosa
Ar Condicionado	Multibrás (Brastemp, Consul)	Controla de maneira inteligente a temperatura ambiente de acordo com o usuário

# História, Estado da Arte e Desenvolvimento Adicional



- |             |  |
|-------------|--|
| <b>1965</b> | <b>Artigo “Fuzzy Logic” por Prof. Lotfi Zadeh, Faculdade de Engenharia Elétrica, U.C. Berkeley, “Teoria do Conjunto Fuzzy”</b>                                 |
| <b>1970</b> | <b>Primeira aplicação de Lógica Fuzzy em engenharia de controle (Europa)</b>   |
| <b>1975</b> | <b>Introdução de Lógica Fuzzy no Japão</b>   |
| <b>1980</b> | <b>Verificação empírica de Lógica Fuzzy na Europa</b>  |
| <b>1985</b> | <b>Larga aplicação de Lógica Fuzzy no Japão</b>  |
| <b>1990</b> | <b>Larga aplicação de Lógica Fuzzy na Europa</b>   |
| <b>1995</b> | <b>Larga aplicação de Lógica Fuzzy nos Estados Unidos</b>  |
| <b>2000</b> | <b>Lógica Fuzzy tornou-se tecnologia padrão e é também aplicada em análise de dados e sinais de sensores. Aplicação de Lógica Fuzzy em finanças e negócios</b> |



LABIC

# Estudo de Aplicações de IEEE em 1996

- ✖ Aproximadamente 1100 aplicações de Lógica Fuzzy bem sucedidas são publicadas (estimado de 5% do total existente)
- ✖ Quase todas as aplicações não envolveram substituição de um controlador tipo padrão (PID,...) e sim um controle de supervisão de múltiplas Variáveis
- ✖ Aplicações variam de controle embutido (28%), automação industrial (62%) até controle de processo (10%)
- ✖ De 311 autores que responderam um questionário, aproximadamente 90% afirmam que Lógica Fuzzy diminuiu o tempo de projeto para menos da metade
- ✖ Neste questionário, 97.5% dos projetistas afirmaram que usarão Lógica Fuzzy novamente em futuras aplicações, se Lógica Fuzzy for aplicável

**Lógica Fuzzy será indispensável  
em engenharia de controle!**

# Início

---

Lofty Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control.*  
1965

Príncipio da Incompatibilidade.

*A medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade para fazer afirmações precisas e que sejam significativas acerca deste sistema diminui até que um limiar é atingido além do qual precisão e significância (ou relevância) tornam-se quase que características mutuamente exclusivas.*

# Representação de Informação

---

**Tipo Nominal:** não há relações de ordem e o único teste possível é se o elemento pertence ao conjunto ou não. Ex:

*Ex.*  $\text{times} = \{\text{Vasco}, \text{Flamengo}, \text{Santos}, \text{Gremio}, \dots\}$

**Tipo Ordinal:** identifica a posição de uma entidade ou evento em uma hierarquia cujos intervalos não são definidos exatamente. Os dados podem ser comparados quanto a igualdade, superioridade e inferioridade.

*Ex.*  $\text{inteligente} = \{\text{Paulo}, \text{Maria}, \text{Carlos}, \text{Ana}\}$

$\text{intelig}(\text{Paulo}) < \text{intelig}(\text{Maria}) < \text{intelig}(\text{Carlos}) < \text{intelig}(\text{Ana})$

**Tipo Intervalo:** dados cujos intervalos podem ser definidos com exatidão. No entanto, não há um ponto zero claramente definido. Podem ser comparados quanto a igualdade, superioridade e podem ser subtraídos um dos outros.

Ex. Calendário. Graus Celsius

$$\text{intelig}(\text{Maria}) - \text{intelig}(\text{Paulo}) < \text{intelig}(\text{Ana}) < \text{intelig}(\text{Carlos})$$

**Tipo Proporcional:** Semelhantes aos do tipo intervalo, mas há um zero absoluto.

Ex. Graus Kelvin

# Conjuntos Clássicos

---

## Universo de Discurso:

Corresponde ao espaço onde estão definidos os elementos do conjunto.

Por exemplo:

$$0m \leq altura \leq 3.0m$$

# Função de Inclusão:

Define se um elemento pertence ou não ao conjunto.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1.70 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

