فصل 2
تجزیه و تحلیل گره و مش

این فصل و دو فصل بعد به روش های تجزیه و تحلیل شبکه اختصاص دارد. در این سه فصل با معلوم بودن گراف شبکه اجزاء و منابع نا بسته مدار و شرائط اولیه، طرز تشکیل معادلات شبکه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. روش های حل این معادلات، به دست آوردن جواب آنها و بررسی خواص جواب آنها در فصل های 4 تا 7 مورد بحث خواهد بود.

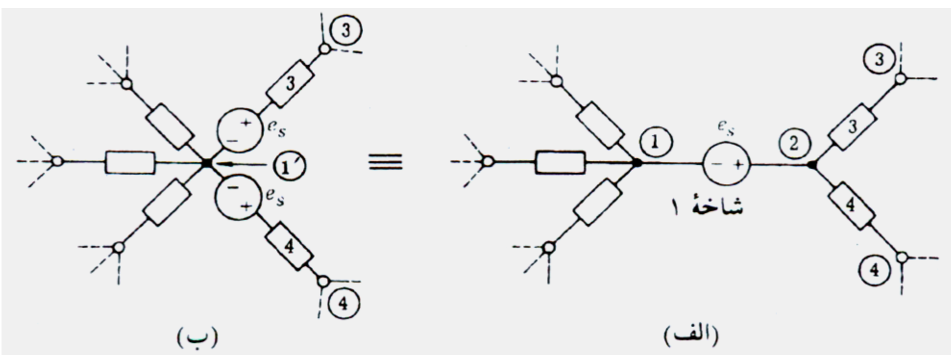
در فصل 2 تجزیه و تحلیل گره و مش به طور منظم و به صورتی که در تحلیل کامپیوتری شبکه ها قابل استفاده باشد، بررسی خواهد شد. همچنین نتایج این تجزیه و تحلیل های منظم باعث به دست آوردن روش هائی برای توسعه خواص این شبکه ها خواهد شد.

در بخش 1 از این فصل تبدیل منابع بررسی می شود. در بخش 2 تجزیه و تحلیل گره با استفاده از قوانین کیرشف ارائه می شود. در تکمیل بخش 2 و در بخش 3 تجزیه و تحلیل گره به طور منظم در مورد شبکه های خطی غیر قابل تغییر با زمان بحث خواهد شد. شبکه های دوگان در بخش 4 خواهد آمد. بالاخره تجزیه و تحلیل مش در بخش های 5 و 6 بیان خواهد شد. در تمام این مباحث تنها شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان مورد نظر است.

2-1: تبدیل منابع:

برای آنکه جدا کردن شاخه هائی، که تنها شامل منابع هستند از شاخه های دیگر لازم نباشد، بهتر است نخست دو تبدیل شبکه را چنان بیابیم که بتوان بدون آنکه در مساله و جواب آن اثری داشته باشند، محل منابع را در شبکه تغییر داد.

این تبدیل ها را می توان هم برای منابع نابسته و هم برای منابع وابسته به کار برد. دو نوع تبدیل منبع در شکل های 2-1 و 2-2 نشان داده شده است. در شکل (2-1 الف) منبع ولتاژ e_s شاخه 1 را درست می کند، که میان گره های 1 و 2 قرار دارد. گره 2 توسط شاخه 3 به گره 3 و توسط شاخه 4 به گره 4 متصل شده است. اگر محاسبه جریان شاخه 1 مورد نظر نباشد، می توان بجای مدار شکل (2-1 الف) از معادل آن، که در شکل (2-1 ب) رسم شده، استفاده کرد. در مدار جدید شاخه 1 حذف شده و با انطباق گره های 1 و 2 بر یکدیگر گره جدیدی با شماره $1'$ به وجود آمده است. برای معادل شدن این دو مدار، باید دو منبع e_s در شاخه 3 و شاخه 4 مدار جدید قرار داده شوند.

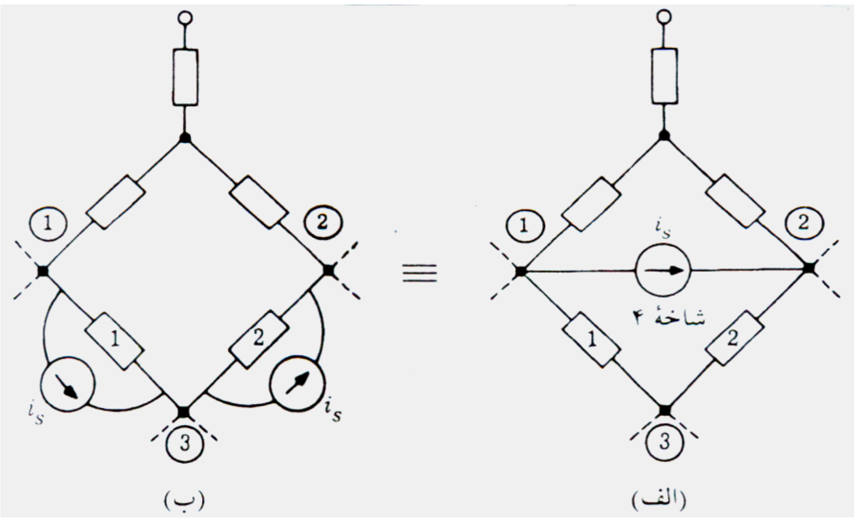


شکل 2-1: تبدیل منبع، شاخه ای که تنها از یک منبع ولتاژ تشکیل شده، حذف شده است.

برای نشان دادن اینکه تبدیل فوق جواب مساله را تغییر نمی دهد، تنها لازم است که در هر دو شبکه، معادلات KVL برای تمام حلقه هائی که شامل شاخه 3 و همچنین تمام حلقه هائی که شامل شاخه 4 می باشند، نوشته شوند. این معادلات برای هر دو شبکه کاملاً یکسان است. همچنین وقتی KCL در گره $1'$ اعمال شود نتیجه حاصل، مساوی مجموع معادلات به دست آمده از به کار بردن KCL در گره های 1 و 2 از شبکه اصلی می باشد.

لازم به ذکر است، که تبدیل منابعی که در مدار شکل 2-1 صورت گرفته، به این منظور بوده که اگر بخواهیم در مورد این مدار تحلیل گره به کار بریم، لازم است که منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کنیم و به لحاظ این که در مدار شکل (2-1 الف) با منبع ولتاژ e_s امپدانسی به صورت سری قرار ندارد، لذا قابل تبدیل به منبع جریان نیست ولی پس از استفاده از تبدیل منبع و به کار بردن مدار شکل (2-1 ب) به سادگی می توان منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده و از تحلیل گره برای انجام محاسبات مدار استفاده کرد.

در مدار شکل (2-2 الف) بین گره های 1 و 2 تنها منبع جریان i_s وصل شده است. گره های 1 و 2 نیز توسط شاخه های 1 و 2 به گره 3 وصل شده است. در مدار معادلی در شکل (2-2 ب) نشان داده شده، منبع جریان شکل (الف) حذف شده و به جای آن دو منبع جدید جریان i_s موازی با شاخه های 1 و 2 وصل شده اند. در هر دو مدار KCL گره های 1 ، 2 و 3 مشابه هستند و در واقع این تبدیل جواب مساله را تغییر نمی دهد.



