第6章　結果と考察

本章では，本研究で行った数値実験の結果と考察について述べる．

非劣解の評価に関しては，今回はEngineering問題を除くベンチマーク問題では真のパレートフロントが既知であることと，収束性と多様性の観点から議論を行うため．多くの研究で利用されているHyper Volumeではなく，解の収束性の指標であるGenerational Distance (GD)と解の収束性・多様性の総合指標であるInverted Generational Distance (IGD)を用いる．また，各世代における実行可能な非劣解から算出されたGDとIGDの平均値を用いて評価する．Engineering問題においては，すべての結果の非劣解を合わせたものを擬似パレートフロントとし，同様にGDとIGDの平均値を求める．さらに提案手法とその他の制御手法に有意な差があるかを調べるため，有意水準5%でWilcoxonの順位和検定を行った．

6.1　GDの結果と考察

表6.1.1は，各ベンチマーク問題において，SDを用いた提案手法とePDFを用いた提案手法，離散化の制御を行わずに最適化を行った場合のGDの平均値の推移と各提案手法との検定結果を示している．表中に示すObj.は目的関数の数，Var.は設計変数の数，GenはGDの平均値を求めた世代数を示している．また，各世代において最小値となっている値は太字で示した．さらに各提案手法と離散化の制御を行わなかったもの結果の間に有意差がある場合は✓，有意差があると判断できない手法には – を記載した．

表6.1.1を見ると，多くの問題でSDを用いた適応的離散化が最も小さいGD値となっていることが分かる．また，ePDFを用いた適応的離散化においても制御なしと比較して多くの問題で小さい値となっている．GDは値が小さいほど解の収束性が良いことを示す指標である．したがって，設計変数を適応的に離散化するだけで収束性が向上する傾向があることが分かる．

統計検定の結果を見ると，SDを用いた適応的離散化は24個のベンチマーク問題のうち

16 個の問題で統計的に有意な差を持って優れた GD の推移となっていることが分かる．また，統計的に有意な差を持って悪い推移となっている問題は WFG7 と CF7 の 2 つだけである．ePDF を用いた適応的離散化においては，SD よりは少ないものの，9 個の問題で統計的に優れた収束性が示されている．さらに，ePDF では統計的に有意な差を持って収束性が悪くなる問題は存在しなかった．これらの結果からも，多くの問題において設計変数の適応的離散化は解の収束性を向上させる効果があることが確認された．また，離散化をする際に用いる指標の違いにより，収束性に与える影響が異なることが分かった．

次に，問題ごとに細かく結果を見ていく．まず DTLZ2-4，7 の結果を見ると，どの問題でも SD を用いた適応的離散化が統計的に有意な差を持って最も良い GD 値となっていることが分かる．DTLZ 問題は設計変数同士の相関関係がない点や，距離変数の最適値が 0.5 もしくは 0 であるため，粗く離散化した方が容易に最適値に収束しやすい問題だと考えられる．したがって，適応的離散化により粗い離散化が行われたため，適応的離散化を用いた手法は離散化の制御を行わなかった場合に比べ，収束性が向上したことが考えられる．

WFG2，4，6，7，8 の結果を見ると，DTLZ 問題の結果とは異なり，最終世代の GD 値の結果を見ると ePDF を用いた適応的離散化が 5 つのうち 3 つの問題で最も良い結果となっている．また，離散化の制御を行わなかったものも最終世代の GD 値で比較すると 2 つの問題で最も良い結果となっている．WFG 問題はスケーリング関数により何度も設計変数が別空間に射影されるため，非線形性が非常に強い問題である．また問題によっては設計変数同士に相関関係をあるため，進化の過程で設計変数空間に複数個密な分布が発生することが考えられる．ePDF は設計変数空間が複雑な分布となっていてもその特徴を捉えやすく，適切な離散化が行えたことにより，最終的な GD 値が良い値になったことが考えられる．一方で，SD では設計変数空間が複雑な分布となった場合，ePDF に比べ特徴を捉えづらく，適切な離散化ができなかったため，最終的な GD 値が悪化してしまったことが考えられる．統計検定の結果を見ると，WFG2 では適応的離散化を用いた場合有意差を持って収束性が向上することが分かった．また，WFG7 では，有意差を持って SD の結果が悪くなることが分かった．

