UNIVERISDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O LIMITE NO ESTUDO DE INDEFINIÇÕES E INDETERMINAÇÕES MATEMÁTICAS

Autora:
Juliana Queiroz da Silva Tetila

Orientador:
Prof. Dr. Odival Faccenda
Co-orientador:
Prof. Drª. Marina Maestre

DOURADOS-MS
2016

UNIVERISDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT
UNIDADE DE DOURADOS

O Limite no Estudo de Indefinições e Indeterminações Matemáticas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências Exatas, UEMS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Juliana Queiroz da Silva Tetila

Dourados, MS
2016

O LIMITE NO ESTUDO DE INDEFINIÇÕES E INDETERMINAÇÕES MATEMÁTICAS

Juliana Queiroz da Silva Tetila

Banca Examinadora:

____

Professor

____

Professor

____

Professor

AGRADECIMENTOS

texto

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre expressões indefinidas e indeterminadas no ensino de limites de uma função. Inicialmente é relatada a construção do conceito de limite ao longo da história da matemática, desde os paradoxos de Zenão até a sua fundamentação teórica com Cauchy e Weirtrass. Em seguida, são apresentadas as expressões indefinidas e indeterminadas e espostas algumas teorias de limites de uma função por meio de exemplos. Por fim, o software livre e de fácil acesso *GeoGebra, versão 5.0*, é proposto como ferramenta didático-pedagógica para a manipulação e geração de gráficos, com intuito de que o aluno venha a construir o seu próprio conhecimento sobre limites de uma função.

Palavras-chave: Indefinidas, Indeterminadas, Limite, GeoGebra.

ABSTRACT

text

Keywords: key words.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

2 O SURGIMENTO DO CONCEITO DE LIMITE

O conceito originário de limite surgiu na Grécia antiga no século V a.C., influenciado pelos paradoxos de Zenão. Os argumentos de Zenão que causaram maior perturbação foram os quatro paradoxos sobre a impossibilidade do movimento, sendo eles: o da Dicotomia, o da Flecha, do Estádio e o de Aquiles.

Segundo o paradoxo mais famoso o de Aquiles e a Tartaruga: Aquiles e a tartaruga resolvem apostar uma corrida, como Aquiles é muito mais veloz, decidiu dar uma vantagem a tartaruga que começou num ponto A mais a frente do ponto de largada; o veloz Aquiles corre para alcançar a tartaruga, mas quando chega ao ponto A de onde partiu a tartaruga, esta se encontra mais adiante, numa outra posição B. Quando Aquiles chega à posição B, a tartaruga também avança para uma nova posição C, e assim sucessivamente, de tal forma que Aquiles sempre se aproximará da tartaruga, porém sem nunca alcançá-la.

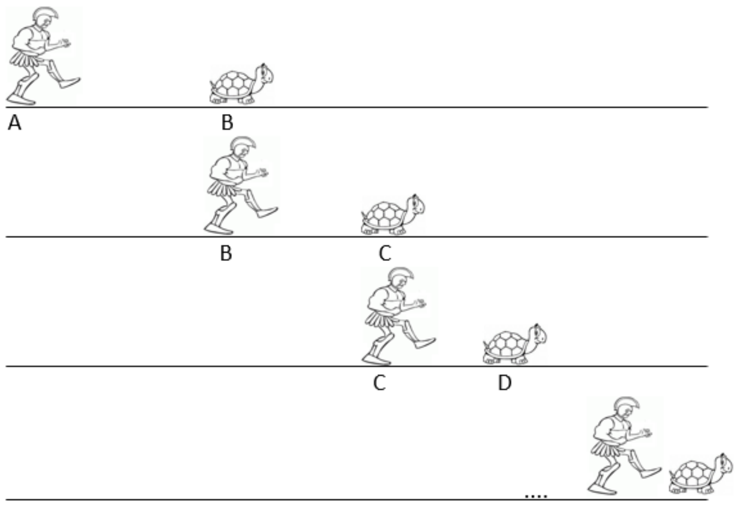

Figura 1: Aquiles e a tartaruga.

As afirmações de Zenão envolvem conceitos de continuidade do infinito e do infinitesimal, e são ainda hoje, motivo de debate tanto quanto o foram no tempo de Aristóteles, que não obteve sucesso ao tentar explicar os paradoxos de Zenão, onde nenhuma explicação fora satisfatória até a criação do contínuo e da teoria dos agregados por George Cantor (1845 - 1916) (CAJORI, 2007).

O trabalho de Eudoxo de Cnido (408 - 355 a. C.), com sua definição de igualdade de duas razões, constrói uma nova definição de proporção, de caráter mais geral, utilizando apenas os números inteiros positivos. Embora tenha sido uma solução genial para a crise dos incomensuráveis, ele atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, pois subordinou essas disciplinas aos estudos da geometria.

> Segundo Arquimedes, Eudoxo forneceu o axioma que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes, chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. O axioma diz que dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia (BOYER, 1999, p.62).

Do axioma de Eudoxo (ou Arquimedes) é fácil, por uma redução ao absurdo, provar uma proposição que formava a base de método de exaustão dos gregos.

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie"(BOYER, 1999, p.63).

De acordo com Carl Boyer (BOYER, 1999, p.226), Galileu (1564-1642) tinha tido a intenção de escrever um tratado sobre o infinito em matemática, mas ele não foi encontrado. Enquanto isso seu discípulo Cavalieri (1598-1647) fora motivado por Kleper (1571-1630), bem como por idéias antigas e medievais e pelo encorajamento de Galileu, a organizar seus pensamentos sobre infinitésimos em formas de livro. Mas a obra que mais o projetou, é o tratado Geometria *indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635, onde apresenta seu método dos indivisíveis.

Merece destaque, a obra de Fermat (1601 - 1665), que de acordo com Boyer (BOYER, 1999, p.239) é possível que desde 1629 Fermat já estivesse de posse da sua Geometria Analítica, pois por essa época ele fez duas descobertas significativas que se relacionam de perto com seu trabalho sobre lugares geométricos. A mais importante foi o chamado "Método para achar máximos e mínimos"que de acordo com Laplace (1749 - 1827), lhe rendeu o título de descobridor do Cálculo Diferencial, bem como co-descobridor da Geometria Analítica. Afirma Boyer (BOYER, 1999, p.240), que evidentemente Fermat ainda não possuía a definição formal do conceito de limite, mas por outro lado o seu método para achar máximos e mínimos se assemelhava muito ao usado hoje no Cálculo.

No século XVII, surgem os trabalhos de Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) que embora tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo, em geral, é atribuídas a eles. No período de 1665-1666, segundo Boyer (BOYER, 1999), fora o período mais produtivo de descoberta matemática, pois durante esse período, Newton realizou quatro de suas principais descobertas: 1. O teorema binomial, 2. O cálculo, 3. A lei da gravitação e 4. A natureza das cores.

Em 1687, em *Principia Mathematica*, o mais admirado tratado científico de todos os tempos, Newton tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite: "Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais"(BOYER, 1999, p.274). Isto, é claro, é uma tentativa de definir o limite de uma função.

Segundo Boyer (BOYER, 1999, p.277), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) inventou seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo integral, um S alongado, derivando da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar a soma de indivisíveis. Algumas semanas depois já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais.

Houve uma infeliz polêmica Newton-Leibniz, onde Leibniz foi acusado de plagiar as descobertas de Newton, mas hoje não há dúvidas de que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados.

Entretanto, em ambos os cálculos faltavam os fundamentos; tanto Newton como Leibniz tinham problemas com os infinitesimais, vistos por ambos de maneira diferentes, mas que operavam de maneiras parecidas, pois esses infinitesimais às vezes eram cancelados como fatores diferentes de zero ou desprezados como equivalentes a zero. "Essas operações contraditórias dominaram o cálculo por muito tempo, até que surgissem trabalhos decisivos para a fundamentação lógica da disciplina no começo do século XIX"(ÁVILA, 2006).

Muito se deve as contribuições aos membros da família Bernoulli, que no final do século XVII os irmãos Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667 - 1748), estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e aplicaram esse instrumento em uma gama ampla de problemas.

Johan Bernoulli foi um dos professores mais inspirado de seu tempo e em troca de um salário regular, forneceu ao francês de Marquês de l'Hôspital (1661-1704) informações sobre suas descobertas matemáticas, concedendo a este o direito de usá-las como lhe conviesse, compondo então seu primeiro texto de cálculo a ser publicado. Foi assim que o conhecido método de determinação de forma indeterminada 0/0 tornou-se incorretamente conhecido, em textos posteriormente de cálculo, como regra de l'Hospital (EVES, 2005).

D'Alembert (1717-1790), reconheceu explicitamente a importância central do limite, e em 1754, segundo Eves (EVES, 2005), fez a mais importante recomendação de que, para colocar em bases firmes os fundamentos da análise, era preciso desenvolver uma teoria dos limites bem estruturada, mas seus contemporâneos quase não lhe deram ouvidos.

Cauchy (1789 - 1875) e Weierstrass (1815 - 1897), dois matemáticos que merecem destaque, foram fundamentais na busca de uma construção rigorosa dos fundamentos do Cálculo. Uma das principais contribuições de Cauchy para o cálculo foi à definição de limite relativamente clara: "Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros todos"(BOYER, 1999, p.355).

Enquanto muitos matemáticos pensavam no infinitésimo como um número fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma variável independente: "Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir ao limite zero"(BOYER, 1999, p.355).

