

IFSP - SPO

RAISSA DE OLIVEIRA CARVALHO
YASMIN LINO DE ARAUJO
DIOGO RODRIGUES VICENTE DIAS

ATIVIDADE SPOMVAL

Aplicações de Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear em Física

São Paulo - SP

2025

Mecânica - Vetores

- Contexto físico:

As grandezas vetoriais são comumente utilizadas e aplicadas na mecânica, essenciais para informar direção e sentido de alguma grandeza; seja ela velocidade, força, aceleração ou deslocamento. Expressar direção e sentido a partir de uma certa grandeza, permite analisar corretamente um movimento cuja direção varia ao longo do tempo e espaço.

Os vetores refletem a natureza da interação física. Uma força, por exemplo, não é apenas um valor (módulo), mas uma ação direcionada que causa ou tende a causar uma mudança no estado de movimento de um corpo. A adição vetorial, a decomposição de vetores e as grandezas rotacionais, são cruciais para combinar e descrever efeitos da interação de múltiplas grandezas atuando sobre um corpo e simplificar a resolução de problemas em duas ou mais dimensões.

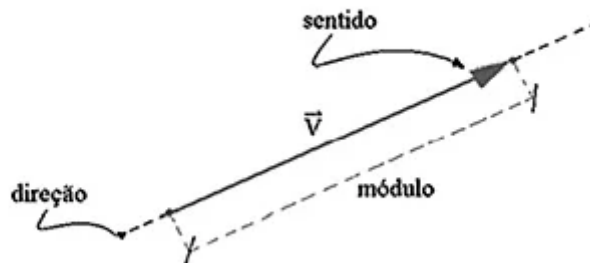


Figura 1

- Modelagem matemática:

A análise do sentido e da direção de uma grandeza vetorial pode produzir diferentes resultados para o módulo dessa grandeza, dependendo do referencial e das componentes consideradas. A força, por constituir uma grandeza vetorial, é um exemplo típico em que tais distinções se tornam relevantes. Nesse contexto, a determinação precisa de seu módulo, direção e sentido é indispensável para a correta descrição dos efeitos dinâmicos associados à sua aplicação.

A aplicação simultânea de duas forças de mesmo módulo sobre um corpo não produz, em geral, o mesmo efeito que a aplicação de uma única força. Isso ocorre pois a direção e o sentido de cada uma das forças devem ser considerados na determinação da força resultante, uma vez que forças são grandezas vetoriais e, portanto, sua combinação depende de sua orientação no espaço.

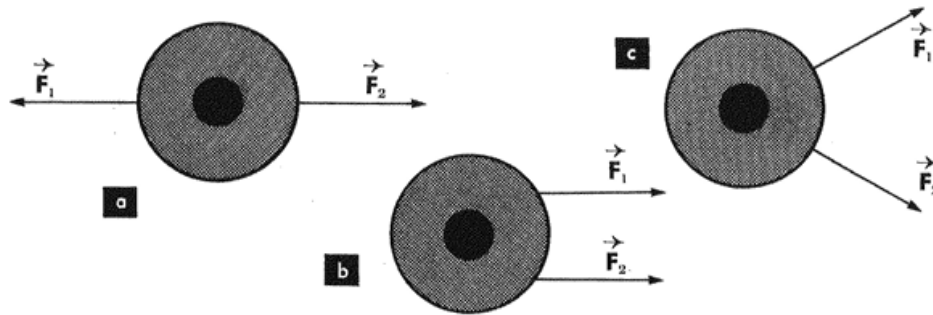


Figura 2 - Três situações distintas da aplicação de duas forças $F_1 \rightarrow$ e $F_2 \rightarrow$

Utilizando a “Regra do Polígono” e a “Regra do Paralelogramo”, podemos definir o módulo de tais forças apresentadas. No caso de *a*, na figura 2, as duas forças são opostas, portanto, a resultante das forças será nula.

