

第4章 設計変数の離散化による影響評価

本研究では、先行研究では明らかにできなかった設計変数の離散化の一般性の検証を二つの実数値 GA と様々な特徴を持つ 19 個のベンチマーク問題から試みる。

4.1 実験条件

4.1.1 影響評価で使用するベンチマーク問題

本項では、設計変数の離散化による影響評価に用いる 19 個のベンチマーク問題の構造について述べる。

表 ?? に本研究に用いるベンチマーク問題を Huband らが用いた分類 [?] に基いて表している..

表 4.1.1: 影響評価で用いるベンチマーク問題

Problem	Obj.	Var.	Con.	Separability	Modality	Bias	Geometry
DTLZ2	M	N	-	separable	uni	-	concave
DTLZ3	M	N	-	separable	multi	-	concave
DTLZ4	M	N	-	separable	uni	✓	concave
WFG2	M	N	-	non-separable	multi	-	convex, disconnected
WFG4	M	N	-	separable	multi	-	concave
WFG6	M	N	-	non-separable	uni	-	concave
WFG7	M	N	-	separable	uni	✓	concave
UF2	2	N	-	non-separable	multi	-	convex
UF9	3	N	-	non-separable	multi	-	linear, disconnected
CF2	2	N	1	non-separable	multi	-	convex, disconnected
CF7	2	N	2	non-separable	multi	-	convex
C1DTLZ3	M	N	1	separable	multi	-	concave
C2DTLZ2convex	M	N	1	separable	uni	-	convex, disconnected
C3DTLZ1	M	N	M	separable	multi	-	convex(feasible surface is PF)
Car Side Impact	3	7	10			uncertain	
Welded Beam Design	2	4	4			uncertain	
Modified DTLZ2	M	N	-	separable	uni	-	concave
Modified DTLZ3	M	N	-	separable	multi	-	concave
Modified DTLZ4	M	N	-	separable	uni	✓	concave

Obj. is the number of objectives; Var. is the number of variables; Con. is the number of constraints.

M is the user predefined number of objectives; N is the user predefined number of variables.

- indicates no value or no characteristic; ✓ indicates that the problem has the characteristic.

The Car Side Impact and Welded Beam Design problems have uncertain characteristics because of engineering problems.

表 ?? において、Problem は多目的ベンチマーク問題の名称を示している。また、Obj., Var., Con., はそれぞれ各多目的ベンチマーク問題の目的関数の数、設計変数の数、制約条

件の数を示す。M や N で示される目的関数の数、設計変数の数は、ユーザが任意に設定することができる。

Separability は各設計変数が相関関係にあるか否かを示している。separable は相関関係なし、non-separable は相関関係ありを示す。separable な問題な場合、各設計変数の最適値は一意に定まる。一方で、non-separable な問題な場合、各設計変数の最適値は一意に定まらず、他の設計変数の値に応じて変化する。したがって、non-separable な問題のほうが separable な問題に比べ、最適化が難しい傾向にある。

Modality は局所最適解があるか否かを示している。uni は単峰性の性質を持つ問題を示しており、局所最適解は存在せず大域的最適解のみが存在する問題である。一方で、multi は多峰性の性質を持つ問題を示しており、局所最適解を有する問題である。多峰性の性質を持つ問題は局所最適解を持つため、大域的最適解に収束しづらく、単峰性の性質を持つ問題と比較し、一般的に最適化が難しい傾向にある。

Bias は目的関数空間において、解が偏りを持って生成されてしまう性質を有するか否かを示している。✓ で示される問題は、目的関数空間に解が射影される際、強い非線形性によって、解が局所的に集中しやすく、目的関数空間全体を覆うような多様性のある解を生成することが難しい問題である。したがって、Bias がある問題のほうが解の多様性を維持した最適解を得ることが難しい傾向にある。

Geometry は真のパレート最適解の形状を示している。最適化手法によっては、真のパレート最適解の形状により得手不得手があるため、様々な形状の多目的ベンチマーク問題で性能を評価する必要がある。

次節以降でそれぞれの問題の構造を詳しく述べる。

4.1.1.1 DTLZ 問題

DTLZ 問題 [?] は 2002 年に Deb らによって提案された多目的ベンチマーク問題である。大きな特徴として、1) 目的関数の数と設計変数の数をユーザ自身が決定できる、2) 設計変数が目的関数空間内の位置を決定する変数と目的関数空間内での原点からの距離を決定する変数に分離されている、ことが挙げられる。本論文では、これらの変数をそれぞれ位置変数、距離変数と呼ぶこととする。本研究では DTLZ2, 3, 4 を用いる。

4.1.1.1.1 DTLZ2

DTLZ2 は式 (4.1.1) で表される多目的ベンチマーク問題である。DTLZ2 は局所解を持たない単峰性の多目的問題であり、真のパレート最適開集合は半径 1 の超球面上に分布する。目的関数の数を M 、設計変数の数を $n \geq M$ とした場合、設計変数 x_1, \dots, x_{M-1} は位置変数となり、残りの設計変数 x_M, \dots, x_n は距離変数となる。各目的関数 $f_m (m = 1, \dots, M)$ の係数 $(1 + g(\mathbf{x}_M))$ が原点からの距離に相当する。したがって、DTLZ2 の真のパレート最適解を得るためには、位置変数 x_1, \dots, x_{M-1} が一様に広がっており、 $g(\mathbf{x}_M)$ が 0、すなわちすべての距離変数 x_M, \dots, x_n が 0.5 となる必要がある。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Min. } f_1(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}\pi/2) \cos(x_{M-1}\pi/2), \\
 \text{Min. } f_2(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}\pi/2) \sin(x_{M-1}\pi/2), \\
 \text{Min. } f_3(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \sin(x_{M-2}\pi/2), \\
 &\vdots \\
 \text{Min. } f_M(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \sin(x_1\pi/2) \\
 \text{with } g(\mathbf{x}_M) &= \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.5)^2 \\
 &\quad 0 \leq x_i \leq 1, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n. \\
 &\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\quad \mathbf{x}_M = (x_M, x_{M+1}, \dots, x_n)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

4.1.1.1.2 DTLZ3

DTLZ3 は式 (4.1.2) で表される多目的ベンチマーク問題である。DTLZ3 は局所最適解を持つ多峰性の多目的問題であり、パレート最適解は半径 1 の超球面上に分布する。DTLZ2 と同様に、設計変数 x_1, \dots, x_{M-1} は位置変数、設計変数 x_M, \dots, x_n は距離変数となり、各目的関数 f_m の係数 $(1 + g(\mathbf{x}_M))$ が原点からの距離に相当する。DTLZ2 と異なる点は、 $g(\mathbf{x}_M)$ が振動する点である。 $g(\mathbf{x}_M)$ が振動するため局所最適解を複数個持つこととなる。例として図 4.1.1 に $M = 3$, $n = 38$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n$ の時の距離変数による $g(\mathbf{x}_M)$ の推移を示す。

図 4.1.1 より $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0.5$ の時、 $g(\mathbf{x}_M) = 0$ の最小値を取ることが分かる。したがって、DTLZ3 の真のパレート最適解を得るためには、位置変数 x_1, \dots, x_{M-1} が一様

に広がっており, $g(\mathbf{x}_M)$ が 0, すなわちすべての距離変数 x_M, \dots, x_n が 0.5 となる必要がある.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Min. } f_1(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}\pi/2) \cos(x_{M-1}\pi/2), \\
 \text{Min. } f_2(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}\pi/2) \sin(x_{M-1}\pi/2), \\
 \text{Min. } f_3(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1\pi/2) \cdots \sin(x_{M-2}\pi/2), \\
 &\vdots \\
 \text{Min. } f_M(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \sin(x_1\pi/2) \\
 \text{with } g(\mathbf{x}_M) &= 100[|\mathbf{x}_M| + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))] \\
 &0 \leq x_i \leq 1, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n. \\
 &\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\mathbf{x}_M = (x_M, x_{M+1}, \dots, x_n)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.2)$$

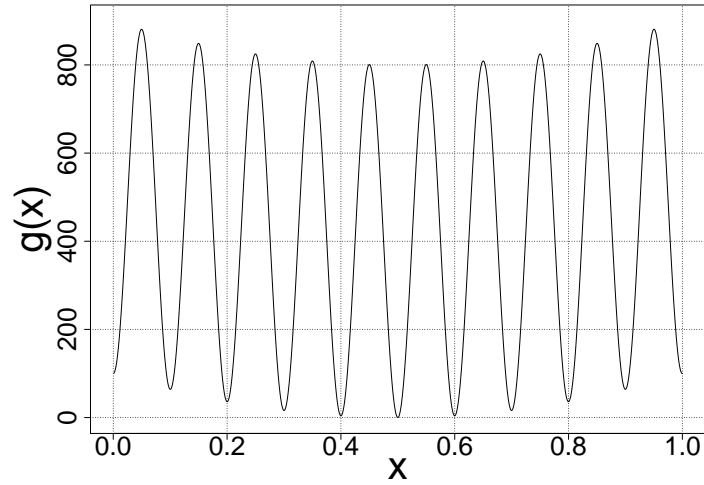


図 4.1.1: $g(\mathbf{x}_M)$ の推移

4.1.1.1.3 DTLZ4

DTLZ4 は 式 (4.1.3) で表される多目的問題である。DTLZ2 と基本的な構造は同様である。DTLZ2 と大きく違う点は、各目的関数 f_m 内の位置変数 x_1, \dots, x_{M-1} が α 乗となっている点である。これにより、変数の値の僅かな違いが目的関数の値に大きな影響を与え、解の多様性維持のためには位置変数を高い精度で探索する必要がある。例として $\alpha = 100$ の場合の x^α と x の対応を図 4.1.2 に示す。

図 4.1.2 より、 $x < 0.9$ の時、 x^α はほぼ 0 となってしまうため、 $x > 0.9$ を細かく調べる必要がある。DTLZ4 のパレートフロント上の設計変数は、位置変数の α 乗 $x_1^\alpha, \dots, x_{M-1}^\alpha$ が $[0,1]$ に一様に広がっており、 $g(\mathbf{x}_M)$ が 0、すなわちすべての距離変数 x_M, \dots, x_n が 0.5 となる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Min. } f_1(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2) \cos(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 \text{Min. } f_2(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cdots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2) \sin(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 \text{Min. } f_3(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cdots \sin(x_{M-2}^\alpha \pi/2), \\
 &\vdots \\
 \text{Min. } f_M(\mathbf{x}) &= (1 + g(\mathbf{x}_M)) \sin(x_1^\alpha \pi/2) \\
 \text{with } g(\mathbf{x}_M) &= \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.5)^2 \\
 &0 \leq x_i \leq 1, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n. \\
 \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \mathbf{x}_M &= (x_M, x_{M+1}, \dots, x_n)
 \end{aligned} \right\} (4.1.3)$$

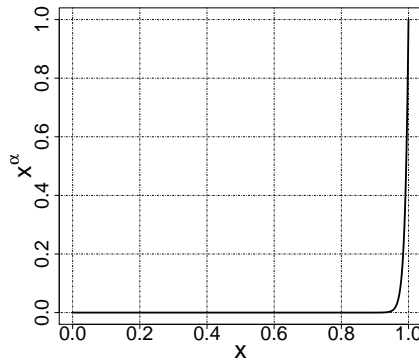


図 4.1.2: x と x^α の対応

4.1.1.2 WFG 問題

WFG 問題 [?] は 2006 年に Huband らが提案した多目的ベンチマーク問題である。大きな特徴として、1) 設計変数が何度もスケーリングされる、2) 設計変数間で相関関係を持つ問題がある、3) 真のパレートフロントの形状が複雑であるといった点があげられる。

上述の 1 点目の性質より、非常に非線形性の強い問題であり、また 2 点目の性質より設計変数間で相関関係を持つ場合があるため、DTLZ 問題と比較し、非常に複雑な構造となっている。