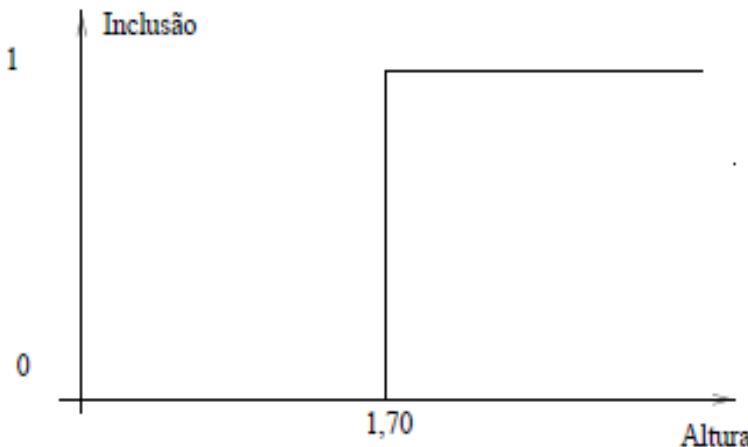


Figura 2: Conjunto Clássico - Pessoa Alta

# Problemas com Conjuntos Clássicos

---

Embora conjuntos clássicos sejam a base de toda teoria matemática moderna, eles apresentam problemas quando aplicados à uma enorme classe de problemas do mundo real. O problema da escolha do limiar entre dois conjuntos (alto / não alto) é denominado de *paradoxo Sorites*, atribuído ao dialético, Eubulides de Mileto, adversário de Aristóteles.

O paradoxo se enuncia com os seguintes termos:

*Quando um monte de areia deixa de ser um monte de areia, caso retiremos um grão de areia de cada vez?*

## Tipos de Inclusão

---

**Inclusão com grau:** Um elemento pertence a um conjunto com um determinado grau de certeza. Alguns elementos do conjunto são mais representativos da idéia geral do conjunto do que outros.

*alunos excelentes* = {*Pedro, Ana, Paulo, Marta*}

*muito altos* = {*Oscar, Michael Jordan, Junior Baiano*}

**Inclusão em diversos conjuntos:** Um elemento pode ser membro parcial de mais de um conjunto.

$$criancas = \{Rita, Manoel, Adriana, Marta\}$$

$$adolescentes = \{Rita, Mateus, Joaquim, Felipe\}$$

$$\text{crianças(Rita)}=0.2$$

$$\text{adolescentes(Rita)}=0.8$$

## Função de Inclusão

- A função de inclusão de um conjunto  $A$  é caracterizada pela função  $\mu(\cdot) : X \rightarrow [0, 1]$  que mapeia cada elemento de  $X$  em um número real no intervalo  $[0, 1]$ .
- Para um particular elemento, a função representa o grau de inclusão do elemento no conjunto.

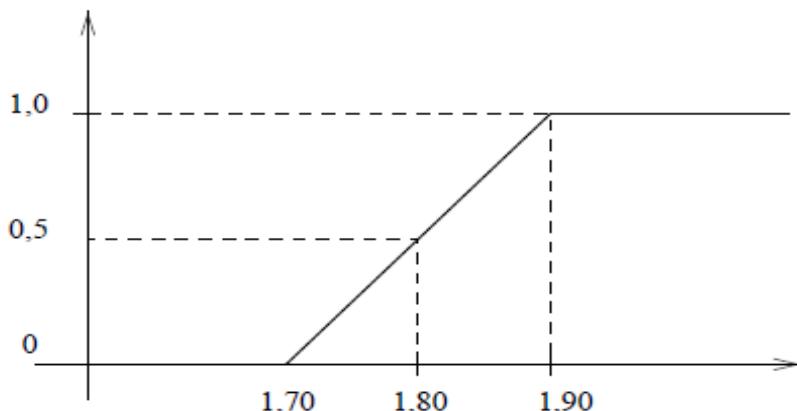


Figura 3: Conjunto Nebuloso dos Altos

# Não é Probabilidade!

---

## Lógica Nebulosa não é probabilidade.

- O fato de que eu pertenço ao conjunto das pessoas altas, com um grau de inclusão de 0.25, indica que eu estou afastado do ideal de altura por uma diferença de 0.75.
- O grau 0.25 não significa que uma pessoa com a minha altura possa ser encontrada com probabilidade 0.25 no conjunto das pessoas altas.
- Eu posso ser a única pessoa com a minha altura no conjunto das pessoas altas, ou todas podem ter a minha altura e mesmo assim o grau se mantém.



LABIC

# Problemas da Lógica de 1a Ordem



....as respostas são categóricas  
**{Verdadeiro, Falso}**

Entretanto, a maioria das palavras e avaliações utilizadas no nosso raciocínio diário não são claramente definidas.



LABIC

# Exemplo

*Se sintoma = dor de dentes  
então problema = cárie*



Não é verdade para todos os pacientes

*Se sintoma = dor de dentes  
então problema = (cárie ou gengiva.. ou...)*

Seria necessário adicionar todos os possíveis problemas para que a regra seja verdadeira



LABIC

## Exemplo (cont.)

*Se problema = cárie  
então sintoma = dor de dentes*



também não é verdade.

