Lista 3 - Cálculo

Nome: Raissa Nunes Peret 2024.1.08.021

1) Função é a relação entre dois conjuntos, onde cada elemento do primeiro conjunto (domínio) está associado a um único elemento do segundo conjunto (contradomínio). A forma que os elementos se relacionam é definida por uma lei de associação. Já o conjunto dos elementos do contradomínio que são efetivamente "alcançados" pela função é chamado de imagem.

Domínio: Conjunto de todos os elementos de entrada para a função. São os valores que podemos colocar na função para obter uma saída.

Contradomínio: Conjunto onde se encontram todas possíveis saídas da função, embora nem todas possam ser atingidas.

Imagem: Subconjunto do contradomínio formado pelas saídas que a função efetivamente produz.

Lei de associação: é a regra que descreve como cada elemento do domínio é associado a um único elemento do contradomínio.

exemplo 1 - função do quadrado

$f(x) = x^2$

Dom: Todos os números reais ($\mathbb{R}$)

Contradom: Todos os números reais ($\mathbb{R}$)

Img: Todos reais não negativos ($\mathbb{R}^+$)

exemplo 2 - função temp. do dia

f(dia) = temp. do dia

Domínio: Os dias do ano (1 à 365)

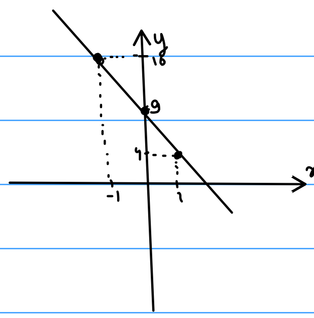
Contradom: Todos os números reais ($\mathbb{R}$)

Img: conj. de todas as temperaturas registradas no ano

2) Técnica de construção de gráfico: escolher quaisquer valores para x e daí calcula-se y através da lei de formação

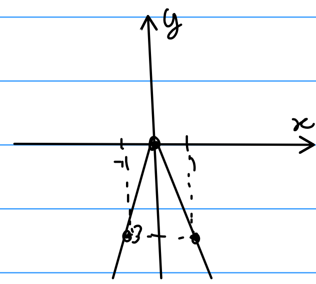
a) $y = (x-3)^2$

x	y
-1	$(-1-3)^2 = 16$ $(-1,16)$
0	$(0-3)^2 = 9$ $(0,9)$
1	$(1-3)^2 = 4$ $(1,4)$



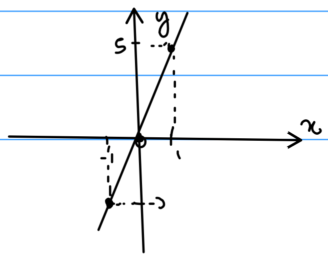
b) $y = -3x^2$

x	y
-1	$-3\cdot(-1)^2 = -3$ $(-1,-3)$
0	$-3\cdot(0) = 0$ $(0,0)$
1	$-3\cdot(1)^2 = -3$ $(1,-3)$



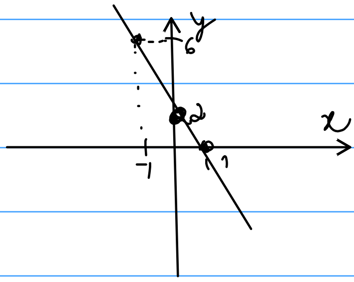
c) $y = x(x+4)$

x	y
-1	$-1(-1+4) = 1-4 = -3$ $(-1,-3)$
0	$0(0+4) = 0$ $(0,0)$
1	$1(1+4) = 5$ $(1,5)$



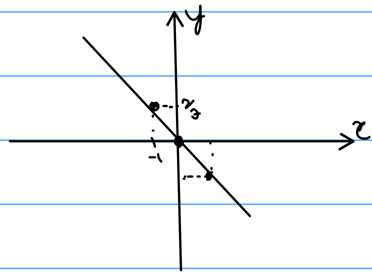
d) $y = x^2 - 3x + 2$

x	y
-1	$1+3+2 = 6 \quad (-1, 6)$
0	$0 - 0 + 2 = 2 \quad (0, 2)$
1	$1 - 3 + 2 = 0 \quad (1, 0)$



