IFSP - SPO

RAISSA DE OLIVEIRA CARVALHO
YASMIN LINO DE ARAUJO
DIOGO RODRIGUES VICENTE DIAS

ATIVIDADE SPOMVAL

Aplicações de Vetores, Geometria Analitica e Álgebra Linear em Física

São Paulo - SP

2025

Mecânica - Vetores

- Contexto físico:

As grandezas vetoriais são comumente utilizadas e aplicadas na mecânica, essenciais para informar direção e sentido de alguma grandeza; seja ela velocidade, força, aceleração ou deslocamento. Expressar direção e sentido a partir de uma certa grandeza, permite analisar corretamente um movimento cuja direção varia ao longo do tempo e espaço.

Os vetores refletem a natureza da interação física. Uma força, por exemplo, não é apenas um valor (módulo), mas uma ação direcionada que causa ou tende a causar uma mudança no estado de movimento de um corpo. A adição vetorial, a decomposição de vetores e as grandezas rotacionais, são cruciais para combinar e descrever efeitos da interação de múltiplas grandezas atuando sobre um corpo e simplificar a resolução de problemas em duas ou mais dimensões.

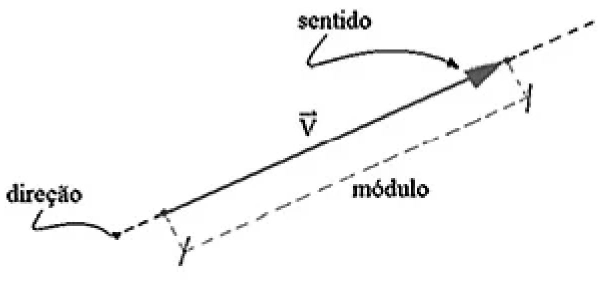


Figura 1

- Modelagem matemática:

A análise do sentido e da direção de uma grandeza vetorial pode produzir diferentes resultados para o módulo dessa grandeza, dependendo do referencial e das componentes consideradas. A força, por constituir uma grandeza vetorial, é um exemplo típico em que tais distinções se tornam relevantes. Nesse contexto, a determinação precisa de seu módulo, direção e sentido é indispensável para a correta descrição dos efeitos dinâmicos associados à sua aplicação.

A aplicação simultânea de duas forças de mesmo módulo sobre um corpo não produz, em geral, o mesmo efeito que a aplicação de uma única força. Isso ocorre pois a direção e o sentido de cada uma das forças devem ser considerados na determinação da força resultante, uma vez que forças são grandezas vetoriais e, portanto, sua combinação depende de sua orientação no espaço.

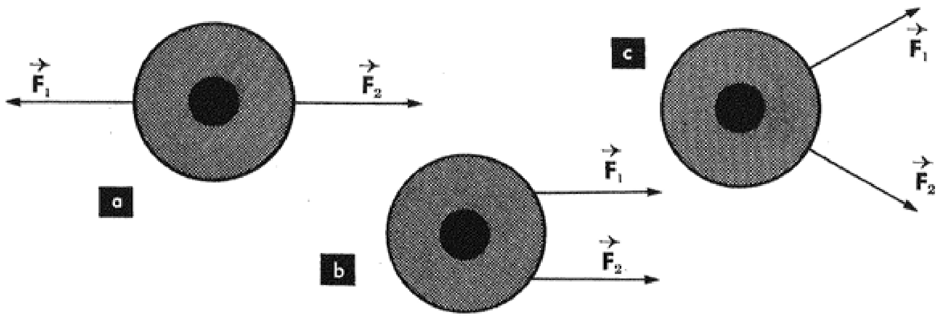


Figura 2 - Três situações distintas da aplicação de duas forças $F_1^{\rightarrow}$ *e* $F_2^{\rightarrow}$