A conexão entre “dor de dentes” e “cárie”  
não é uma consequência lógica em qualquer  
direção



LABIC

# Grau de Crença X Grau de Verdade



Existem domínios de aplicação nos quais a incerteza é parte inherentente do problema devido a dados ausentes ou imprecisos e/ou relações causa-efeito não determinísticas

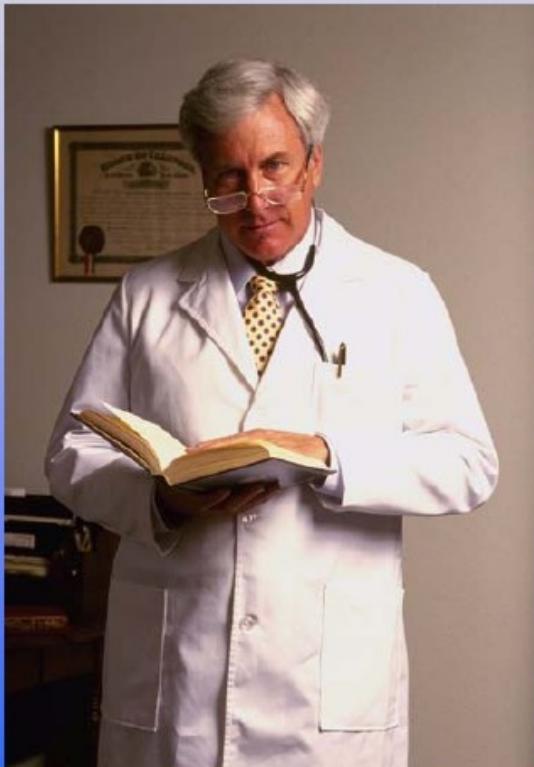
Grau de crença → Teoria das probabilidades

Grau de verdade → Lógica Fuzzy



LABIC

# Grau de Crença



↳ 80% dos pacientes com dor de dentes têm cárries

Uma probabilidade de 0.8 não significa “80% verdade” mas tem-se um grau de crença de 80% nessa regra.

Ou seja, em 80% dos casos essa regra é verdadeira



LABIC

# Grau de Verdade



A Teoria de conjuntos Fuzzy permite especificar quanto bem um objeto satisfaz uma descrição vaga.

Dada a proposição:

Mario é alto

é verdadeira dado que a altura de Mario é 1.65m?

*...mais ou menos....*

Observar que não há incerteza, estamos seguros da altura de Mario. O termo linguístico “alto” é vago, como interpretá-lo?



LABIC

# Descrições Vagas





LABIC

# Lógica Fuzzy

Dada uma sentença

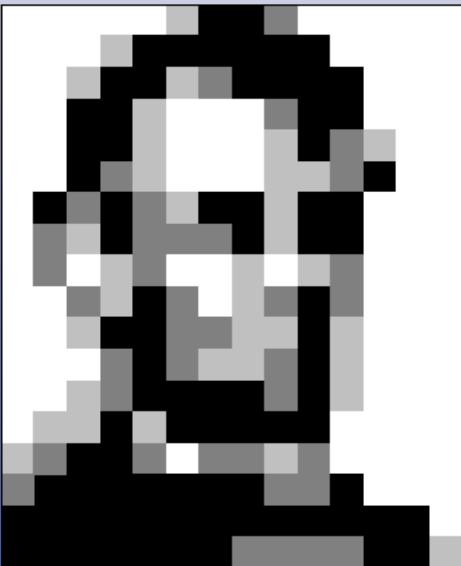
Mario é alto e Mario tem febre alta

Lógica fuzzy determina o valor verdade em função dos valores verdade de seus componentes utilizando regras fuzzy de avaliação



LABIC

# Tipos de Incerteza e seus Modelos



**Incerteza estocástica:**

- ✗ A probabilidade de acertar o alvo é 0.8

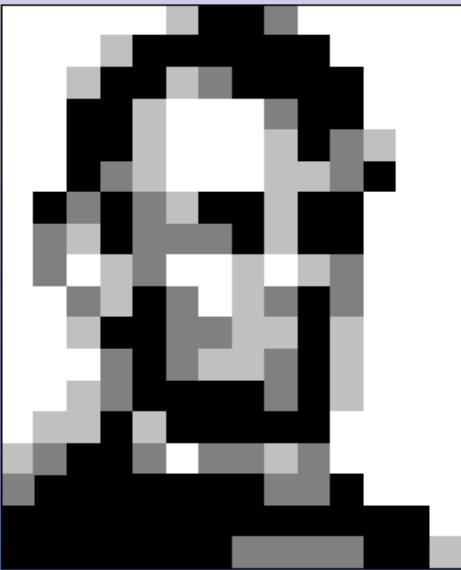
**Incerteza léxica:**

- ✗ "Homens Altos", "Dias Quentes", "Moeda Estável"
- ✗ Nós provavelmente teremos um bom ano de negócios
- ✗ A experiência do especialista A mostra que B está quase para ocorrer, porém, o especialista C está convencido de que não é verdade



LABIC

# Tipos de Incerteza e seus Modelos



**Incerteza estocástica:**

- ✗ A probabilidade de acertar o alvo é 0.8

**Incerteza léxica:**

- ✗ "Homens Altos", "Dias Quentes", "Moeda Estável"
- ✗ Nós provavelmente teremos um bom ano de negócios
- ✗ A experiência do especialista A mostra que B está quase para ocorrer, porém, o

Muitas palavras e estimativas que nós usamos em nosso raciocínio diário não são facilmente definidas de forma matemática. Isso permite ao homem raciocinar em um nível abstrato!



