## Exercícios Propostos[1]

⚠ *Limites infinitos*

**1.** Explique brevemente o significado das equações abaixo e responda aos questionamentos.

(a) $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$. O que podemos dizer sobre $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to -2^+} f(x)$?

(b) Se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, podemos afirmar que $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$?

(c) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$. O gráfico de $f$ cruza a reta vertical $x = 4$?

(d) $\lim_{x\to \infty} f(x) = 5$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$. As retas $y = 5$ e $y = 3$ são assíntotas horizontais de $f$? O que isso significa?

**2.** Encontre os limites infinitos.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{5x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x^3+8}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \tan x$

⚠ *Assíntotas*

**3.** Use os limites laterais para estudar o comportamento da função na descontinuidade e determine as equações para as assíntotas verticais.

(a) $y = \dfrac{x^2+4}{x-3}$

(b) $y = \dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$

(c) $y = \ln(x-1)$

(d) $y = \sec x$

**4.** Calcule todas as *assíntotas verticais* e *horizontais* das funções abaixo e use-as para fazer um esboço do gráfico.

(a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{1+x^2}}{3x-1}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+2}$

⚠ *Limites fundamentais*

**5.** Use o primeiro limite fundamental $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para calcular os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\theta}{\theta}$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{\operatorname{sen} 9t}$

(c) $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(\cos\theta)}{\cot\theta}$

(d) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$

(e) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+x-2}$

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 29/10/2024 até 16:00 horas**

**6.** Use os limites fundamentais $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, com $a>0$, e $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ para calcular os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{5x}\right)^x$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x+4}\right)^{x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x+3}-125}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{x+2}-49}{14x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15^{x-3}-1}{x-3}$

⚠ *Limite e continuidade*

**7.** Use a continuidade para calcular o limite.

(a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(5+\sqrt{x})}{\sqrt{5+x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}e^{x^2-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

**8.** Encontre os pontos nos quais $f$ é descontínua. Em quais desses pontos $f$ é contínua à direta, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de $f$.

(a) $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0\\ 2-x, & 0<x\le 2\\ (x-2)^2, & x>2\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 1/x, & 1<x<3\\ \sqrt{x-3}, & x\ge 3\end{cases}$

**9.** Quais das funções $f$ abaixo têm descontinuidade removível em $x=a$? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função $g$ que é igual a $f$ para $x\neq a$ e é contínua em $x=a$.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2},\quad x=-2$

(b) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x},\quad x=9$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4},\quad x=4$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{(x+4)^2},\quad x=-4$

**10.** Determine os valores de $\alpha$ para os quais a função $y=f(x)$ é contínua para todos os reais.

(a) $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2-2\alpha, & x\ge 2\\ 12, & x<2\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\alpha}{\alpha+1}, & x<0\\ x^2+\alpha, & x\ge 0\end{cases}$

⚠ *Teorema do valor intermediário*

**11.** Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

(a) $x^4+x-3=0,\quad (1,2)$

(b) $4x^3-6x^2=-3x+2,\quad (1,2)$

(c) $\sqrt[3]{x}=1-x,\quad (0,1)$

(d) $e^x=3-2x,\quad (0,1)$

(e) $\ln x=3-2x,\quad (1,e)$

(f) $\operatorname{sen}x=x^2-x,\quad (1,2)$

**12.** Suponha que uma função $f$ seja contínua no intervalo fechado $[0,1]$ e que $0\le f(x)\le 1$ para todo $x\in[0,1]$. Mostre que deve existir um número $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c$ ($c$ é chamado de **ponto fixo** de $f$). (Dica: considere a função $g(x)=f(x)-x$ e use o TVI.)