UF2，9，CF2，7 の結果を見ると概ねどちらかの適応的離散化手法が良い結果となっている．まず UF2 については，ePDF の結果が統計的有意差を持って最も良くなっており，SD の結果と制御なしの結果の間には有意差が存在しなかった．そのため，UF2 では適切な離

表 6.1.1: 各ベンチマーク問題において各提案手法と離散化の制御を行わなかった場合の GD の平均値の推移

Problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen		SD		ePDF	制御なし
DTLZ2	100	100	3	38	10	✓	$\mathbf{1.628}$	-	1.741	1.759
					50		$\mathbf{1.671 \times 10^{-1}}$		2.179×10^{-1}	2.565×10^{-1}
					100		$\mathbf{6.114 \times 10^{-2}}$		9.541×10^{-2}	1.011×10^{-1}
DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	$\mathbf{2.175 \times 10^{3}}$	✓	2.484×10^{3}	2.508×10^{3}
					100		$\mathbf{1.508 \times 10^{2}}$		2.792×10^{2}	4.039×10^{2}
					200		$\mathbf{2.661 \times 10}$		4.349×10	6.669×10
DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	$\mathbf{9.789 \times 10^{-1}}$	-	1.292	1.223
					50		$\mathbf{5.313 \times 10^{-2}}$		8.692×10^{-2}	7.147×10^{-2}
					100		$\mathbf{2.060 \times 10^{-2}}$		3.269×10^{-2}	2.522×10^{-2}
DTLZ7	100	100	3	38	10	✓	$\mathbf{7.060}$	-	8.295	8.145
					50		$\mathbf{6.427 \times 10^{-1}}$		1.276	1.306
					100		$\mathbf{1.491 \times 10^{-1}}$		5.271×10^{-1}	5.442×10^{-1}
WFG2	100	100	3	10	10	✓	2.350×10^{-1}	✓	$\mathbf{2.232 \times 10^{-1}}$	2.428×10^{-1}
					50		$\mathbf{5.586 \times 10^{-2}}$		6.082×10^{-2}	7.141×10^{-2}
					100		3.821×10^{-2}		$\mathbf{3.748 \times 10^{-2}}$	4.220×10^{-2}
WFG4	100	100	3	10	10	-	2.289×10^{-1}	-	2.139×10^{-1}	$\mathbf{2.134 \times 10^{-1}}$
					50		9.733×10^{-2}		$\mathbf{9.001 \times 10^{-2}}$	9.510×10^{-2}
					100		6.698×10^{-2}		$\mathbf{6.460 \times 10^{-2}}$	6.654×10^{-2}
WFG6	100	100	3	10	10	-	4.868×10^{-1}	-	$\mathbf{4.819 \times 10^{-1}}$	4.900×10^{-1}
					50		$\mathbf{2.171 \times 10^{-1}}$		2.244×10^{-1}	2.268×10^{-1}
					100		1.680×10^{-1}		1.797×10^{-1}	$\mathbf{1.596 \times 10^{-1}}$
WFG7	100	100	3	10	10	✓	$\mathbf{3.477 \times 10^{-1}}$	-	3.575×10^{-1}	3.602×10^{-1}
					50		1.270×10^{-1}		1.144×10^{-1}	$\mathbf{1.061 \times 10^{-1}}$
					100		8.698×10^{-2}		6.898×10^{-2}	$\mathbf{6.517 \times 10^{-2}}$
WFG8	100	100	3	10	10	-	7.337×10^{-1}	-	7.214×10^{-1}	$\mathbf{7.015 \times 10^{-1}}$
					50		2.934×10^{-1}		$\mathbf{2.882 \times 10^{-1}}$	2.939×10^{-1}
					100		2.198×10^{-1}		$\mathbf{1.977 \times 10^{-1}}$	2.002×10^{-1}
UF2	200	200	2	20	10	-	3.405×10^{-1}	✓	$\mathbf{2.927 \times 10^{-1}}$	3.001×10^{-1}
					100		2.661×10^{-2}		$\mathbf{2.264 \times 10^{-2}}$	2.64×10^{-2}
					200		1.726×10^{-2}		$\mathbf{1.400 \times 10^{-2}}$	1.701×10^{-2}
UF9	200	300	3	20	10	-	$\mathbf{2.752}$	-	2.810	2.771
					100		$\mathbf{7.003 \times 10^{-1}}$		7.153×10^{-1}	7.343×10^{-1}
					200		$\mathbf{5.068 \times 10^{-1}}$		5.427×10^{-1}	5.320×10^{-1}
CF2	200	200	2	20	10	✓	$\mathbf{9.075 \times 10^{-1}}$	✓	9.586×10^{-1}	1.005
					100		$\mathbf{1.506 \times 10^{-1}}$		1.845×10^{-1}	2.302×10^{-1}
