Exercícios Propostos[1]

⚠ *Reta tangente e diferenciabilidade*

1. Ache uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = 2xe^x$, $P = (0, 0)$

(b) $y = \dfrac{3^x}{x}$, $P = (1, 3)$

(c) $y = \tan x$, $P = (\pi/4, 1)$

(d) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $P = (0, 1)$

2. Considere os exercícios abaixo.

(a) Para quais valores de x o gráfico $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tem tangentes horizontais?

(b) Em quais pontos sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ está a reta tangente paralela à reta $3x - y = 5$?

3. Encontre a reta normal à parábola $y = x + x^2$ no ponto (1,2). (Dica: note que o produto dos *coeficientes angulares* das retas tangente e normal a uma curva em um ponto é -1. Você saberia demonstrar esse resultado?)

4. Encontre uma *aproximação linear* da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em torno de $x = -1$ e use-a para estimar os valores de $\sqrt[3]{-0,96}$ e $\sqrt[3]{-1,29}$.

⚠ *Regra da cadeia*

5. Escreva na forma $f(g(x))$ a função composta. Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$. Então encontre a derivada dy/dx usando a regra da cadeia.

(a) $y = (x^2 + 4x + 6)^5$

(b) $y = \cos(\tan x)$

(c) $y = e^{\sqrt{x}}$

(d) $y = \tan 3x$

(e) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

(f) $y = \operatorname{sen}(e^x)$

6. Encontre a derivada da função.

(a) $f(x) = (x^3 + 4x)^7$

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

(c) $s(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

(d) $F(y) = \left(\dfrac{y - 6}{y + 7}\right)^3$

(e) $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico)

(f) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosseno hiperbólico)

(g) $y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}$

(h) $f(x) = xe^{-x^2}$

(i) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

(j) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

(k) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

(l) $y = e^{e^{\operatorname{sen} x}}$

⚠ *Derivação implícita*

7. Encontre dy/dx diferenciando *implicitamente*.

[1]Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 21/11/2024 até 14:00 horas**

(a) $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

(b) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

(d) $y = \arctan \sqrt{x}$ (Dica: $\tan y = \sqrt{x}$)

(e) $y = \operatorname{arc\,sen}(2x + 1)$

(f) $y = x \arccos x$

8. Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y, \quad (\pi, \pi)$

(b) $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1)$ (elipse)

(c) $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2, \quad (1, 2)$ (hipérbole)

9. Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) é $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

⚠ *Taxas relacionadas* – Exercícios opcionais

10. Resolva os exercícios aplicando a regra da cadeia à *equação de vínculo entre as variáveis* para obter as taxas relacionadas.

(a) Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando? *Resposta:* $\dfrac{3}{25\pi}$ m/min

(b) Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m^3/min, encontre a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver a 3 m de profundidade. (Dica: semelhança de triângulos e volume de cone) *Resposta:* $\dfrac{8}{9\pi}$ m/min

(c) Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada estiver a 3 m da parede? (Dica: teorema de Pitágoras) *Resposta:* $-\dfrac{3}{4}$ m/s

(d) Uma atleta corre em uma trajetória circular de raio 100 m a uma velocidade constante de 7 m/s. Um estudante universitário está parado a uma distância de 200 m do centro da pista enquanto bebe cerveja. Qual é a taxa de variação da distância entre os dois quando esta distância for 200 m? (Dica: lei dos cossenos e definição de radiano) *Resposta:* $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

(e) Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm^3/min. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e seu diâmetro no topo é 8 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.
Resposta: $\left(\dfrac{32\pi}{9} + 10\right) \times 10^3$ cm^3/min