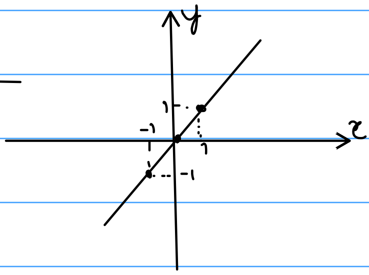
e) $y = -x^2/5 - 2$

x	y
-1	$1/3 \quad (-1, 1/3)$
0	$0 \quad (0,0)$
1	$-1/3 \quad (1, -1/3)$



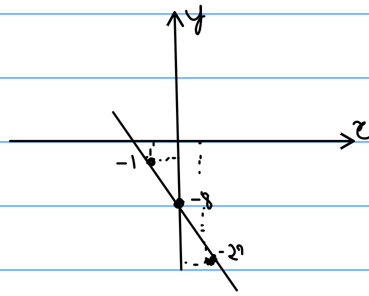
f) $y = x^3$

x	y
-1	-1
0	0
1	1



g) $y = -(x+2)^3$

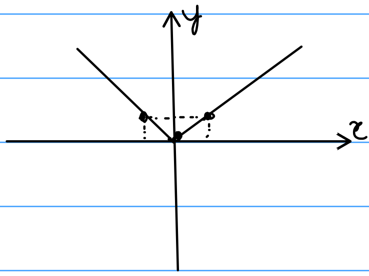
x	y
-1	$-(-1+2)^3 = -1$
0	$-(0+2)^3 = -8$
1	$-(1+2)^3 = -27$



função modular espelha!

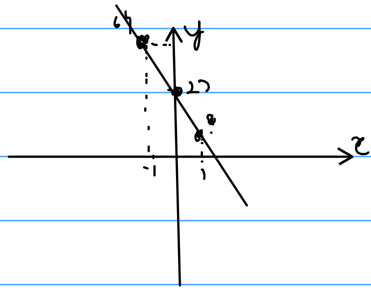
h) $y = |x|^3$

x	y
-1	$|-1|^3 = 1$
0	0
1	1



i) $y = |x-3|^3$

x	y
-1	$|-1-3|^3 = 4^3 = 64$
0	$|-3| = 27$
1	$|1-3|^3 = 2^3 = 8$



3) a) $f(x) = 3 - 4x$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 1 - 3x - x^2$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sqrt{3x+9}$

$3x + 9 \geq 0 \quad x \geq -3$

$Dom(f) = [-3, +\infty[$

d) $f(t) = \dfrac{4}{3-t}$

$3 - t \neq 0 \iff t \neq 3$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

e) $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

$x - 2 = 0 \iff x = 2$

$x - 1 = 0 \iff x = 1$

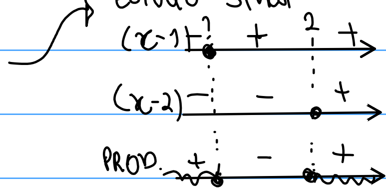
f) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

estudo sinal



$Dom(g) =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

g) $g(x) = \sqrt{|x|}$

$Dom(g) = \mathbb{R}$

h) $g(x) = \sqrt{-x}$

$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \rightarrow Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$

i) $h(t) = \dfrac{1}{|t^2 - \pi|}$

$t^2 - \pi \neq 0 \iff t^2 \neq \pi \iff t \neq \pm\sqrt{\pi}$

$Dom(h) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\}$

j) $h(t) = \dfrac{t}{|t|}$

$t \neq 0 \quad Dom(h) = \mathbb{R} - \{0\}$

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}}$

logo, $Dom(f) = [2, +\infty[$

↳ exclui -2!

- Denom. $\neq 0$

$\sqrt{x+2} > 0 \iff x \neq -2$

- Radic. não negativo

$\dfrac{x^2-4}{x+2} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} \Rightarrow x - 2 \geq 0$

↳ $x \geq 2$

l) $G(t) = \dfrac{2}{\sqrt{9t^2 - 25}} \rightarrow \sqrt{9t^2 - 25} > 0$

$9t^2 - 25 > 0 \iff 9t^2 > 25 \iff t^2 > \dfrac{25}{9} \rightarrow |t| > \dfrac{5}{3}$

↳ $t > 5/3$, $t < -5/3$

$9t^2 - 25 = 0$

$9t^2 = 25 \Rightarrow t^2 = \dfrac{25}{9} \Rightarrow t = \pm\dfrac{5}{3}$ → denominador se anula

$Dom(g) =]-\infty, -5/3[\cup]5/3, +\infty[$

m) $H(x) = \log_{10}(2x^2 + 5x - 3)$ → log deve ser positivo!