基本的な式の構造は式 (4.1.4) で表される。

$$\begin{aligned}
 \text{Min. } f_{m=1:M}(\mathbf{x}) &= x_M + S_m h_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 \text{where } \mathbf{x} &= \{x_1, \dots, x_M\} \\
 &= \{\max(t_M^p, A_1)(t_1^p - 0.5) + 0.5, \dots, \\
 &\quad \max(t_M^p, A_{M-1})(t_{M-1}^p - 0.5) + 0.5, t_M^p\} \\
 \mathbf{t}^p &= \{t_1^p, \dots, t_M^p\} \leftarrow [\mathbf{t}^{p-1} \leftarrow [\dots \leftarrow [\mathbf{t}^1 \leftarrow [z_{[0,1]} \\
 \mathbf{z}_{[0,1]} &= \{z_{1,[0,1]}, \dots, z_{n,[0,1]}\} = \{z_1/z_{1,max}, \dots, z_n/z_{n,max}\}
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

式 (4.1.4) において、 M は目的関数の数を示している。 \mathbf{x} は目的関数値を定める値で M 個からなり、 x_1, \dots, x_{M-1} が目的関数空間における解の位置を決定する値、 x_M が目的関数空間における解の原点からの距離を決定する値となる。 \mathbf{z} は、設計変数値を表し、設計変数の数 n は位置パラメータ k と距離パラメータ l を足した数となる。 $A_{1:M-1}$ は 0 または 1 の定数であり問題によって決定される。 $h_{1:M}$ はパレートフロントの形状を決定する関数（形状関数）、 $S_{1:M}$ はスケーリングを行う定数である。 $t^{1:p}$ は、射影変換された変数を示し、 \leftarrow は後述するスケーリング関数を用いて変数を射影することを意味する。

このように、WFG 問題では、設計変数 \mathbf{z} を何度もスケーリング（射影）し、 \mathbf{t}^p に変換したのち、目的関数値を定める \mathbf{x} を算出し、パレートフロントの形状を決定する関数 $h_{1:M}$ に与えることで、目的関数値が算出される。

本研究で用いる WFG2, 4, 6, 7 で使用される形状関数 $h_{1:M}$ とスケーリング関数をそれぞれ表 4.1.2, 表 4.1.3 にそれぞれまとめる。

また、WFG2, 4, 6, 7 で使用する形状関数 $h_{1:M}$ とスケーリング関数の組み合わせを

表 4.1.4 に示す。

表 4.1.2: 影響評価で用いる WFG 問題で使用される形状関数

Convex
$convex_1(x_1, \dots, x_{M-1}) = \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \cos(x_i \pi / 2))$ $convex_{m=2:M-1}(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(\prod_{i=1}^{M-m} (1 - \cos(x_i \pi / 2)) \right) (1 - \sin(x_{M-m-1} \pi / 2))$ $convex_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = 1 - \sin(x_1 \pi / 2)$
Concave
$concave_1(x_1, \dots, x_{M-1}) = \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \cos(x_i \pi / 2))$ $concave_{m=2:M-1}(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(\prod_{i=1}^{M-m} (1 - \cos(x_i \pi / 2)) \right) (1 - \sin(x_{M-m-1} \pi / 2))$ $concave_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = 1 - \sin(x_1 \pi / 2)$
Disconnected ($\alpha, \beta > 0, A \in \{1, 2, \dots\}$)
$disc_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = 1 - (x_1)^\alpha \cos^2(A(x_1)^\beta \pi)$

表 4.1.3: 影響評価で用いる WFG 問題で使用されるスケーリング関数

Bias : ParameterDependent ($A \in (0, 1), 0 < B < C$)
$b_param(y, \mathbf{y}', A, B, C) = y^{B+(C-B)v(u(\mathbf{y}'))}$ $v(u(\mathbf{y}')) = A - (1 - 2u(\mathbf{y}')) \lfloor 0.5 - u(\mathbf{y}') \rfloor + A$
Shift : Linear ($A \in (0, 1)$)
$s_linear(y, A) = \frac{ y - A }{\lfloor A - y \rfloor + A}$
Shift : Multi-modal ($A \in \{1, 2, \dots\}, B \geq 0, (4A + 2)\pi \geq 4B, C \in (0, 1)$)
$s_multi(y, A, B, C) = \frac{1 + \cos \left[(4A + 2)\pi \left(0.5 - \frac{ y - C }{2(\lfloor C - y \rfloor + C)} \right) \right] + 4B \left(\frac{ y - C }{2(\lfloor C - y \rfloor + C)} \right)^2}{B + 2}$
Reduction : Weighted Sum ($ \mathbf{w} = \mathbf{y} , w_1, \dots, w_{ \mathbf{y} }$)
$r_sum(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \left(\sum_{i=1}^{ \mathbf{y} } w_i y_i \right) / \sum_{i=1}^{ \mathbf{y} } w_i$
Reduction : Non-separable ($A \in \{1, \dots, \mathbf{y} \}, \mathbf{y} \bmod A = 0$)
$r_nonsep(\mathbf{y}, A) = \frac{\sum_{j=1}^{ \mathbf{y} } \left(y_j + \sum_{k=0}^{A-2} y_j - y_{1+(j+k) \bmod \mathbf{y} } \right)}{A \lceil A/2 \rceil (1 + 2A - 2 \lceil A/2 \rceil)}$

表 4.1.4: 影響評価で用いる WFG 問題の形状関数とスケーリング関数の組み合わせ

Problem	Type	Setting
All	Constants	$S_{m=1:M} = 2m$ $A_{1:M-1} = 1$ (for WFG 2, 4, 6 and 7)
All	Domains	$z_{i=1:n,max} = 2i$
WFG2	Shape	$h_{m=1:M-1} = \text{convex}_m$ $h_M = \text{disc}_M(\text{with } \alpha = \beta = 1 \text{ and } A = 5)$
	t^1	$t_{i=1:k}^1 = y_i$ $t_{i=k+1:n}^1 = s_linear(y_i, 0.35)$
	t^2	$t_{i=1:k}^2 = y_i$ $t_{i=k+1:k+l/2}^2 = r_nonsep(\{y_{k+2(i-k)-1}, y_{k+2(i-k)}\}, 2)$
	t^3	$t_{i=1:M-1}^3 = r_sum(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\})$ $t_M^3 = r_sum(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\})$
WFG4	Shape	$h_{m=1:M} = \text{concave}_m$
	t^1	$t_{i=1:n}^1 = s_multi(y_i, 30, 10, 0.35)$
	t^2	$t_{i=1:M-1}^2 = r_sum(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\})$ $t_M^2 = r_sum(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, 1, \dots, 1)$
WFG6	Shape	$h_{m=1:M} = \text{concave}_m$
	t^1	As t^1 from WFG2. (Linear shift.)
	t^2	$t_{i=1:M-1}^2 = r_nonsep(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, k/(M-1))$ $t_M^2 = r_nonsep(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, l)$
WFG7	Shape	$h_{m=1:M} = \text{concave}_m$
	t^1	$t_{i=1:k}^1 = b_param(y_i, r_sum(\{y_{i+1}, \dots, y_n\}, \{1, \dots, 1\}), \frac{0.98}{49.98}, 0.02, 50)$ $t_{i=k+1:n}^1 = y_i$
	t^2	As t^1 from WFG2. (Linear shift.)
	t^3	As t^2 from WFG4. (Weighted sum reduction.)

4.1.1.3 CEC2009 問題

CEC2009問題[?]は2009年にZhangらが提案した多目的ベンチマーク問題である。CEC2009問題は現実の設計問題に近い問題を作成するという意図で提案された。現実の設計問題に近い構成にするため、設計変数同士に相関を持つことや、制約条件が存在する、真のパレートフロントが不連続な形状をしている等複雑な構成となっていることが特徴である。CEC2009問題は20種類のベンチマーク問題があり、その内10種類は制約条件付き問題である。本研究では、制約なしのベンチマーク問題であるUF2、UF9と制約条件付きベンチマーク問題であるCF2、CF7の4つのベンチマーク問題で数値実験を行う。次節以降でこれら4つのベンチマーク問題について述べる。

4.1.1.3.1 UF2

UF2は制約なしの2目的のベンチマーク問題である。式(4.1.5)にUF2の構成を示す。設計変数の数 n は任意に決定することができ、設計変数の探索領域は $[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$ となる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Min. } f_1 &= x_1 + \frac{2}{|\mathbf{J}_1|} \sum_{j \in \mathbf{J}_1} y_j^2 \\ \text{Min. } f_2 &= 1 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{|\mathbf{J}_2|} \sum_{j \in \mathbf{J}_2} y_j^2 \\ \text{where } \mathbf{J}_1 &= \{j | j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\} \\ \mathbf{J}_2 &= \{j | j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\} \\ y_j &= \begin{cases} x_j - [0.3x_1^2 \cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0.6x_1] \\ \quad \times \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in \mathbf{J}_1 \\ x_j - [0.3x_1^2 \cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0.6x_1] \\ \quad \times \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in \mathbf{J}_2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

4.1.1.3.2 UF9

UF9は制約なしの3目的のベンチマーク問題である。式(4.1.6)にUF9の構成を示す。設計変数の数 n は任意に決定することができ、設計変数の探索領域は $[0, 1]^2 \times [-2, 2]^{n-2}$ となる。

$$\left. \begin{aligned}
Min. \quad f_1 &= 0.5[\max\{0, (1+\epsilon)(1-4(2x_1-1)^2)\} + 2x_1]x_2 \\
&\quad + \frac{2}{|\mathbf{J}_1|} \sum_{j \in \mathbf{J}_1} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2 \\
Min. \quad f_2 &= 0.5[\max\{0, (1+\epsilon)(1-4(2x_1-1)^2)\} - 2x_1 + 2]x_2 \\
&\quad + \frac{2}{|\mathbf{J}_2|} \sum_{j \in \mathbf{J}_2} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2 \\
Min. \quad f_3 &= 1 - x_2 \\
&\quad + \frac{2}{|\mathbf{J}_3|} \sum_{j \in \mathbf{J}_3} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2 \\
where \quad \mathbf{J}_1 &= \{j | 3 \leq j \leq n, \text{ and } j-1 \text{ is a multiplication of } 3\} \\
\mathbf{J}_2 &= \{j | 3 \leq j \leq n, \text{ and } j-2 \text{ is a multiplication of } 3\} \\
\mathbf{J}_3 &= \{j | 3 \leq j \leq n, \text{ and } j \text{ is a multiplication of } 3\} \\
\epsilon &= 0.1
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

4.1.1.3.3 CF2

CF2 は 1 制約 2 目的のベンチマーク問題である. 式 (4.1.7) に CF2 の構成を示す. 設計変数の数 n は任意に決定することができ, 設計変数の探索領域は $[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$ となる.

$$\left. \begin{aligned}
Min. \quad f_1 &= x_1 + \frac{2}{|\mathbf{J}_1|} \sum_{j \in \mathbf{J}_1} (x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2 \\
Min. \quad f_2 &= 1 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{|\mathbf{J}_2|} \sum_{j \in \mathbf{J}_2} (x_j - \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2 \\
where \quad \mathbf{J}_1 &= \{j | j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\} \\
\mathbf{J}_2 &= \{j | j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\} \\
const. \quad c_1(\mathbf{x}) &= \frac{t}{1 + e^{4|t|}} \geq 0 \\
where \quad t &= f_2 + \sqrt{f_1} - a \sin[N\pi(\sqrt{f_1} - f_2 + 1)] - 1
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

4.1.1.3.4 CF7

CF7 は 2 制約 2 目的のベンチマーク問題である．式 (4.1.8) に CF7 の構成を示す．設計変数の数 n は任意に決定することができ，設計変数の探索領域は $[0, 1] \times [-2, 2]^{n-1}$ となる．

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Min.} \quad f_1 &= x_1 + \sum_{j \in \mathbf{J}_1} h_j(y_j) \\
 \text{Min.} \quad f_2 &= (1 - x_1)^2 + \sum_{j \in \mathbf{J}_2} h_j(y_j) \\
 \text{where} \quad \mathbf{J}_1 &= \{j | j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\} \\
 \mathbf{J}_2 &= \{j | j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\} \\
 y_j &= \begin{cases} x_j - \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in \mathbf{J}_1 \\ x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in \mathbf{J}_2 \end{cases} \\
 h_2(t) &= h_4(t) = t^2 \\
 h_j(t) &= 2t^2 - \cos(4\pi t) + 1 \quad \text{for } j = 3, 5, 6, \dots, n \\
 \text{const.} \quad c_1(\mathbf{x}) &= x_2 - \sin(6\pi x_1 + \frac{2\pi}{n}) \\
 &\quad - \text{Sgn}(0.5(1 - x_1) - (1 - x_1)^2) \\
 &\quad \times \sqrt{|0.5(1 - x_1) - (1 - x_1)^2|} \geq 0 \\
 c_2(\mathbf{x}) &= x_4 - \sin(6\pi x_1 + \frac{4\pi}{n}) \\
 &\quad - \text{Sgn}(0.25\sqrt{1 - x_1} - 0.5(1 - x_1)) \\
 &\quad \times \sqrt{|0.25\sqrt{1 - x_1} - 0.5(1 - x_1)|} \geq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