$$|R \rightarrow| = |F_1 \rightarrow| - |F_2 \rightarrow| = 0 \quad (1)$$

Em *b*, a direção de $F_1 \rightarrow$ e $F_2 \rightarrow$ coincidem, portanto, a resultante das duas forças é simplesmente a soma dos módulos:

$$|R \rightarrow| = |F_1 \rightarrow| + |F_2 \rightarrow| \quad (2)$$

Em *c*, por fim, há um ângulo entre as duas forças aplicadas. As forças têm o mesmo módulo e são aplicadas simetricamente em relação à horizontal, ou seja, uma está inclinada para cima e outra para baixo. Podemos portanto, definir suas componentes verticais como:

$$F_1 \rightarrow y = 2 \sin \theta \quad (3)$$

$$F_2 \rightarrow = - 2 \sin \theta \quad (4)$$

$$R \rightarrow = F_1 \rightarrow + F_2 \rightarrow = 2 \sin \theta - 2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$

As componentes se anulam, pois apresentam sentidos opostos.

E suas componentes horizontais como:

$$F_1^{\rightarrow} = 2 \cos\theta \quad (6)$$

$$F_2^{\rightarrow} = 2 \cos\theta \quad (7)$$

$$R^{\rightarrow} = F_1^{\rightarrow} + F_2^{\rightarrow} = 2 \cos\theta + 2 \cos\theta = 4 \cos\theta \quad (8)$$

Tais situações também podem ser estendidas ao cálculo do módulo da resultante de forças de tração, por exemplo; uma grandeza vetorial associada ao esforço aplicado ao esticar um cabo ou uma corda. Ademais, a Regra do Paralelogramo pode ser empregada para determinar o módulo da força resultante aplicada a um ponto; como, por exemplo, um prego que sustenta um quadro preso por dois fios. Considerando que cada fio exerce uma força de tração de módulo $T_1^{\rightarrow} = T_2^{\rightarrow}$ e que há um ângulo β formado entre as duas forças, é possível calcular a resultante por meio da composição vetorial.



Figura 3 - T_1^{\rightarrow} e T_2^{\rightarrow} sustentando um quadro com ângulo β entre as forças

Usando a Regra do Paralelogramo determina-se graficamente o vetor resultante. E o módulo do vetor R^{\rightarrow} , pode ser calculado através da Lei dos Cossenos:

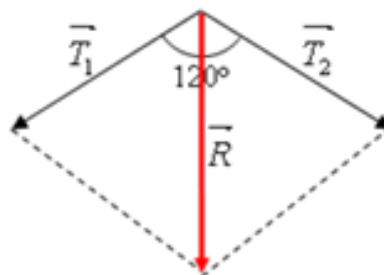


Figura 4 - Vetor resultante definido a partir da Regra do Paralelogramo

$$|R^{\rightarrow}| = \sqrt{(|T_1^{\rightarrow}|^2 + |T_2^{\rightarrow}|^2 + 2|T_1^{\rightarrow}||T_2^{\rightarrow}|\cdot\cos(\theta))} \quad (9)$$

Por fim, assim como as aplicações anteriores, a velocidade de um corpo é expressa como uma grandeza vetorial cuja direção é, em cada instante, a da tangente à trajetória desse corpo. Isso significa que a aceleração (a variação da velocidade ao longo do tempo), também pode ser expressa como uma grandeza vetorial.

A aceleração depende da variação vetorial da velocidade, não apenas da mudança no seu valor numérico. Se um móvel descreve uma trajetória curvilínea sua velocidade varia, pelo menos com relação a direção. Portanto, na física, se o módulo da velocidade muda, a aceleração é apenas tangencial, e se a direção muda, a aceleração é centrípeta.