↳ $2x^2 + 5x - 3 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 = \sqrt{49} = 7$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \quad x_1 = -3 \quad x_2 = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}$

$(x+3)$

$(x - 1/2)$

estudo de sinais

		-3		$1/2$	
$(x+3)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1/2)$	$-$		$-$	0	$+$
prod	$+$		$-$		$+$

$Dom(H) =]-\infty, -3[\cup]1/2, +\infty[$

4) a) $f(x) = \dfrac{x+3}{4-\sqrt{x^2-25}}$

$4-\sqrt{x^2-25} \neq 0$ e $\sqrt{x^2-25} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-25} \neq 4$ $\qquad x^2-25 \geq 0$

$(\sqrt{x^2-25})^2 \neq 4^2$ $\qquad x^2 \geq 25$

$x^2-25 \neq 16$ $\qquad x \geq 5$ ou $x \leq -5$

$x^2 \neq 41 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{41}$

$Dom(f) =]-\infty, -\sqrt{41}[\cup]-\sqrt{41}, -5] \cup [5, \sqrt{41}[\cup]\sqrt{41}, +\infty[$

b) $f(x) = 2+\sqrt{16+x^2}$

$x^2 \geq 0$

$x=0$, $\sqrt{16+0^2} = \sqrt{16} = 4$ à medida que x^2 aumenta, a raiz também cresce <=> $f(x)$ também cresce

$x=0$, $2+\sqrt{16+0^2} = 2+4 = 6$

Im de $f(x) = [6, +\infty[$

5) a) $P = (a+b) \times 2$

$(a+b)2 = 20 \Rightarrow \underbrace{a+b}_{L+w} = 10$

$L+w = 10 \Rightarrow w = 10-L$

Área $= L \times w$

$A = L \times (10-L)$

$\boxed{A(L) = 10L - L^2}$

b) Área triang. equilátero $= \dfrac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$

$A(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$

c) x = largura, h = altura

P janela $= \underbrace{P \text{ retângulo}}_{2h+x} + \underbrace{\tfrac{1}{2} P \text{ semicírculo}}_{\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \rightarrow r = \frac{\pi}{2}}$

$P = 2h + x + \pi\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow 10 = 2h + x + \dfrac{\pi x}{2}$

$2h = 10 - x - \frac{\pi x}{2}$

$h = \dfrac{10 - x - \frac{\pi x}{2}}{2}$

→ Área = área retâng. + área semicírculo

$A_{retâng} = x \cdot h$ $\quad A_{semicir} = \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

$Área_{total} = A_{retâng} + A_{semic} = x \cdot h + \frac{\pi x^2}{8}$

$A = x \cdot \left(\dfrac{10 - x - \frac{\pi x}{2}}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{8}$ $\quad A = \dfrac{x\left(10 - x - \frac{\pi x}{2}\right)}{2} + \frac{\pi x^2}{8}$

$= A = \frac{10x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow A = 5x - \left(\frac{4x^2}{8} + \frac{2\pi x^2}{8} - \frac{\pi x^2}{8}\right) \Rightarrow A = 5x - \frac{(4+\pi)x^2}{8}$

$$\boxed{A(x) = 5x - \frac{(4+\pi)x^2}{8}}$$

6) a) Dom $= [0,2]$

Im $= [0,1]$

$y = ax + b \quad (0,0)\ (1,1)$

$f(x) = x$

b) Dom $= [1,2[\cup]3,4]$

Im $= \{2\}$

$(0,2)\ (4,0) \quad y = ax + b$

$2 = a \cdot 0 + b \quad 0 = 4a + 2$

$b = 2 \quad a = -\frac{2}{4} = a = -\frac{1}{2}$

$f(t) = -\frac{1}{2}x + 2$

c) Dom $= [2,5]$ → Dúvida!

Im $= [0,1]$

$m = \frac{0-1}{5-2} = -\frac{1}{3}$

$y = ax + b \quad (2,1)$

$1 = -\frac{1}{3}(2) + b \Rightarrow 1 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = \frac{5}{3}$

$f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

d) $(0,3)$ e $(2,-1)$

$\frac{-1-3}{2-0} = -2$

$3 = -2(0) + b \Rightarrow b = 3$

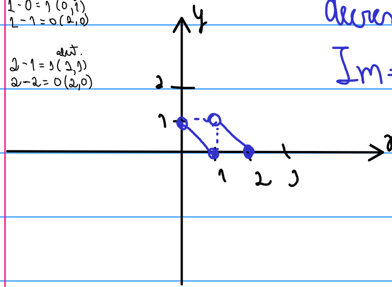
$f(x) = -2x + 3$

Dom $= \mathbb{R}$ Im $= \mathbb{R}$

7)

a) $g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

x y
$1-0=1\ (0,1)$
$1-1=0\ (1,0)$
abt.
$2-1=1\ (1,1)$
$2-2=0\ (2,0)$

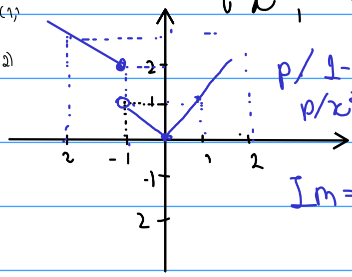


decrescente

$Im = [0,1]$

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \le -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$