Utilizando a "Regra do Polígono" e a "Regra do Paralelogramo", podemos definir o módulo de tais forças apresentadas. No caso de *a*, na *figura 2,* as duas forças são opostas, portanto, a resultante das forças será nula.

$$|R^{\rightarrow}| = |F_1^{\rightarrow}| - |F_2^{\rightarrow}| = 0 \qquad (1)$$

Em *b*, a direção de $F_1^{\rightarrow}$ e $F_2^{\rightarrow}$ coincidem, portanto, a resultante das duas forças é simplesmente a soma dos módulos:

$$|R^{\rightarrow}| = |F_1^{\rightarrow}| + |F_2^{\rightarrow}| \qquad (2)$$

Em *c*, por fim, há um ângulo entre as duas forças aplicadas. As forças têm o mesmo módulo e são aplicadas simetricamente em relação à horizontal, ou seja, uma está inclinada para cima e outra para baixo. Podemos portanto, definir suas componentes verticais como:

$$F_1^{\rightarrow} y = 2\, sin\Theta \qquad (3)$$

$$F_2^{\rightarrow} = -2\, sin\Theta \qquad (4)$$

$$R^{\rightarrow} = F_1^{\rightarrow} + F_2^{\rightarrow} = 2\, sin\Theta - 2\, sin\Theta = 0 \qquad (5)$$

As componentes se anulam, pois apresentam sentidos opostos.

E suas componentes horizontais como:

$$\vec{F_1} = 2\,cos\Theta \tag{6}$$

$$\vec{F_2} = 2\,cos\Theta \tag{7}$$

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 2\,cos\Theta + 2\,cos\Theta = 4\,cos\Theta \tag{8}$$

Tais situações também podem ser estendidas ao cálculo do módulo da resultante de forças de tração, por exemplo; uma grandeza vetorial associada ao esforço aplicado ao esticar um cabo ou uma corda. Ademais, a Regra do Paralelogramo pode ser empregada para determinar o módulo da força resultante aplicada a um ponto; como, por exemplo, um prego que sustenta um quadro preso por dois fios. Considerando que cada fio exerce uma força de tração de módulo $\vec{T_1} = \vec{T_2}$ e que há um ângulo β formado entre as duas forças, é possível calcular a resultante por meio da composição vetorial.

Figura 3 - $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$ sustentando um quadro com ângulo β entre as forças

Usando a Regra do Paralelogramo determina-se graficamente o vetor resultante. E o módulo do vetor $\vec{R}$, pode ser calculado através da Lei dos Cossenos:

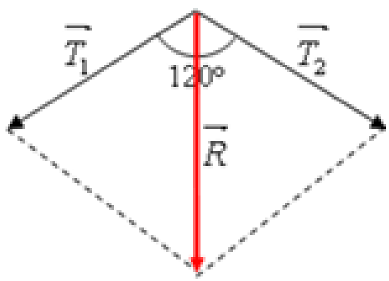


Figura 4 - Vetor resultante definido a partir da Regra do Paralelogramo

$$|\vec{R}| = \sqrt{(|\vec{T_1}|^2 + |\vec{T_2}|^2 + 2|\vec{T_1}||\vec{T_2}|\cdot cos(\theta))} \qquad (9)$$

Por fim, assim como as aplicações anteriores, a velocidade de um corpo é expressa como uma grandeza vetorial cuja direção é, em cada instante, a da tangente à trajetória desse corpo. Isso significa que a aceleração (a variação da velocidade ao longo do tempo), também pode ser expressa como uma grandeza vetorial.

A aceleração depende da variação vetorial da velocidade, não apenas da mudança no seu valor numérico. Se um móvel descreve uma trajetória curvilínea sua velocidade varia, pelo menos com relação a direção. Portanto, na física, se o módulo da velocidade muda, a aceleração é apenas tangencial, e se a direção muda, a aceleração é centrípeta.