LABIC

# Probabilidade e Incerteza

**“.. uma pessoa com hepatite apresenta em 60% dos casos febre alta, em 45% dos casos pele com coloração amarela, e em 30% dos casos naseas ..”**

**Estocástica e Lógica Fuzzy se complementam!**



LABIC

# Teoria dos Conjuntos Fuzzy

## Teoria dos Conjuntos Convencionais (Booleana):



## Teoria dos Conjuntos Fuzzy:



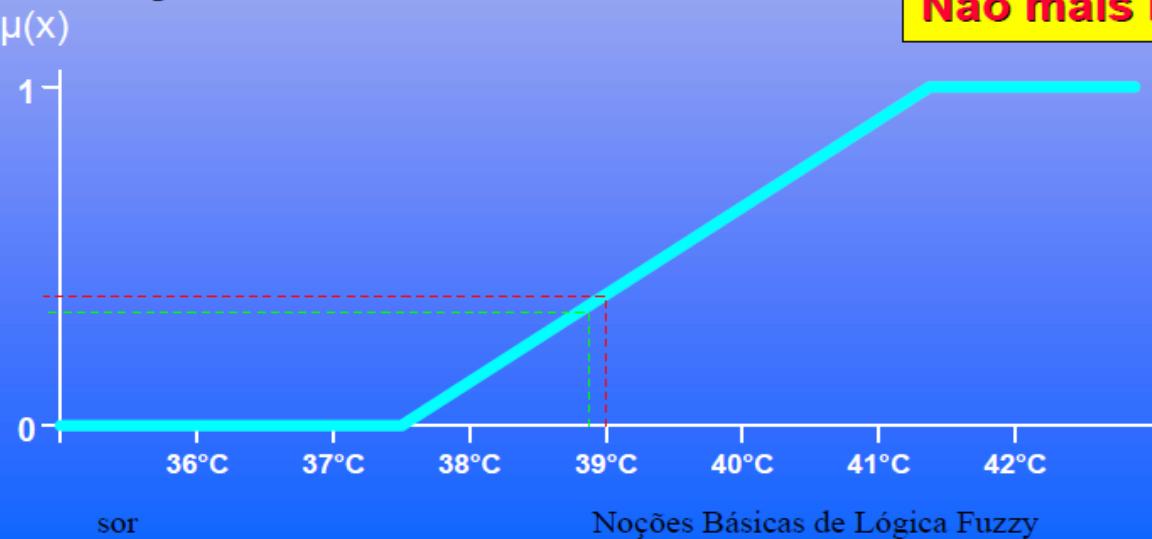
**“mais ou menos” ao invés de “sim / não”!**

# Conjunto de Definições Fuzzy

Definição discreta:

$$\begin{array}{lll}\mu_{SF}(35^{\circ}C) = 0 & \mu_{SF}(38^{\circ}C) = 0.1 & \mu_{SF}(41^{\circ}C) = 0.9 \\ \mu_{SF}(36^{\circ}C) = 0 & \mu_{SF}(39^{\circ}C) = 0.35 & \mu_{SF}(42^{\circ}C) = 1 \\ \mu_{SF}(37^{\circ}C) = 0 & \mu_{SF}(40^{\circ}C) = 0.65 & \mu_{SF}(43^{\circ}C) = 1\end{array}$$

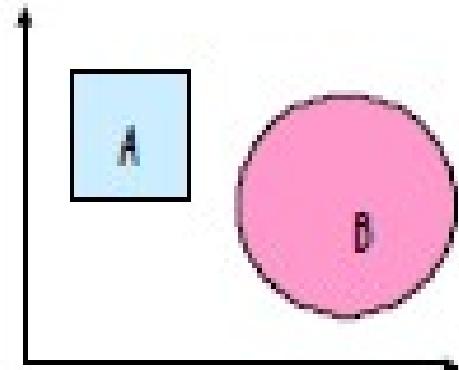
Definição contínua:



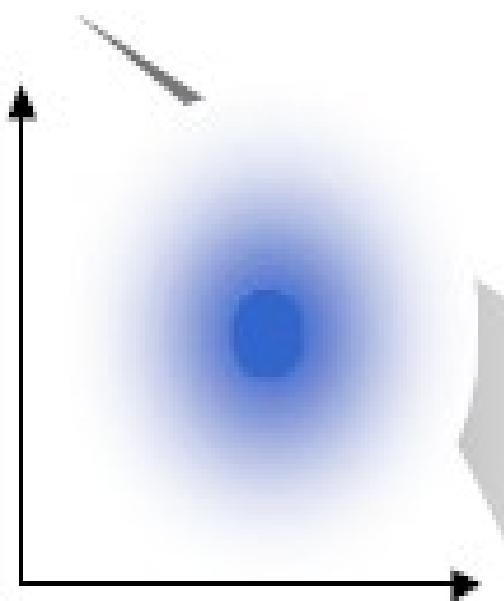
Não mais limiares artificiais !