4.1.1.4 CDTLZ 問題

CDTLZ 問題 [?] は 2014 年に Jain らによって提案された制約条件付きのベンチマーク問題である。CDTLZ 問題は Deb らが考案した DTLZ 問題に制約条件を追加した問題であり、6 つの問題が提案されている。CDTLZ 問題では、3 種類の制約条件の問題が用意されている。

C1 シリーズの問題は、オリジナルの DTLZ 問題の真のパレートフロントを覆うように実行不可能領域が存在する問題であり、実行不可能領域を越えなければ真のパレートフロントに到達できないため、実行不可能領域と実行可能領域の境界付近に局所最適解が生成されやすい。C2 シリーズの問題は、オリジナルの DTLZ 問題の真のパレートフロント上に部分的に実行不可能領域が存在する問題であり、真のパレートフロントの形状が不連続となる。C3 シリーズの問題は、オリジナルの DTLZ 問題の真のパレートフロントが実行不可能領域に存在する問題であり、実行可能領域と実行不可能領域の境界線が真のパレートフロントとなる。

本研究では、C1DTLZ3, C2DTLZ2 convex, C3DTLZ1 の 3 つの問題を数値実験に使用した。次節以降でこれらの問題について説明する。

4.1.1.4.1 C1DTLZ3

C1DTLZ3 は DTLZ3 に 1 つ制約条件を追加したベンチマーク問題である。真のパレートフロントを覆うように実行不可能領域が存在し、実行可能領域と実行不可能領域の境界付近に局所最適解が生成されやすい問題となっている。C1DTLZ3 で追加された制約条件を式 (4.1.9) に示す。本実験では r を 9 とした。

$$c(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x})^2 - 16 \right) \left(\sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x})^2 - r^2 \right) \geq 0 \quad (4.1.9)$$

4.1.1.4.2 C2DTLZ2 convex

C2DTLZ2 convex は DTLZ2 のパレートフロントの形状を凹型から凸型に変更し、1 つ制約条件を追加したベンチマーク問題である。真のパレートフロント上に部分的に実行不可能領域が存在し、実行可能な真のパレートフロントの形状は不連続となっている。C2DTLZ2 convex で変更された目的関数の射影変換を式 (4.1.10) に、追加された制約条件を式 (4.1.11) に示す。本実験では r を 0.225 とした。

$$\left. \begin{array}{l} f_i \leftarrow f_i^4 \quad i = 1, 2, \dots, M-1 \\ f_M \leftarrow f_M^2 \end{array} \right\} \quad (4.1.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} c(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M (f_i(\mathbf{x}) - \lambda)^2 - r^2 \geq 0 \\ \text{where } \lambda = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (4.1.11)$$

4.1.1.4.3 C3DTLZ1

C3DTLZ1 は DTLZ1 に目的関数の数 M だけ制約条件を追加したベンチマーク問題である。DTLZ1 の真のパレートフロントが実行不可能領域にあり、実行可能領域と実行不可能領域の境界線がパレート最適解となる問題である。C3DTLZ1 で追加された制約条件を式 (4.1.12) に示す。

$$c_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1, i \neq j}^M f_j(\mathbf{x}) + \frac{f_i(\mathbf{x})}{0.5} - 1 \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, M \quad (4.1.12)$$

4.1.1.5 Engineering 問題

本実験では現実の設計問題に則した Engineering 問題として Car Side Impact 問題 [?] と Welded Beam Design 問題 [?] を用いて数値実験を行った。次節以降でこれらの問題について述べる。

4.1.1.5.1 Car Side Impact

Car Side Impact 問題は、3 目的の最小化最適化問題である。各目的関数にはトレードオフの関係があり、10 個の制約条件と 7 つの設計変数を持つ問題である。Car Side Impact 問題は式 (4.1.13) で表される。

4.1.1.5.2 Welded Beam Design

Welded Beam Design 問題は、2 目的の最小化最適化問題である。各目的関数にはトレードオフの関係があり、4 個の制約条件と 4 つの設計変数を持つ問題である。Welded Beam Design 問題は式 (4.1.14) で表される。

$$\begin{aligned}
Min. \quad f_1(\mathbf{x}) &= 1.98 + 4.9x_1 + 6.67x_2 + 6.98x_3 + 4.01x_4 + 1.78x_5 \\
&\quad + 0.00001x_6 + 2.73x_7 \\
Min. \quad f_2(\mathbf{x}) &= F \\
Min. \quad f_3(\mathbf{x}) &= 0.5(V_{MBP} + V_{FD}) \\
const. \quad c_1(\mathbf{x}) &= 1.16 - 0.3717x_2x_4 - 0.0092928x_3 \leq 1 \\
c_2(\mathbf{x}) &= 0.261 - 0.0159x_1x_2 - 0.006486x_1 - 0.019x_2x_7 \\
&\quad + 0.0144x_3x_5 + 0.0154464x_6 \leq 0.32 \\
c_3(\mathbf{x}) &= 0.214 + 0.00817x_5 - 0.045195x_1 - 0.0135168x_1 \\
&\quad + 0.03099x_2x_6 - 0.018x_2x_7 + 0.007176x_3 + 0.023232x_3 \\
&\quad - 0.00364x_5x_6 - 0.018x_2^2 \leq 0.32 \\
c_4(\mathbf{x}) &= 0.74 - 0.61x_2 - 0.031296x_3 - 0.031872x_7 \\
&\quad + 0.227x_2^2 \leq 0.32 \\
c_5(\mathbf{x}) &= 28.98 + 3.818x_3 - 4.2x_1x_2 + 1.27296x_6 \\
&\quad - 2.68065x_7 \leq 32 \\
c_6(\mathbf{x}) &= 33.86 + 2.95x_3 - 5.057x_1x_2 - 3.795x_2 \\
&\quad - 3.4431x_7 + 1.45728 \leq 32 \\
c_7(\mathbf{x}) &= 44.36 - 9.9x_2 - 4.4505x_1 \leq 32 \\
c_8(\mathbf{x}) &\equiv F = 4.72 - 0.5x_4 - 0.19x_2x_3 \leq 4 \\
c_9(\mathbf{x}) &\equiv V_{MBP} = 10.58 - 0.674x_1x_2 - 0.067275x_2 \leq 9.9 \\
c_{10}(\mathbf{x}) &\equiv V_{FD} = 16.45 - 0.489x_3x_7 - 0.843x_5x_6 \leq 15.7 \\
where \quad &0.5 \leq x_1 \leq 1.5, 0.45 \leq x_2 \leq 1.35, 0.5 \leq x_3 \leq 1.5 \\
&0.5 \leq x_1 \leq 1.5, 0.875 \leq x_5 \leq 2.625, 0.4 \leq x_6 \leq 1.2, \\
&0.4 \leq x_7 \leq 1.2
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$\left. \begin{aligned}
Min. \quad f_1(\mathbf{x}) &= 1.10471h^2l + 0.04811tb(14.0 + l) \\
Min. \quad f_2(\mathbf{x}) &= \frac{2.1952}{t^3b} \\
const. \quad c_1(\mathbf{x}) &\equiv 13,600 - \tau(\mathbf{x}) \geq 0 \\
\quad c_2(\mathbf{x}) &\equiv 30,000 - \sigma(\mathbf{x}) \geq 0 \\
\quad c_3(\mathbf{x}) &\equiv b - h \geq 0 \\
\quad c_4(\mathbf{x}) &\equiv P_c(\mathbf{x}) - 6,000 \geq 0 \\
where \quad \tau(\mathbf{x}) &= \sqrt{(\tau') + (\tau'')^2 + (l\tau'\tau'')/\sqrt{0.25(l^2 + (h+t)^2)}} \\
\quad \tau' &= \frac{6,000}{\sqrt{2}hl} \\
\quad \tau'' &= \frac{6,000(14 + 0.5l)\sqrt{0.25(l^2 + (h+t)^2)}}{2\{0.707hl(l^2/12 + 0.25(h+t)^2)\}} \\
\quad \sigma(\mathbf{x}) &= \frac{504,000}{t^2b} \\
P_c(\mathbf{x}) &= 64,746.022(1 - 0.0282346t)tb^3 \\
\mathbf{x} &= (h, b, l, t) \\
&0.125 \leq h, b \leq 5.0, 0.1 \leq l, t \leq 10.0
\end{aligned} \right\} \quad (4.1.14)$$

4.1.1.6 Modified DTLZ 問題

Modified DTLZ 問題は Deb らが考案した DTLZ 問題を改変したものであり、3つの問題が提案されている。オリジナルの DTLZ 問題では上述の通り距離変数が 0.5 となった時に真のパレートフロントに到達する。しかし、これでは設計変数の小数点以下の桁数を小さくするほど、真の最適値に用意に収束してしまうと考えられる。Modified DTLZ 問題では、距離変数の最適値を無理数に変更することで、小数点以下の桁数を粗くしただけでは収束しづらい問題となっている。次節より Modified DTLZ2-4 について述べる。

4.1.1.6.1 Modified DTLZ2, 4

Modified DTLZ2, 4 は、DTLZ2, 4 の距離変数の最適値を 0.5 から無理数である 0.1π に変更したものである。DTLZ2, 4 では $g(\mathbf{x})$ は式 (4.1.15) で定義される。

$$g(\mathbf{x}_M) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.5)^2 \quad (4.1.15)$$

M は目的関数の数を、 \mathbf{x} は設計変数を示している。 \mathbf{x}_M は、設計変数の中でも距離変数と呼ばれる変数を表し、目的関数空間での真のパレートフロントまでの距離を決定する。DTLZ2 と DTLZ4 では、距離変数 \mathbf{x}_M がすべて 0.5 に収束したとき、真のパレートフロントに到達する。上述の通り、これでは設計変数の小数点以下の桁数を小さくするほど、真の最適値に用意に収束してしまうと考えられる。そこで、小数点以下の桁数を粗くしただけでは収束しづらいよう $g(\mathbf{x}_M)$ を式 (4.1.16) とし、距離変数 \mathbf{x}_M がすべて 0.1π という無理数に収束しなければ、パレートフロントに到達しないように改変されている。

$$g(\mathbf{x}_M) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.1\pi)^2 \quad (4.1.16)$$

4.1.1.6.2 Modified DTLZ3

Modified DTLZ3 は DTLZ3 の距離変数の最適値を 0.5 から無理数である 0.1π に変更したものである。Modified DTLZ2, 4 と同様に、式 (4.1.17) で定義される $g(\mathbf{x}_M)$ より、距離変数の最適値が 0.5 となっている。これを式 (4.1.18) に改変することで、距離変数の最適値を無理数に変更する。

$$g(\mathbf{x}_M) = 100[|\mathbf{x}_M| + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))] \quad (4.1.17)$$

$$g(\mathbf{x}_M) = 100[|\mathbf{x}_M| + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} (x_i - 0.1\pi)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.1\pi))] \quad (4.1.18)$$

4.1.2 計算条件

本実験では、RCGA における設計変数の離散化の影響を明らかにするために、代表的な RCGA である NSGA-II と MOEA/D を用いて評価を行う。表 4.1.5, 4.1.6 にはそれぞれ NSGA-II と MOEA/D で使用したパラメータをまとめた。また、集団サイズや世代数、目的関数の数、設計変数の数等は各ベンチマーク問題ごとに設定した。詳しくは次節以降で説明する。本研究では、設計変数の小数点以下の桁数を制御することで設計変数を離散化している。影響評価に用いる比較対象は小数点以下 2, 4, 6, 8, 16 桁で制御したものとする。また、NSGA-II, MOEA/D とともに交叉と突然変異の後に離散化制御を行うこととする。

表 4.1.6: 影響評価で用いる MOEA/D の共通

表 4.1.5: 影響評価で用いる NSGA-II の共通
パラメータ

parameter	value
Crossover rate	1.0
Mutation rate	$1/n$
η_c	30
η_m	20
Trial	10

n is the number of variables.