Um móvel que passa por duas posições distintas, $P1$ e $P2$ e com velocidades vetoriais v_1^{\rightarrow} e v_2^{\rightarrow} , respectivamente, apresenta uma variação da velocidade entre esses dois instantes que pode ser representada por um vetor, que chamamos de Δv^{\rightarrow} :

$$\Delta v^{\rightarrow} = v_1^{\rightarrow} - v_2^{\rightarrow} \quad (10)$$

Ou seja, a velocidade em cada ponto da trajetória possui módulo, direção e sentido. E como Δv^{\rightarrow} é um vetor, a aceleração também pode ser descrita como um vetor que dita como a velocidade muda em módulo e direção ao longo do tempo:

$$a^{\rightarrow} = \frac{\Delta v^{\rightarrow}}{\Delta t} \quad (11)$$

Podemos decompor o vetor velocidade em componentes ortogonais, aos eixos x e y , visto que um corpo se movimenta pelo espaço ao longo do tempo (11).

$$v^{\rightarrow} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \quad (12)$$

$$a^{\rightarrow} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (13)$$

com:

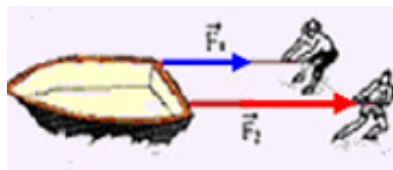
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (14)$$

- Exemplo ilustrativo:

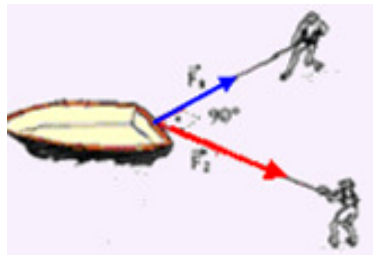
É possível aplicarmos tais contextos e modelagens matemáticas, a partir de situações demonstrativas envolvendo conceitos da mecânica.

Considere um barco sendo retirado de um rio a partir de duas situações:

- a) São usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas de módulos F_1 e F_2 .

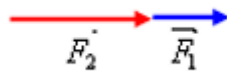


- b) São usadas cordas inclinadas de 90° que transmitem ao barco forças de módulos iguais às anteriores.



Queremos portanto, determinar os esforços desenvolvidos por cada um dos dois homens. Onde, no caso (a), a força resultante transmitida ao barco tem intensidade, ou módulo de 70 N e, no caso (b), de 50 N.

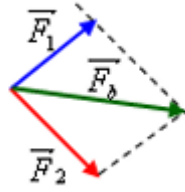
No caso (a) os vetores são paralelos: estão na mesma direção e sentido. Podemos representar o vetor resultante usando a Regra do Polígono:



No qual o módulo do vetor resultante é:

$$F_a = F_1 + F_2 = 70 \text{ N} \quad (15)$$

No caso (b) os vetores são perpendiculares, e usando a Regra do Paralelogramo, temos o módulo do vetor resultante:



$$Fb = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 50 \text{ N} \quad (16)$$

Podemos resolver um sistema a partir das equações (15) e (16) encontrando as respectivas forças F_1 e F_2 aplicadas para retirar o barco do rio nos dois casos propostos:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 70 \Rightarrow F_1 = 70 - F_2 \\ \sqrt{(F_1^2 + F_2^2)} = 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (70 - F_2)^2 + F_2^2 &= 50^2 \\ 2F_2^2 - 140F_2 + 2400 &= 0 \end{aligned}$$

$$F_2' = 40 \text{ N}$$

$$F_2'' = 30 \text{ N}$$

$$\text{Se } F_2' = 40 \text{ N} \Rightarrow F_1 = 30 \text{ N}$$

$$\text{Se } F_2'' = 30 \text{ N} \Rightarrow F_1 = 40 \text{ N}$$

Mecânica Quântica - Álgebra Linear

- Contexto físico:

Diferente da Mecânica Clássica a Dinâmica Quântica observamos o comportamento de sistemas físicos em escalas microscópicas como moléculas (átomos, fótons e elétrons). O academicismo quântico aborda estruturas matemáticas que envolvem vetores, operadores e autovalores. Na mecânica quântica, o estado de uma partícula não é descrito diretamente por posição e

velocidade, mas por um estado quântico, que contém todas as informações possíveis sobre o sistema. Esses estados podem existir em superposição, o que significa que um sistema pode apresentar simultaneamente características de diferentes estados clássicos. Para descrever essa realidade, utiliza-se um espaço vetorial complexo, no qual cada vetor corresponde a um estado físico.