Um móvel que passa por duas posições distintas, $P1 \; e \; P2$ e com velocidades vetoriais $\vec{v_1} \; e \; \vec{v_2}$, respectivamente, apresenta uma variação da velocidade entre esses dois instantes que pode ser representada por um vetor, que chamamos de $\Delta\vec{v}$:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v_1} - \vec{v_2} \qquad (10)$$

Ou seja, a velocidade em cada ponto da trajetória possui módulo, direção e sentido. E como $\Delta\vec{v}$ é um vetor, a aceleração também pode ser descrita como um vetor que dita como a velocidade muda em módulo e direção ao longo do tempo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (11)$$

Podemos decompor o vetor velocidade em componentes ortogonais, aos eixos $x \; e \; y$, visto que um corpo se movimenta pelo espaço ao longo do tempo (11).

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_Y\hat{j} \qquad (12)$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_Y\hat{j} \qquad (13)$$

com:

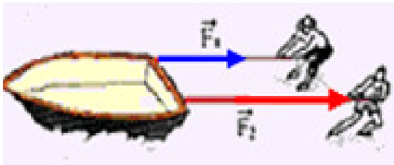
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{dv_Y}{dt} \qquad (14)$$

- Exemplo ilustrativo:

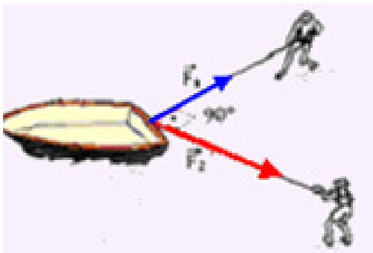
É possível aplicarmos tais contextos e modelagens matemáticas, a partir de situações demonstrativas envolvendo conceitos da mecânica.

Considere um barco sendo retirado de um rio a partir de duas situações:

a) São usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas de módulos F1 e F2.

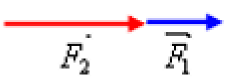


b) São usadas cordas inclinadas de 90º que transmitem ao barco forças de módulos iguais às anteriores.



Queremos portanto determinar os esforços desenvolvidos por cada um dos dois homens. Onde, no caso (a), a força resultante transmitida ao barco tem intensidade, ou módulo 70 N e que, no caso (b), tem intensidade de 50 N.

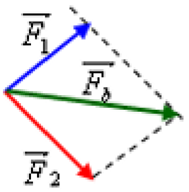
No caso (a) os vetores são paralelos: estão na mesma direção e sentido. Podemos representar o vetor resultante usando a Regra do Polígono:



No qual o módulo do vetor resultante é:

$$Fa = F1 + F2 = 70\,N \qquad (1)$$

No caso (b) os vetores são perpendiculares, e usando a Regra do Paralelogramo, temos o módulo do vetor resultante:



$$Fb = \sqrt{\mathbf{F_1}^2 + \mathbf{F_2}^2} = 50\,N \qquad (2)$$

Podemos resolver um sistema a partir das equações (1) e (2) encontrando as respectivas forças F_1 e F_2 aplicadas para retirar o barco do rio nos dois casos propostos:

$$F_1 + F_2 = 70 \Rightarrow F_1 = 70 - F_2$$
$$\sqrt{(F_1{}^2 + F_2{}^2)} = 50$$

$$(70 - F_2)^2 + F_2{}^2 = 50^2$$
$$2F_2{}^2 - 140F_2 + 2400 = 0$$

$$F_2' = 40\,N$$
$$F_2'' = 30\,N$$

$$Se\ F_2' = 40\,N \Rightarrow F_1 = 30\,N$$
$$Se\ F_2'' = 30\,N \Rightarrow F_1 = 40\,N$$

Mecânica Quântica - Algebra Linear

Diferente da Mecânica Clássica a Dinâmica Quântica observamos o comportamento de sistemas físicos em escalas microscópicas como moléculas (átomos, fótons e elétrons). O academicismo quântico aborda estruturas matemáticas que envolvem vetores, operadores e autovalores.