No entanto, se buscavam mais rigor na fundamentação dos números reais, uma vez que a teoria de limites de Cauchy fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. Foi então que, segundo Eves (EVES, 2005), Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema de números reais fosse tornado mais rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança, esse notável programa ficou conhecido como aritmetização da análise, que se concretizou no final do século XIX com os trabalhos de Richard Dedeking (1831-1916), George Cantor (1845-1932), os quais permitiram a demonstração rigorosa dos teoremas fundamentais sobre limites sem utilizar recursos geométricos, criando dessa forma, uma nova forma de lógica matemática.

Foi assim que, no século XIX, quando segundo Ávila (2006), a definição de limite de Cauchy, correta, porém eivada da noção espúria de movimento - é agora substituída pela definição puramente numérica de Weirstrass: *f(x) tem limite L com x tendendo a* x_0 *significa que dado qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

3 EXPRESSÕES INDEFINIDAS E INDETERMINADAS

3.1 Expressão indefinida $\frac{k}{0}$, com $k \neq 0$

As expressões algébricas da forma $\frac{K}{0}$, com $k \neq 0$, não existem, pois considerando um número $x = \frac{k}{0}$, tem-se que $k = x * 0$, sendo por hipótese $k \neq 0$, logo não existe um número para x que satisfaça a igualdade. Isso porque qualquer número multiplicado por zero resultará em zero, portanto a divisão $\frac{k}{0}$ é indefinida ou impossível. Exemplo: $\frac{18}{3} = 6$, isto significa que num total de 18 objetos é possível separa-los em 3 grupos de 6. Fazendo, $\frac{18}{2} = 9$, isto significa que num total de 18 objetos é possível separa-los em 2 grupos de 9. Mas, $\frac{18}{0}$ não é possível separar os 18 objetos em 0 grupos. Por isso, a divisão por zero não tem significado.

3.2 Expressão indeterminada $\frac{0}{0}$

Pode-se pensar no $\frac{0}{0}$ como sendo igual a 1, tendo em vista que todo número dividido por si mesmo é igual a 1. Porém ao supor que $\frac{0}{0} = 1$ tem-se que $3 = 3 * 1 = 3 * (\frac{0}{0}) = \frac{(3*0)}{0} = \frac{0}{0} = 1$ (uma contradição), e assim por diante pode-se concluir que se trata de uma indeterminação podendo o resultado desta divisão ser qualquer valor real imaginável.

Por outro lado, pode-se pensar também que $\frac{0}{0}$ seja igual a 0, partindo da observação de que $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = etc = 0$. Usando o raciocínio anterior tem-se $\frac{0}{0} = \frac{(2*0)}{0} = 2 * (\frac{0}{0}) = 2 * 0 = 0$, não produzindo uma indeterminação, contudo, a definição $\frac{0}{0} = 0$ também é inaceitável pois produz resultados não naturais.

Seja a regra $\frac{(a*b)}{b} = a$, se $b \neq 0$ ficaria diferente para:

$$\frac{(a*b)}{b} = a \quad \text{se} \quad b \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{(a*b)}{b} = 0 \quad \text{se} \quad b = 0$$

Complica-se ao não se levar em conta o valor de a, podendo provocar resultados inaceitáveis, do tipo da seguinte descontinuidade de tendência: $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ao aceitar o resultado $\frac{0}{0} = 0$, tem-se:

$$y = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2 & \text{para } x \neq 2 \\ \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 0 & \text{para } x = 2 \end{cases}$$

Deste modo, a função ficaria descontìnua em $x = 1$. Neste caso é preferível deixar $\frac{0}{0}$ indeterminado em $x = 2$, mas com a possibilidade de redefini-la. Isto será visto no próximo capítulo com a introdução de limites.

Analisando as regras aritméticas onde a divisão é o oposto da multiplicação, logo se tem que $\frac{0}{0}$ poderá assumir qualquer valor numérico, pois qualquer número ao ser multiplicado por zero é igual a zero.

3.3 Expressão indeterminada 0^0

Durante vários séculos, alguns matemáticos como Euler e Cauchy estudaram a polêmica do valor 0^0. No entanto, a resposta desta polêmica foi revelada somente mais tarde pela contribuição de outros matemáticos.

É fácil verificar que 0^0 é indeterminado, partindo do resultado que $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$, logo $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Quando $a = 0$ tem-se que $\frac{0}{0} = 0^0$ que é uma expressão indeterminada por 3.2.

Também partindo do pressuposto de que 0^0 é igual a 1, pois todo número n^0 (para n não nulo) ao se forçar $n = 0$, levaria a considerar como natural definir $0^0 = 1$. Por outro lado, é razoável também pensar que 0^0 seja igual a zero, tendo em vista que $0^n = 0$ (para n não nulo), portanto $0^0 = 0$.

Existe uma longa discussão entre matemáticos, no entanto, não se pode dar uma resposta universalmente válida para 0^0, normalmente é mais conveniente definir $0^0 = 1$, porém há situações como no cálculo de limites, onde a prática é considerá-lo como uma forma indeterminada.

Existem ainda, outras formas de indeterminações que podem ser facilmente demonstradas, assim:

3.4 Expressão indeterminada $\infty - \infty$

Fazendo

$$\infty - \infty = \infty(1-1) = \infty * 0 = \infty.\frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Como visto em 3.2 uma indeterminação.

3.5 Expressão indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Fazendo

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad \text{(indeterminado)}$$

3.6 Expressão indeterminada $0.\infty$

Fazendo

$$0.\infty = \frac{1}{\infty}.\infty = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} \quad \text{(indeterminado)}$$

3.7 Expressão indeterminada 1^{∞}

Fazendo

$$1^{\infty} = (\frac{1}{1})^{\infty} = \frac{1^{\infty}}{1^{\infty}} = 1^{\infty-\infty}$$

Como se viu em 3.4 $\infty - \infty$ é indeterminado, então 1^{∞} não pode ser 1.

3.8 Expressão indeterminada ∞^0

Fazendo

$$\infty^0 = \infty^{1-1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$$

No próximo capítulo será visto a importância do conceito de limites para o cálculo dessas expressões indeterminadas onde se fará uso de processos intuitivos, artifícios algébricos e geométricos para solucionar essas indeterminações.

4 O LIMITE DE UMA FUNÇÂO

O estudo de limite de uma função visa determinar o que acontece (estudo do comportamento) com valores da imagem da função quando, no domínio dessa função, toma-se valores suficientemente próximos de um determinado ponto (número).

4.1 Definição intuitiva de Limite de uma função

De acordo com Stewart (2006, p. 93) escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L " se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficiente próximo de a (por ambos os lados de a) mas não igual a a.

Em outras palavras, isso significa que a existência de um limite de uma função, quando x tende a a, não depende necessariamente que a função esteja definida no ponto a pois quando calculamos um limite, considera-se os valores da função tão próximos quanto se queira do ponto a, porém diferente de a, ou seja, considera-se os valores da função na vizinhança do ponto a.

Deve-se prestar atenção quando se diz que $x \neq a$ na definição de limite, ou seja, significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida próximo de a (STEWART, 2006, p.93).

Considere a função dada por Leithold (1994, p.56) definida por $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$. Estudando o limite de $f(x)$ quando x tende a 1, ou seja: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Observe que para $x = 1$, a função não é definida, ou seja, não existe o $f(1)$, pois

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{2.1^2 + 1 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

resultando numa indeterminação, logo para solucionar esta indeterminação fatoramos o numerador obtendo:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 2x + 3$$

> Conforme Leithold (1994, p. 69), se $x \neq 1$, o numerador e o denominador podem ser divididos por $(x-1)$ para obtermos $2x+3$. Lembre-se que quando calculamos o limite de uma função, à medida que x aproxima-se de 1, estamos considerando valores de x próximos a 1 mas não iguais a 1. Portanto é possível dividir o numerador e o denominador por $x-1$.

Logo, simplificando a expressão, tem-se:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} 2x + 3 = 2 + 3 = 5$$

Portanto, mesmo não existindo $f(1)$, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 existe.

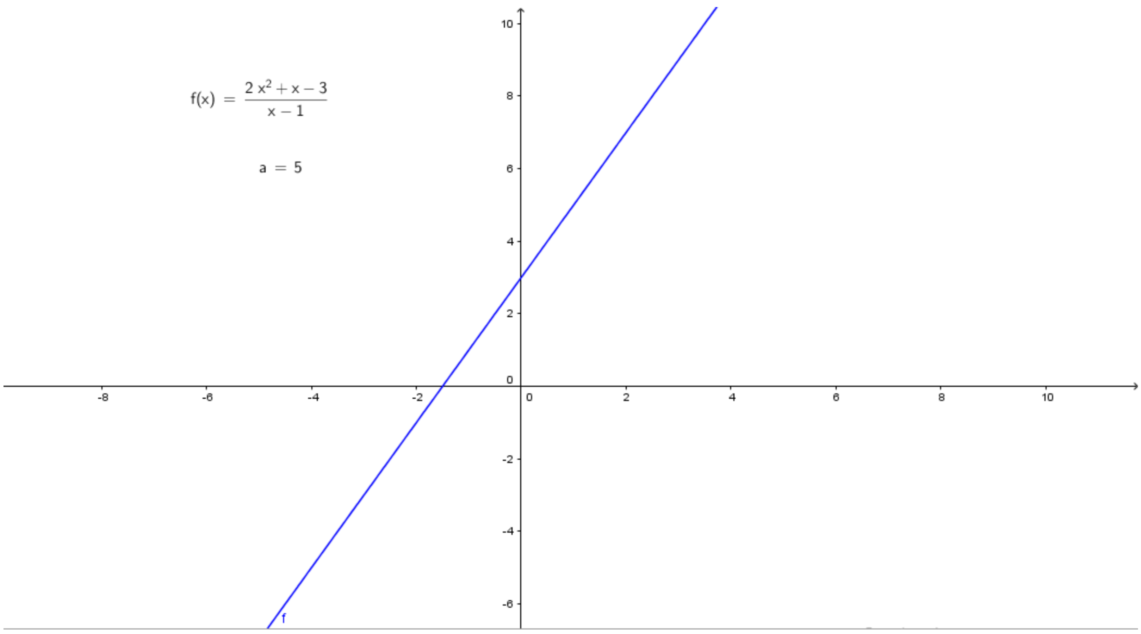

Figura 2: Gráfico de $f(x)$

Analisando intuitivamente a função f quando x assume valores próximos de 1, porém diferente de 1. Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, tem-se:

Tabela 1: Tabela de valores para $f(x) = 2x+3$

x	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999
$f(x) = 2x+3$	3	3,5	4	4,5	4,8	4,98	4,998	4,9998

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, tem-se:

Tabela 2: Tabela de valores para $f(x) = 2x+3$

x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x) = 2x+3$	7	6,5	6	5,5	5,2	5,02	5,002	5,0002

Observa-se em ambas as tabelas que, à medida que x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próxima 5.