					200		1.444×10^{-1}		$\mathbf{1.113 \times 10^{-1}}$	1.425×10^{-1}
CF7	200	200	2	20	10	✓	$\mathbf{2.628 \times 10}$	-	2.686×10	2.706×10
					100		1.938		$\mathbf{1.535}$	1.577
					200		9.725×10^{-1}		$\mathbf{5.473 \times 10^{-1}}$	7.615×10^{-1}
C1DTLZ3	300	100	3	38	10	✓	$\mathbf{2.573 \times 10^{3}}$	✓	2.757×10^{3}	2.871×10^{3}
					150		$\mathbf{1.361 \times 10^{2}}$		2.214×10^{2}	3.267×10^{2}
					300		$\mathbf{7.301 \times 10}$		9.030×10	1.243×10^{2}
C2DTLZ2 convex	300	100	3	38	10	✓	$\mathbf{3.948 \times 10}$	✓	5.962×10	7.017×10
					150		7.964×10^{-2}		$\mathbf{7.492 \times 10^{-2}}$	1.114×10^{-1}
					300		5.569×10^{-2}		$\mathbf{5.244 \times 10^{-2}}$	9.449×10^{-2}
C3DTLZ1	300	100	3	38	10	✓	$\mathbf{1.140 \times 10^{3}}$	✓	1.168×10^{3}	1.152×10^{3}
					150		$\mathbf{1.445 \times 10^{2}}$		2.307×10^{2}	3.801×10^{2}
					300		$\mathbf{6.083 \times 10}$		9.469×10	2.587×10^{2}
CarSideImpact	100	300	3	7	10	-	1.089×10^{-1}	-	$\mathbf{1.008 \times 10^{-1}}$	1.075×10^{-1}
					50		$\mathbf{3.751 \times 10^{-2}}$		3.765×10^{-2}	3.763×10^{-2}
					100		$\mathbf{3.109 \times 10^{-2}}$		3.194×10^{-2}	3.167×10^{-2}
Welded Beam Design	100	300	2	4	10	✓	$\mathbf{2.762}$	✓	2.954	8.898
					50		$\mathbf{1.276 \times 10^{-2}}$		1.884×10^{-2}	4.047×10^{-2}
					100		4.390×10^{-3}		$\mathbf{2.665 \times 10^{-3}}$	8.827×10^{-3}
Modified DTLZ2	100	100	3	38	10	✓	$\mathbf{1.839}$	-	2.211	2.324
					50		$\mathbf{1.641 \times 10^{-1}}$		2.432×10^{-1}	2.827×10^{-1}
					100		$\mathbf{6.194 \times 10^{-2}}$		1.030×10^{-1}	1.107×10^{-1}
Modified DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	$\mathbf{2.226 \times 10^{3}}$	-	2.636×10^{3}	2.628×10^{3}
					100		$\mathbf{1.488 \times 10^{2}}$		2.653×10^{2}	3.739×10^{2}
					200		$\mathbf{2.579 \times 10}$		9.312×10	7.365×10
Modified DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	$\mathbf{1.190}$	-	1.518	1.715
					50		$\mathbf{5.539 \times 10^{-2}}$		8.747×10^{-2}	1.000×10^{-1}
					100		$\mathbf{2.342 \times 10^{-2}}$		3.050×10^{-2}	3.500×10^{-2}
Multi DTLZ2	100	100	3	38	10	✓	$\mathbf{6.995 \times 10^{-1}}$	-	7.915×10^{-1}	7.791×10^{-1}
					50		$\mathbf{8.519 \times 10^{-2}}$		1.250×10^{-1}	1.163×10^{-1}
					100		$\mathbf{3.907 \times 10^{-2}}$		5.691×10^{-2}	5.176×10^{-2}
Multi DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	$\mathbf{2.017 \times 10^{3}}$	✓	2.333×10^{3}	2.394×10^{3}
					100		$\mathbf{2.528 \times 10^{2}}$		3.403×10^{2}	5.155×10^{2}
					200		$\mathbf{7.257 \times 10}$		1.561×10^{2}	1.586×10^{2}
Multi DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	$\mathbf{4.561 \times 10^{-1}}$	-	5.459×10^{-1}	5.982×10^{-1}
					50		$\mathbf{3.238 \times 10^{-2}}$		5.687×10^{-2}	5.349×10^{-2}
					100		$\mathbf{1.934 \times 10^{-2}}$		2.833×10^{-2}	2.690×10^{-2}