- Modelagem matemática:

Produto interno: Um espaço vetorial com produto interno, completo, é dito de espaço de Hilbert

Definimos o produto interno num espaço vetorial complexo V associando um número complexo $\langle a|b \rangle$ a cada par de vetores $|a \rangle, |b \rangle$ tal que:

$$\text{PI 1) } \langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^*$$

$$\text{PI 2) } \langle a|(\beta|b \rangle + \gamma|c \rangle) = \beta \langle a|b \rangle + \gamma \langle a|c \rangle$$

$$\text{PI 3) } \langle a|a \rangle \geq 0, \langle a|a \rangle = 0 \text{ se e somente se } |a \rangle = 0$$

Em PI 1 acima, o asterisco representa conjugação complexa. Atenção ao detalhe da notação utilizada, o produto interno é uma operação $g : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(|a \rangle, |b \rangle) = \langle a|b \rangle. \quad (17)$$

Ou seja, $\langle a|b \rangle$ é uma simbologia para o número complexo associado ao par de vetores $|a \rangle, |b \rangle$, nesta ordem. Observamos que o produto interno acima definido não é exatamente bilinear pois (PI 2) acima garante a linearidade apenas no segundo argumento. Em relação ao primeiro termo podemos facilmente provar que:

$$g(\alpha|a \rangle + \beta|b \rangle, |c \rangle) = \alpha * g(|a \rangle, |c \rangle) + \beta * g(|b \rangle, |c \rangle). \quad (18)$$

Dizemos assim que o produto definido num espaço vetorial complexo é *sesquilinear*

Nos dois exemplos específicos de espaços vetoriais complexos da Mecânica Quântica anteriormente considerados, definimos assim o produto interno:

(a) Espaço vetorial C_n

Dadas duas matrizes colunas de entrada complexa

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

temos

$$\langle a|b\rangle = a^*_1 b_1 + a^*_2 b_2 + \dots + a^*_n b_n. \quad (19)$$

Ou seja, a partir de dois vetores calculamos o escalar. As propriedades PI1 - PI3 podem ser explicitamente verificadas.

(b) Espaço vetorial de funções complexas

Dadas duas funções complexas de variável real

$$|\varphi\rangle = \varphi(x) \text{ e } |\psi\rangle = \psi(x), \quad (20)$$

Definidas no intervalo $[a,b]$, construímos

$$\langle \varphi|\psi\rangle = \int_a^b dx \varphi^*(x) \psi(x). \quad (21)$$

Através da integração obtemos um número complexo a partir de duas funções. Um certo cuidado em relação à convergência deve ser tomado aqui. Devemos restringir nosso espaço de funções de forma que a integral acima exista, modificando um pouco o espaço vetorial inicial. Para ser um pouco mais preciso, devemos exigir que $\varphi, \psi \in L^2(a, b)$, onde $L^2(a, b)$ é o espaço de funções quadraticamente integráveis, a seguir definido.

Por fim, o espaço de Hilbert trás a ideia de um espaço vetorial com um produto interno que é completo, o que significa que generaliza a noção de espaço euclidiano para espaços com um número infinito de dimensões

- Exemplo ilustrativo

Uma representação com número infinito de dimensões é o hotel de Hilbert.