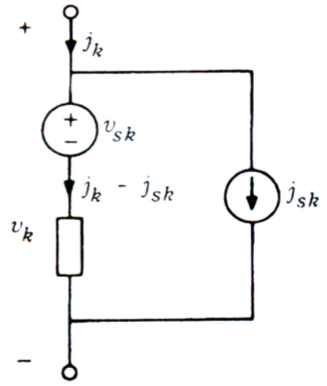
شکل 2-2: تبدیل منبع، شاخه ای که تنها از یک منبع جریان تشکیل شده، حذف شده است.

همچنین تبدیل منابعی که در مدار شکل 2-2 اعمال شده، به این علت است که اگر بخواهیم با تحلیل حلقه محاسبات مدار را انجام دهیم، باید منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنیم، که این کار در مورد مدار شکل (2-2 الف)، که امپدانسی مستقیماً با منبع جریان آن موازی نیست عملی نمی باشد ولی پس از تبدیل آن به مدار شکل (2-2 ب) و تبدیل دو منبع جریان شکل (ب) به منبع ولتاژ، می توان با تحلیل حلقه مساله را حل کرد.

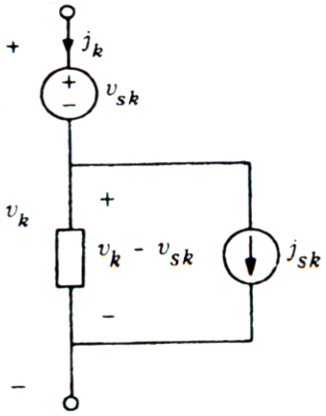
در تحلیل شبکه ها یک شاخه کلی از یک منبع ولتاژ، یک منبع جریان و یک مصرف کننده غیر منبع، بـه صورتی که در شکل های 2-3 و 2-4 نشان داده شده، می باشد. البته هر کدام از این سه عنصر می توانـد در یک شاخه غائب باشد. همچنین اگر شاخه مقاومتی باشد می تواند به صورت شـکل 2-5 یـا شـکل 2-6 نیـز نشان داده شود که با شکل های 2-3 و 2-4 یکسان اسـت. بـرای هـر چهـار شـکل 2-3، 2-4، 2-5 و 2-6 رابطه KCL به صورت فرمول 2-1 و رابطه KVL به صورت فرمول 2-2 برقرار است.

$$KCL : j_K = G_K(v_K - v_{SK}) + j_{SK} = G_K v_K + j_{SK} - G_K v_{SK} \qquad \text{2-1 فرمول}$$

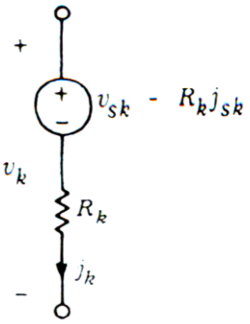
$$KVL : v_K = R_K(j_K - j_{SK}) + v_{SK} = R_K j_K + v_{SK} - R_K j_{SK} \qquad \text{2-2 فرمول}$$



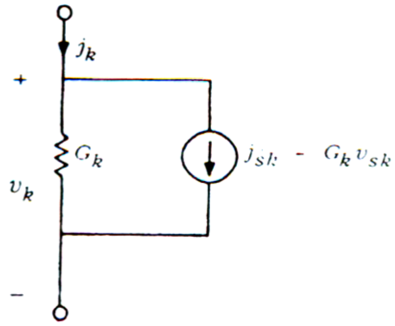
شکل 2-3: یک شاخه کلی K



شکل 2-4: شکل دیگر از شاخه کلی K



شکل 2-5: یک شاخه مقاومتی با یک منبع ولتاژ معادل



شکل 2-6: یک شاخه مقاومتی با یک منبع جریان معادل

2-2: تجزیه و تحلیل گره:

2-2-1: معادلات KCL:

یک شبکه با گراف پیوسته و n_t گره و b شاخه در نظر بگیرید. گره ای که شماره n_t دارد به عنوان گره مبنا (زمین) در نظر بگیرید. لذا بقیه گره ها شماره های 1 و 2 و ... n دارند و $n = n_t - 1$ است.

روابط KCL در تمام گره ها به جز گره مبنا، n معادله جبری خطی همگن با b مجهول به نام های j_1، j_2 و ... j_b به صورت معادلات خطی نا بسته تشکیل می دهند. این دستگاه معادلات که از نوشتن روابط KCL تمام گره ها به جز گره مبنا به دست آمده است، مجموعاً یک معادله ماتریسی به شکل فرمول 2-3 درست می کند:

$$KCL : A.j = 0 \qquad \text{فرمول 2-3}$$

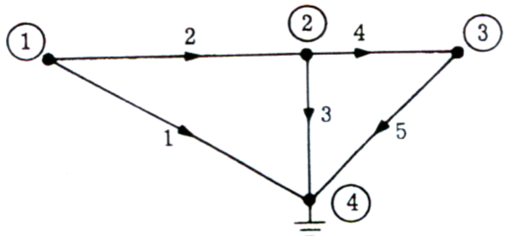
در فرمول 2-3، J بردار جریان شاخه بوده و یک بردار (ماتریس) ستونی $b\times1$ است.

$A = [a_{ik}]$ یک ماتریس $b\times n$ است، که با حذف سطر مربوط به گره n_t در ماتریس تلاقی گره با شاخه (A_a)، که در بخش 2-1 معرفی شد، حاصل می شود. لذا A ماتریس تلاقی مختصر شده گره با شاخه است و اجزاء آن به صورت زیر مشخص می شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$$

لازم به ذکر است، که رابطه ماتریسی $A_a.j = 0$ نیز رابطه درستی است، که n_t امین رابطه جبری به دست آمده از آن، که معادله KCL مربوط به گره مبنا است، وابسته به n رابطه KCL بقیه گره ها است به این معنی که از مجموع KCL گره های دیگر مدار به دست می آید و لذا حاوی اطلاعات جدیدی نیست بنابراین از فرمول ماتریسی $A_a.j = 0$ استفاده نمی شود.

مثال 1: در گراف شکل 2-7 معادلات ماتریسی KCL مربوط به فرمول 2-3 را بنویسید. در این گراف گره 4، که گره مبنا است، با علامت زمین مشخص شده است.



شکل 2-7: گراف مثال های 1 و 2

حل: این گراف شامل 5 شاخه و 4 گره است. به دلیل اینکه گره 4 به عنوان گره مبنا (زمین) انتخاب شده است، ماتریس تلاقی مختصر شده (A) یک ماتریس 5×3 و بردار j یک ماتریس (بردار) ستونی 1×5 است. در نتیجه معادلات KCL این گراف به شکل ماتریسی زیر است:

$$A.j=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\\ j_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

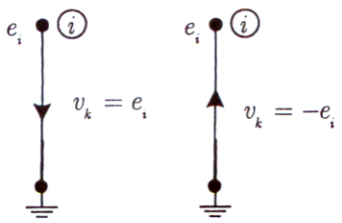
این معادله ماتریسی نتیجه سه معادله جبری که معادله KCL گره های 1 و 2 و 3 هستند، و به شرح زیر است، می باشد.

$$j_1+j_2=0$$
$$-j_2+j_3+j_4=0$$
$$-j_4+j_5=0$$

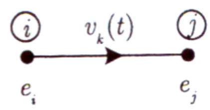
به وضوح دیده می شود که این سه معادله مستقل از یکدیگرند ولی اگر معادله KCL گره 4 را نیز به این سه معادله اضافه کنیم، معادله چهارم وابسته به سه معادله قبل است، به این معنی که با جمع کردن طرفین سه معادله اول با یکدیگر و در نهایت ضرب کردن طرفین معادله مجموع در منفی معادله چهارم به دست می آید.