散化を施すことで収束性が向上する可能性があることが分かった．ePDF は複雑な解の分布の特徴を捉えやすく，non-separable や multi といった特徴を持つ問題に対しても適切に離散化できる可能性が高いことが考えられる．UF9 では，適応的離散化手法と離散化の制御なしの場合の間に有意差は存在しなかった．しかし，各世代を通して SD が最も良い GD 値となっており，離散化が収束性に影響している可能性が考えられる．CF2 では，適応的離散化手法が有意差を持って GD 値が良い推移を取っていることが分かる．したがって，適切な離散化を施すことで収束性が向上することが分かった．また最終的に，ePDF が最も小さい GD 値となっており，このことからも複雑な問題に対しても適切に離散化できる可能性が高いことが分かる．CF7 では，ePDF が最も小さい GD 値となっているものの，SD が有意差を持って高い GD 値となっていることが分かる．このことからも，ePDF は SD に比べ，複雑な問題に対しても効果的に離散化が行えることが分かった．

C1DTLZ3，C2DTLZ2 convex, C3DTLZ1 の結果を見るとどの問題も適応的離散化を施すことで有意差を持って収束性が向上する結果となった．CDTLZ 問題は，基本的な問題構造は DTLZ と同様だが制約条件がつく問題である．このことから，制約条件がある場合でも，適応的離散化がうまく働き収束性が向上することが分かった．

Car Side Impact 問題，Welded Beam Design 問題では，Car Side Impact 問題では統計的有意差は見られなかったが，Welded Beam Design 問題ではいずれの適応的離散化手法も統計的有意差を持って良い結果となっている．また，有意差は見られなかったものの Car Side Impact 問題では SD が最終的に最も小さい値となっており，実際の設計問題を模擬した問題においても，適応的離散化が収束性を向上させる可能性があることが確認された．

Modified DTLZ2-4 の結果見ると，いずれの問題においても SD の結果が統計的有意差を持って最も良い結果となっている．対照的に ePDF は離散化の制御を行わなかった場合と比較し，統計的有意差は見られなかった．DTLZ 問題は変数同士に相関関係を持たず，非常に単純な構造をしているため，SD の評価のみで十分に分布を評価することができる．ePDF では解の分布を精細に評価するために，誤差や外れ値に影響されやすく，単純な分布の際は反って誤った評価をしてしまう場合が考えられる．したがって，適切に離散化が行えず，離散化を行わなかったものと同等の結果となってしまったものと考えられる．この点は，ePDF の課題として挙げられる．

Multi DTLZ2-4 では，いずれの問題においても SD の結果が統計的有意差を持って最も良

い結果となっている．また ePDF も Multi DTLZ3 において，制御なしと比較し統計的に優れた収束性を持っていることが分かる．Multi DTLZ 問題においても上述の Modified DTLZ 問題と同様に非常に単純な構造をしているため，SD の評価のみで十分に分布を評価することができるため，SD が最も良い結果となったことが考えられる．また，Multi DTLZ 問題は，ある設計変数空間に 2 点最適解が存在する構造となっているため，複数密な分布が生成される場合があり，Multi DTLZ3 において良い結果となったことが考えられる．