η_c and η_m are indices of simulated binary crossover and polynomial mutation respectively.

parameter	value
Crossover rate	1.0
Mutation rate	$1/n$
η_c	20
η_m	20
Neighborhood size	20
Decomposition Approach	Tchebycheff
Trial	10

n is the number of variables.

η_c and η_m are indices of simulated binary crossover and polynomial mutation respectively.

4.2 数値実験の結果と考察

4.2.1 NSGA-II の結果

表 4.2.1 は NSGA-II において、各ベンチマーク問題における各制御（小数点以下 2, 4, 6, 8, 16 桁）で得られた GD の平均値の推移を示している。多目的最適化では、最終世代

の結果だけではなく収束速度も重要であるため、GD の平均値は 10 世代目、最終世代の半分、最終世代での結果を示している。表中に示す Obj. は目的関数の数、Var. は設計変数の数、Gen は GD の平均値を求めた世代数を示している。また、各世代において最小値となっている値は太字で示した。

表 4.2.1 より、ほとんどの問題において桁数が小さいほど（粗く離散化するほど）最終的な GD は小さい値となっていることが分かる。GD は値が小さいほど解の収束性が良いことを表す指標であることから、桁数が小さいほど（粗く離散化するほど）、多くの問題でも解の収束性が向上する傾向があることが確認された。DTLZ 問題では、早い世代から小さい GD 値となっており、粗く離散化することで最終的な収束だけでなく収束速度が向上することが分かった。WFG2 や WFG4 は小さい桁数では収束性が向上していないことが分かる。これらの問題では、設計変数空間が大きいため、小数点以下の桁数を変えることが探索にあまり影響しないことが考えられる。

統計的な有意差があるか確認するため、有意水準 5% で Wilcoxon の順位和検定を用いて 2 桁の結果と 16 桁の結果の比較を行った。その結果、DTLZ2-4, UF9, CF2, CF7, C1DTLZ3, C2DTLZ2 convex, C3DTLZ1, Welded Beam Design 問題, Modified DTLZ2-4 で統計的な有意差が確認された。上述の WFG2 や WFG4 では有意差はなかったことから、粗く離散化することで、細かい粒度を用いた探索と比べ、同等かそれ以上の収束性能が得られることが、様々な特徴を持つベンチマーク問題からも確認された。

表 4.2.2 は NSGA-II において、各ベンチマーク問題における各制御（小数点以下 2, 4, 6, 8, 16 桁）で得られた IGD の平均値の推移を示している。表の見方は表 4.2.1 と同様である。表 4.2.2 より、DTLZ2, DTLZ3, UF, CDTLZ では桁数が小さいほど（粗く離散化するほど）IGD は小さくなっていることが分かる。IGD は値が小さいほど解の収束性・多様性が良いことを表す指標であることから、桁数が小さいほど（粗く離散化するほど）これらのベンチマーク問題では解の多様性も向上していることが分かる。しかしながら、DTLZ4 や Modified DTLZ4 では桁数が小さいほど悪い結果となっており、桁数が大きいものの方が良い結果となっている。これは先行研究でも触れたように、DTLZ4 の式の構造上、目的関数の位置を司る変数（位置変数）に高い精度がなければ解が多様に広がらないからである。したがって、問題によって多様性を維持するためには必要最低限の桁数が存在することが分かった。

表 4.2.1: 制御桁数の違いによる GD の平均値の推移 (NSGA-II)

problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen	2-digit	4-digit	6-digit	8-digit	16-digit
						GD	GD	GD	GD	GD
DTLZ2	100	100	3	38	10	1.647	1.756	1.766	1.759	1.759
					50	1.576×10^{-1}	2.247×10^{-1}	2.414×10^{-1}	2.595×10^{-1}	2.565×10^{-1}
					100	5.525×10^{-2}	1.576×10^{-1}	9.490×10^{-2}	1.003×10^{-1}	1.011×10^{-1}
DTLZ3	200	500	3	38	10	2.191×10^3	2.508×10^3	2.518×10^3	2.512×10^3	2.508×10^3
					100	9.935×10^1	2.230×10^2	2.878×10^2	3.154×10^2	4.039×10^2
					200	6.521	4.580×10	5.622×10	6.196×10	6.669×10
DTLZ4	100	300	3	38	10	8.213×10^{-1}	1.286	1.216	1.223	1.223
					50	1.910×10^{-2}	5.531×10^{-2}	6.576×10^{-2}	6.889×10^{-2}	7.147×10^{-2}
					100	1.101×10^{-2}	1.819×10^{-2}	2.320×10^{-2}	2.363×10^{-2}	2.522×10^{-2}
UF2	200	200	2	20	10	2.978×10^{-1}	3.106×10^{-1}	3.149×10^{-1}	3.001×10^{-1}	3.001×10^{-1}
					100	2.639×10^{-2}	2.312×10^{-2}	2.362×10^{-2}	2.451×10^{-2}	2.640×10^{-2}
					200	1.573×10^{-2}	1.349×10^{-2}	1.573×10^{-2}	1.532×10^{-2}	1.701×10^{-2}
UF9	300	200	3	20	10	3.063	3.048	2.695	2.684	2.684
					150	6.940×10^{-1}	5.745×10^{-1}	6.584×10^{-1}	6.003×10^{-1}	6.425×10^{-1}
					300	4.206×10^{-1}	4.518×10^{-1}	4.892×10^{-1}	4.470×10^{-1}	4.389×10^{-1}
WFG2	100	100	3	$(k=6)$ $(l=4)$	10	10	2.350×10^{-1}	2.428×10^{-1}	2.428×10^{-1}	2.428×10^{-1}
					50	6.324×10^{-2}	7.273×10^{-2}	6.490×10^{-2}	7.088×10^{-2}	7.141×10^{-2}
					100	4.277×10^{-2}	4.745×10^{-2}	4.516×10^{-2}	4.530×10^{-2}	4.220
WFG4	100	100	3	$(k=6)$ $(l=4)$	10	2.249×10^{-1}	2.178×10^{-1}	2.143×10^{-1}	2.134×10^{-1}	2.134×10^{-1}
					50	9.867×10^{-2}	9.530×10^{-2}	9.935×10^{-2}	9.563×10^{-2}	9.510×10^{-2}
					100	6.772×10^{-2}	6.628×10^{-2}	6.678×10^{-2}	6.619	6.654×10^{-2}
WFG6	100	100	3	$(k=6)$ $(l=4)$	10	3.896×10^{-1}	3.611×10^{-1}	3.592×10^{-1}	3.560	3.560×10^{-1}
					50	1.545×10^{-1}	1.432×10^{-1}	1.590×10^{-1}	1.653×10^{-1}	1.653×10^{-1}
					100	1.201×10^{-1}	1.114	1.276×10^{-1}	1.215×10^{-1}	1.215×10^{-1}
WFG7	100	100	3	$(k=6)$ $(l=4)$	10	3.525×10^{-1}	3.506	3.553×10^{-1}	3.602×10^{-1}	3.602×10^{-1}
					50	1.226×10^{-1}	1.086×10^{-1}	9.925	1.061×10^{-1}	1.061×10^{-1}
					100	7.178×10^{-2}	5.886	6.009×10^{-2}	6.561×10^{-2}	6.517×10^{-2}
CF2	200	300	2	20	10	8.459×10^{-1}	9.424×10^{-1}	9.266×10^{-1}	9.583×10^{-1}	9.583×10^{-1}
					100	2.069×10^{-1}	2.539×10^{-1}	2.729×10^{-1}	2.795×10^{-1}	2.851×10^{-1}
					200	1.694×10^{-1}	1.500	1.987×10^{-1}	2.051×10^{-1}	1.964×10^{-1}
CF7	200	300	2	20	10	2.584×10	2.605×10	2.359	2.679×10	2.721×10
					100	1.044	1.329	1.242	2.232	1.792
					200	7.834	4.992×10^{-1}	4.602×10^{-1}	7.675×10^{-1}	6.057×10^{-1}
C1DTLZ3	300	100	3	38	10	2.661×10^3	2.829×10^3	2.845×10^3	2.871×10^3	2.871×10^3
					150	1.051×10^2	2.214×10^2	2.601×10^2	3.168×10^2	3.267×10^2
					300	4.986	1.012×10^2	1.043×10^2	1.297×10^2	1.243×10^2
C2DTLZ2 convex	300	100	3	38	10	4.041×10	5.867×10	7.045×10	7.017×10	7.017×10
					150	1.091×10^{-1}	1.299×10^{-1}	1.160×10^{-1}	1.191×10^{-1}	1.114×10^{-1}
					300	9.363×10^{-2}	9.723×10^{-2}	9.941×10^{-2}	9.688×10^{-2}	9.450×10^{-2}
C3DTLZ1	300	100	3	38	10	1.163×10^3	1.166×10^3	1.152	1.152	1.152
					150	2.497×10^2	2.797×10^2	3.001×10^2	4.157×10^2	3.801×10^2
					300	1.721×10^2	2.002×10^2	2.144×10^2	2.304×10^2	2.587×10^2
Car Side Impact	300	500	3	7	10	7.528×10^{-2}	7.492×10^{-2}	7.618×10^{-2}	7.269×10^{-2}	6.863
					150	2.753×10^{-2}	3.066×10^{-2}	3.167×10^{-2}	3.173×10^{-2}	3.003×10^{-2}
					300	2.602×10^{-2}	2.720×10^{-2}	2.970×10^{-2}	2.826×10^{-2}	2.881×10^{-2}
Welded Beam Design	100	300	2	4	10	3.464	2.419	6.726	6.814	6.814
					50	9.010×10^{-3}	7.034×10^{-2}	3.768×10^{-2}	4.927×10^{-2}	4.497×10^{-2}
					100	5.477×10^{-3}	1.042×10^{-2}	1.079×10^{-2}	1.508×10^{-2}	9.129×10^{-3}
Modified DTLZ2	100	100	3	38	10	1.835	2.211	2.310	2.324	2.324
					50	1.634×10^{-1}	2.465×10^{-1}	2.927×10^{-1}	2.710×10^{-1}	2.324×10^{-1}
					100	5.557×10^{-2}	9.940×10^{-2}	1.169×10^{-1}	1.009×10^{-1}	1.107×10^{-1}
Modified DTLZ3	200	500	3	38	10	2.216×10^3	2.575×10^3	2.621×10^3	2.622×10^3	2.628×10^3
					100	2.152×10^2	2.220×10^2	2.799×10^2	2.947×10^2	3.739×10^2
					200	1.357×10^2	4.073	6.084×10	6.015×10	7.365×10
Modified DTLZ4	100	300	3	38	10	1.042	1.653	1.855	1.715	1.715
					50	2.788×10^{-2}	8.039×10^{-2}	9.914×10^{-2}	9.993×10^{-2}	1.000×10^{-1}
					100	9.004×10^{-3}	2.700×10^{-2}	3.523×10^{-2}	3.514×10^{-2}	3.500×10^{-2}

MG is the number of generation sets; PS is the number of population size sets.

Obj. is the number of objectives; Var. is the number of variables.

Gen indicates the generation on which the results were computed.

k is the position parameter in WFG problems; l is the distance parameter in WFG problems.