(2,4
$-1^2 = (-1,1)$ abt. (1,1)
$1-(-1) = (-1,2)$



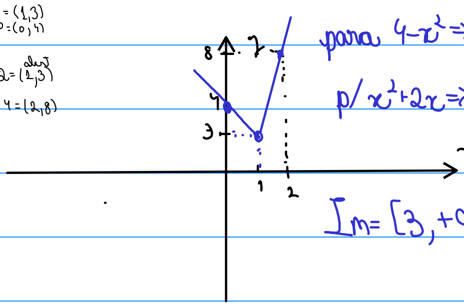
p/ $1-x$ = crescente

p/ $x^2 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ decrescente} \\ x>0 \text{ crescente} \end{cases}$

$Im = [1, +\infty[$

c) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \le 1 \\ x^2+2x, & x > 1 \end{cases}$

$4-1 = (1,3)$
$4-0 = (0,4)$
abt.
$1+2 = (1,3)$
$4+4 = (2,8)$



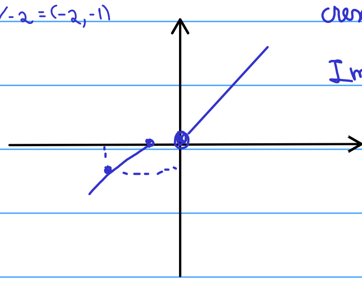
para $4-x^2 \Rightarrow$ decrescente

p/ $x^2+2x \Rightarrow$ crescente

$Im = [3, +\infty[$

d) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$

$1/-1 = (-1,0)$
$1/-2 = (-2,-1)$



crescente

$Im = \mathbb{R}$

8) a) $f(x) = 4$

A função não depende de x, logo é par

b) $f(x) = 3x^2+1$

$\begin{cases} f(a) = 3(a)^2+1 \\ f(-a) = 3(-a)^2+1 \Rightarrow 3(a)^2+1 \end{cases}$ função par

c) $f(x) = x^2+x$

$\begin{cases} f(a) = a^2+a \\ f(-a) = (-a)^2+a \Rightarrow a^2+a \end{cases}$ função par

d) $g(x) = x^3+x$

$\begin{cases} f(a) = a^3+a \\ f(-a) = (-a)^3+a \Rightarrow -a^3+a \end{cases}$ função ímpar

e) $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

$$\begin{cases} f(a) = a^4 + 3a^2 - 1 \\ f(-a) = (-a)^4 + 3(-a)^2 - 1 \Rightarrow a^4 + 3a^2 - 1 \end{cases}$$ função par

f) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$g(a) = \dfrac{a}{a^2 - 1}$, $g(-a) = \dfrac{-a}{(-a)^2 - 1} \Rightarrow \dfrac{-a}{a^2 - 1}$ função ímpar

g) $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$

$h(a) = \dfrac{1}{a - 1}$, $h(-a) = \dfrac{1}{(-a) - 1}$ função ímpar

h) $h(t) = 2t + 1$

$$\begin{cases} h(a) = 2a + 1 \\ h(-a) = 2(-a) + 1 \Rightarrow -2a + 1 \end{cases}$$ função ímpar

i) $h(t) = 2|t| + 1$

$$\begin{cases} h(a) = 2a + 1 \\ h(-a) = 2|(-a)| + 1 \Rightarrow 2a + 1 \end{cases}$$ função par

j) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

$$\begin{cases} f(a) = \operatorname{sen} 2a \\ f(-a) = \operatorname{sen} 2(-a) \Rightarrow -\operatorname{sen} 2a \end{cases}$$ função ímpar

k) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

$$\begin{cases} f(a) = \operatorname{sen} a^2 \\ f(-a) = \operatorname{sen} (-a)^2 \Rightarrow \operatorname{sen} a^2 \end{cases}$$ função par

l) $f(x) = \cos 3x$

$$\begin{cases} f(a) = \cos 3a \\ f(-a) = \cos 3(-a) \Rightarrow \cos 3a \end{cases}$$ função par

m) $f(x) = 1 + \operatorname{sen}^3 x$ DÚVIDA!