以上の結果から，適応的離散化は多くの問題で収束性を加速させることが分かった．特に SD を用いた適応的離散化は 24 個のうち 16 の問題で統計的に優れた収束性があることが分かった．また，問題の性質から，解の分布状態の評価指標として SD を用いた方が良い場合と ePDF を用いた方が良い場合があることが分かった．特に，設計変数同士に相関関係があるなど，設計変数空間に複数密な分布が得られやすいような問題に対しては ePDF の方が収束性向上に効果があることが分かった．

6.2　IGD の結果と考察

表 6.2.1 は，各ベンチマーク問題において，SD を用いた提案手法と ePDF を用いた提案手法，離散化の制御を行わずに最適化を行った場合の IGD の平均値の推移と各提案手法との検定結果を示している．表中に示す Obj. は目的関数の数，Var. は設計変数の数，Gen は IGD の平均値を求めた世代数を示している．また，各世代において最小値となっている値は太字で示した．さらに各提案手法と離散化の制御を行わなかったもの結果の間に有意差がある場合は ✓，有意差があると判断できない手法には – を記載した．

IGD 値は小さければ小さいほど収束性が良く多様性も良いという指標であり，収束性の指標である GD 値と比較することで解の多様性について議論することができる．表 6.2.1 を見ると，表 6.1.1 の GD の結果と比較して，最小の IGD 値となっている手法にばらつきがあることが分かる．また，表 6.1.1 と比較し，離散化の制御を行わなかった場合が最小の IGD 値となっている場合が多いことが分かる．このことから，適応的離散化手法は収束性を向上させる傾向はあるが，一概に解の多様性も向上させる傾向があるとは言えないと結果となった．

統計検定の結果を見ると，SD では 11 個の問題，ePDF では 7 個の問題において統計的に有意な差を持って優れた IGD 値となっている．しかしながら，6 個の問題で離散化を用いない場合の方がどちらの適応的離散化手法よりも統計的に良い結果となった．このことから，