2-2-2: معادلات KVL:

اگر شاخه K ام، گره i ام را به گره مبنا وصل کند، به صورتی که در شکل 2-8 نشان داده شده، ولتاژ شاخه k (v_k) برابر با ولتاژ گره i نسبت به گره مبنا (e_i) و یا منهای ولتاژ گره i نسبت به گره مبنا $(-e_i)$ است. در صورتی که شاخه K ام بین دو گره دلخواه i ام و j ام واقع شده باشد، به صورتی که در شکل 2-9 نشان داده شده، ولتاژ شاخه K ام با استفاده از رابطه $v_k=e_i-e_k$ محاسبه می شود (در صورتی که از گره i ام خارج شده و به گره j ام وارد شود). در صورتی که جهت شاخه نشان داده شده عوض شود $v_k=e_k-e_i$ خواهد شد.



شکل 2-8: شاخه k بین گره i و گره مبنا



شکل 2-9: شاخه k بین گره i و گره j

برای ولتاژ تمام شاخه های شبکه می توان فرمول 2-4 را نوشت:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ c_{b1} & c_{b2} & . & . & . & c_{bn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$ فرمول 4- 2

در فرمول2-4: v_1، v_2 و .... ولتاژ شاخه ها و e_1، e_2 و .... ولتاژ گره ها هستند. عناصر ماتریس مربعی فرمول 2-4 به صورت زیر خواهند بود:

$$C_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$$

بنابراین مشاهده می شود که $C_{ki} = A_{ik}$ می باشد و لذا $C = A^T$ خواهد بود. فرمول ماتریسی 2-4 را به صورت خلاصه می توان به صورت فرمول 2-5 نوشت:

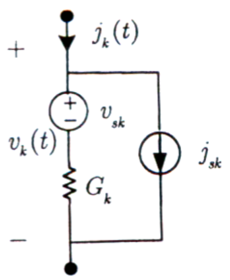
$$v = A^T e$$ فرمول 2-5

2-3: تجزیه و تحلیل گره در شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان:

2-3-1: تجزیه و تحلیل شبکه های مقاومتی:

یک شاخه کلی از یک شبکه مقاومتی شامل b شاخه و n_t گره در شکل 2-10 نشان داده شده است. جریان هر شاخه بر حسب ولتاژ آن به صورت فرمول 2-6 است:

$$j_k = G_k v_k + j_{sk} - G_k v_{sk} \qquad k = 1,2,...b$$ فرمول 2-6



شکل 2-10: یک شاخه کلی مقاومتی

مجموعه b رابطه به فرم فرمول 2-6، فرمول ماتریسی 2-7 را به وجود می آورد:

$$j = Y_b v + j_S - Y_b v_S$$ فرمول2-7

در فرمول 7-2، Y_b ماتریس رسانائی (ادمیتانس) شاخه ها است و یک ماتریس قطری از مرتبه b است (یک ماتریس $b \times b$ است). بردارهای $j_s = [j_{s_1}, j_{s_2}, ..., j_{s_b}]^T$ و $V_s = [V_{s_1}, V_{s_2}, ..., V_{s_b}]^T$ بردارهای ستونی است که به ترتیب بردارهای منابع جریان و منابع ولتاژ شاخه ها هستند.

از ترکیب فرمول $A.j = 0$ و فرمول $V = A^T.e$ با فرمول 7-2 متغیر های شاخه ها حذف شده و یک معادله برداری برای بردار ولتاژ گره ها (e) به دست می آید. با ضرب کردن دو طرف فرمول 7-2 در A و سپس مساوی قرار دادن آن با صفر (به دلیل اینکه $A.j = 0$ است)، و همچنین قرار دادن A^Te به جای V فرمول 8-2 به دست می آید.

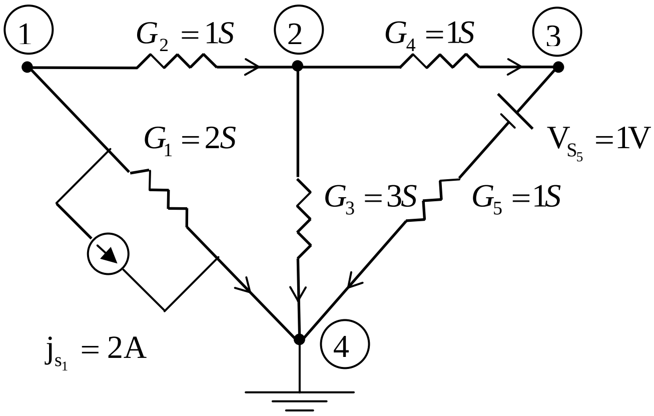
$$Aj = AY_bA^Te + Aj_s - AY_bV_s = 0 \rightarrow AY_bA^Te = AY_bV_s - Aj_s \qquad \text{فرمول 8-2}$$

با استفاده از تعاریف $Y_n = AY_bA^T$ (Y_n ماتریس ادمیتانس گره است و $n \times n$ است) و $i_s = AY_bV_s - Aj_s$ (i_s بردار منبع جریان گره است و $n \times 1$ است)، فرمول 8-2 به صورت فرمول 9-2، که معادله اصلی تحلیل گره است، در می آید:

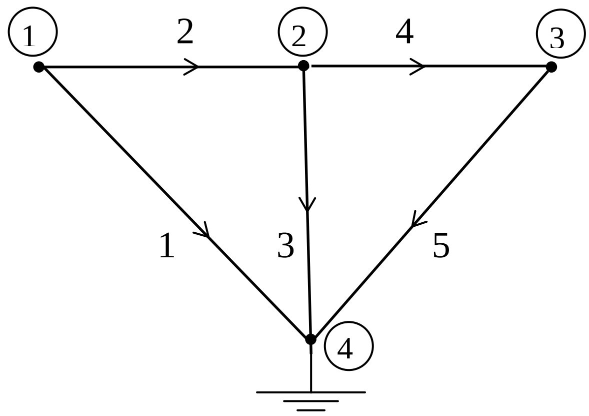
$$\boxed{Y_ne = i_s} \qquad \text{فرمول 9-2}$$

معادله مربوط به فرمول 9-2 به معادلات گره معروف است و عبارت از یک دستگاه n معادله جبری خطی با n مجهول است، که مجهولهای مربوطه ولتاژ های گره با نامهای e_1، e_2 و ...... و e_n هستند. لذا با استفاده از فرمول 9-2 معادلات گره به صورت $e = Y_n^{-1} i_s$ در می آید که می تواند بردار ولتاژ گره ها را محاسبه نماید. سپس با استفاده از رابطه ماتریسی $V = A^Te$ می توان بردار ولتاژ شاخه ها را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول 7-2 می توان بردار جریان شاخه ها را محاسبه کرد.