# Você concorda???

## Conjuntos Clássicos x Conjuntos Nebulosos



Conjuntos Clássicos



Conjunto Nebuloso

# Representando Conjuntos Nebulosos

---

**Pares Ordenados:** Um conjunto nebuloso pode ser denotado como um conjunto ordenado de pares, sendo que o primeiro elemento denota o elemento do conjunto propriamente dito e o segundo o grau de inclusão deste elemento no conjunto.

Universo de Discurso de Notas:

$$X = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3.5, 4, 4.5, 5, \\ 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8.5, 9, 9.5, 10\}$$

Conjunto nebuloso  $A$  de bons alunos:

$$A = \{(6, 0), (6.5, 0.25), (7, 0.5), (7.5, 0.75), (8, 1), \\ (8.5, 0.75), (9, 0.5), (9.5, 0.25), (10, 0)\}$$

## Representando Conjuntos Nebulosos cont.

**Função de Inclusão:** Uma classificação por altura inclui as seguintes categorias para estatura: baixa, média e alta.

A equação característica do conjunto estatura média é

$$\mu_{media}(altura) = \begin{cases} 0 & se \text{ } altura \leq 1,50 \\ 5.altura - 7,5 & se \text{ } 1,50 < altura < 1,70 \\ -5.altura + 9,5 & se \text{ } 1,70 < altura < 1,90 \\ 0 & se \text{ } altura \geq 1,90 \end{cases}$$

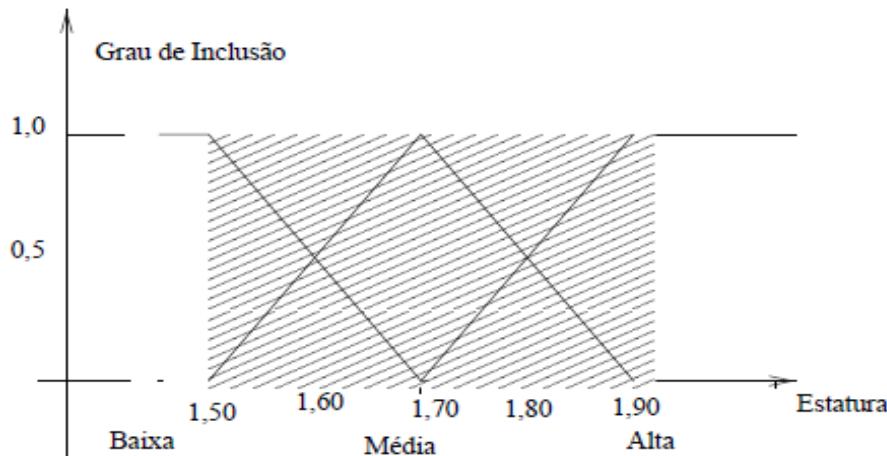


Figura 4: Conjunto Nebuloso para Estatura Média.

## Tipos de Funções de Inclusão

**Função Unimodal:** A função de inclusão é considerada unimodal (ou convexa) se

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1] : \mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$$

Uma função de inclusão unimodal contém informação de tal maneira que quando  $\mu_A(x) > \mu_A(y)$  para um conjunto  $A$  podemos interpretar esta informação como sendo  $x$  mais perto da definição ideal de  $A$  do que  $y$ .