表 6.2.1: 各ベンチマーク問題において各提案手法と離散化の制御を行わなかった場合の IGD の平均値の推移

Problem	MG	PS	Obj.	Var.	Gen		SD		ePDF	制御なし
DTLZ2	100	100	3	38	10	-	1.276	-	$\mathbf{1.255}$	1.264
					50		$\mathbf{1.497 \times 10^{-1}}$		1.607×10^{-1}	1.782×10^{-1}
					100		5.709×10^{-2}		$\mathbf{5.549 \times 10^{-2}}$	6.213×10^{-2}
DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	$\mathbf{1.577 \times 10^{3}}$	✓	1.647×10^{3}	1.666×10^{3}
					100		$\mathbf{1.181 \times 10^{2}}$		1.659×10^{2}	2.195×10^{2}
					200		$\mathbf{2.270 \times 10}$		3.245×10	4.607×10
DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	$\mathbf{1.152}$	✓	1.159	1.236
					50		2.351×10^{-1}		$\mathbf{7.879 \times 10^{-2}}$	3.517×10^{-1}
					100		1.879×10^{-1}		$\mathbf{3.076 \times 10^{-2}}$	2.507×10^{-1}
DTLZ7	100	100	3	38	10	✓	$\mathbf{5.908}$	-	6.235	6.182
					50		$\mathbf{5.914 \times 10^{-1}}$		8.121×10^{-1}	8.245×10^{-1}
					100		$\mathbf{1.783 \times 10^{-1}}$		3.283×10^{-1}	3.037×10^{-1}
WFG2	100	100	3	10	10	✓	5.272×10^{-1}	✓	5.133×10^{-1}	$\mathbf{4.964 \times 10^{-1}}$
					50		3.631×10^{-1}		3.412×10^{-1}	$\mathbf{3.072 \times 10^{-1}}$
					100		3.428×10^{-1}		3.40×10^{-1}	$\mathbf{2.713 \times 10^{-1}}$
WFG4	100	100	3	10	10	-	$\mathbf{4.360 \times 10^{-1}}$	-	4.778×10^{-1}	4.638×10^{-1}
					50		$\mathbf{1.293 \times 10^{-1}}$		1.593×10^{-1}	1.439×10^{-1}
					100		$\mathbf{8.883 \times 10^{-2}}$		1.031×10^{-1}	9.700×10^{-2}
WFG6	100	100	3	10	10	-	5.071×10^{-1}	-	$\mathbf{4.927 \times 10^{-1}}$	5.013×10^{-1}
					50		$\mathbf{2.207 \times 10^{-1}}$		2.255×10^{-1}	2.273×10^{-1}
					100		1.679×10^{-1}		1.760×10^{-1}	$\mathbf{1.591 \times 10^{-1}}$
WFG7	100	100	3	10	10	✓	5.242×10^{-1}	-	5.096×10^{-1}	$\mathbf{4.986 \times 10^{-1}}$
					50		2.500×10^{-1}		2.359×10^{-1}	$\mathbf{2.345 \times 10^{-1}}$
					100		2.022×10^{-1}		1.815×10^{-1}	$\mathbf{1.664 \times 10^{-1}}$
WFG8	100	100	3	10	10	-	7.920×10^{-1}	-	7.807×10^{-1}	$\mathbf{7.708 \times 10^{-1}}$
					50		3.691×10^{-1}		$\mathbf{3.618 \times 10^{-1}}$	3.624×10^{-1}
					100		2.882×10^{-1}		2.670×10^{-1}	$\mathbf{2.622 \times 10^{-1}}$
UF2	200	200	2	20	10	✓	2.204×10^{-1}	✓	$\mathbf{2.117 \times 10^{-1}}$	2.283×10^{-1}
					100		$\mathbf{4.259 \times 10^{-2}}$		4.702×10^{-2}	5.312×10^{-2}
					200		$\mathbf{3.524 \times 10^{-2}}$		4.546×10^{-2}	4.534×10^{-2}
UF9	200	300	3	20	10	✓	$\mathbf{1.005}$	✓	1.086	1.011
					100		2.864×10^{-1}		2.808×10^{-1}	$\mathbf{2.508 \times 10^{-1}}$
					200		2.257×10^{-1}		2.146×10^{-1}	$\mathbf{1.880 \times 10^{-1}}$
CF2	200	200	2	20	10	✓	5.045×10^{-1}	✓	$\mathbf{5.015 \times 10^{-1}}$	5.257×10^{-1}
					100		1.089×10^{-1}		1.070×10^{-1}	$\mathbf{1.063 \times 10^{-1}}$
					200		1.054×10^{-1}		1.017×10^{-1}	$\mathbf{9.750 \times 10^{-2}}$
CF7	200	200	2	20	10	✓	$\mathbf{1.760 \times 10}$	✓	1.785×10	1.851×10
					100		8.404×10^{-1}		5.173×10^{-1}	$\mathbf{4.863 \times 10^{-1}}$
					200		4.401×10^{-1}		4.077×10^{-1}	$\mathbf{3.775 \times 10^{-1}}$
C1DTLZ3	300	100	3	38	10	✓	1.953×10^{3}	✓	1.967×10^{3}	$\mathbf{1.950 \times 10^{3}}$
					150		$\mathbf{1.232 \times 10^{2}}$		1.483×10^{2}	1.956×10^{2}
					300		$\mathbf{6.410 \times 10}$		7.591×10	8.024×10
C2DTLZ2 convex	300	100	3	38	10	✓	$\mathbf{3.897}$	✓	4.042	4.338
					150		7.372×10^{-2}		$\mathbf{7.317 \times 10^{-2}}$	7.828×10^{-2}
					300		6.928×10^{-2}		$\mathbf{6.84 \times 10^{-2}}$	7.260×10^{-2}
C3DTLZ1	300	100	3	38	10	✓	6.831×10^{2}	✓	$\mathbf{6.752 \times 10^{2}}$	6.938×10^{2}
					150		$\mathbf{6.346 \times 10}$		8.339×10	8.776×10
					300		$\mathbf{2.551 \times 10}$		2.630×10	3.508×10
CarSideImpact	100	300	3	7	10	-	$\mathbf{3.348 \times 10^{-1}}$	-	3.384×10^{-1}	3.652×10^{-1}
					50		$\mathbf{5.361 \times 10^{-2}}$		5.504×10^{-2}	5.674×10^{-2}
					100		3.509×10^{-2}		3.522×10^{-2}	$\mathbf{3.480 \times 10^{-2}}$
Welded Beam Design	100	300	2	4	10	✓	5.077×10^{-1}	✓	5.136×10^{-1}	$\mathbf{4.921 \times 10^{-1}}$
					50		1.068×10^{-1}		8.372×10^{-2}	$\mathbf{6.592 \times 10^{-2}}$
					100		9.295×10^{-2}		6.907×10^{-2}	$\mathbf{4.521 \times 10^{-2}}$
Modified DTLZ2	100	100	3	38	10	-	$\mathbf{1.405}$	-	1.456	1.501
					50		$\mathbf{1.507 \times 10^{-1}}$		1.797×10^{-1}	1.944×10^{-1}
					100		$\mathbf{6.230 \times 10^{-2}}$		6.332×10^{-2}	6.526×10^{-2}
Modified DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	1.683×10^{3}	-	$\mathbf{1.67 \times 10^{3}}$	1.757×10^{3}
					100		$\mathbf{1.133 \times 10^{2}}$		1.943×10^{2}	2.152×10^{2}
					200		$\mathbf{2.249 \times 10}$		7.016×10	4.999×10
Modified DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	1.291	✓	$\mathbf{1.263}$	1.340
					50		1.870×10^{-1}		1.435×10^{-1}	$\mathbf{8.858 \times 10^{-2}}$
					100		1.352×10^{-1}		9.321×10^{-2}	$\mathbf{3.138 \times 10^{-2}}$
Multi DTLZ2	100	100	3	38	10	-	$\mathbf{5.394 \times 10^{-1}}$	-	5.829×10^{-1}	5.742×10^{-1}
					50		$\mathbf{8.292 \times 10^{-2}}$		9.095×10^{-2}	9.542×10^{-2}
					100		4.514×10^{-2}		$\mathbf{3.997 \times 10^{-2}}$	4.431×10^{-2}
Multi DTLZ3	200	500	3	38	10	✓	1.525×10^{3}	-	$\mathbf{1.473 \times 10^{3}}$	1.528×10^{3}
					100		$\mathbf{1.915 \times 10^{2}}$		2.260×10^{2}	2.750×10^{2}
					200		$\mathbf{5.739 \times 10}$		1.161×10^{2}	1.032×10^{2}
Multi DTLZ4	100	300	3	38	10	✓	6.936×10^{-1}	✓	$\mathbf{6.506 \times 10^{-1}}$	6.604×10^{-1}
					50		2.073×10^{-1}		$\mathbf{5.409 \times 10^{-2}}$	1.145×10^{-1}
					100		1.544×10^{-1}		$\mathbf{2.777 \times 10^{-2}}$	9.036×10^{-2}