Nota-se na Tabela 1 que:

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 3$, isto é, $x-1 = 0-1 = -1 \Rightarrow f(x)-5 = 3-5 = -2$

$x = 0,25 \Rightarrow f(x) = 3,5$, isto é, $x-1 = 0,25-1 = -0,75 \Rightarrow f(x)-5 = 3,5-5 = -1,5$

$x = 0,5 \Rightarrow f(x) = 4$, isto é, $x-1 = 0,5-1 = -0,5 \Rightarrow f(x)-5 = 4-5 = -1$

$\vdots$

$x = 0,9999 \Rightarrow f(x) = 4,9998$, isto é, $x-1 = 0,9999-1 = -0,0001 \Rightarrow f(x)-5 = 4,9998-5 = -0,0002$

e, a Tabela 2 mostra que:

$x = 2 \Rightarrow f(x) = 7$, isto é, $x-1 = 2-1 = 1 \Rightarrow f(x)-5 = 7-5 = 2$

$x = 1,75 \Rightarrow f(x) = 6,5$, isto é, $x-1 = 1,75-1 = 0,75 \Rightarrow f(x)-5 = 6,5-5 = 1,5$

$x = 1,5 \Rightarrow f(x) = 6$, isto é, $x-1 = 1,5-1 = 0,5 \Rightarrow f(x)-5 = 6-5 = 1$

$\vdots$

$x = 1,0001 \Rightarrow f(x) = 5,0002$, isto é, $x-1 = 1,0001-1 = 0,0001 \Rightarrow f(x)-5 = 5,0002-5 = 0,0002$

Portanto, pelas duas tabelas, 1 e 2, tem-se que:

$|x-1| = 1 \Rightarrow |f(x)-5| = 2$

$|x-1| = 0,75 \Rightarrow |f(x)-5| = 1,5$

$|x-1| = 0,5 \Rightarrow |f(x)-5| = 1$

$\vdots$

$|x-1| = 0,0001 \Rightarrow |f(x)-5| = 0,0002$

Observa-se que se pode tomar $f(x)$ tão próximos de 5 quanto se deseja, bastando para isto tomar x suficiente próximos de 1.

Outra forma mais precisa de dizer isto é que se pode tornar o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficiente pequeno. Isto é, $|f(x)-5|$ pode se tornar tão pequeno quanto se desejar, tomando $|x-1|$ suficientemente pequeno. A matemática utiliza as letras gregas ε (epsilon) e δ (delta) para indicar essas pequenas diferenças. Assim, dado um número ε, podemos tornar $|f(x)-5| < \varepsilon$ onde, calculando o módulo, resulta:

$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon$$

É importante perceber que δ depende do ε considerado. Nas duas tabelas tem-se que:

$$|x-1| = 1 \Rightarrow |f(x)-5| = 2$$

Então; se dado $\varepsilon = 2$, toma-se $\delta = 1$ e afirma-se que:

$$0 < |x-1| < 1 \Rightarrow |f(x)-5| < 2$$

onde calculando o módulo, resulta:

$$1-1 < x < 1+1 \Rightarrow 5-2 < f(x) < 5+2$$

$$0 < x < 2 \Rightarrow 3 < f(x) < 7$$

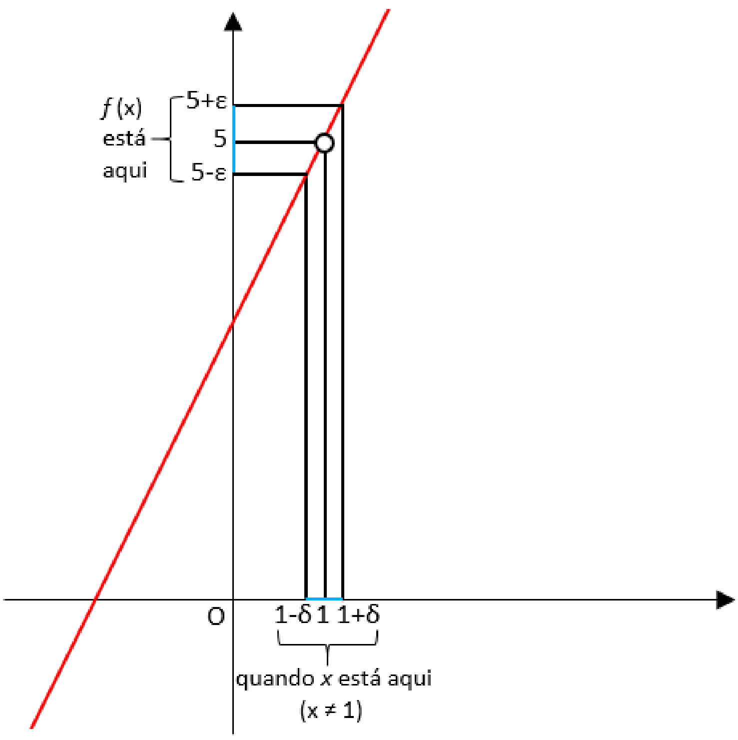

Figura 3: Gráfico de $f(x)$

Desde que, para qualquer valor positivo de ε, pode-se encontrar um valor apropriado para δ tal que:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x-5)| < \varepsilon$$

portanto se diz que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 5, notado por:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

4.2 Definição Formal de Limite

Segundo Stewart (2009, p. 115) seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.

Nota-se de acordo com o exemplo abaixo que quando a função é determinada num ponto o $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, mas quando a função não for determinada, ou seja, representada por uma das formas indeterminadas apresentadas no capítulo 3, que neste caso o conceito de limite se apresenta como alternativa para a abordagem adequada destas questões.

Exemplo. Seja a função $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$, neste caso a função não esta definida para $x = 2$, por isso que a definição de limite faz a diferença, pois ela aceita valores de x que estão próximos de a, mas não iguais a a. Para resolver limites de funções indefinidas e indeterminadas pode-se lançar mão de resoluções por intuição, recursos algébricos ou mesmo geométricos.

4.2.1 Resolução utilizando noção intuitiva

Na resolução intuitiva constrói-se tabelas com valores se aproximando do ponto 2, uma com valores inferiores e outra com valores superiores, mas nunca igual a 2. Assim:

$x < 2$	$1,5$	$1,9$	$1,99$	1,999
$f(x)$	$0,28$	$0,256$	$0,2506$	0,25006..

ou

$x > 2$	$2,5$	$2,1$	$2,01$	2,001
$f(x)$	$0,222$	$0,2439$	$0,2493$	0,24994..

Com base nestes valores pode-se intuir que $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$.

4.2.2 Resolução por recursos algébricos

Neste caso tem-se a fatoração algébrica e os pressupostos matemáticos como principais recursos. No exemplo pode-se começar fatorando o denominador, assim:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x^2-2^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Como na fatoração encontra-se no denominador um termo igual no denominador, mas no ponto $x=2$ ele representa uma indeterminação e considerando a definição de limite onde diz que x pode assumir valores próximos a 2 mas não iguais a 2. Logo, pode-se dividir o numerador e o denominador por $x-2$, então:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

4.2.3 Resolução utilizando recursos geométricos

A resolução de problemas através de recursos geométricos podem ser feitos com a utilização de softwares matemáticos como o Geogebra utilizado neste trabalho. Com a inserção destes softwares educativos os alunos são motivados a desenvolver habilidades de visualização, interpretação e resolução de problemas, proporcionando-lhes a construção do próprio conhecimento.