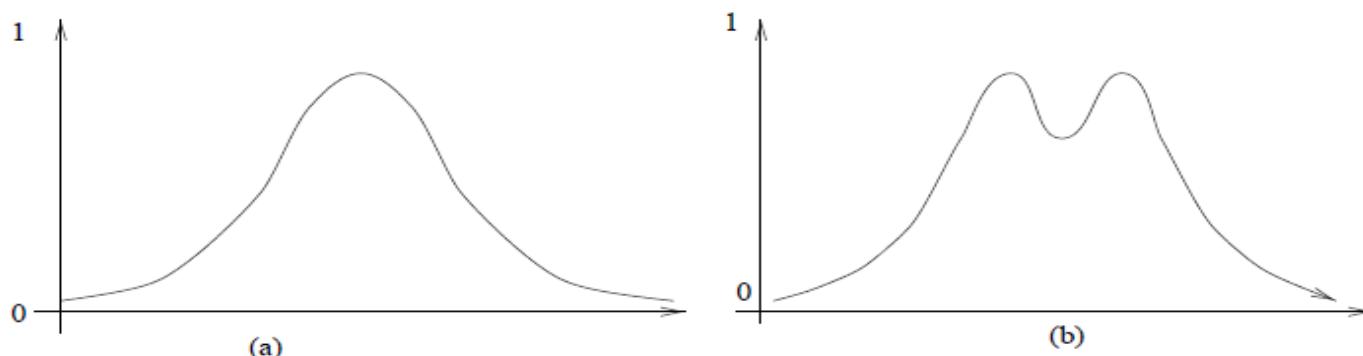


Figura 5: (a) Função unimodal e (b) Função bimodal

# Funções de Inclusão

---

**Função Singular:** A função de inclusão é chamada de singular (singleton) quando

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \tilde{x} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

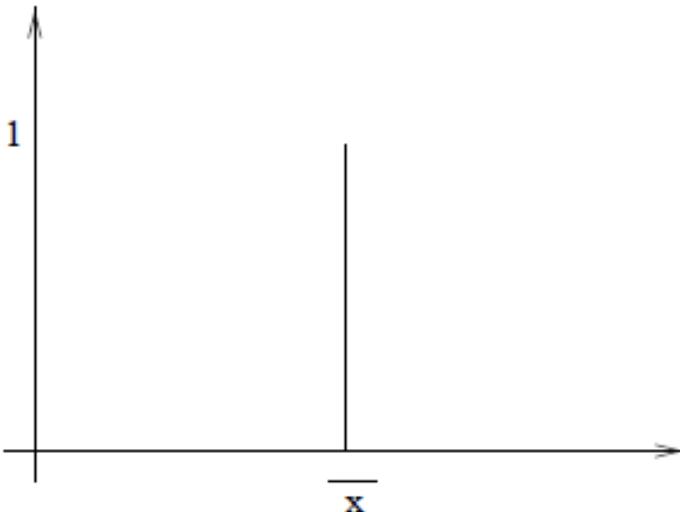


Figura 6: Função singular

**Funções Clássicas:** Estas funções são empregadas para definição de conjuntos clássicos.

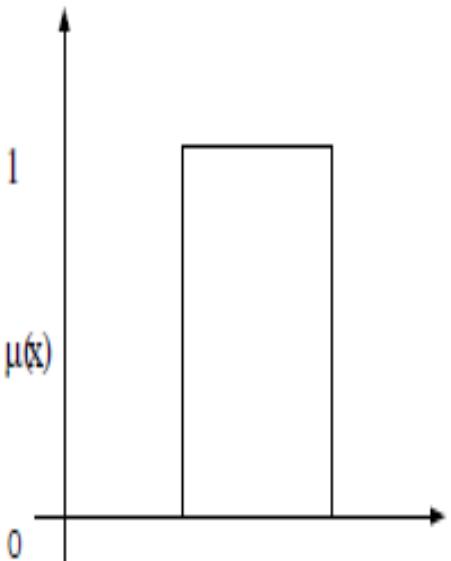


Figura 7: Função clássica.

## Funções de Inclusão cont. 1

---

**Representação Linear:** Este é um dos mais simples conjuntos nebulosos.

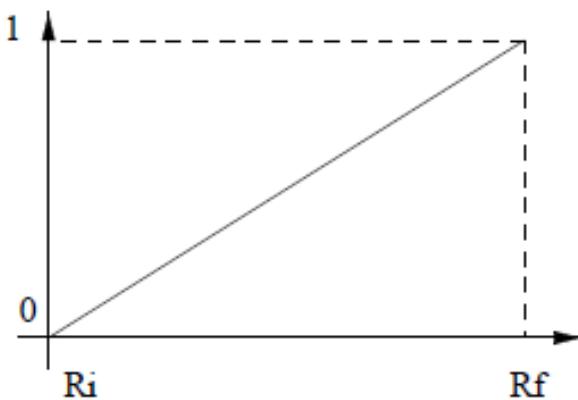


Figura 8: Função linear crescente.

**Funções Triangulares e Trapezoidais:** Funções empregadas frequentemente devido a simplicidade de representação e utilização. Podem ser representadas usando-se apenas 4 valores: dois para pontos em cada uma das retas e os dois ângulos de inclinação.

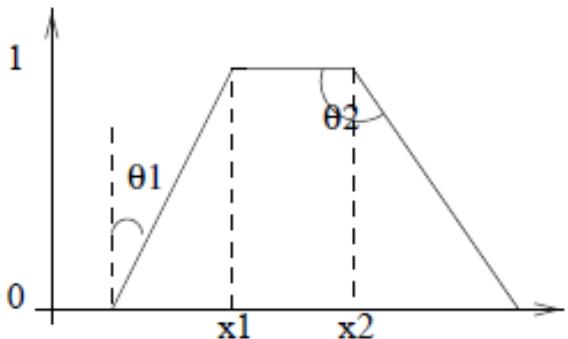


Figura 9: Função trapezoidal.