いくつかの問題においては，適応的離散化を用いることで収束性は向上するが，多様性は悪化してしまう場合があることが分かった．

次に問題ごとに詳しく述べる．まずDTLZ2-4，7の結果を見ると，DTLZ2以外の問題ではいずれかの適応的離散化手法が統計的に優れたIGDとなっている．特にDTLZ4においては先行研究の結果から，細かく離散化を行わなければ多様な解は生成されないことが分かっているが，どちらの適応的離散化手法とも離散化の制御を行わなかった場合よりも優れたIGDとなっており，適応的な離散化により，多様な解を得るための必要最低限な粒度まで細かく離散化が行われたことが分かる．また，これらの問題では，常に細かい離散化をせずとも解の多様性が失われることなく探索が可能であることが分かった．

WFG2，4，6，7，8の結果を見ると，WFG2では制御なしが適応的離散化手法に比べ良い結果となっており，WFG7ではSDと比較し制御なしが適応的離散化手法に比べ良い結果となっていることが分かる．その他の問題については統計的に有意な差は見られなかった．WFG2の結果から，WFG2では常に細かい粒度を用いて探索を行わなければ解の多様性が失われてしまうということが分かった．また，WFG7の結果では，ePDFと離散化制御なしが有意差がなく，SDと離散化制御なしに有意差があったことから，適切に離散化を施すことができれば解の多様性は損なわれないが，適応的に離散化することで解の収束性が悪化してしまう場合があることが分かった．そのほかの問題では有意差が見られなかったことから，解の多様性に関しては適応的に離散化を施しても大きく影響しないことが分かった．