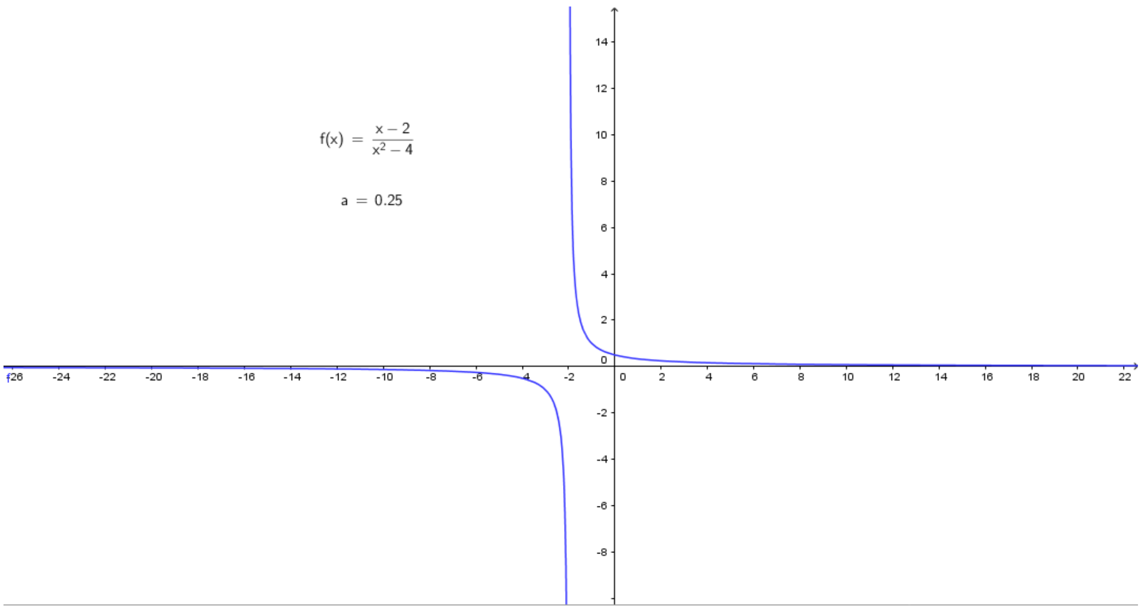

Figura 4: Gráfico de $f(x)$

4.3 Formas Indefinidas do Tipo $\frac{k}{0}$ que podem ser resolvidas com o uso de limites

De acordo com o item 3.1 a expressão $\frac{k}{0}$ é indefinida. Porém, a divisão $\frac{k}{0}$ pode ser contornada em se tratando de limites, ou seja, esta divisão pode ser infinita aplicando-se valores aos quocientes próximos a zero. Considerando $k = 1$ tem-se:

$\frac{1}{0,1} = 10$

$\frac{1}{0,01} = 100$

$\frac{1}{0,001} = 1000$

$\frac{1}{0,0001} = 10000$

$\frac{1}{0,00001} = 100000$

$\vdots$

$\frac{1}{0,0000000000001} = \text{número muito grande}$

Nota-se que quanto mais próximo o denominador de zero, maior é o valor da divisão tendendo ao infinito. Portanto, embora $\frac{1}{0}$ seja indefinido no conjunto dos números, ficaria definido no cálculo de limites através do objeto numérico infinito. É importante destacar que o infinito não é um número real, não podendo ser realizadas determinadas operações aritméticas, as quais levariam a resultados absurdos e contraditórios.

Teorema 1 (Limites infinitos com $x \to 0^+$ ou $x \to 0^-$). Segundo Leithold (1994, p. 80) se r for um inteiro positivo qualquer, então:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = -\infty$ *se r for ímpar*

iii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = +\infty$ *se r for par*

Exemplo 1 Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, com $x \neq 0$. Verificando os valores de $f(x)$ quando x esta próximo de 0.

Atribuindo a x valores próximos de 0, à esquerda de 0, tem-se:

Tabela 3: Tabela de valores para $f(x) = \frac{1}{x^2}$

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$
$f(x)$	100	10.000	1.000.000

Agora atribuindo a x valores próximos de 0, à direita de 0, tem-se:

Tabela 4: Tabela de valores para $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$
$f(x)$	100	10.000	1.000.000

Teorema 2 (Limites Laterais). Segundo Leithold (1994, p. 74) *o limite de $f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais.*

Nota-se que, quando x se aproxima de 0, quer pela esquerda ($x \to 0^-$), quer pela direita ($x \to 0^+$), $f(x)$ assume valores cada vez maiores (aumenta ilimitadamente). Logo, de acordo com o Teorema 2 pode-se escrever que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Para melhor compreensão, observe o esboço do gráfico desta função na Figura 5:

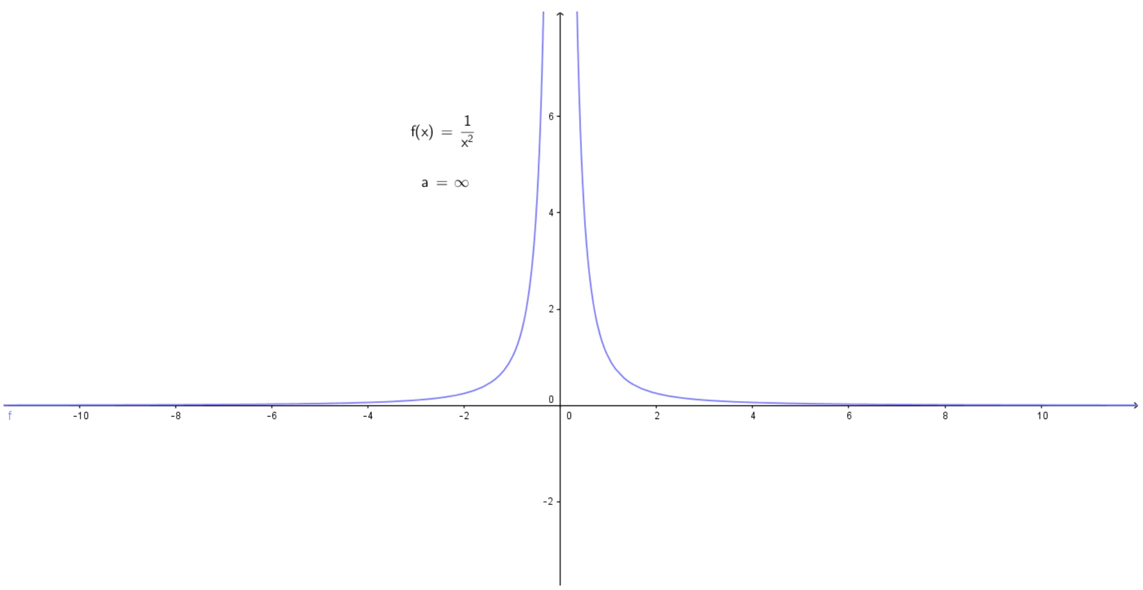

Figura 5: Gráfico de $f(x)$

Exemplo 2 Seja f uma função $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. De forma análoga, quando x se aproxima de 0, quer pela esquerda, quer pela direita, $f(x)$ assume valores cada vez menores (decresce ilimitadamente). Logo, pelo teorema dos limites laterais pode-se escrever:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

Para melhor compreensão, observe o comportamento de $f(x)$ tendendo ao infinito negativo, quando x se aproxima de 0.

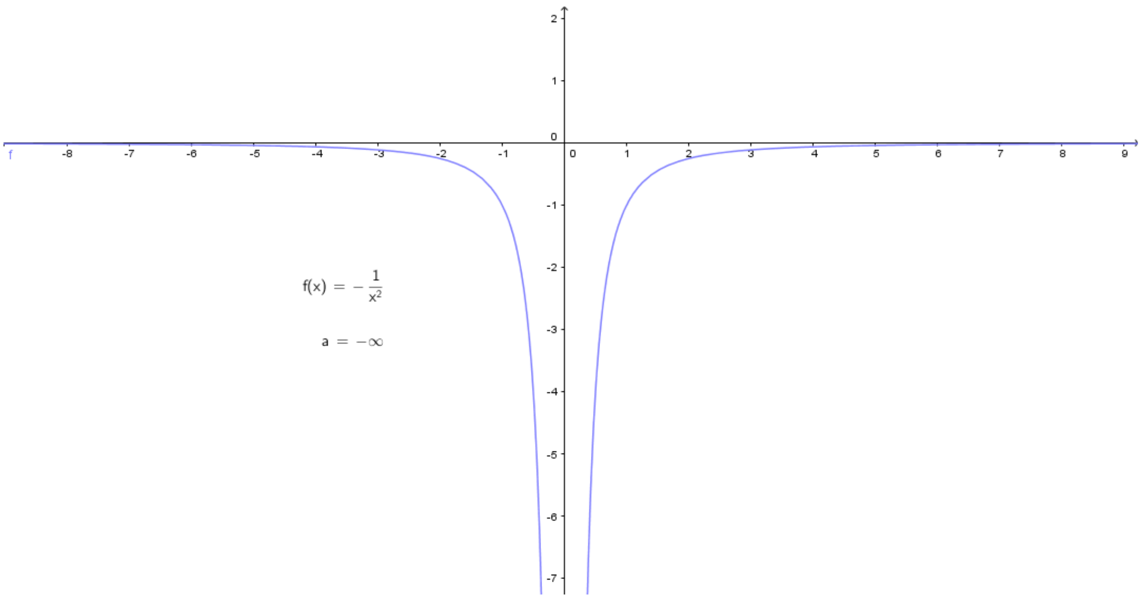

Figura 6: Gráfico de $f(x)$

Usa-se a notação $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, contudo, o símbolo $\pm\infty$ não é considerado um número real, e portanto, não existe o limite, entretanto o símbolo indica que a função pode assumir valores tão grandes quanto quiser, bastando para isso escolhermos os valores de x tão próximos de a quanto se queira.