表 4.2.2: 制御桁数の違いによる IGD の平均値の推移 (NSGA-II)

problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen	2-digit	4-digit	6-digit	8-digit	16-digit
						IGD	IGD	IGD	IGD	IGD
DTLZ2	100	100	3	38	10	1.261	1.269	1.278	1.264	1.264
					50	1.469 $\times 10^{-1}$	1.662×10^{-1}	1.753×10^{-1}	1.782×10^{-1}	1.782×10^{-1}
					100	5.433 $\times 10^{-2}$	6.017×10^{-2}	6.096×10^{-2}	6.453×10^{-2}	6.213×10^{-2}
DTLZ3	200	500	3	38	10	1.657 $\times 10^3$	1.694×10^3	1.685×10^3	1.647×10^3	1.666×10^3
					100	6.871 $\times 10$	1.545×10^2	1.921×10^2	2.001×10^2	2.195×10^2
					200	5.059	3.451×10	4.000×10	4.369×10	4.607×10
DTLZ4	100	300	3	38	10	1.174	1.257	1.241	1.236	1.236
					50	6.164×10^{-1}	3.498×10^{-1}	3.195 $\times 10^{-1}$	3.503×10^{-1}	3.517×10^{-1}
					100	5.803×10^{-1}	2.773×10^{-1}	2.794×10^{-1}	2.507 $\times 10^{-1}$	2.507 $\times 10^{-1}$
UF2	200	200	2	20	10	2.131×10^{-1}	2.125 $\times 10^{-1}$	2.256×10^{-1}	2.283×10^{-1}	2.283×10^{-1}
					100	4.521 $\times 10^{-2}$	4.646×10^{-2}	5.174×10^{-2}	5.228×10^{-2}	5.312×10^{-2}
					200	4.147×10^{-2}	3.917 $\times 10^{-2}$	4.591×10^{-2}	4.411×10^{-2}	4.534×10^{-2}
UF9	300	200	3	20	10	1.161	1.183	1.069	1.102	1.102
					150	3.057×10^{-1}	2.840 $\times 10^{-1}$	3.077×10^{-1}	3.169×10^{-1}	3.145×10^{-1}
					300	2.272 $\times 10^{-1}$	2.235×10^{-1}	2.487×10^{-1}	2.543×10^{-1}	2.537×10^{-1}
WFG2	100	100	3	10	10	4.981×10^{-1}	4.963 $\times 10^{-1}$	4.964×10^{-1}	4.964×10^{-1}	4.964×10^{-1}
				$(k=6)$	50	3.452×10^{-1}	3.462×10^{-1}	3.307×10^{-1}	3.087×10^{-1}	3.072 $\times 10^{-1}$
				$(l=4)$	100	3.008×10^{-1}	2.945×10^{-1}	3.185×10^{-1}	2.699 $\times 10^{-1}$	2.713×10^{-1}
WFG4	100	100	3	10	10	4.941×10^{-1}	4.402 $\times 10^{-1}$	4.466×10^{-1}	4.638×10^{-1}	4.638×10^{-1}
				$(k=6)$	50	1.520×10^{-1}	1.477×10^{-1}	1.546×10^{-1}	1.465×10^{-1}	1.439 $\times 10^{-1}$
				$(l=4)$	100	1.003×10^{-1}	9.719×10^{-2}	1.016×10^{-1}	9.837×10^{-2}	9.700 $\times 10^{-2}$
WFG6	100	100	3	10	10	4.857×10^{-1}	4.829×10^{-1}	4.589×10^{-1}	4.538 $\times 10^{-1}$	4.538 $\times 10^{-1}$
				$(k=6)$	50	1.834×10^{-1}	1.690 $\times 10^{-1}$	1.810×10^{-1}	1.846×10^{-1}	1.846×10^{-1}
				$(l=4)$	100	1.345×10^{-1}	1.247 $\times 10^{-1}$	1.346×10^{-1}	1.359×10^{-1}	1.359×10^{-1}
WFG7	100	100	3	10	10	5.090×10^{-1}	5.143×10^{-1}	5.014×10^{-1}	4.986 $\times 10^{-1}$	4.986 $\times 10^{-1}$
				$(k=6)$	50	2.361×10^{-1}	2.246 $\times 10^{-1}$	2.375×10^{-1}	2.345×10^{-1}	2.345×10^{-1}
				$(l=4)$	100	1.779×10^{-1}	1.701×10^{-1}	1.722×10^{-1}	1.658 $\times 10^{-1}$	1.664×10^{-1}
CF2	200	300	2	20	10	4.487×10^{-1}	4.484 $\times 10^{-1}$	4.807×10^{-1}	4.719×10^{-1}	4.715×10^{-1}
					100	1.074×10^{-1}	9.756 $\times 10^{-2}$	9.820×10^{-2}	1.023×10^{-1}	1.015×10^{-1}
					200	1.073×10^{-1}	9.058×10^{-2}	9.864×10^{-2}	9.672×10^{-2}	8.944 $\times 10^{-2}$
CF7	200	300	2	20	10	1.747×10	1.751×10	1.720 $\times 10$	1.742×10	1.765×10
					100	4.949 $\times 10^{-1}$	5.319×10^{-1}	4.949 $\times 10^{-1}$	6.665×10^{-1}	7.408×10^{-1}
					200	5.217×10^{-1}	3.410×10^{-1}	3.300×10^{-1}	3.072×10^{-1}	2.853 $\times 10^{-1}$
C1DTLZ3	300	100	3	38	10	1.964 $\times 10^3$	2.052×10^3	1.940 $\times 10^3$	1.950×10^3	1.950×10^3
					150	9.702 $\times 10$	1.660×10^2	1.783×10^2	2.002×10^2	1.956×10^2
					300	4.338 $\times 10$	7.928×10	7.859×10	9.252×10	8.024×10
C2DTLZ2 convex	300	100	3	38	10	3.799	4.373	4.221	4.338	4.338
					150	7.416 $\times 10^{-2}$	8.165×10^{-2}	7.831×10^{-2}	7.594×10^{-2}	7.828×10^{-2}
					300	7.111 $\times 10^{-2}$	7.861×10^{-2}	7.477×10^{-2}	7.388×10^{-2}	7.260×10^{-2}
C3DTLZ1	300	100	3	38	10	7.123×10^2	6.939×10^2	6.765 $\times 10^2$	6.938×10^3	6.938×10^3
					150	5.704 $\times 10$	7.554×10	8.131×10	9.100×10	8.776×10^2
					300	1.921 $\times 10$	2.938×10	3.119×10	3.399×10	3.508×10
Car Side Impact	300	500	3	7	10	2.222×10^{-1}	1.836×10^{-1}	1.861×10^{-1}	2.025×10^{-1}	1.824 $\times 10^{-1}$
					150	2.896×10^{-2}	2.954×10^{-2}	2.934×10^{-2}	2.926×10^{-2}	2.879 $\times 10^{-2}$
					300	2.289×10^{-2}	2.261×10^{-2}	2.230×10^{-2}	2.229×10^{-2}	2.258 $\times 10^{-2}$
Welded Beam Design	100	300	2	4	10	5.178×10^{-1}	5.587×10^{-1}	4.882 $\times 10^{-1}$	4.921×10^{-1}	4.921×10^{-1}
					50	1.293×10^{-1}	1.125×10^{-1}	8.578×10^{-2}	7.545×10^{-2}	6.772 $\times 10^{-2}$
					100	8.759×10^{-2}	8.895×10^{-2}	6.389×10^{-2}	5.933×10^{-2}	4.848 $\times 10^{-2}$
Modified DTLZ2	100	100	3	38	10	1.384	1.470	1.486	1.501	1.501
					50	1.530 $\times 10^{-1}$	1.843×10^{-1}	1.964×10^{-1}	1.913×10^{-1}	1.944×10^{-1}
					100	5.843 $\times 10^{-2}$	6.285×10^{-2}	6.264×10^{-2}	6.100×10^{-2}	6.526×10^{-2}
Modified DTLZ3	200	500	3	38	10	1.663 $\times 10^3$	1.684×10^3	1.742×10^3	1.751×10^3	1.757×10^3
					100	1.898×10^2	1.540 $\times 10^2$	1.866×10^2	1.881×10^2	2.152×10^2
					200	1.309×10^2	3.153 $\times 10$	4.194×10	4.285×10	4.999×10
Modified DTLZ4	100	300	3	38	10	1.291	1.308	1.309	1.340	1.340
					50	3.655×10^{-1}	1.384×10^{-1}	8.890×10^{-2}	8.716 $\times 10^{-2}$	8.858×10^{-2}
					100	3.599×10^{-1}	9.211×10^{-2}	3.180×10^{-2}	3.120 $\times 10^{-2}$	3.138×10^{-2}

MG is the number of generation sets; PS is the number of population size sets.

Obj. is the number of objectives; Var. is the number of variables.

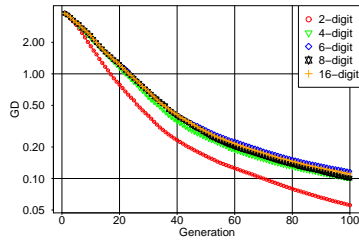
Gen indicates the generation on which the results were computed.

k is the position parameter in WFG problems; l is the distance parameter in WFG problems.

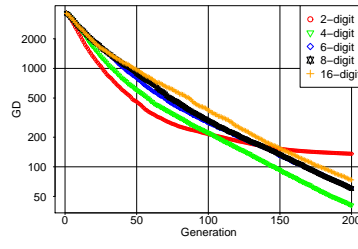
次に、特徴的な結果が見られた Modified DTLZ2-4 の結果を詳しく見る。図 4.2.1 は Modified DTLZ2-4 の GD の世代ごとの推移を示している。図 4.2.1 より、Modified DTLZ2, 4 では小さい桁数ほど（粗く離散化するほど）収束速度が向上し、最終的にも良い収束性を示すことが分かる。しかし、Modified DTLZ3 では、2 桁の結果が 75 世代目以降に悪化し、最も悪い結果となることが分かる。Modified DTLZ は目的関数空間上の距離を司る変数（距離変数）が無理数である 0.1π に収束した時に真のパレートフロントに到達する。そのため、2 桁の場合、他の桁数に比べ最適値に近い値を取ることができない。また、Modified DTLZ3 は距離変数の非線形性が強い問題であり、最適値からのズレが大きく解に影響する。したがって、Modified DTLZ3 では 2 桁が最も悪い結果となったと考えられる。しかしながら、75 世代目までは良い結果となっていることから、粗く離散化することで解の収束性を高める効果はあることが確認できる。

図 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5 はそれぞれ 2 桁と 16 桁を用いた場合に得られた非劣解集合を示している。図 4.2.3 より、Modified DTLZ2 においては、2 桁と 16 桁で得られた非劣解集合には大きな差は見られなかった。一方で図 4.2.4 を見ると、2 桁の結果は半球状の非劣解集合が得られているが、16 桁に比べ最適化方向である原点方向に進化が進んでいないことが分かる。上述のように、Modified DTLZ3 は無理数を最適値として取るため、設計変数に細かい粒度が必要とされる。そのため、2 桁では最適値に到達することができない。その結果、収束性が悪化し、図 4.2.4(a) のように、2 桁を用いた探索では収束しきってしまったことが考えられる。図 4.2.5 より、Modified DTLZ4 においては、16 桁は紫で示した真のパレートフロントを覆うように非劣解が得られているが、2 桁では局所的にしか得られていないことが分かる。先行研究の DTLZ4 と同様に、2 桁では多様性を維持するための必要最低限な設計変数の粒度を満たしておらず、解の多様性が悪化してしまったことが考えられる。

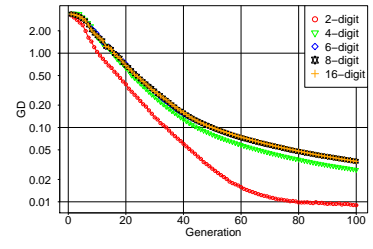
以上より、NSGA-II において、19 の様々な特徴を持つベンチマーク問題を用いて設計変数の離散化の影響を幅広く評価した結果、先行研究と同様に粗く離散化することで解の収束性が向上する傾向が確認された。また、粗く離散化しすぎると問題によっては、解の収束性や多様性が失われてしまう可能性があることが分かった。したがって、NSGA-II においては、問題ごとに各設計変数を適切に離散化することで、解の多様性を維持しながらも、収束性を高めることができる可能性があることが分かった。



(a) Modified DTLZ2

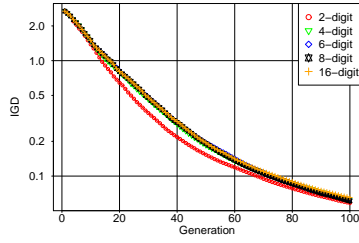


(b) Modified DTLZ3

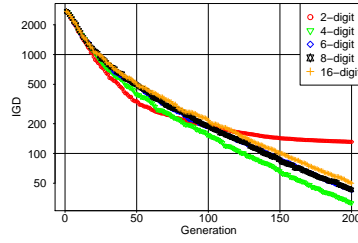


(c) Modified DTLZ4

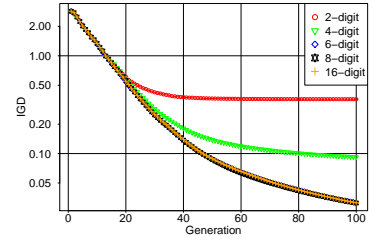
図 4.2.1: Modified DTLZ2-4 における GD の推移 (NSGA-II)