مثال: در شبکه مقاومتی شکل 11-2 ولتاژ و جریان تمام شاخه ها را با استفاده از روش منظم تجزیه و تحلیل گره محاسبه نمائید:



شکل 11-2: شبکه مقاومتی مثال مورد بحث



شکل 12-2: گراف شبکه شکل 11-2

حل: مرحله 1: یک گراف جهت دار برای شبکه رسم می کنیم (به صورت شکل 12-2)، شاخه‌ها و گـره ها را شماره گذاری کرده و گره 4 را به عنوان گره مبنا (زمین) انتخاب مــی کنــیم. ولتــاژ گــره هــای 1، 2 و 3 را نسبت به گره مبنا e_1، e_2 و e_3 می نامیم.

مرحله 2: نوشتن معادلات ماتریسی KCL به صورت فرمول 3-2:

$$A.j=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\j_4\\j_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

مرحله 3: بیان ولتاژ شاخه ها برحسب ولتاژ گره ها با استفاده از فرمول 5-2 (KVL):

$$v=A^Te\ \Rightarrow\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}$$

مرحله 4: نوشتن معادلات شاخه ها (جریان شاخه ها برحسب ولتاژ آنها):

$$j_1=2v_1+2\quad,\quad j_2=v_2\quad,\quad j_3=3v_3\quad,\quad j_4=v_4\quad,\quad j_5=(v_5-1)\times1=v_5-1$$

این معادلات به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود:

$$j=Y_bv+j_s-Y_bv_S\ \Rightarrow\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\j_4\\j_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

مرحله 5: با استفاده از اطلاعات مراحل 2، 3 و 4 معادلات گره به صورت زیر به دست می آید:

$$Y_n=A.Y_b.A^T=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&5&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$i_s=A.Y_b.v_S-Aj_s=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$Y_n e = i_s \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مرحله 6: حل معادلات گره به دست آمده در مرحله 5 برای به دست آوردن بردار ولتاژ گره ها، سپس استفاده از رابطه ماتریسی مرحله 3 برای محاسبه بردار ولتاژ شاخه ها و در نهایت استفاده از رابطه ماتریسی مرحله 4 برای به دست آوردن بردار جریان شاخه ها به شرح زیر:

$$e = Y_n^{-1} i_s = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$v = A^T e = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad , \quad j = Y_b v + j_s - Y_b v_s = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: همانطور که مثال فوق نشان می دهد، در مدارهائی که تزویج وجود نداشته باشد، ماتریس Y_b، که ابعاد $b \times b$ دارد، قطری است. همچنین در این گونه مدارها ماتریس Y_n، که ابعاد $n \times n$ دارد، متقارن است. علاوه بر آن بردار j و بردار v به ابعاد $b \times 1$ و بردار e به ابعاد $n \times 1$ است.

2-3-2: نوشتن معادلات گره به صورت نظری:

روش منظمی که در بالا به تفصیل بیان شد، به دو دلیل اهمیت زیادی دارد. نخست اینکه روش فوق مطالب مختلفی را که باید برای تجزیه و تحلیل شبکه به کار روند، به طور کاملاً روشنی عرضه می کند، دوم اینکه این روش جنبه کلی دارد، به این معنی که در تمام حالت ها به کار می روند و در نتیجه برای محاسبات کامپیوتری بسیار مناسب است.

نظر به اینکه در تحلیل گره، متغیر های اصلی که بایستی محاسبه شوند ولتاژ گره ها نسبت به گره مبنا است، رابطه اصلی که در تحلیل گره مورد استفاده قرار می گیرد فرمول 2-9 $\left(Y_n e = i_s\right)$ است. در مورد شبکه هائی که تنها از مقاومت ها و منابع نابسته (مستقل) تشکیل می شوند (به ویژه، اجزاء تزویج شده ای مانند منابع وابسته ندارند) می توان معادلات گره را به صورت نظری نوشت. وقتی معادله برداری $Y_n e = i_s$ را به صورت اسکالر بنویسیم، فرمول 2-10 به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & . & . & . & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & . & . & . & y_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ y_{n1} & y_{n2} & . & . & . & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s_1} \\ i_{s_2} \\ . \\ . \\ . \\ i_{s_n} \end{bmatrix} \qquad \text{فرمول 2-10}$$

در مورد اجزاء فرمول 2-10 می توان بیان های زیر را در مورد شبکه هائی که عناصر تزویج شده ندارند ثابت کرد.

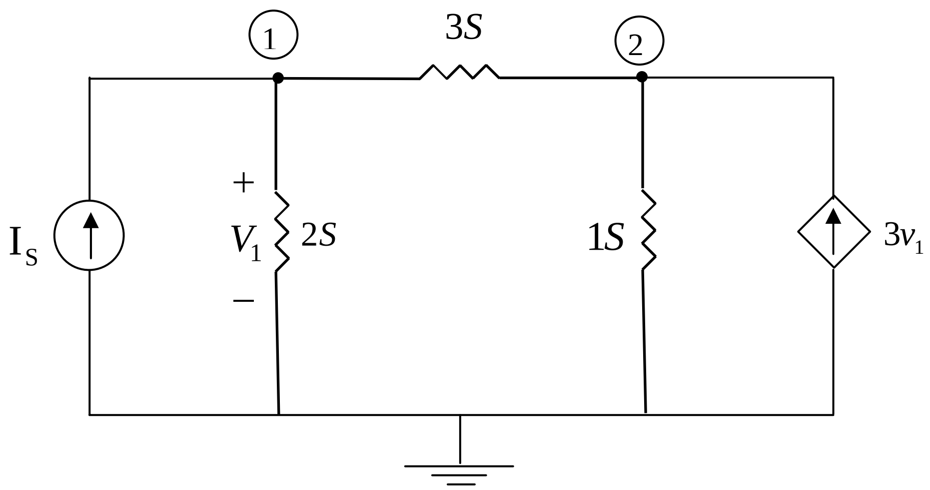
1- y_{ii} را سلف ادمیتانس گره i گویند و مساوی مجموع رسانائی های تمام شاخه های متصل به گره i می باشد.

2- y_{ik} را ادمیتانس متقابل میان گره i و گره k نامند و مساوی با منفی مجموع رسانائی های تمام شاخه هائی که گره i را به گره k متصل می کند، می باشد.

3- تمام منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل کرده و i_{sk} مساوی با مجموع جبری جریانهای تمام منابعی است که وارد گره k می گردند (برای منابع جریانی که وارد گره k می شوند علامت مثبت و برای منابعی که از آن گره خارج می شوند علامت منفی در نظر گرفته می شود).

اگر شبکه مربوطه منبع وابسته داشته باشد، می توان نخست منبع وابسته را همانند منبع مستقل در نظر گرفت و سپس اجزاء مربوط به منبع وابسته را با تبدیل های لازم به طرف دیگر رابطه منتقل کرد.

مثال: در شبکه مقابل معادلات گره را به صورت نظری بنویسید.



حل:

$$y_n e = i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+3 & -3 \\ -3 & 1+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 3v_1 \end{bmatrix}$$

در این رابطه $3v_1$ که مربوط به منبع جریان وابسته است باید به طرف اول رابطه منتقل شود به طوری که در ماتریس Y_n و بردار i_s تمام اجزاء باید مقادیر معلوم باشند. با بسط رابطه ماتریسی فوق دو فرمول جبری زیر به دست می آید:

$$5e_1 - 3e_2 = I_S$$

$$-3e_1 + 4e_2 = 3v_1$$

به دلیل اینکه $V_1 = e_1$ است، لذا پس از انتقال $3v_1$ از طرف دوم معادله جبری دوم به طرف اول آن، این معادله به صورت: $-6e_1 + 4e_2 = 0$ در می آید در نتیجه فرمول ماتریسی به شکل زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

همانطوری که ملاحظه می شود به علت وجود منبع وابسته، در نهایت ماتریس Y_n متقارن نخواهد بود.