Exemplo 3 Seja $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, sendo $x \neq 1$

Tabela 5: Tabela de valores para $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$\to 1$
$f(x)$	22	202	2002	$\to +\infty$

Observa-se que, quando x tende a 1 pela direita, $f(x)$ assume valores positivos arbitrariamente grandes (aumenta ilimitadamente). Assim:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Tabela 6: Tabela de valores para $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$\to 1$
$f(x)$	-18	-198	-1998	$\to -\infty$

Por outro lado, quando x tende a 1 pela esquerda, $f(x)$ assume valores cada vez menores (decresce ilimitadamente). Assim:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

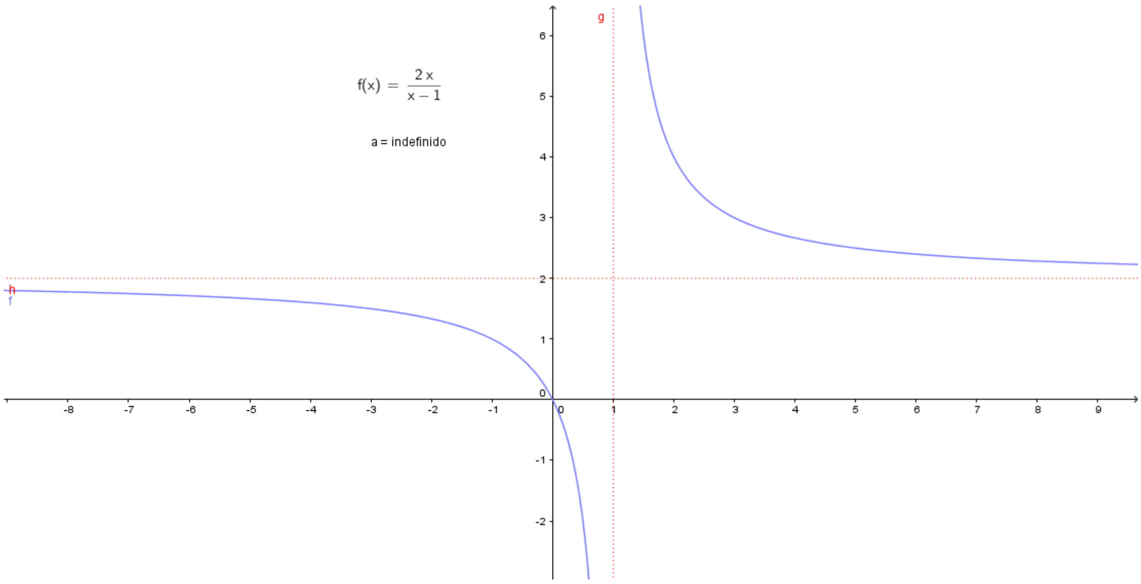

Figura 7: Gráfico de $f(x)$.

Considerando a função $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, exibida no gráfico da Figura 7. A função aumenta sem limite quando x tende a 1 pela direita, mas decresce sem limite, à medida que x se aproxima de 1 pela esquerda. Assim, neste caso não há símbolo único para o limite bilateral neste caso. Dizemos que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1}$ não existe.

Teorema 3 (limite de uma função racional) Pode ser aplicado se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = K$, onde K é uma constante diferente de zero.

(i) Se $K > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) Se $K > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) Se $K < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iiii) Se $K < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema será válido se "$x \to a$"for substituído por "$x \to a^+$"ou "$x \to a^-$". (Leithold, 1994, p. 81)

Aplicando esse terorema , pode-se frequentemente obter uma indicação de que o resultado será $+\infty$ ou $-\infty$, tomando um valor adequado de x próximo de a para se assegurar de que o quociente é positivo ou negativo.

4.4 As Formas Indeterminadas

Conforme Stewart (2006, p. 124), para o cálculo do limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando-se o valor da função em a. No entanto, algumas vezes esta regra falha. Isto acontece quando se faz a substituição direta de x por seu valor de tendência e encontram-se indeterminações. É importante entender que, quando isso acontece, não se esta diante da resposta final. Neste caso, deve-se utilizar de artifícios algébricos para solucionar essas indeterminações.

4.4.1 Forma do Tipo $\frac{0}{0}$

Se f e g forem duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então a função $\frac{f}{g}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em a.

Essas situações acontecem frequentemente, logo para solucionar a indeterminação, se torna necessário o uso de técnicas de simplificação para calculá-las, como: fatoração, racionalização, dispositivo prático de Briot-ruffini para divisão de polinômios, etc.

Exemplo 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{(indeterminação)}$$

Resolvendo o

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

Como na definição de limite está pressuposto que x pode ser próximo de 1 mas nunca igual a 1. Condição que se habilita fazer a simplificação, então:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

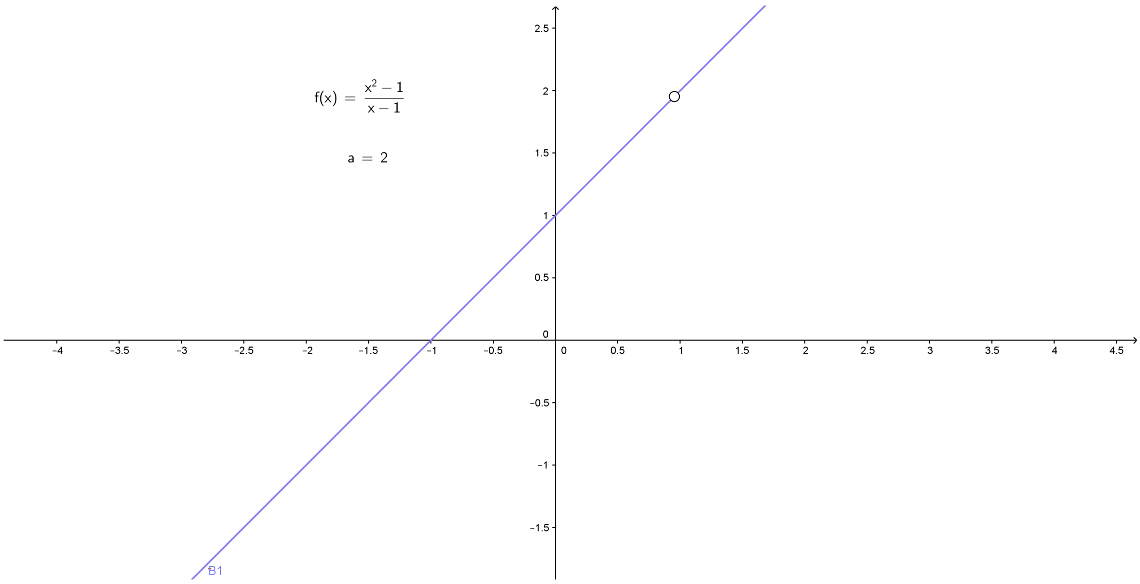

Figura 8: Gráfico de $f(x)$

Exemplo 2

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3}$$

Resolvendo o

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{3^2-3.3}{3-3} = \frac{0}{0} \quad \text{(indeterminação)}$$

Logo deve-se simplificar a expressão para solucionar a indeterminação, então:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x = 3$$

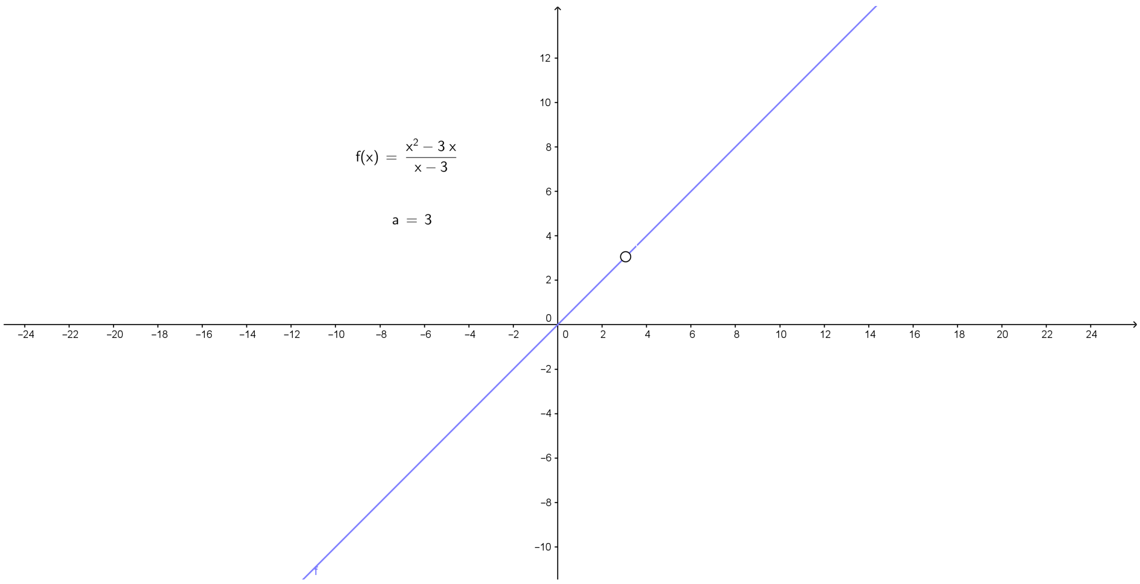

Figura 9: Gráfico de $f(x)$

Teorema 4 (Teorema do confronto). Segundo Stewart (2006, p.110) *Se* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a), e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Exemplo 3 Limite fundamental trigonométrico $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$

Atribuindo valores a x pela direita e pela esquerda de zero, conforme mostra a tabela 7, notamos que, para valores cada vez mais próximos de zero, obtem-se valores de $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ cada vez mais próximos de 1.