(a) Modified DTLZ2

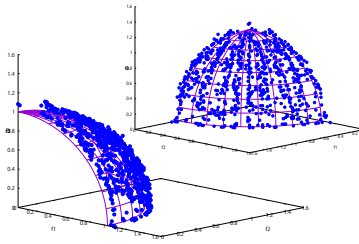


(b) Modified DTLZ3

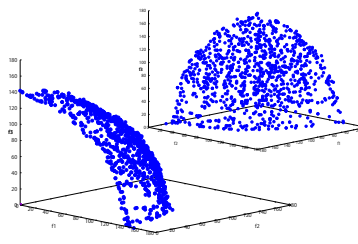


(c) Modified DTLZ4

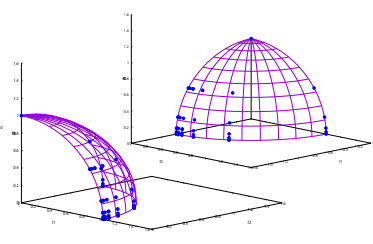
図 4.2.2: Modified DTLZ2-4 における IGD の推移 (NSGA-II)



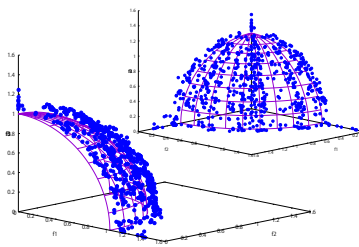
(a) 2 桁



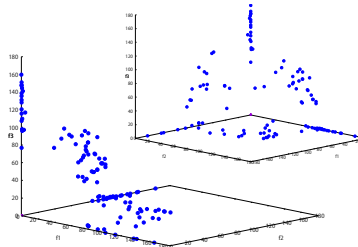
(a) 2 桁



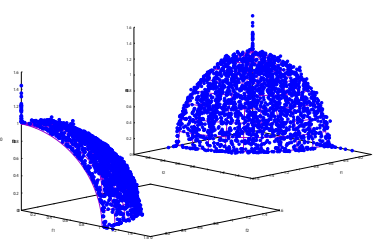
(a) 2 桁



(b) 16 桁



(b) 16 桁



(b) 16 桁

図 4.2.3: Modified DTLZ2 における非劣解の分布 (NSGA-II)

図 4.2.4: Modified DTLZ3 における非劣解の分布 (NSGA-II)

図 4.2.5: Modified DTLZ4 における非劣解の分布 (NSGA-II)

4.2.2 MOEA/D

表 4.2.3 は MOEA/D において、各ベンチマーク問題における各制御（小数点以下 2, 4, 6, 8, 16 桁）で得られた GD の平均値の推移を示している。多目的最適化では、最終世代の結果だけではなく収束速度も重要であるため、GD の平均値は 10 世代目、最終世代の半分、最終世代での結果を示している。表中に示す Obj. は目的関数の数、Var. は設計変数の数、Gen は GD の平均値を求めた世代数を示している。また、各世代において最小値となっている値は太字で示した。

表 4.2.3 より、最終的な GD の値を見ると大半の問題は小さい桁数のものの方が小さい値となっている。また DTLZ 問題, WFG4, CDTLZ 問題, Welded Beam Design 問題, Modified DTLZ2, 4 においては最終的な値だけでなく進化の序盤から GD 値が低く、収束速度が向上していることが分かる。しかしながら、Modified DTLZ3 では 2 桁が最も悪い結果となっている。これは Modified DTLZ3 の最適値が無理数であるために、設計変数の粒度が粗過ぎると最適値に近い値を取ることができないためである。WFG6 や WFG7 でも 2 桁が最も悪い結果となっており、同様の原因が考えられる。

以上の結果から、MOEA/D においても、粗い離散化を施すことで解の収束性が向上する傾向があるものの、問題によっては粗く離散化しすぎると最適値に到達することができず反って収束性が悪化してしまう可能性もあることが分かった。

統計的な有意差があるか確認するため、有意水準 5% で Wilcoxon の順位和検定を用いて 2 桁の結果と 16 桁の結果の比較を行った。その結果、DTLZ2-4, UF9, WFG2, WFG7, CF2, C1DTLZ3, C3DTLZ1, Welded Beam Design 問題, Modified DTLZ2-4 で統計的な有意差が確認された。

表 4.2.4 は MOEA/D において、各ベンチマーク問題における各制御（小数点以下 2, 4, 6, 8, 16 桁）で得られた IGD の平均値の推移を示している。表の見方は表 4.2.3 と同様である。表 4.2.2 より、DTLZ3, DTLZ4, C1DTLZ3, C3DTLZ1, Welded Beam Design 問題, Modified DTLZ2 においては世代を通して優れた IGD 値となっていることが分かる。DTLZ4 では、NSGA-II の IGD の結果では最低だった 2 桁の結果が最も良い結果となった。これは 2 桁では安定的に小さい IGD が得られているが、他の制御では試行ごとのばらつきが大きく平均値が上昇してしまったものと考えられる。そのため、最良値で比較した場合は 2 桁が最も悪い結果となっている。WFG 問題では、どの問題でも最終的な IGD 値は悪い結

表 4.2.3: 制御桁数の違いによる GD の平均値の推移 (MOEA/D)

problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen	2-digit GD	4-digit GD	6-digit GD	8-digit GD	16-digit GD
DTLZ2	100	91	3	38	10	1.195	1.358	1.326	1.400	1.388
					50	6.997×10^{-2}	9.901×10^{-2}	1.098×10^{-1}	1.054×10^{-1}	1.066×10^{-1}
					100	2.508×10^{-2}	3.104×10^{-2}	3.767×10^{-2}	3.482×10^{-2}	3.482×10^{-2}
DTLZ3	200	91	3	38	10	2.125×10^3	2.118×10^3	2.148×10^3	2.119×10^3	2.143×10^3
					100	1.664×10^2	2.233×10^2	2.428×10^2	2.246×10^2	2.381×10^2
					200	1.012×10^2	1.356×10^2	1.555×10^2	1.432×10^2	1.455×10^2
DTLZ4	100	91	3	38	10	6.984×10^{-1}	7.310×10^{-1}	7.218×10^{-1}	7.110×10^{-1}	7.064×10^{-1}
					50	1.502×10^{-2}	2.781×10^{-2}	2.893×10^{-2}	3.404×10^{-2}	2.924×10^{-2}
					100	6.960×10^{-4}	4.349×10^{-3}	4.382×10^{-3}	5.825×10^{-3}	4.262×10^{-3}
UF2	100	100	2	20	10	2.280×10^{-1}	2.295×10^{-1}	2.224×10^{-1}	2.210×10^{-1}	2.215×10^{-1}
					50	3.138×10^{-2}	2.767×10^{-2}	3.275×10^{-2}	2.363×10^{-2}	3.230×10^{-2}
					100	1.341×10^{-2}	1.197×10^{-2}	1.099×10^{-2}	1.246×10^{-2}	1.212×10^{-2}
UF9	100	91	3	20	10	1.687	1.891	1.618	1.654	1.624
					50	1.789×10^{-1}	2.369×10^{-1}	2.549×10^{-1}	1.926×10^{-1}	2.607×10^{-1}
					100	1.360×10^{-1}	1.066×10^{-1}	1.280×10^{-1}	1.368×10^{-1}	1.454×10^{-1}
WFG2	100	91	3	10	10	2.393×10^{-1}	2.292×10^{-1}	2.457×10^{-1}	2.454×10^{-1}	2.351×10^{-1}
				($k=6$)	50	7.035×10^{-2}	5.726×10^{-2}	5.670×10^{-2}	6.061×10^{-2}	5.483×10^{-2}
				($l=4$)	100	4.472×10^{-2}	3.792×10^{-2}	3.892×10^{-2}	4.092×10^{-2}	3.763×10^{-2}
WFG4	100	91	3	10	10	2.164×10^{-1}	2.583×10^{-1}	2.551×10^{-1}	2.513×10^{-1}	2.562×10^{-1}
				($k=6$)	50	8.391×10^{-2}	9.509×10^{-2}	8.883×10^{-2}	9.053×10^{-2}	9.048×10^{-2}
				($l=4$)	100	6.251×10^{-2}	6.751×10^{-2}	6.272×10^{-2}	6.598×10^{-2}	6.549×10^{-2}
WFG6	100	91	3	10	10	3.334×10^{-1}	3.534×10^{-1}	3.756×10^{-1}	3.799×10^{-1}	3.782×10^{-1}
				($k=6$)	50	1.345×10^{-1}	1.217×10^{-1}	1.060×10^{-1}	1.119×10^{-1}	1.300×10^{-1}
				($l=4$)	100	1.103×10^{-1}	9.912×10^{-2}	8.314×10^{-2}	8.683×10^{-2}	1.012×10^{-1}
WFG7	100	91	3	10	10	4.227×10^{-1}	4.312×10^{-1}	4.151×10^{-1}	4.140×10^{-1}	4.119×10^{-1}
				($k=6$)	50	1.362×10^{-1}	1.265×10^{-1}	1.065×10^{-1}	1.215×10^{-1}	1.126×10^{-1}
				($l=4$)	100	9.753×10^{-2}	7.751×10^{-2}	6.994×10^{-2}	7.648×10^{-2}	7.060×10^{-2}
CF2	100	100	2	20	10	5.488×10^{-1}	6.057×10^{-1}	5.972×10^{-1}	5.807×10^{-1}	6.217×10^{-1}
					50	1.176×10^{-1}	1.064×10^{-1}	1.830×10^{-1}	1.447×10^{-1}	7.748×10^{-2}
					100	9.811×10^{-2}	7.392×10^{-2}	1.020×10^{-1}	6.613×10^{-2}	5.864×10^{-2}
CF7	100	100	2	20	10	2.156×10	2.029×10	1.901×10	2.256×10	2.089×10
					50	2.749	2.486	2.679	2.527	2.044
					100	1.931×10^{-1}	1.563×10^{-1}	3.271×10^{-1}	3.148×10^{-1}	2.431×10^{-1}
C1DTLZ3	200	91	3	38	10	2.125×10^3	2.118×10^3	2.148×10^3	2.119×10^3	2.143×10^3
					100	1.664×10^2	2.233×10^2	2.428×10^2	2.246×10^2	2.381×10^2
					200	1.012×10^2	1.356×10^2	1.555×10^2	1.432×10^2	1.455×10^2
C2DTLZ2 convex	100	91	3	38	10	6.438×10	6.440×10	6.451×10	5.44×10	6.129×10
					50	4.790	3.220	1.547	7.477×10^{-1}	3.333
					100	2.421×10^{-1}	5.173×10^{-1}	3.017×10^{-1}	3.386×10^{-1}	3.588×10^{-1}
C3DTLZ1	200	91	3	38	10	2.259×10^3	2.339×10^3	2.339×10^3	2.208×10^3	2.249×10^3
					100	2.096×10^2	6.017×10^2	5.565×10^2	7.031×10^2	6.540×10^2
					200	1.935×10^2	7.152×10^2	5.571×10^2	7.213×10^2	6.870×10^2
Car Side Impact	100	91	3	7	10	1.671×10^{-1}	1.764×10^{-1}	1.965×10^{-1}	1.859×10^{-1}	1.729×10^{-1}
					50	1.000×10^{-1}	1.010×10^{-1}	1.117×10^{-1}	1.160×10^{-1}	1.001×10^{-1}
					100	8.003×10^{-2}	8.074×10^{-2}	8.465×10^{-2}	8.838×10^{-2}	7.410×10^{-2}
Welded Beam Design	100	100	2	4	10	3.694	4.989	4.504	4.694	4.714
					50	1.434	2.848	2.403	2.673	2.542
					100	4.077×10^{-1}	2.173	1.806	1.574	1.342
Modified DTLZ2	100	91	3	38	10	1.101	1.242	1.182	1.255	1.276
					50	5.043×10^{-2}	7.508×10^{-2}	8.641×10^{-2}	9.118×10^{-2}	8.34×10^{-2}
					100	8.224×10^{-3}	1.248×10^{-2}	1.577×10^{-2}	1.580×10^{-2}	1.558×10^{-2}
Modified DTLZ3	200	91	3	38	10	2.261×10^3	2.224×10^3	2.242×10^3	2.263×10^3	2.236×10^3
					100	3.035×10^2	2.434×10^2	2.209×10^2	2.392×10^2	2.729×10^2
					200	2.160×10^2	1.425×10^2	1.330×10^2	1.553×10^2	1.791×10^2
Modified DTLZ4	100	91	3	38	10	8.134×10^{-1}	8.361×10^{-1}	8.233×10^{-1}	8.091×10^{-1}	8.312×10^{-1}
					50	1.514×10^{-2}	2.503×10^{-2}	3.847×10^{-2}	3.459×10^{-2}	3.297×10^{-2}
					100	8.782×10^{-4}	4.253×10^{-3}	6.094×10^{-3}	5.846×10^{-3}	6.012×10^{-3}

MG = the number of generation set; PS = the number of population size set.