$f(a) = 1 + \operatorname{sen}^3(a)$

9) $h(x) = f(x) - f(-x)$

função ímpar $\Rightarrow f(-a) = -f(a)$

$h(-a) = f(-a) - f(-(-a))$ $\quad -h(a) = -(f(a) - f(-a))$

$= f(-a) - f(a)$ $\quad = -f(a) + f(-a) \Rightarrow f(-a) - f(a)$

Portanto, a função é ímpar!

b) determinando que:

$\underset{\text{par}}{g(x)} = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $\underset{\text{ímpar}}{h(x)} = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

$g(x)+f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

$= \frac{(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))}{2} = \frac{2f(x)}{2} \Rightarrow f(x)$

10) a) $f(x) = x^3+2x^2$, $g(x) = 3x^2-1$

$f+g$

$x^3+2x^2+3x^2-1 = x^3+5x^2-1$ $\quad$ Dom $= \mathbb{R}$

$f-g$

$(x^3+2x^2)-(3x^2-1) = x^3-x^2+1$ $\quad$ Dom $= \mathbb{R}$

$f \cdot g$

$(x^3+2x^2)(3x^2-1) = 3x^5-x^3+6x^4-2x^2 \Rightarrow 3x^5+6x^4-x^3-2x^2$

Dom $= \mathbb{R}$

f/g $\quad \frac{(x^3+2x^2)}{(3x^2-1)}$ → Denominador $\neq 0$

$3x^2-1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Dom $= \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

b) $f(x) = 2 \quad g(x) = x^2+1$

$f+g$

$x^2+3 \qquad Dom = \mathbb{R}$

$f-g$

$2-(x^2+1) \Rightarrow 1-x^2 \qquad Dom = \mathbb{R}$

$f \cdot g$

$2(x^2+1) \Rightarrow 2x^2+2 \qquad Dom = \mathbb{R}$

f/g

$\frac{2}{x^2+1} \qquad Dom = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 1 \quad , \quad g(x) = 1+\sqrt{x}$

$f+g$

$2+\sqrt{x} \qquad Dom = [0, +\infty[$

$f-g$

$1-(1+\sqrt{x}) = -\sqrt{x} \qquad Dom = [0, +\infty[$

$f \cdot g$

$1+\sqrt{x} \qquad Dom = [0, +\infty[$

f/g

$\frac{1}{1+\sqrt{x}} \qquad 1+\sqrt{x} \neq 0 \qquad Dom = [0, +\infty[$

$\sqrt{x} = -1$

d) $f(x) = \sqrt{1+x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{1-x}$

$f+g$

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

restrições:

$1+x \geq 0 \qquad x \geq -1 \rightarrow Dom\ f$

$1-x \geq 0 \qquad x \leq 1 \rightarrow Dom\ g$

$Dom = \{x \in \mathbb{R} / -1 \geq x \geq 1\}$

e) $f(x) = x \qquad g(x) = 1/x$

$\cancel{f+g}$

$x + 1/x = 1 \qquad Dom: \mathbb{R} - \{0\}$

$\cancel{f-g}$

$x - \frac{1}{x} = -1 \qquad Dom: \mathbb{R} - \{0\}$

$\cancel{f \cdot g}$

$x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x}$

$f/g \qquad \frac{x}{1/x} = x \cdot x = x^2 \quad , Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

f) $f(x) = x \quad , \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

$\cancel{f+g}$

$x + \sqrt{x-1} \qquad Dom = [1, +\infty[$

$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

$\cancel{f-g}$

$x - \sqrt{x-1} \qquad Dom = [1, +\infty[$

$\cancel{f \cdot g}$

$x \cdot \sqrt{x-1} \qquad Dom = [1, +\infty[$

$f/g \qquad \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

$x - 1 \neq 0 \qquad Dom =]1, +\infty[$

$x \neq 1$

11) $\dfrac{f(x)-3}{f(x)+3} = x$

$f(x)+3 \neq 0$

$\dfrac{f(x)-3}{\cancel{(f(x)+3)}} \times \cancel{(f(x)+3)} = x \cdot f(x)+3$

$f(x)-3 = x\,f(x)+3x$

$f(x)-x\,f(x) = 3x+3$

$f(x)(1-x) = 3x+3$

$f(x) = \dfrac{3+3x}{1-x}$

$* \; 1-x \neq 0$

$x \neq 1$

$Dom = \mathbb{R} - \{1\}$