Tabela 7: Tabela de valores para $\dfrac{sen(x)}{x}$

x	$\dfrac{sen(x)}{x}$
± 1	$0,84147098$
$\pm 0,5$	$0,95885108$
$\pm 0,4$	$0,97354586$
$\pm 0,3$	$0,98506736$
$\pm 0,2$	$0,99334665$
$\pm 0,1$	$0,99833417$
$\pm 0,05$	$0,99958339$
$\pm 0,01$	$0,99998333$
$\pm 0,005$	$0,99999583$
$\pm 0,001$	$0,99999983$

Assim, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$

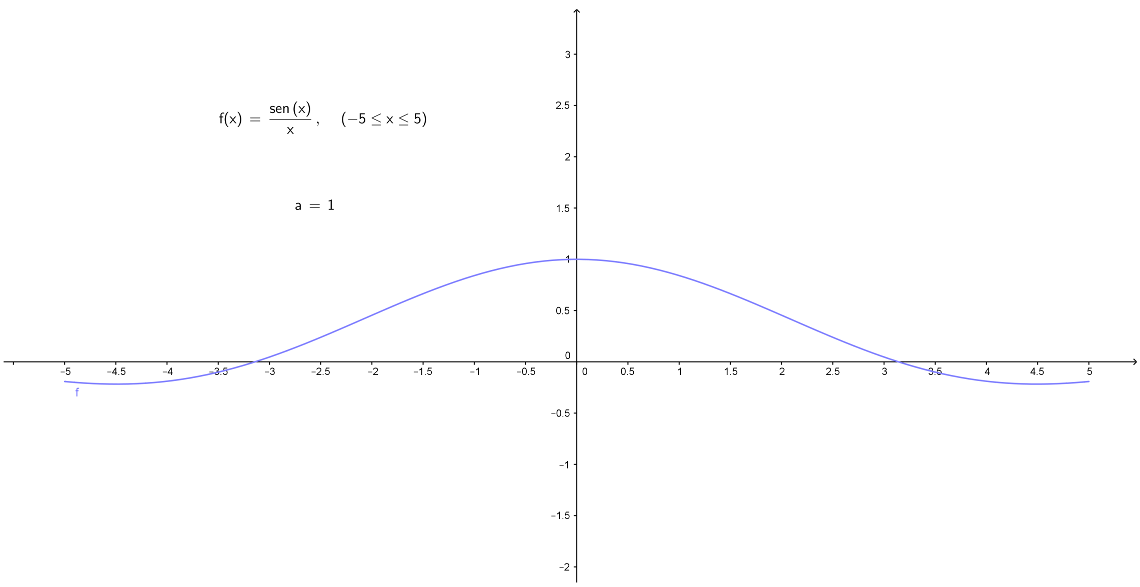

Figura 10: Gráfico de $f(x)$.

Demonstração: Cosiderando a circunferência de raio 1.

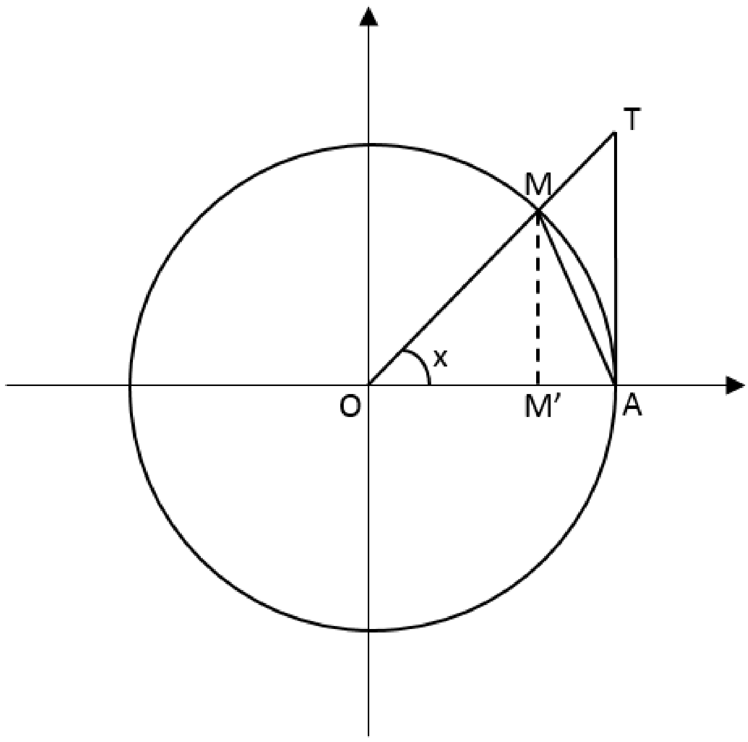

Figura 11: Circunferência de raio 1

Seja x a medida em radianos do arco AOM e considerando x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ de acordo com a Figura 11. Observa-se que:

$$\text{área} \triangle MOA < \text{área setor } MOA < \text{área} \triangle AOT$$

$$\frac{OA.MM}{2} < \frac{OA.AM}{2} < \frac{OA.AT}{2}$$

$$MM' < AM < AT$$

$$sen(x) < x < tg(x)$$

Dividindo tudo por $sen(x) > 0$, vem:

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tg(x)}{sen(x)} = \boxed{1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tg(x)}{sen(x)}} \tag{1}$$

Sendo: $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, então,

$$\frac{tg(x)}{sen(x)} = \frac{\frac{sen(x)}{cos(x)}}{sen(x)} = \frac{sen(x)}{sen(x)}.\frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{cos(x)}$$

Substituindo em 1, tem-se:

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)} \quad \text{, invertendo obtem-se:} 1 > \frac{sen(x)}{x} > cos(x)$$

Como o $\lim_{x\to 0}(1) = 1$ e $\lim_{x\to 0} cos(x) = cos(0) = 1$, então de acordo com o teorema do confronto a função $\frac{sen(x)}{x}$, que esta entre $cos(x)$ e 1, tem também limite igual a 1 quando x tende a 0 (zero), logo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$$

4.4.2 Forma do Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Esta forma de indeterminação ocorre quando se tem no numerador e no denominador polinômios com $x \to \pm\infty$.

Exemplo 1

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x+5}{4x^3-2} = \frac{2.\infty^5+3.\infty+5}{4.\infty^3-2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para solucionar a indeterminação precisa-se manipular algebricamente a expressão.

Conforme Guidorizzi (2001, p. 101)i, coloca-se em evidência a mais alta potência de x que ocorre no numerador e procede-se da mesma forma no denominador. Deste modo, irão aparecer no denominador e numerador expressões do tipo $\frac{1}{x^n}$ que tendem a zero para $x \to +\infty$, o que facilitará o cálculo do limite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x+5}{4x^3-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5(2+\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^5})}{x^3(4-\frac{2}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = 2.\infty^2 = +\infty$$

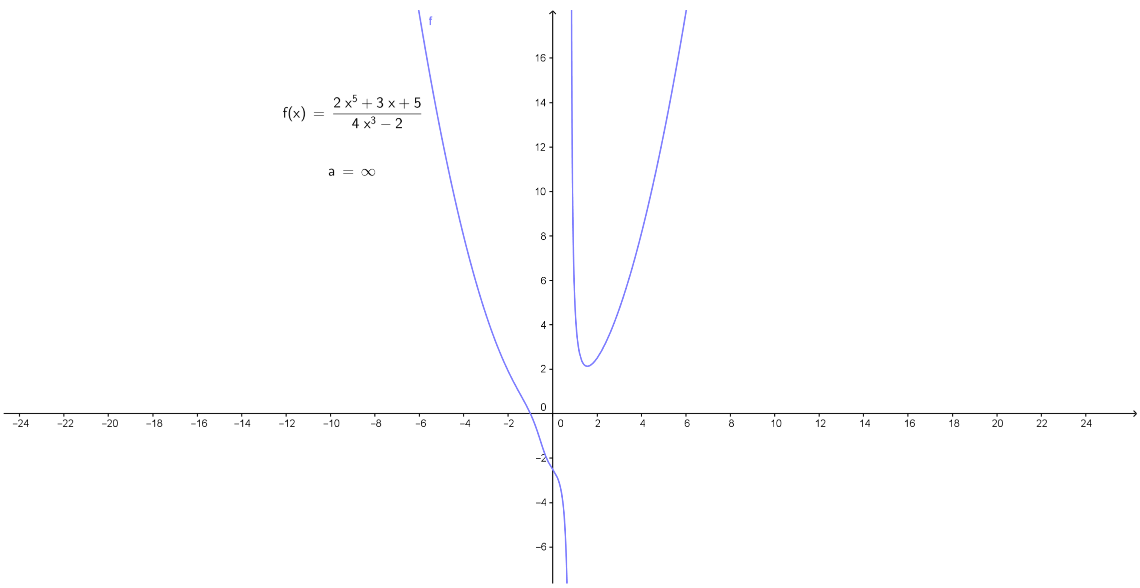

Figura 12: Gráfico de $f(x)$

Observa-se que se o grau do numerador for superior ao grau do denominador então o limite é mais ou menos infinito.

Exemplo 2

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\infty^4}{2\infty^5} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminação}$$

Para solucionar esta indeterminação deve-se simplificar a expressão dividindo tudo por x^3.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{2} = \infty$$

Observa-se que o comportamento do polinômio no infinito é ditado pelo termo de maior grau, chamado de termo dominante.