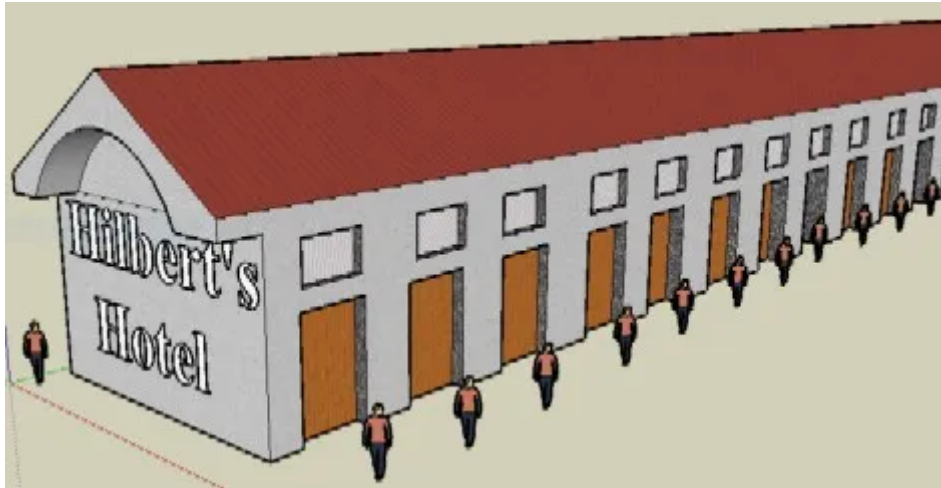


figura 5 - Hotel de Hilbert

A relação entre a Teoria do Hotel de Hilbert e a Álgebra Linear surge porque ambos lidam com estruturas infinitas e enumeráveis. O Hotel de Hilbert, criado por David Hilbert, é um paradoxo que mostra como é possível “reorganizar” infinitos elementos — como mover hóspedes de um quarto para outro — sem alterar o tamanho total do conjunto. Essa ideia é análoga ao comportamento dos espaços de Hilbert, que são espaços vetoriais de dimensão infinita usados na álgebra linear avançada e na mecânica quântica.

Óptica geométrica - Geometria Analítica

- Contexto Físico:

A óptica geométrica considera a luz como raios que se propagam em linha reta e interagem com superfícies que podem tanto refletir quanto refratar esses raios. O papel da geometria analítica supre a necessidade de entender e prever os trajetos dos raios de luz por meio da tradução de materiais ópticos como espelhos,

lentes, interfaces em objetos geométricos descritos por equações no plano cartesiano.

Tomando como exemplo espelhos parabólicos, esféricos e hiperbólicos são superfícies que possuem seções cônicas cujas propriedades surgem diretamente de suas equações geométricas. essa característica permite a dedução de onde se formarão imagens, como raios são redirecionados e qual o ponto focal associado de cada superfície.

- Modelagem matemática:

Na reflexão o ângulo formado pela interação do feixe de luz incidente com o meio refletor é nomeado ângulo de reflexão sendo caracterizado pela igualdade entre ambos com relação a normal 'n' da superfície