1. representação de estados quânticos como vetores em espaços de Hilbert

Contexto físico.

Na mecânica quântica, o estado de uma partícula não é descrito diretamente por posição e velocidade, mas por um **estado quântico**, que contém todas as informações possíveis sobre o sistema. Esses estados podem existir em superposição, o que significa que um sistema pode apresentar simultaneamente características de diferentes estados clássicos.Para descrever essa realidade, utiliza-se um espaço vetorial complexo, no qual cada vetor corresponde a um estado físico.

Modelagem matemática.

Produto interno: Um espaço vetorial com produto interno, completo, é dito de espaço de Hilbert

Definimos o produto interno num espaço vetorial complexo V associando um número complexo $< a|b >$ a cada par de vetores $|a >$, $|b >$ tal que:

PI 1) $< a|b >=< b|a >*$

PI 2) $< a|(\beta|b > +\gamma|c >) = \beta < a|b > +\gamma < a|c >$

PI 3) $< a|a > \geq 0$, $< a|a >= 0$ se e somente se $|a >= 0$

Em PI 1 acima, o asterisco representa conjugação complexa. Atenção ao detalhe da notação utilizada, o produto interno é uma operação $g : V \times V \to C$

$$g(|a >, |b >) =< a|b > .$$

Ou seja, $< a|b >$ é uma simbologia para o número complexo associado ao par de vetores $|a >, |b >$, nesta ordem. Observamos que o produto interno acima definido não é exatamente bilinear pois (PI 2) acima garante a linearidade apenas no segundo argumento. Em relação ao primeiro termo podemos facilmente provar que:

$$g(\alpha|a > +\beta|b >, |c >) = \alpha * g(|a >, |b >) + \beta * g(|b >, |c >) .$$

Dizemos assim que o produto definido num espaço vetorial complexo é *sesquilinear*

Nos dois exemplos específicos de espaços vetoriais complexos da Mecânica Quântica anteriormente considerados, definimos assim o produto interno:

(a) Espaço vetorial C^n

Dadas duas matrizes colunas de entrada complexa

$$|a >= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} , \qquad |b >= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ,$$

temos

$$< a|b >= a^*_1 b_1 + a^*_2 b_2 + . . . + a^*_n b_n \ .$$

Ou seja, a partir de dois vetores calculamos o escalar. As propriedades PI1 - PI3 podem ser explicitamente verificadas.

(b) Espaço vetorial de funções complexas

Dadas duas funções complexas de variável real

$$|\varphi >= \varphi(x) \text{ e } |\psi >= \psi(x) \ ,$$

Definidas no intervalo [a,b], construímos

$$< \varphi|\psi >= Z\ b\ a\ dx\ \varphi^*\ (x)\ \psi(x)\ .$$

Através da integração obtemos um número complexo a partir de duas funções. Um certo cuidado em relação à convergência deve ser tomado aqui. Devemos restringir nosso espaço de funções de forma que a integral acima exista, modificando um pouco o espaço vetorial inicial. Para ser um pouco mais preciso, devemos exigir que φ , $\psi \in L2(a, b)$, onde $L2(a, b)$ é o espaço de funções quadraticamente integráveis, a seguir definido.

exemplo ilustrativo

……

Referências

FEP-MECÂNICA. *Grandezas vetoriais* (PEF_Mecanica_8). Universidade de São Paulo, Instituto de Física — IFUSP. Disponível em: https://fep.if.usp.br/~profis/arquivo/projetos/PEF/PEF_Mecanica/PEF_Mecanica_8.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. *Física I – Aula 01* (FisicaI_aula_01). Disponível em: https://www.virtual.ufc.br/solar/aula_link/SOLAR_2/Curso_de_Graduacao_a_Distancia/LFIS/A_a_H/Fisica_I/aula_01/pdf/FisicaI_aula_01.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.