2-3-3: تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

یک شبکه خطی تغییر ناپذیر با زمان RLC با منابع نابسته مفروض است. تمام منابع شبکه، منابع سینوسی با فرکانس های زاویه ای برابر و به اندازه ω بوده و تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مورد نظر است. در نتیجه، برای شاخه نمونه شکل 2-3 یا 2-4 (مشابه تحلیل مدار مقاومتی)، برای نوشتن معادلات شاخه و به کاربردن قوانین کیرشف از فازورهای ولتاژ و جریان و امپدانس و ادمیتانس استفاده خواهیم کرد. یک شاخه نمونه K ام، که ادمیتانس Y_K دارد، معادله شاخه ای به صورت فرمول 2-11 دارد.

ادمیتانس Y_K برای مقاومت G_K، برای خازن $j\omega c_K$ و برای سلف $\dfrac{1}{j\omega L_K}$ است.

فرمول 2-11
$$J_K = Y_K V_K + J_{SK} - Y_K V_{SK} \qquad K = 1,2,\dots,b$$

در فرمول 2-11، J_K و V_K فازورهای جریان و ولتاژ شاخه Kام و J_{SK} و V_{SK} فازورهای منابع جریان و ولتاژ این شاخه است. مجموعه روابط شاخه ها، که تک تک آنها به شکل فرمول 2-11 هستند، رابطه ماتریسی فازوری فرمول 2-12 می باشد:

فرمول 2-12
$$J = Y_b V + J_S - Y_b V_S$$

ماتریس Y_b، که یک ماتریس $b \times b$ است، ماتریس ادمیتانس شاخه و بردارهای J و V، که بردارهای $b \times 1$ هستند، بردار فازور جریان و ولتاژ شاخه نامند. همانند شبکه های مقاومتی، در مورد تحلیل حالت دائمی سینوسی شبکه های RLC نیز معادله اصلی گره، رابطه فیزوری ماتریسی فرمول 2-13 است:

فرمول 2-13
$$\boxed{Y_n E = I_S}$$

در این فرمول فازور E، بردار ولتاژ گره نسبت به گره مبنا است و ابعاد آن $n \times 1$ است.

فازور I_S بردار منبع جریان گره بوده و ابعاد آن $n \times 1$ است. همچنین فازور Y_n، ماتریس ادمیتانس گره بوده و ابعاد آن $n \times n$ است. همچنین برای فازورهای Y_n و I_S روابط فرمولهای 2-14 و 2-15 برقرار است:

$$Y_n = AY_bA^T \qquad \text{فرمول 2-14}$$

$$I_S = AY_bV_S - AJ_S \qquad \text{فرمول 2-15}$$

مشابه شبکه های مقاومتی، در مورد تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای RLC نیز مجهول های مورد نظر، فازورهای ولتاژ گره ها نسبت به گره مبنا بوده و ضرائب معادلات، عددهای مختلطی هستند، که به فرکانس بستگی دارند.

ولتاژهای گره ها نسبت به گره مبنا در حوزه زمان با استفاده از فازورهای مربوطه و به کار بردن فرمول 2-16 به دست می آیند.

$$e_k(t) = \mathrm{Re}[E_K e^{j\omega t}] \qquad K = 1,2,\ldots,n \qquad \text{فرمول 2-16}$$

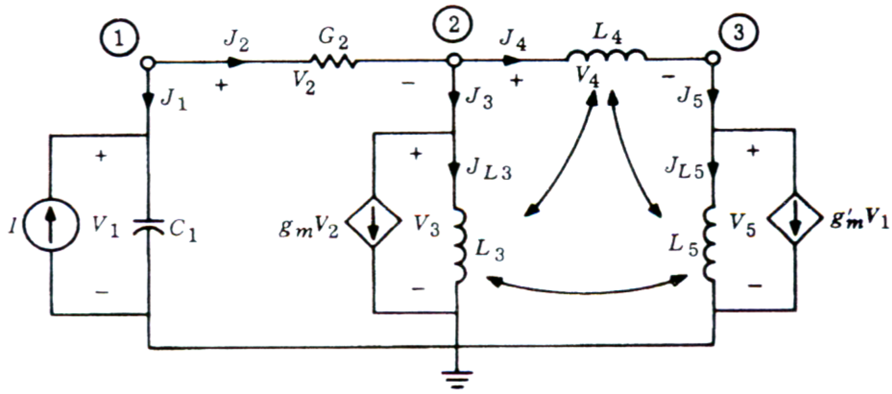
اگر تحلیل شبکه هائی بدون عناصر تزویج شده مورد نظر باشد می توان از روش نظری بخش 2-3-2 استفاده کرد.

در مورد شبکه مثال بعدی، که هم منابع وابسته دارد و هم دارای اندوکتانس های متقابل است، روش نظری بخش 2-3-2 کافی نیست و در چنین مواردی ارزش روش منظم نمایان می شود.

پس از بررسی مثال زیر، روش کلی را نیز به اختصار شرح خواهیم داد.

مثال: در شبکه LTI (خطی تغییر ناپذیر با زمان) شکل 2-13، منبع جریان نا بسته سینوسی است که فازور آن I است و رابطه آن در حوزه زمان به صورت $i = |I|\cos(\omega t + \angle I)$ می باشد. روابط به صورت فازوری است، در مدار منابع وابسته وجود دارد و سه سلف L_3 و L_4 و L_5 روی هم اثر مغناطیسی دارند و ماتریس اندوکتانس آنها چنین است:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$



شکل 2-13: مثالی برای تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی

برای تحلیل گره شبکه، نخست ماتریس مختصر شده گره و شاخه A مورد نیاز است، به صورت زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سپس معادلات شاخه ها مورد نیاز است. نوشتن معادلات شاخه های 1 و 2 بسیار ساده است، ولی به علت اینکه سلف ها روی یکدیگر تأثیر دارند نوشتن معادلات شاخه های 3، 4 و 5 به آن سادگی نیست. برای نوشتن معادلات شاخه های 3، 4 و 5 از رابطه ماتریسی فازوری $V' = j\omega L J_L$ استفاده می شود. معادلات شاخه ها به صورت زیر است:

$$J_1 = j\omega C_1 V_1 - I$$ فرمول 2-17

$$J_2 = G_2 V_2$$ فرمول 2-18

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix}$$

برای اینکه جریان شاخه ها را بر حسب ولتاژ شاخه ها مشخص کنیم به صورت زیر از ماتریس اندوکتانس معکوس استفاده می کنیم.