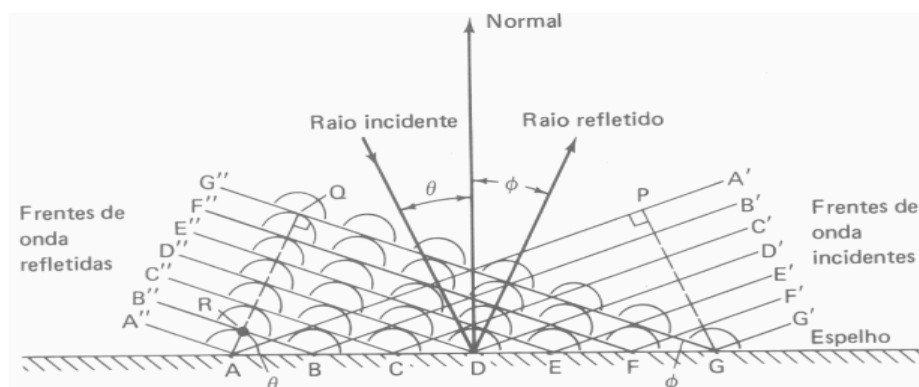


Figura 6 - modelo geométrico de huygens

Uma possível dedução geométrica da lei da reflexão é dada pelo modelo de Huygens que descreve a luz como uma onda. Na figura, o segmento AA' representa uma frente de onda que avança até GG' ao tocar o espelho esse segmento se reflete até AA'' que segue para BB' repetindo o processo indefinitivamente. Observando a construção geométrica vemos dois triângulos retângulos APG e AQQ. Onde ϕ representa o ângulo de reflexão e θ o ângulo de incidência. A onda incidente percorre a distância PG e a onda refletida percorre a distância AQ, distâncias consideradas iguais devido o caráter ondulatório descrito por Huygens.

Logo, no triângulo APG: $\sin\theta = PG/AG$

e no triângulo AQQ: $\sin\phi = AQ/AG$

como $PG = AQ$. Concluimos que $\sin\theta = \sin\phi$. Ou seja $\theta = \phi$ (22)

Na refração os raios de luz que não são refletidos, penetram no segundo meio e sofrem uma alteração de velocidade e direção de acordo com o índice de refração próprio de cada material

$$n = c/v \quad (23)$$

n – índice de refração

c – velocidade da luz no vácuo

v – velocidade da luz no meio.

geometricamente a igualdade $n_i \sin\theta = n_t \sin\theta$ foi observada pelo princípio de Huygens-Fresnel, onde:

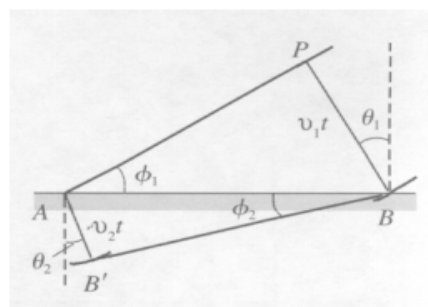
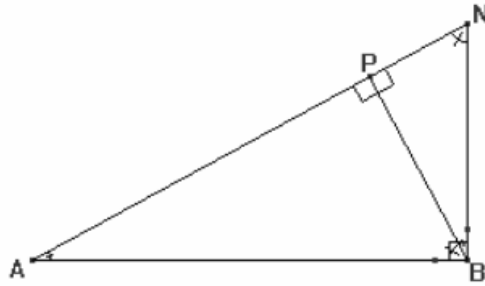


Figura 7 - modelo geométrico de Huygens para demonstração da refração

Na figura o segmento AP representa uma frente de onda que se move no meio 1. Quando ela bate na superfície entre os meios, muda de direção e continua no meio 2 como a frente B'B. Observando os triângulos APB e AB'B, que têm a mesma hipotenusa, percebemos que seus ângulos correspondentes acabam sendo iguais. Por isso, podemos dizer que:

$$\phi_1 = \theta_1 \text{ e } \phi_2 = \theta_2 \quad (24)$$



Se prolongarmos o segmento AP, ele encontra a normal no ponto N. Como NB é perpendicular a AB, o triângulo ABN é retângulo. Assim, os ângulos em A e N se completam para 90° .

Quando traçamos a altura a partir de A até o lado NB, dividimos o triângulo em dois triângulos retângulos menores: ABP e PBN. Nesse arranjo, o ângulo em PBN funciona como o complemento do ângulo em A, o que garante que o ângulo da onda incidente é igual ao ângulo correspondente no triângulo da onda refratada no meio 1. Assim, concluímos:

$$\varphi_1 = \theta_1 \quad (25)$$

Repetindo esse mesmo raciocínio para o triângulo construído no meio 2, chegamos também a:

$$\varphi_2 = \theta_2 \quad (26)$$

- Exemplo ilustrativo:

1- Princípio da propagação retilínea: Nos meios homogêneos e transparentes a luz se propaga em linha reta.