Obj. = the number of objectives; Var. = the number of variables.

Gen = the generation that results were computed on.

k = position parameter in WFG problems; l = distance parameter in WFG problems.

表 4.2.4: 制御桁数の違いによる IGD の平均値の推移 (MOEA/D)

problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen	2-digit	4-digit	6-digit	8-digit	16-digit
						IGD	IGD	IGD	IGD	IGD
DTLZ2	100	91	3	38	10	9.228 $\times 10^{-1}$	9.313×10^{-1}	9.680×10^{-1}	9.856×10^{-1}	9.716×10^{-1}
					50	1.181 $\times 10^{-1}$	1.368×10^{-1}	1.347×10^{-1}	1.322×10^{-1}	1.435×10^{-1}
					100	7.419×10^{-2}	7.524×10^{-2}	7.300 $\times 10^{-2}$	7.600×10^{-2}	7.470×10^{-2}
DTLZ3	200	91	3	38	10	1.591×10^3	1.437 $\times 10^3$	1.533×10^3	1.487×10^3	1.540×10^3
					100	1.586 $\times 10^2$	2.021×10^2	2.156×10^2	1.992×10^2	2.070×10^2
					200	9.52 $\times 10$	1.283×10^2	1.448×10^2	1.335×10^2	1.363×10^2
DTLZ4	100	91	3	38	10	1.047	1.027	1.157	1.152	1.153
					50	5.469 $\times 10^{-1}$	5.673×10^{-1}	6.926×10^{-1}	5.818×10^{-1}	6.685×10^{-1}
					100	5.03 $\times 10^{-1}$	5.145×10^{-1}	6.759×10^{-1}	5.499×10^{-1}	6.174×10^{-1}
UF2	100	100	2	20	10	2.079 $\times 10^{-1}$	2.231×10^{-1}	2.182×10^{-1}	2.163×10^{-1}	2.159×10^{-1}
					50	1.449×10^{-1}	1.401×10^{-1}	1.235 $\times 10^{-1}$	1.282×10^{-1}	1.252×10^{-1}
					100	1.228×10^{-1}	1.386×10^{-1}	1.121 $\times 10^{-1}$	1.209×10^{-1}	1.153×10^{-1}
UF9	100	91	3	20	10	8.739×10^{-1}	1.023	9.048×10^{-1}	8.810×10^{-1}	8.336 $\times 10^{-1}$
					50	5.032×10^{-1}	4.604 $\times 10^{-1}$	4.815×10^{-1}	4.887×10^{-1}	4.675×10^{-1}
					100	4.703×10^{-1}	4.010 $\times 10^{-1}$	4.101×10^{-1}	4.422×10^{-1}	4.109×10^{-1}
WFG2	100	91	3	10	5.545×10^{-1}	5.455 $\times 10^{-1}$	5.716×10^{-1}	5.771×10^{-1}	5.751×10^{-1}	
				($k=6$) 50	4.03×10^{-1}	3.701 $\times 10^{-1}$	3.818×10^{-1}	3.760×10^{-1}	3.938×10^{-1}	
				($l=4$) 100	4.028×10^{-1}	3.395×10^{-1}	3.529×10^{-1}	3.473 $\times 10^{-1}$	3.631×10^{-1}	
WFG4	100	91	3	10	3.700 $\times 10^{-1}$	4.31×10^{-1}	4.34×10^{-1}	4.245×10^{-1}	4.174×10^{-1}	
				($k=6$) 50	2.313×10^{-1}	2.313×10^{-1}	2.248 $\times 10^{-1}$	2.292×10^{-1}	2.301×10^{-1}	
				($l=4$) 100	2.274×10^{-1}	2.276×10^{-1}	2.203 $\times 10^{-1}$	2.260×10^{-1}	2.298×10^{-1}	
WFG6	100	91	3	10	6.306 $\times 10^{-1}$	6.710×10^{-1}	6.806×10^{-1}	6.931×10^{-1}	6.755×10^{-1}	
				($k=6$) 50	3.142×10^{-1}	2.899×10^{-1}	2.824×10^{-1}	2.813 $\times 10^{-1}$	2.960×10^{-1}	
				($l=4$) 100	2.944×10^{-1}	2.686×10^{-1}	2.618×10^{-1}	2.553 $\times 10^{-1}$	2.682×10^{-1}	
WFG7	100	91	3	10	5.156 $\times 10^{-1}$	5.401×10^{-1}	5.324×10^{-1}	5.329×10^{-1}	5.335×10^{-1}	
				($k=6$) 50	3.200×10^{-1}	3.180×10^{-1}	3.223×10^{-1}	3.275×10^{-1}	3.155 $\times 10^{-1}$	
				($l=4$) 100	3.092×10^{-1}	3.080×10^{-1}	3.061×10^{-1}	3.083×10^{-1}	3.058 $\times 10^{-1}$	
CF2	100	100	2	10	4.530×10^{-1}	4.786×10^{-1}	4.468×10^{-1}	4.451 $\times 10^{-1}$	4.526×10^{-1}	
				50	1.849×10^{-1}	1.661×10^{-1}	1.669×10^{-1}	1.618 $\times 10^{-1}$	1.797×10^{-1}	
				100	1.628×10^{-1}	1.616×10^{-1}	1.650×10^{-1}	1.573 $\times 10^{-1}$	1.777×10^{-1}	
CF7	100	100	2	10	1.580 $\times 10$	1.725×10	1.584×10	1.639×10	1.635×10	
				50	2.111	2.037	2.222	1.994	1.733	
				100	5.142×10^{-1}	4.444 $\times 10^{-1}$	5.091×10^{-1}	5.527×10^{-1}	5.620×10^{-1}	
C1DTLZ3	200	91	3	10	1.591×10^3	1.437 $\times 10^3$	1.533×10^3	1.487×10^3	1.540×10^3	
				100	1.586 $\times 10^2$	2.021×10^2	2.156×10^2	1.992×10^2	2.070×10^2	
				200	9.52 $\times 10$	1.283×10^2	1.448×10^2	1.335×10^2	1.363×10^2	
C2DTLZ2 convex	100	91	3	10	1.257	1.412	1.408	1.278	1.382	
				50	1.413×10^{-1}	1.359 $\times 10^{-1}$	1.442×10^{-1}	1.505×10^{-1}	1.461×10^{-1}	
				100	1.178×10^{-1}	1.168×10^{-1}	1.146 $\times 10^{-1}$	1.198×10^{-1}	1.197×10^{-1}	
C3DTLZ1	200	91	3	10	1.525×10^3	1.425 $\times 10^3$	1.483×10^3	1.485×10^3	1.549×10^3	
				100	1.650 $\times 10^2$	2.149×10^2	2.237×10^2	2.104×10^2	2.420×10^2	
				200	9.670 $\times 10$	1.477×10^2	1.468×10^2	1.457×10^2	1.635×10^2	
Car Side Impact	100	91	3	10	1.46	1.435	1.336	1.379	1.46	
				50	6.464×10^{-1}	5.599 $\times 10^{-1}$	6.409×10^{-1}	6.622×10^{-1}	5.899×10^{-1}	
				100	4.407×10^{-1}	3.492×10^{-1}	3.753×10^{-1}	3.965×10^{-1}	3.389 $\times 10^{-1}$	
Welded Beam Design	100	100	2	10	1.722	2.040	2.033	2.051	1.914	
				50	1.667	2.000	1.823	1.976	1.928	
				100	1.613	2.012	1.908	2.059	2.004	
Modified DTLZ2	100	91	3	10	9.21 $\times 10^{-1}$	1.001	9.780×10^{-1}	1.024	1.024	
				50	1.199 $\times 10^{-1}$	1.407×10^{-1}	1.446×10^{-1}	1.553×10^{-1}	1.387×10^{-1}	
				100	7.286 $\times 10^{-2}$	7.382×10^{-2}	7.490×10^{-2}	7.815×10^{-2}	7.627×10^{-2}	
Modified DTLZ3	200	91	3	10	1.645×10^3	1.598 $\times 10^3$	1.650×10^3	1.656×10^3	1.616×10^3	
				100	2.924×10^2	2.221×10^2	1.968 $\times 10^2$	2.170×10^2	2.461×10^2	
				200	2.082×10^2	1.322×10^2	1.255 $\times 10^2$	1.444×10^2	1.693×10^2	
Modified DTLZ4	100	91	3	10	1.126	1.179	1.104	1.089	1.102	
				50	5.909×10^{-1}	5.855×10^{-1}	5.143 $\times 10^{-1}$	5.214×10^{-1}	5.804×10^{-1}	
				100	5.541×10^{-1}	4.641×10^{-1}	4.338×10^{-1}	3.989×10^{-1}	3.949 $\times 10^{-1}$	

MG = the number of generation set; PS = the number of population size set.

Obj. = the number of objectives; Var. = the number of variables.

Gen = the generation that results were computed on.

k = position parameter in WFG problems; l = distance parameter in WFG problems.

果となっている。しかしながらどの問題においても進化の序盤は小さい桁数の方が小さい値となっていることから、探索能力向上の傾向が見られる。しかし、桁数を小さくしすぎると、多様な解を得るために必要な粒度の細かさが足りず、最終的に IGD が悪化してしまったことが考えられる。

次に、特徴的な結果が見られた DTLZ2-4 と Modified DTLZ2-4 の結果を詳しく見る。

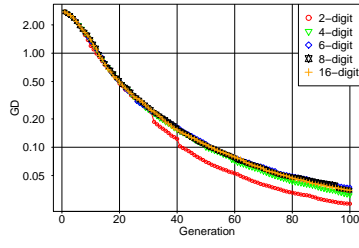
図 4.2.6 は DTLZ2-4 の GD の世代ごとの推移を示している。図 4.2.6 の結果から、いずれの問題も 2 桁の結果が最も良い結果となっていることが分かる。この結果から、NSGA-II の結果同様、DTLZ では粗い離散化により収束性が向上することが確認できた。

図 4.2.7 は DTLZ2-4 の IGD の世代ごとの推移を示している。図 4.2.7 の結果から、DTLZ3 や DTLZ4 においては 2 桁の結果が良い結果となっていることが分かる。

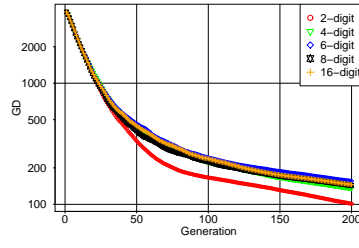
図 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 はそれぞれ、DTLZ2-4 において 2 桁と 16 桁を用いた場合に得られた非劣解集合を示している。図 4.2.8 の結果から、DTLZ2 においては 2 桁と 16 桁で得られる非劣解集合には大きな差はないことが分かった。図 4.2.9 の結果から、16 桁に比べ 2 桁の方が明らかに最適化方向である原点方向に解が生成されており、解の収束性が高いことが分かる。図 4.2.10 では、16 桁は紫で示した真のパレートフロントを覆うように解が生成されている一方で、2 桁は局所的にしか非劣解が得られていない。しかしながら、IGD の結果は良い結果となっていることから、16 桁の結果は試行ごとのばらつきが大きく IGD の平均値が上昇してしまったことが考えられる。また、このことから、DTLZ4 では設計変数を細かい粒度を用いて探索しなければ、パレートフロントを覆うような解を生成することができないことが分かった。