$$V' = j\omega L J_L \Rightarrow J_L = \frac{1}{j\omega} L^{-1} V'$$

$$\begin{bmatrix} J_{L3} \\ J_4 \\ J_{L5} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن این رابطه ماتریسی و با توجه به دو رابطه $J_3 = J_{L3} + g_m V_2$ و $J_5 = J_{L5} + g'_m V_1$ مـی توان معادلات شاخه های 3، 4 و 5 را به صورت زیر نوشت:

$$J_3 = g_m V_2 + \frac{3}{j\omega}V_3 + \frac{1}{j\omega}V_4 - \frac{1}{j\omega}V_5$$ فرمول 2-19

$$J_4 = \frac{1}{j\omega}V_3 + \frac{2}{j\omega}V_4 + \frac{1}{j\omega}V_5$$ فرمول 2-20

$$J_5 = g'_m V_1 - \frac{1}{j\omega}V_3 + \frac{1}{j\omega}V_4 + \frac{2}{j\omega}V_5$$ فرمول 2-21

فرمول های 2-17، 2-18، 2-19، 2-20 و 2-21 را می توان به صورت فرمول ماتریسی 2-22 خلاصـه کرد و با مقایسه معادلات 5 شاخه شبکه با معادله 2-22، ماتریس Y_b به دست می آید:

$$J = Y_b V + J_S$$ فرمول 2-22

$$Y_b = \begin{bmatrix} j\omega c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_m & \frac{3}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} \\ g'_m & 0 & -\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}$$ فرمول 2-23

همانطوری که فرمول 2-23 نشان می دهد، ماتریس Y_b قطری نیست و دلیل آن وجود منـابع وابسـته و تزویج متقابل سلف ها می باشد. همچنین به علت وجود منابع وابسته ماتریس Y_b متقـارن نیـز نمـی باشـد. ماتریس Y_n نیز با استفاده فرمول 2-24 محاسبه می شود و به دلیل اینکه Y_b قطری و متقارن نیست، Y_n متقارن نیست:

فرمول 2-24 $Y_n = AY_bA^T$

$$Y_n = \begin{bmatrix} j\omega c_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix}$$

با استفاده از فرمول 2-15: $(I_S = AY_bV_S - AJ_S)$ و اینکه در شبکه مورد بحث در این مثال (شکل 13-2) منبع ولتاژ وجود ندارد لذا بردار $V_S = 0$ بوده و $I_S = -AJ_S$ است. بنابراین $I_S = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ خواهد شد.

بنابراین معادله گره، که با استفاده از فرمول 2-13 $(Y_nE = I_S)$ به دست می آید، به صورت فرمول 2-25 می شود.

فرمول 2-25
$$\begin{bmatrix} j\omega c_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{j\omega} & -\frac{3}{j\omega} \\ g'_m & -\frac{3}{j\omega} & \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در صورتی که پارامترهای فرمول 2-25 به شکل عددی مشخص باشند، با جایگذاری اعداد مربوطه فازورهای E_1، E_2 و E_3 به دست آمده و متغیرهای اصلی در تحلیل گره، که ولتاژ گره ها می باشند، معین خواهد شد.

در صورتی که محاسبه ولتاژ شاخه ها نیز مورد نظر باشد، با استفاده از فرمول $V = A^TE$ این ولتاژ ها به دست خواهد آمد. همچنین در صورتی که محاسبه جریان شاخه ها نیز مورد نیاز باشد، با استفاده از فرمول 2-12 $(J = Y_bV + J_S - Y_bV_S)$ می توان این محاسبه را انجام داد.

این مثال روش منظم در تحلیل گره برای حالت دائمی سینوسی را نشان میدهد. مراحلی که در انجام این روش به کارمی رود به شرح زیر است:

مرحله 1: تبدیل منابع (در صورت لزوم) را طبق آنچه که در بخش 1-2 عنوان شد، انجام دهید.

مرحله 2: مطابق فرمول های 2-26 و 2-27 روابط KCL و KVL را بنویسید:

فرمول 2-26 $AJ = 0$

فرمول 2-27 $V = A^TE$

مرحله 3: با استفاده از فرمول 12-2 معادلات شاخه ها را بنویسید:

فرمول 28-2 $$J = Y_b(j\omega)V - Y_b(j\omega)V_S + J_S$$

در این فرمول Y_b به صورت تابعی از ω، که فرکانس زاویه ای منابع سینوسی ورودی است، محاسبه می شود.

مرحله 4: به وسیله فرمول 13-2 معادلات گره را به دست آورید:

فرمول 29-2 $$Y_n(j\omega)E = I_S$$

که در آن از فرمول های 14-2 و 15-2 استفاده می شود:

فرمول 30-2 $$Y_n(j\omega) = AY_b(j\omega)A^T$$

فرمول 31-2 $$I_S = AY_b(j\omega)V_S - AJ_S$$

مرحله 5: با حل معادلات گره به دست آمده در مرحله 4، فازور E را محاسبه کنید.

مرحله 6: V را با استفاده از فرمول 27-2 و J را با استفاده از فرمول 12-2 به دست آورید.

1-3-3-2: خواص ماتریس ادمیتانس گـره $Y_n(j\omega)$: از معادلـه اساسـی $Y_n(j\omega) = AY_b(j\omega)A^T$ خاصیت های زیر به دست می آید:

1- هنگامی که در شبکه عناصر تزویج شده وجود نداشته باشند (یعنی شبکه انـدوکتانس هـای متقابـل و منابع وابسته نداشته باشد)، ماتریس $Y_b(j\omega)$، که $b \times b$ است، یک ماتریس قطری است و بنابراین مـاتریس $Y_n(j\omega)$، که $n \times n$ است، یک ماتریس متقارن است.

2- در حالتی که در شبکه منابع وابسته وجود نداشته باشند (با وجود اندوکتانس هـای متقابـل یـا بـدون وجود آنها)، هر دو ماتریس $Y_b(j\omega)$ و $Y_n(j\omega)$ متقارن می باشند.

4-3-2: تجزیه و تحلیل گره در شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان در حالت کلی (معـادلات انتگرال دیفرانسیل):

در حالت کلی تجزیه و تحلیل گره در شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان، بـه یـک دسـته از معـادلات انتگرال دیفرانسیل منجر می شود. معادلات انتگرال دیفرانسـیل معـادلاتی هسـتند، کـه در آنهـا متغیرهـای مجهول مانند e_1، e_2 و ... و پاره ای مشتق های آنها مانـنـد $\frac{de_1}{dt}$، $\frac{de_2}{dt}$ و ... و برخـی از انتگـرال هـای آنهـا مانند $\int_0^t e_1(t')\,dt'$ و $\int_0^t e_2(t')\,dt'$ و ... را شامل می شوند. در این بخش روش منظم برای به دسـت آوردن معادلات انتگرال دیفرانسیل ارائه می شود.

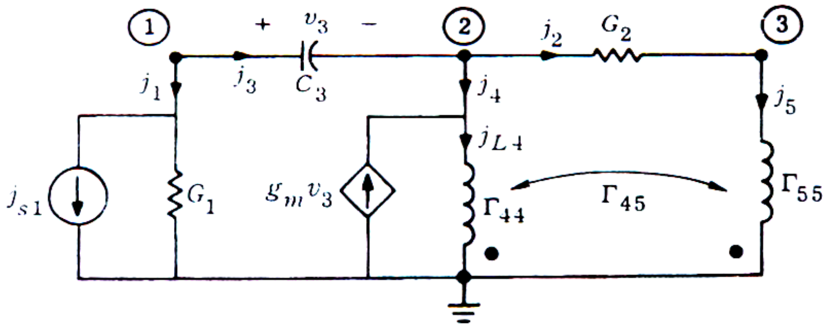
مثال: در شبکه خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل 14-2، کمیت های زیر داده شده اند:

1- مقادیر اجزای G_1، G_2، G_3 و g_m و ماتریس اندوکتانس معکوس $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{44} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{45} & \Gamma_{55} \end{bmatrix}$ برای دو سلف (این ماتریس متناظر با جهت های قراردادی j_{L_4} و j_5 در شکل 2-14 است).