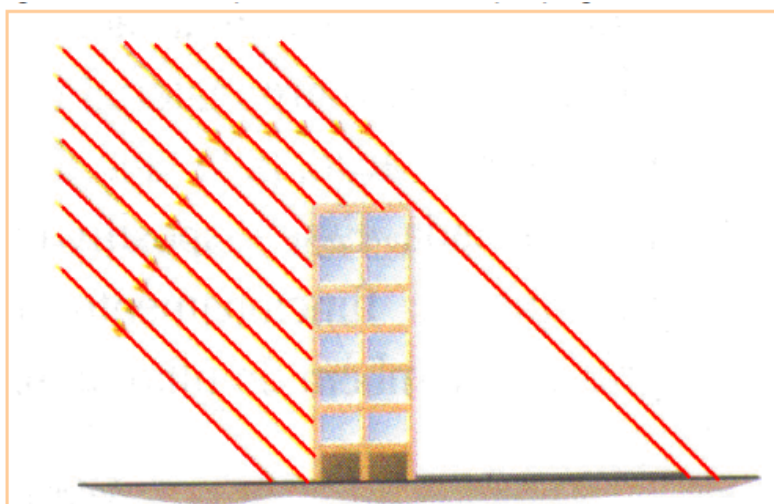


Figura 8 - modelo de propagação da luz em um objeto

2- Princípio da independência dos raios de luz: Quando os raios de luz se cruzam, cada um deles continua seu trajeto como se os demais não existissem.

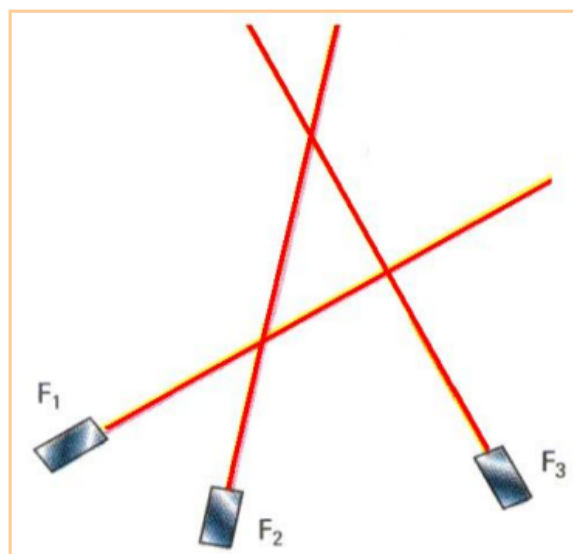


Figura 9 - cruzamento dos feixes de luz em vários pontos no espaço

Referências

FEP-MECÂNICA. *Grandezas vetoriais* (PEF_Mecanica_8). Universidade de São Paulo, Instituto de Física — IFUSP. Disponível em: https://fep.if.usp.br/~profis/arquivo/projetos/PEF/PEF_Mecanica/PEF_Mecanica_8.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ. *Física I – Aula 01* (Fisical_aula_01). Disponível em: https://www.virtual.ufc.br/solar/aula_link/SOLAR_2/Curso_de_Graduacao_a_Distancia/LFIS/A_a_H/Fisica_I/aula_01/pdf/Fisical_aula_01.pdf. Acesso em: 02 dez. 2025.

GONZAGA, Aline Cristyna Santos. *A geometria da óptica: óptica geométrica e óptica física*. Brasília: UCB — Universidade Católica de Brasília, [s.d.]. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1874/1/Aline%20Cristyna%20Santos%20Gonzaga.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2025.

THIBES, Ronaldo. *A Álgebra Linear e a Mecânica Quântica*. Paraíba: UFBP - Universidade Federal da Paraíba. Disponível em: https://mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC18Completo.pdf. Acesso em: 3 dez 2025

REYES, Nelson. *Óptica geométrica*. [S. l.: s. n.], [20—]. Apostila em PDF. Disponível em: <https://nelsonreyes.com.br/6-%C3%93PTICA%20GEOMÉTRICA.pdf>. Acesso em: 3 dez. 2025.