UF2，9，CF2，7の結果を見ると，UF2ではどちらの適応的離散化手法も離散化制御なしと比較し優れた結果となっているものの，UF9，CF2，7ではどちらの適応的離散化手法よりも離散化制御を行わなかったものの方が良い結果となっている．UF2の結果から，UF2では常に細かい粒度を用いて探索を行わなくても解の多様性は損なわれず，むしろ適切に粗い離散化に切り替えることで良い結果となる可能性があることが分かった．一方，その他の問題では，常に細かい粒度を用いて探索を行わなければ解の多様性が悪化してしまうということが分かった．また，これらの4つの問題は設計変数間に相関関係が存在し局所解を持つという共通の特徴をもつものの，解の多様性に関して異なる傾向が見られたことから，問題の特徴のみから適応的離散化の影響を議論することは難しいことが分かる．

C1DTLZ3，C2DTLZ2 convex，C3DTLZ1の結果から，どちらの適応的離散化手法ともこれらの問題では，離散化制御なしと比較して，優れたIGDとなっていることが分かった．

CDTLZ 問題は DTLZ 問題に制約条件に付加した問題で，基本的な式の構造は変わらない．したがって，上述の DTLZ 問題の結果と同様に，これらの問題では，常に細かい粒度を用いて探索を行わなくとも解の多様性は損なわれず，適応的に離散化を施すことで改善される可能性があることが考えられる．また，制約付き問題でも IGD が良くなったことから，適応的離散化による解の多様化は，制約条件による影響を大きく受けないことが分かった．

Car Side Impact 問題，Welded Beam Design 問題の結果を見ると，Car Side Impact 問題では各適応的離散化手法と離散制御なしの間で有意差はない結果となり，Welded Beam Design 問題では離散化制御なしの方が適応的離散化を適用するよりも優れた結果となることが分かった．Car Side Impact 問題の結果から，この問題では GD・IGD どちらの結果も有意差がなかったことから，目的関数と制約条件に関して設計変数値の変化の感度が低く，離散化による値の変化がほとんど影響しない問題であることが考えられる．Welded Beam Design 問題の結果から，Welded Beam Design 問題では常に細かい粒度を用いて探索を行わなければ，解の多様性が失われてしまうということが分かった．

Modified DTLZ2-4 の結果から，Modified DTLZ2 では各手法間に有意差はなく，Modified DTLZ3 では SD が統計的に優れた結果となり，Modified DTLZ4 では離散化制御なしが統計的に優れた結果となった．Modified DTLZ 問題は，DTLZ 問題の最適値を無理数（0.1π）に変更した問題である．したがって，設計変数に細かい粒度がなければ，真の最適解に到達することができない問題である．Modified DTLZ3 の結果から，適応的な離散化を用いることにより，粗い離散化によって収束性を向上させた後，最適値を表現するために必要な細かい粒度に自動的に切り替えることができたため，良い IGD 値が得られたものと考えられる．また，Modified DTLZ4 の結果から，Modified DTLZ4 では常に細かい粒度を用いて探索しなければ解の多様性は悪化してしまうことが分かった．

Multi DTLZ2-4 の結果から，Multi DTLZ2 では各手法間に有意差はなく，Multi DTLZ3, Multi DTLZ4 では ePDF が統計的に優れた結果となった．Multi DTLZ3，4 の結果より，適応的に離散化を施すことで多様性の向上は見込まれるものの，適切に離散化する粒度を割り当てられなければ，解の多様性が悪化してしまう可能性があることが分かった．

以上の結果より，大半の問題において，適応的離散化により多様性が向上するまたは維持されることが分かったが，問題の構造によっては常に設計変数を細かい粒度を用いて探索しなければ多様性が損なわれる問題もあるため，悪化してしまう場合もあることが分かった．

また，問題の特徴の違いによる傾向さは見られなかった．

6.3　特徴的な結果が得られた問題の分析

本項では，どちらの提案手法とも制御なしと比較して非常に良いGD・IGDとなったDTLZ3，制御なしが唯一統計的に優れた収束性を示したWFG7，どの世代においても常にePDFが最も良いIGDとなったMulti DTLZ4に注目し，結果の詳細な分析を行う．

6.3.1　DTLZ3