2- شکل موج ورودی j_{S_1} برای $t \geq 0$.

3- مقادیر اولیه ولتاژ خازن، $V_3(0)$، و جریان اولیه سلف ها، $j_{L_4}(0)$ و $j_5(0)$. معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را به روش منظم محاسبه کنید.

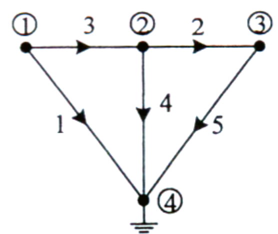
حل: روش کار، همان روش به کار رفته برای حالت دائمی سینوسی می باشد.



شکل 2-14: شبکه ای برای نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل گره

گام 1: تبدیل منابع (در صورت لزوم) مطابق بخش 2-1.

گام 2: ترسیم گراف جهت دار شبکه و شماره گذاری گره ها و شاخه های آن مطابق شکل 2-15.



شکل 2-15: گراف جهت دار شبکه

گام 3: نوشتن ماتریس تلاقی و ماتریس تلاقی مختصر شده و سپس نوشتن معادلات KCL و KVL.

$$\text{KCL}: \ Aj = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$KVL:\ v = A^T e \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

گام 4: نوشتن معادلات شاخه ها (جریان هر شاخه بر حسب ولتاژ همان شاخه و شاخه های دیگر) با توجه به نوع عناصر هر شاخه، به صورت زیر:

$$j_1 = G_1 V_1 + j_{S_1} \qquad j_2 = G_2 V_2 \qquad j_3 = C_3 \frac{dV_3}{dt}$$

$$j_4 = j_{L_4} - g_m v_3 = -g_m v_3 + \Gamma_{44}\int_0^t v_4(t')\,dt' + \Gamma_{45}\int_0^t v_5(t')\,dt' + j_{L_4}$$

$$j_5 = \Gamma_{45}\int_0^t V_4(t')\,dt' + \Gamma_{55}\int_0^t V_5(t')\,dt' + j_5(0)$$

از اپراتور D به جای $\frac{d}{dt}$ و اپراتور D^{-1} به جای $\int_0^t$ استفاده کرده و معادلات شاخه ها را به صورت ماتریسی زیر می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_m & \Gamma_{44}D^{-1} & \Gamma_{45}D^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{45}D^{-1} & \Gamma_{55}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{S_1} \\ 0 \\ 0 \\ j_{L_4}(0) \\ j_5(0) \end{bmatrix}$$

بنابراین این معادلات ماتریسی به فرم زیر است:

$$j = Y_b(D)\,V + j_S \qquad \text{فرمول 2-32}$$

$Y_b(D)$ یک ماتریس 5×5 $(b\times b)$ است و ماتریس ادمیتانس شاخه ها نامیده می شود. در صورتی که در شبکه عناصر تزویج شده وجود نداشته باشد، این ماتریس قطری است. بردار j_S، که $b\times 1$ است، شامل منابع جریان شاخه ها و جریان اولیه سلف ها است.

گام 5: با ترکیب معادلات ماتریسی گام3 و گام4، معادله ماتریسی زیر به دست می آید:

$$AY_b(D)A^T.e = -Aj_S \qquad \text{فرمول 2-33}$$

با تعریف $Y_n(D) = AY_b(D)A^T$ (ماتریس ادمیتانس گره) و $i_S = -Aj_S$ (بردار منبع جریان گره) معادلات انتگرال دیفرانسیل گره به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{bmatrix} G_1+C_3D & -C_2D & 0 \\ -C_3D-g_m & G_2+C_3D+g_m+\Gamma_{44}D^{-1} & -G_2+\Gamma_{45}D^{-1} \\ 0 & -G_2+\Gamma_{45}D^{-1} & G_2+\Gamma_{55}D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -j_{S_1} \\ -j_{L_4}(0) \\ -j_5(0) \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی بالا به شکل زیر است:

فرمول 2-34 $$\boxed{Y_n(D)e=i_S}$$

لازم است، شرائط اولیه لازم ($e_1(0^-)$ و $e_2(0^-)$،$e_3(0^-)$) برای حل معادلات دیفرانسیل مشخص شوند:

$$v_3(0^-)=e_1(0^-)-e_2(0^-) \qquad (1)$$

$$e_3(0^-)-e_3(0^-)=\frac{1}{G_2}j_5(0^-) \qquad (2)$$

همچنین با نوشتن KCL در کات ستی که از شاخه های 1، 4 و 5 تشکیل می شود در لحظه $t=\bar{0}$ معادله (3) به دست می آید:

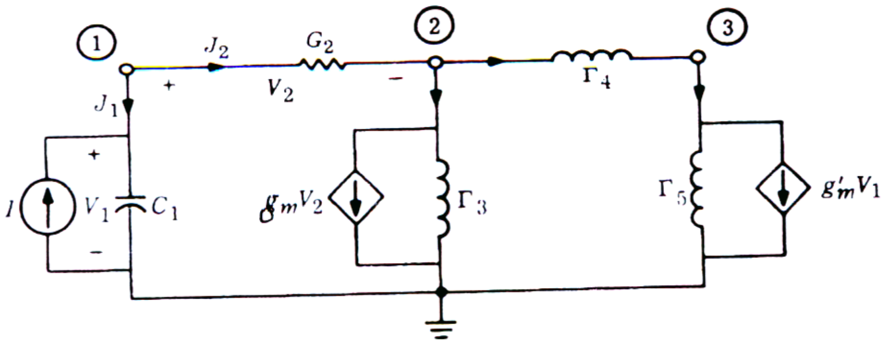
$$j_{S_1}(0^-)+G_1e_1(0^-)-g_mV_3(0^-)+j_{L_4}(0^-)+j_5(0^-)=0 \qquad (3)$$

از معادلات (1)، (2) و (3) سه مجهول $e_1(0^-)$، $e_2(0^-)$ و $e_3(0^-)$ برحسب مقادیر اولیه معلوم (ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف ها) به دست می آید. با به دست آوردن این مقادیر اولیه، شرائط اولیه لازم برای به دست آوردن جواب های یکتا برای معادلات انتگرال دیفرانسیل گره مشخص می شود.

2-3-5: روش میان بر:

هنگامی که شبکه تنها شامل چند منبع وابسته باشد ولی سلف ها نسبت به یکدیگر کوپلاژ مغناطیسی نداشته باشند (روی یک دیگر اثری نداشته باشند) می توان معادلات را به صورت نظری نوشت. به این صورت که منابع وابسته را مشابه منابع مستقل در نظر گرفته و در آخرین مرحله با تغییرات لازم و بیان منابع برحسب متغیر های مناسب، معادلات اصلی گره را به دست آورد. در واقع در این روش مشابه روش نظری بخش 2-3-2 عمل می شود.