図 4.2.11 は Modified DTLZ2-4 の GD の世代ごとの推移を示している。図 4.2.11 の結果から、Modified DTLZ2, 4 では桁数が小さいほど収束性が良いことが分かる。一方で、Modified DTLZ3 では 2 桁が最も悪い結果となっていることが分かる。NSGA-II の結果と同様に、Modified DTLZ3 では最適値が無理数であることから、2 桁では厳密に最適値に到達することができず、その結果収束性が悪化してしまったことが考えられる。

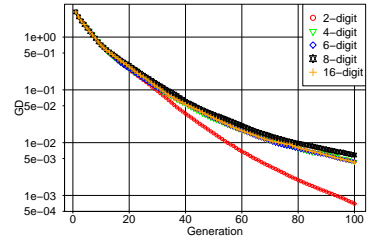
図 4.2.12 は Modified DTLZ2-4 の IGD の世代ごとの推移を示している。図 4.2.12 の結果から、Modified DTLZ3, 4 では桁数が小さいほど悪い結果となっていることが分かる。このことから、単に粗く離散化するだけでは解の多様性が失われてしまう可能性があることが分かる。



(a) DTLZ2

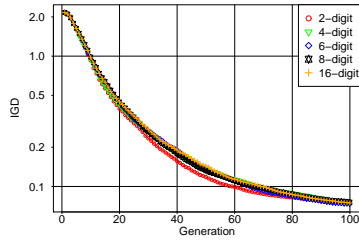


(b) DTLZ3

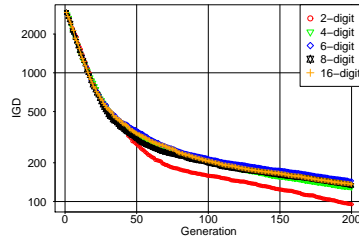


(c) DTLZ4

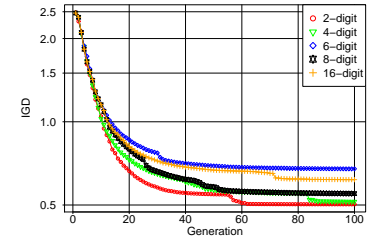
図 4.2.6: DTLZ2-4 における GD の推移 (MOEA/D)



(a) DTLZ2

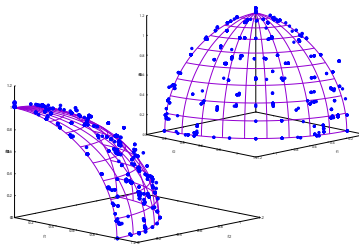


(b) DTLZ3

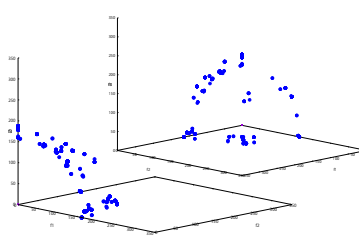


(c) DTLZ4

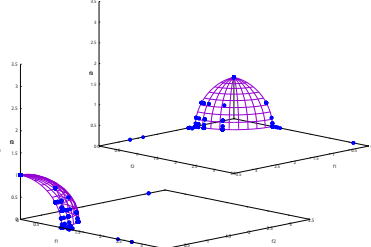
図 4.2.7: DTLZ2-4 における IGD の推移 (MOEA/D)



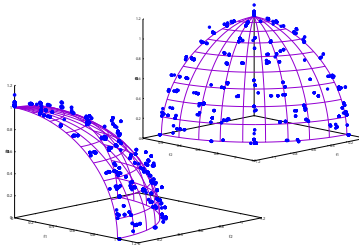
(a) 2-digit resolution



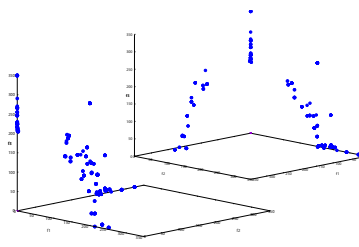
(a) 2-digit resolution



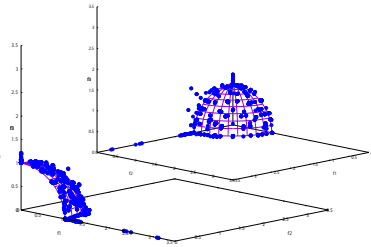
(a) 2-digit resolution



(b) 16-digit resolution



(b) 16-digit resolution

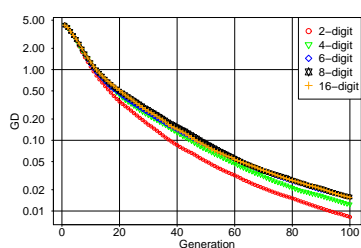


(b) 16-digit resolution

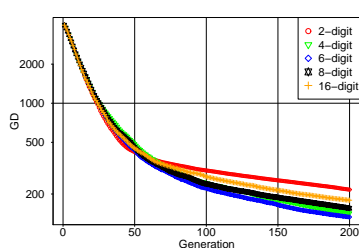
図 4.2.8: DTLZ2 における非劣解の分布 (MOEA/D)

図 4.2.9: DTLZ3 における非劣解の分布 (MOEA/D)

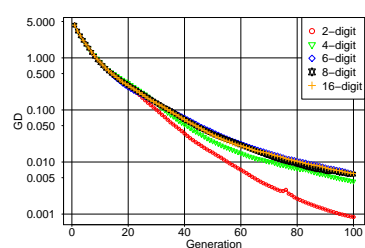
図 4.2.10: DTLZ4 における非劣解の分布 (MOEA/D)



(a) Modified DTLZ2

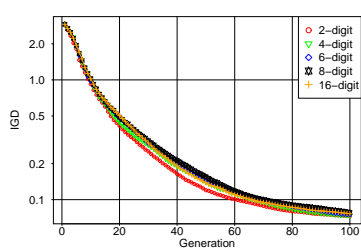


(b) Modified DTLZ3

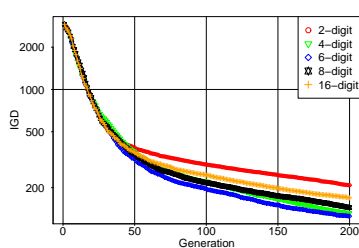


(c) Modified DTLZ4

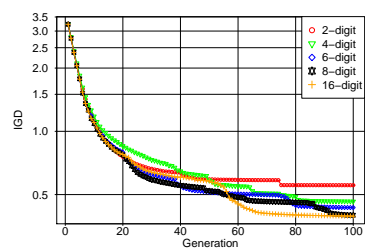
図 4.2.11: Modified DTLZ2-4 における GD の推移 (MOEA/D)



(a) Modified DTLZ2

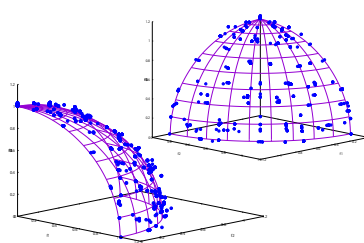


(b) Modified DTLZ3

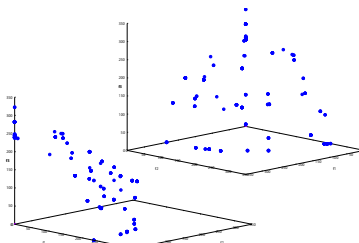


(c) Modified DTLZ4

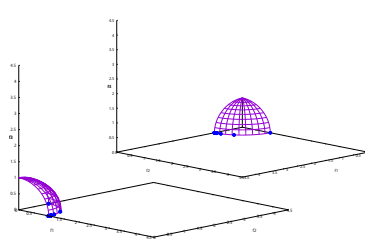
図 4.2.12: Modified DTLZ2-4 における IGD の推移 (MOEA/D)



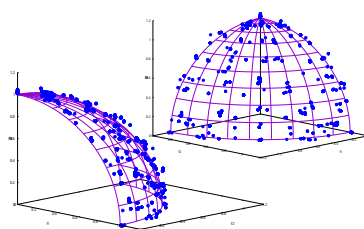
(a) 2-digit resolution



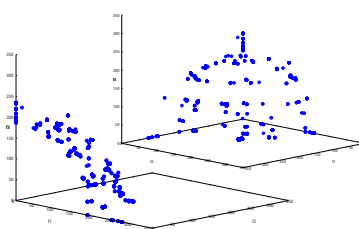
(a) 2-digit resolution



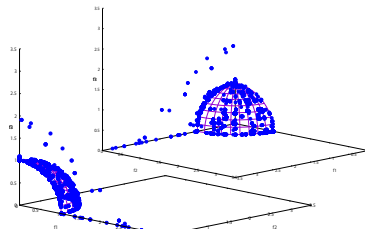
(a) 2-digit resolution



(b) 16-digit resolution



(b) 16-digit resolution



(b) 16-digit resolution

図 4.2.13: Modified DTLZ2 における非劣解の分布 (MOEA/D) 図 4.2.14: Modified DTLZ3 における非劣解の分布 (MOEA/D) 図 4.2.15: Modified DTLZ4 における非劣解の分布 (MOEA/D)

図 4.2.13, 4.2.14, 4.2.15 は, それぞれ, Modified DTLZ2-4 において 2 桁と 16 桁を用いた場合に得られた非劣解集合を示している. 図 4.2.13 より, Modified DTLZ2 においては, 2 桁と 16 桁で得られた非劣解集合に大きな差は見られなかった. 図 4.2.14 では, どちらの桁数を似たような非劣解集合が得られているものの, 16 桁のほうがやや最適化方向である原点方向に進化が進んでいることが分かる. NSGA-II の結果で述べたように, Modified DTLZ3 は無理数を最適値として取るため, 設計変数に細かい粒度が必要とされる. しかし, 2 桁では粒度が粗すぎるため, 厳密な最適解に近付くことができず 16 桁よりも収束性が劣ってしまっていることが, 非劣解集合からも確認できた. 図 4.2.15 では, Modified DTLZ4 においては, 16 桁は紫で示した真のパレートフロントを覆うように非劣解が得られているが, 2 桁では局所的にしか得られていないことが分かる. 先行研究の DTLZ4 や NSGA-II の結果と同様に 2 桁では多様性を維持するための必要最低限な設計変数の粒度を満たしておらず, 解の多様性が悪化してしまったことが考えられる.

以上より, MOEA/D において, 19 の様々な特徴を持つベンチマーク問題を用いて設計変数の離散化の影響を幅広く評価した結果, NSGA-II の結果と同様に, 粗く離散化することで解の収束性が向上する傾向が確認された. また, 粗く離散化しすぎると問題によっては, 解の収束性や多様性が失われてしまう可能性があることも確認された. したがって, 代表的な RCGA である NSGA-II と MOEA/D においては, 問題ごとに各設計変数を適切に離散化することで, 解の多様性を維持しながらも, 収束性を高めることができる可能性があることが分かった.

4.3 設計変数の離散化による影響評価のまとめ

本実験では, 先行研究では明らかにできなかった実数値遺伝的アルゴリズムにおける設計変数の離散化が探索に及ぼす影響の一般性を幅広く評価した. ここでは, 実数値遺伝的アルゴリズムとして代表的な二つのアルゴリズム (NSGA-II, MOEA/D) と様々な特徴を持つ 19 のベンチマーク問題を用いて, 設計変数の離散化の影響を解の収束性・多様性の観点から評価した.

NSGA-II の結果から, 多くの問題で設計変数を粗く離散化するほど解の収束性が向上するが, 問題によっては粗く離散化しすぎると解の収束性と多様性が悪化してしまう可能性があることが分かった. また, MOEA/D の結果においても NSGA-II と同様の傾向が見られた.

以上より、RCGAにおいて問題に応じて各設計変数に適切な離散化を行うことで、解の多様性を維持しながらも収束性を向上させることが期待される。実際の設計問題では、目的関数や制約条件の計算に莫大な計算資源や計算時間がかかる場合があるため、効率的な探索手法が求められている。この課題を解決するアプローチの一つとして、設計変数の離散化が有効に働くことが期待できる。しかし、先行研究と同様に、最適化の前に適切に設計変数を離散化することは難しく、設計変数の離散化の有効な活用法としては課題が残されている。