Exercícios Propostos[1]

⚠ *Introdução aos limites*

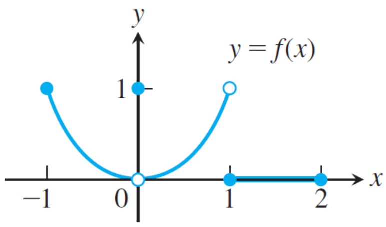
1. Explique com suas palavras o significado das equações abaixo e responda aos questionamentos.

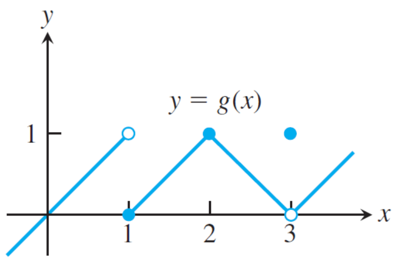
(a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 7$. É possível que $f(3) = -4$? Justifique.

(b) $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 5$. É possível que $\lim_{x\to 1} g(x)$ exista? Explique.

(c) Se $\lim_{x\to 0} h(x) = 7$, o que podemos afirmar sobre $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} h(x)$?

2. Calcule diretamente os limites baseando-se nos gráficos abaixo.





(a) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (g) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (j) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ (k) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (f) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (i) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (l) $\lim_{x\to 3^+} g(x)$

(m) Os limites $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$ existem? Justifique.

(n) Os limites $\lim_{x\to 2} g(x)$ e $\lim_{x\to 3} g(x)$ existem? Justifique.

⚠ *Propriedades dos limites*

3. Calcule o valor dos limites usando as propriedades do limite.

(a) $\lim_{x\to -3}(3x^2 - 4)$ (c) $\lim_{z\to 4}\sqrt{z^2-7}$ (e) $\lim_{x\to 3}\left[\cos\left(x^2-5x+6\right)\right]$

(b) $\lim_{t\to 6} 3(t-5)(t-7)$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{11-x^3}$ (f) $\lim_{x\to -1} 3^{(2x^3-3x+2)}$

4. Suponha $\lim_{x\to c} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Encontre

(a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ (c) $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$ (e) $\lim_{x\to c}[g(x)]^3$

(b) $\lim_{x\to c}[f(x)+3g(x)]$ (d) $\lim_{x\to c}\sqrt{|f(x)g(x)|}$ (f) $\lim_{x\to c}\dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

5. Se $\lim_{x\to 4}\dfrac{3f(x)-5}{x-2} = 8$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$. É possível obter $f(4)$ sem mais informações?

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 29/11/2024 até 16:00 horas**

⚠ *Eliminação das indeterminações*

6. Considere os itens abaixo, onde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Explique o que há de errado com a seguinte equação: $\dfrac{x^2+x-6}{x+3} = x-2$.

(b) Explique por que a seguinte equação está correta: $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x-2)$.

7. (a) Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-3}{x-1} = 5$, encontre $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(b) Encontre o valor de a para que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista.

8. Calcule os limites de quocientes indeterminados.

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-x^3-2x^2}{2x+4}$ (d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$ (g) $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-16}$ (e) $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$ (h) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^{-1}-1}{t-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-7x+10}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+3x-4}$

9. Calcule os limites envolvendo quocientes com raízes de polinômios.

(a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

⚠ *Limites laterais*

10. Encontre os limites indicados. Caso o limite não exista, explique o porquê.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$ (d) $\lim\limits_{x\to 2} (x+3)\dfrac{|x-2|}{x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{|\cos x - 1|}$

(c) $\lim\limits_{x\to -3} |x+3|$ (e) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

11. Para cada função f calcule o valor dos limites indicados, se existirem.

(a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ x^2-2x+1, & \text{se } x < 2 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x^3+1}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x+5}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Seja f uma função definida para todo número real por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{se } x \leq -2 \\ 4 - k, & \text{se } x > -2 \end{cases}$. Determine o valor da constante k para que exista $\lim_{x\to -2} f(x)$.

13. Na *teoria da relatividade especial*, a fórmula da contração de Lorentz, $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$, expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

⚠ *Limites no infinito*

14. Calcule os limites no infinito.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x+7}{x^2-2}$

(b) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{7t^3+4t}{2t^3-t^2+3}$

(c) $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1-x^3}{x^2+7x}\right)^5$

(f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2+4}}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

(h) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

(i) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7x+2}{\sqrt{5x^2-3}}$

15. Encontre os limites. (Dica: multiplique e divida a expressão pelo "conjugado".)

(a) $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x})$

(b) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3} + x)$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - x\right)$

(d) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{9x^2+x} - 3x)$

(e) $\lim_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2+2x})$

(f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2} + \sqrt{x^2+5x} - x^2 - x\right)$

⚠ *Teorema do confronto*

16. Use o Teorema do Confronto para calcular os limites abaixo.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$, se $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leq x \leq 2$

(b) $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\dfrac{4}{x}\right)$

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, se $\dfrac{4x-1}{x} < f(x) < \dfrac{4x^2+3x}{x^2}$ para todo $x > 5$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$