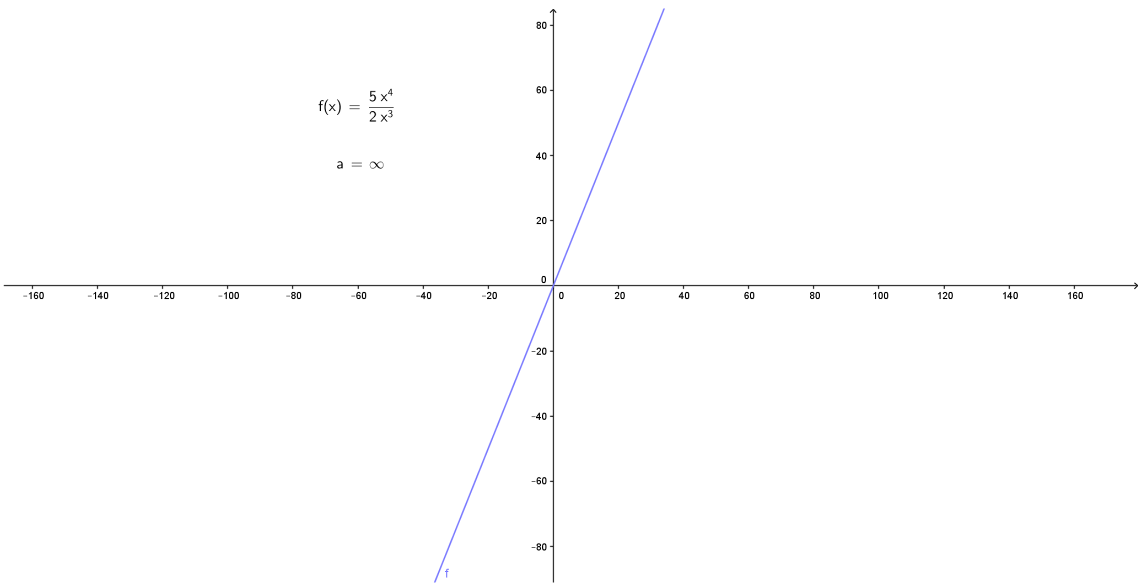

Figura 13: Gráfico de $f(x)$

Exemplo 3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2+x} = \frac{\infty^2+2\infty+3}{\infty^2+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para solucionar esta indeterminação coloca-se o x^2 em evidência, logo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Observa-se que quando se tem uma função polinominal com numerador e denominador do mesmo grau, o limite é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

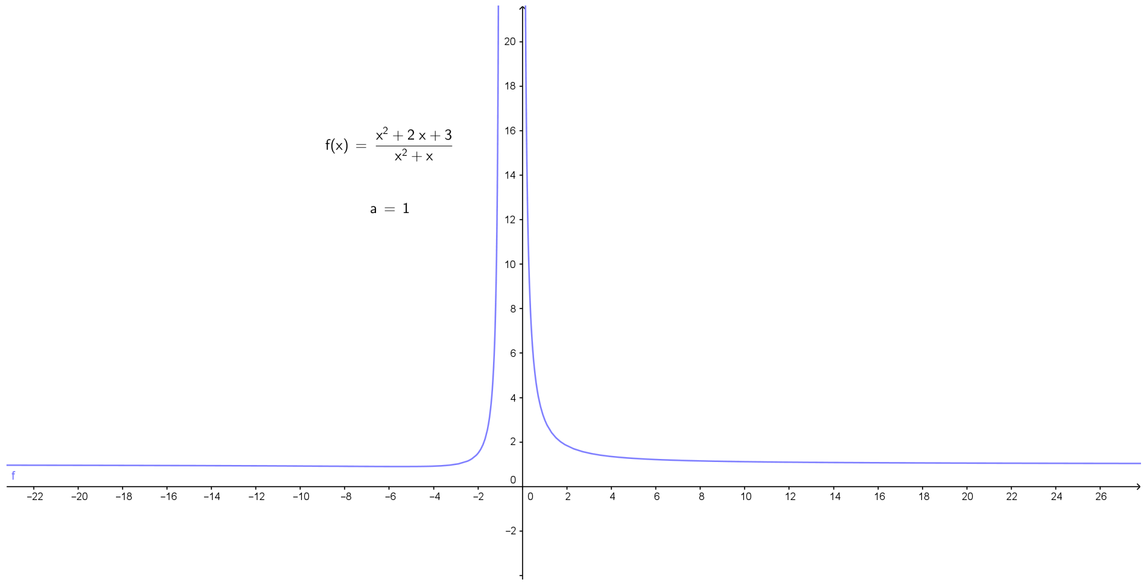

Figura 14: Gráfico de $f(x)$

Teorema 5 (Limites infinitos com $x \to \pm\infty$) Segundo Leithold (1994, p. 90) *Se r for um inteiro positivo qualquer, então:*

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

Exemplo 4

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+2}{4x^4-5} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{indeterminado}$$

Para solucionar a indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$ divide-se todos os termos pelo termo de maior grau, obtendo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^4} - \frac{3x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{4x^4}{x^4} - \frac{5}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{4} = 0$$

Observa-se que quando o grau do numerador for inferior ao grau do denominador o limite será zero para x tendendo ao infinito.

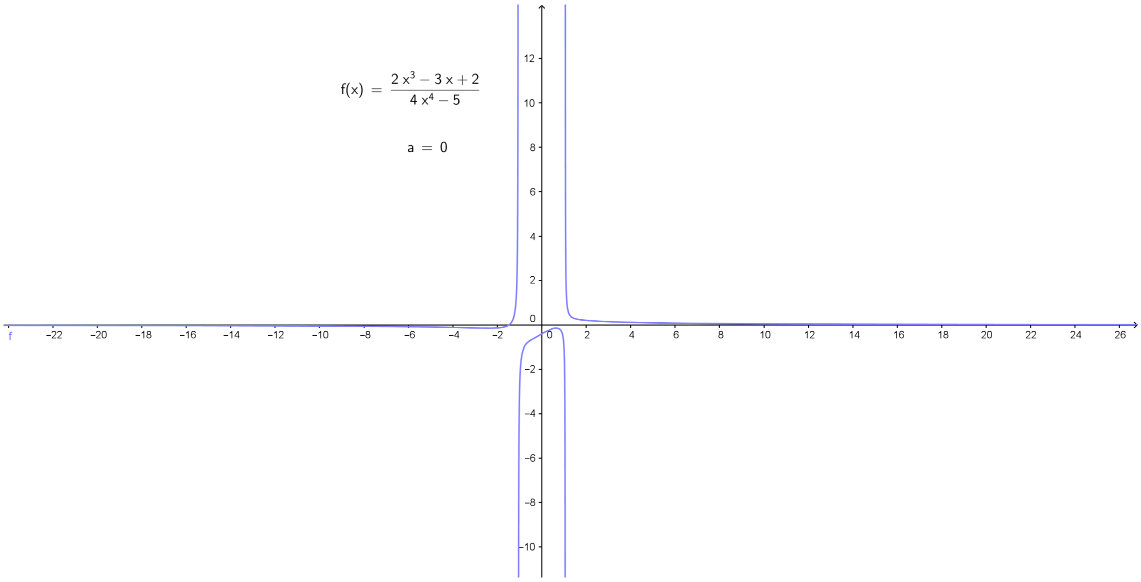

Figura 15: Gráfico de $f(x)$

4.4.3 Forma do Tipo $\infty - \infty$

Primeiramente, vale lembrar que pode acontecer que a diferença entre f e g quando duas funções tendem ao infinito, que o limite pode ser finito, como por exemplo:

Seja $f(x) = K + \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, onde K é uma constante arbitrária. Logo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = K$$

Esse exemplo mostra que é possível um limite da forma do tipo $\infty - \infty$ ter limite finito. Entretanto limite dessa forma também pode ser infinito.

Exemplo 1 Seja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to\infty} x^3 - \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty - \infty$
Logo, não podemos aplicar a Lei do Limite, pois ∞ não é um número (não se pode definir $\infty - \infty$). No entanto, pode-se escrever:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2(x-3) = \infty$$

pois, como x^2 e $x - 3$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto.

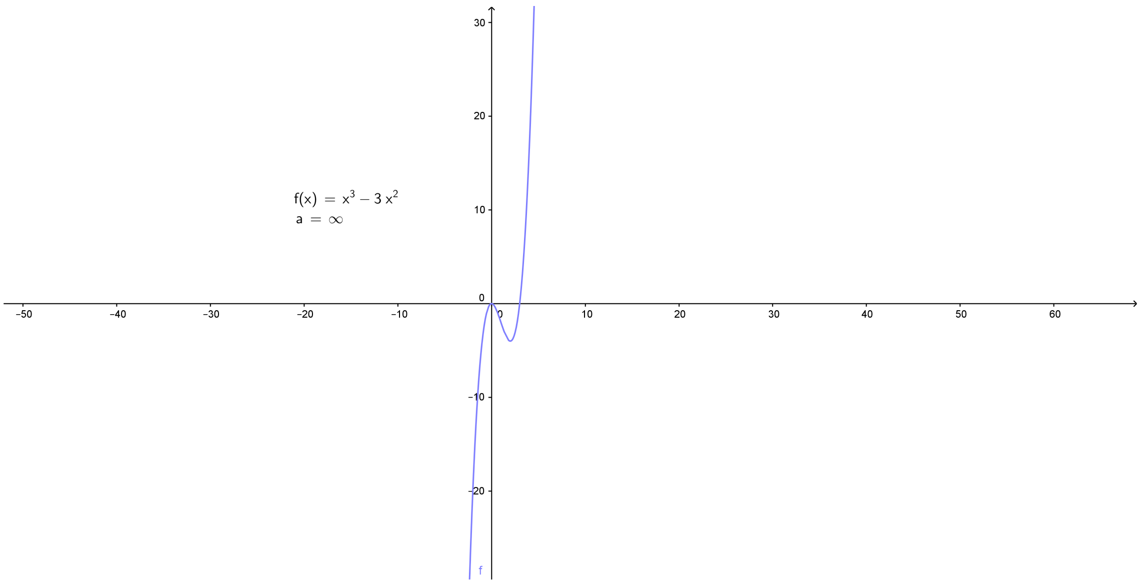

Figura 16: Gráfico de $f(x)$

Exemplo 2

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + 3) = \infty - \infty$$

Para solucionar a indeterminação utiliza-se artificios do cálculo, colocando x^3 em evidência.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + 3)$$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 (1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}) = \lim_{x \to \infty} x^3 = +\infty$$