**Função Sigmóide** é definida usando-se três parâmetros: seu valor 0 de inclusão ( $\alpha$ ), seu valor 1 de inclusão ( $\gamma$ ) e o ponto de inflexão ( $\beta$ ), que é o ponto onde o valor da função de inclusão vale 0.5.

$$S(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ 2 \times \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 - 2 \times \left(\frac{x-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases}$$

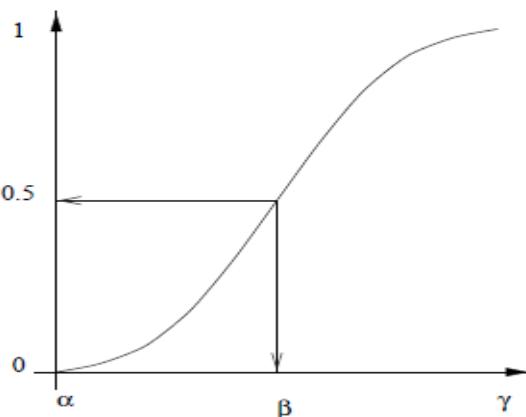


Figura 10: Função sigmoide crescente.

## Funções de Inclusão cont. 3

**Função Beta:** é definida com dois parâmetros, o valor em torno do qual a curva é construída ( $\gamma$ ) e um valor que indica a metade da largura da curva no ponto de inflexão ( $\beta$ ).