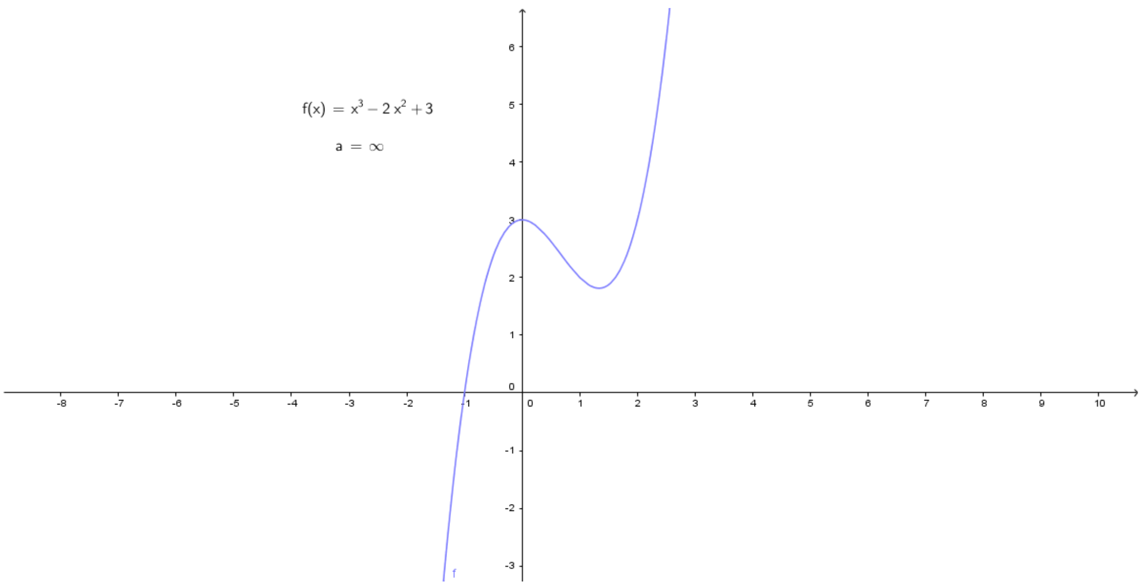

Figura 17: Gráfico de $f(x)$

4.5 Forma Indeterminada do tipo $0.\infty$

A indeterminação $0.\infty$ pode ser tranformada numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, vejamos:

Exemplo 1

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = \infty.0$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}$$

Como visto no exemplo 3 com funções polinomiais de mesmo grau, tem-se que o limite é o quocientes dos coeficientes dos termos de maior grau, logo:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

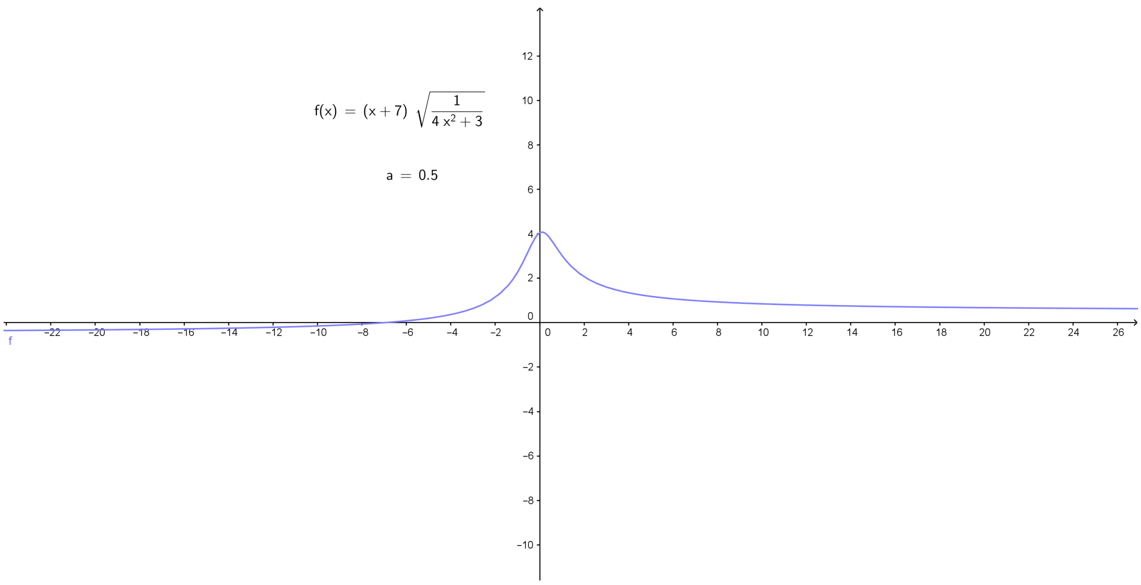

Figura 18: Gráfico de $f(x)$

Exemplo 2

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{4x} = \frac{0}{0}$$

simplificando, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Lembrando que a função não está definida para x igual a zero, apenas nas proximidades de zero, logo pela definição de limite se permite dividir o numerador e o denominador por x.

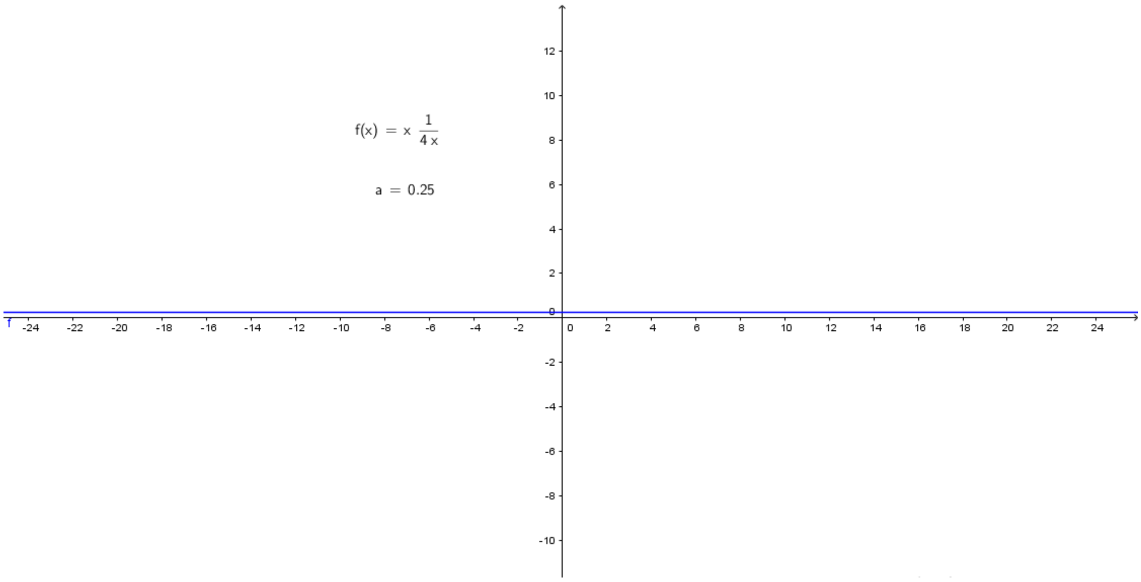

Figura 19: Gráfico de $f(x)$

Observa-se que os casos de indeterminações foram resolvidos através do uso de técnicas matemáticas, porém existe outro método para resolvê-los, conhecido como Regra de L'Hôspital, a qual não explanaremos neste trabalho.

5 GEOGEBRA

O uso de softwares educativos em ambientes de aprendizagem visa aprimorar a qualidade de ensino, propiciando aos alunos a construção do próprio conhecimento, que segundo Borba e Penteado (2000, p. 10):

> O professor pode deixar de ser a única fonte de informações, precisando desempenhar outras funções no sentido de orientar os estudantes na pesquisa de novos conhecimentos e administrar as dificuldades decorrentes do uso de tecnologias e do excesso e dispersão de informações nas redes informáticas.

A matemática possui um número privilegiado de softwares educativos, haja vista a necessidade de se fazer o conteúdo mais atrativo e compreensível, afim de proporcionar melhores resultados. Contudo, escolhemos o software Geogebra como forma de introduzir a informática como ferramenta motivadora no processo ensino aprendizagem, onde neste trabalho, utilizamos este software para análise gráfica no processo de ensino de limite de funções, obtendo através das manipulações uma melhor compreensão do comportamento dessas funções.

O Geogebra é um software educacional matemático, livre e dinâmico, criado em 2001, por Markus Hohenwarter, na Universidade Americana Flórida Atlântic University, para ser utilizado em sala de aula, nos estudos das áreas de Álgebra, Geometria e Cálculo.

A interface do Geogebra apresenta duas janelas de trabalho uma com informações algébricas e a outra com informações geométricas. Nesse sentido, proporciona uma melhor visualização, pois apresenta simultaneamente as representações algébricas e geométricas de um mesmo objeto, tendo uma interação constante à medida que são fornecidos os comandos no campo de entrada.

5.1 Conhecendo o Programa

Para baixar a última versão do Geogebra, basta acessar a página do programa :`www.geogebra.org` e fazer o download.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2º. ed. [S.l.]: São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1999.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática.** [S.l.]: Ciência Moderna Ltda, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** [S.l.]: Campinas: Unicamp, 2005.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** 5º. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo em Geometria Analítica.** 3º. ed. [S.l.]: São Paulo: HARBRA Ltda., 1994.

STEWART, J. **Cálculo: Volume I.** 5º. ed. [S.l.]: São Paulo: Thomsom Learning, 2006.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura.** 2º. ed. [S.l.]: São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2006.