$$B(x; \gamma, \beta) = \frac{1}{1 + (\frac{x-\gamma}{\beta})^2}$$

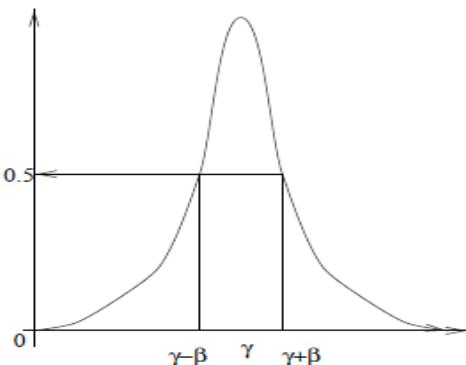
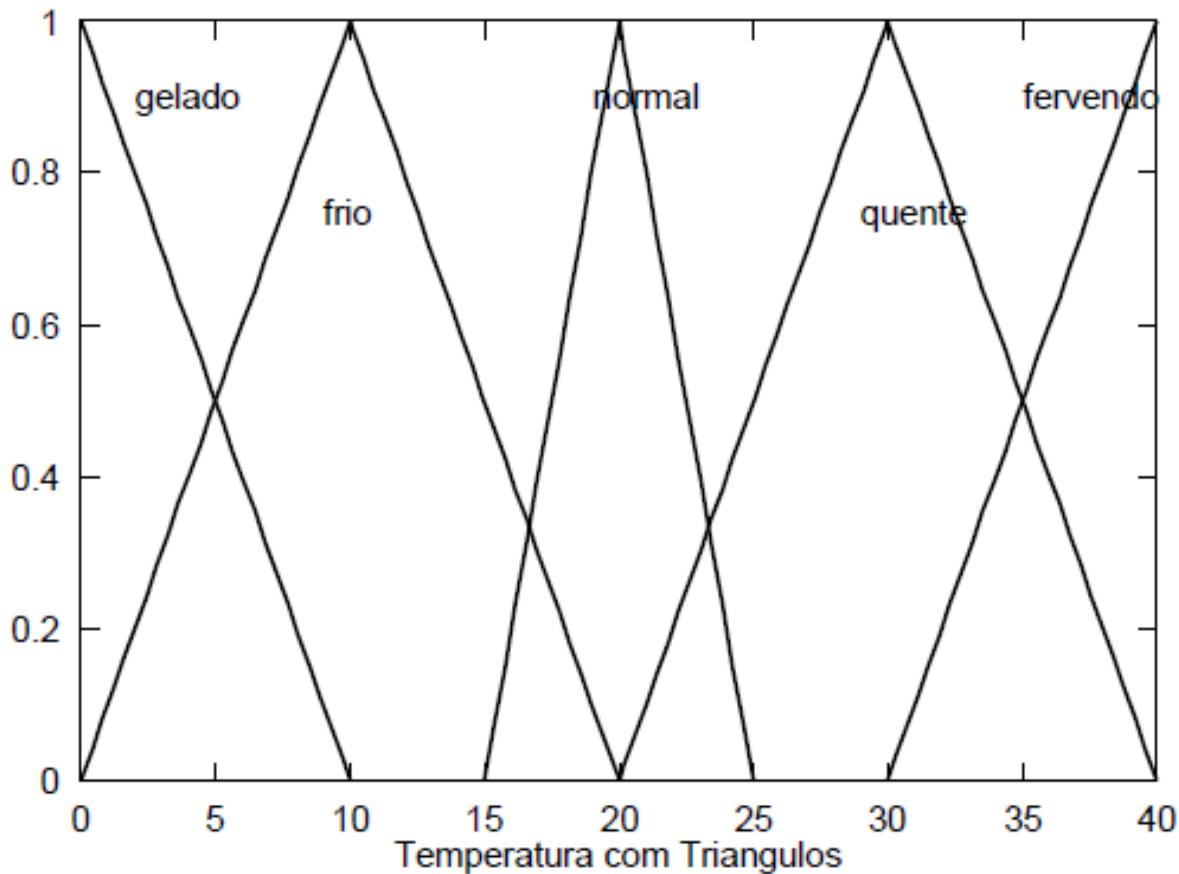
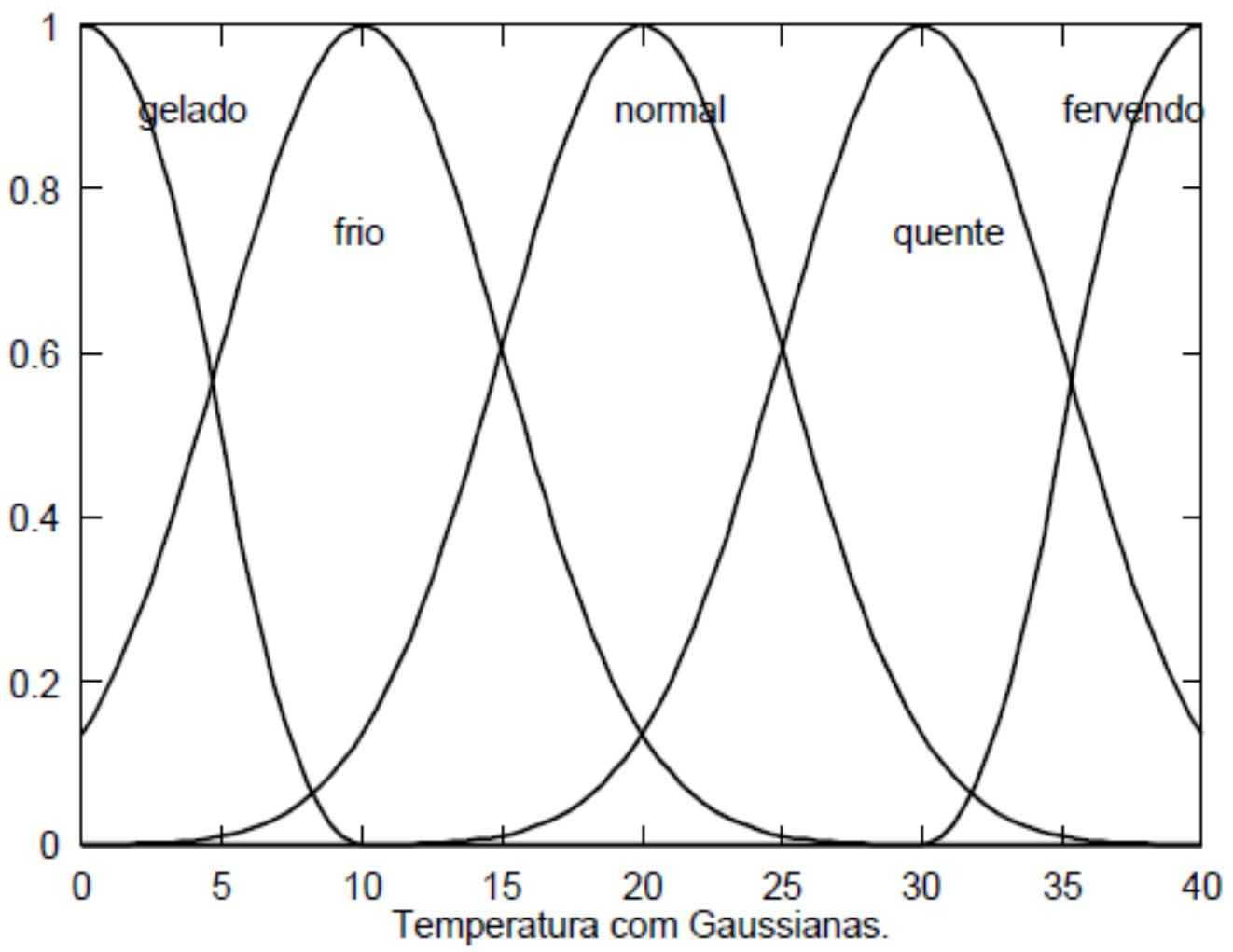


Figura 11: Função Beta.

# Exemplos de Conjuntos

---





## Exemplos de Conjuntos - cont

---