مثال1: معادلات حالت دائمی سینوسی شبکه زیر را بنویسید. سلف ها روی یک دیگر اثری ندارند.



شکل 2-16: شبکه مورد بحث در مثال 1 که شامل منابع وابسته است

مرحله1: منابع وابسته را مشابه منابع مستقل در نظر گرفته و معادلات را به طور نظری به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{bmatrix} G_2 + j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + \dfrac{\Gamma_3 + \Gamma_4}{j\omega} & -\dfrac{\Gamma_4}{j\omega} \\ 0 & -\dfrac{\Gamma_4}{j\omega} & \dfrac{\Gamma_4 + \Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -g_m V_2 \\ -g'_m V_1 \end{bmatrix}$$

مرحله 2: جریان منابع وابسته را بر حسب متغیرهای مناسب به صورت زیر بیان کنید:

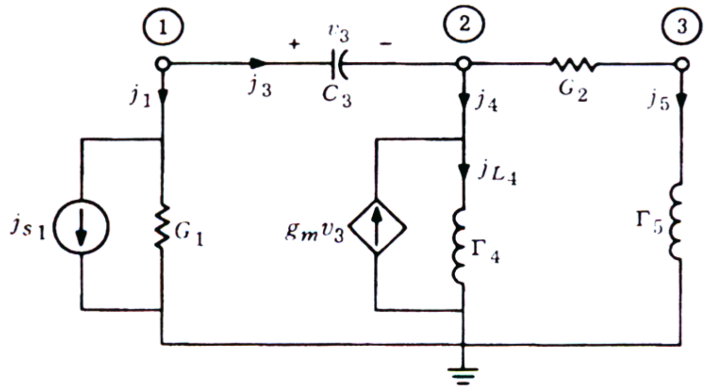
$$g_m V_2 = g_m (E_1 - E_2) \qquad \text{و} \qquad g'_m V_1 = g'_m E_1$$

مرحله 3: با استفاده از معادلات مشخص شده در مرحله 2، جملات مربوط به منابع وابسته را از طرف دوم معادله ماتریسی نوشته شده در مرحله 1 به طرف اول این معادله منتقل کرده، رابطه مربوطه را مرتب می کنیم، که معادله ماتریسی زیر به دست آید:

$$\begin{bmatrix} G_2 + j\omega c_1 & -G_2 & 0 \\ g_m - G_2 & G_2 - g_m + \dfrac{\Gamma_3 + \Gamma_4}{j\omega} & -\dfrac{\Gamma_4}{j\omega} \\ g'_m & -\dfrac{\Gamma_4}{j\omega} & \dfrac{\Gamma_4 + \Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

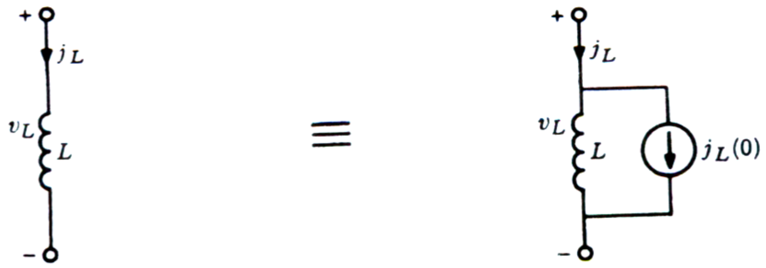
فرمول نهائی که در مرحله 3 به دست آمد، معادله اصلی گره در حالت دائمی سینوسی، که به صورت فرمول $Y_n(j\omega)E = I$ است، را نشان می دهد. این معادله ماتریسی نشان می دهد، که به علت وجود منابع وابسته ماتریس $Y_n(j\omega)$ متقارن نیست.

مثال 2: معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را برای مدار شکل 14-2 در صورتی که $\Gamma_{45} = 0$ باشد به روش میان بر بنویسید. این شبکه مجدداً در شکل 17-2 رسم شده است.



شکل 17-2: شبکه تجزیه و تحلیل شده در مثال 2

مرحله 1: با توجه به اینکه در شاخه سلف ها جریان اولیه آنها نیز باید در نظر گرفته شوند، بنابراین برای جریان آنها براساس شکل 18-2 فرمول زیر نوشته می شود:

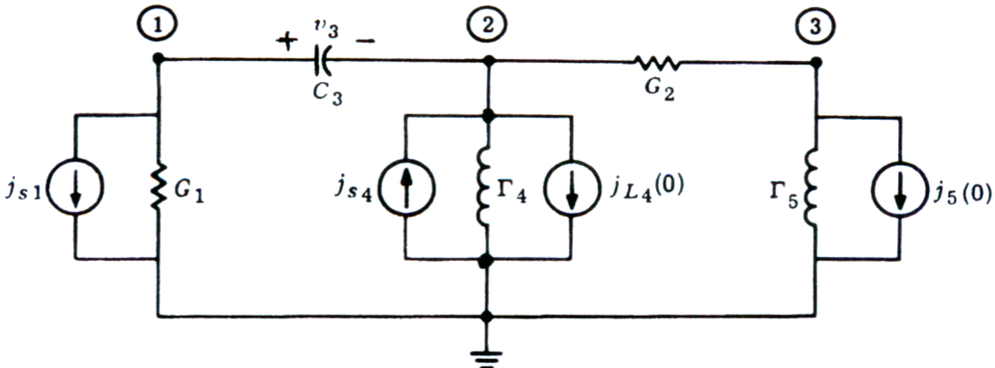


سلف L با جریان اولیه $j_L(0)$ سلف L بدون جریان اولیه

شکل 18-2: معادل های سلف ها هنگام نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل

$$j_L(t) = \Gamma\int_0^t v_L(t')\,dt' + j_L(0)$$

به این معنی که، هر سلفی با جریان اولیه $j_L(0)$ را توسط یک سلف بدون جریان اولیه که به طور موازی با منبع جریان ثابت $j_L(0)$ قرار دارد، باید تعویض کرد. همچنین پس از تعویض منبع وابسته $g_m V_3$ با یک منبع مستقل j_{s4}، شبکه شکل 19-2 به دست می آید:



شکل 19-2: شبکه شکل 17-2 که در آن جریان های اولیه به صورت منابع جریان ثابت در نظر گرفته شده اند

مرحله 2: به طور نظری معادلات گره به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{bmatrix} G_1 + C_3D & -C_3D & 0 \\ -C_3D & G_2 + \Gamma_4 D^{-1} + C_3D & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + \Gamma_5 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{S_1} \\ j_{S_4} - j_{L_4}(0) \\ -j_5(0) \end{bmatrix}$$

مرحله 3: منبع وابسته را برحسب ولتاژ گره ها به صورت زیر می نویسیم:

$$j_{S_4} = g_m V_3 = g_m(e_1 - e_2)$$

مرحله 4: معادله مرحله 3 را در معادله ماتریسی مرحله 2 قرار داده و جملاتی که بر حسب e_1 و e_2 هستند به طرف اول رابطه منتقل کرده و پس از مرتب کردن آن معادله ماتریسی زیر به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} G_1+C_3D & -C_3D & 0 \\ -g_m-C_3D & g_m+G_2+\Gamma_4D^{-1}+C_3D & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+\Gamma_5D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -j_{S_1} \\ -j_{L_4}(0) \\ -j_5(0) \end{bmatrix}$$

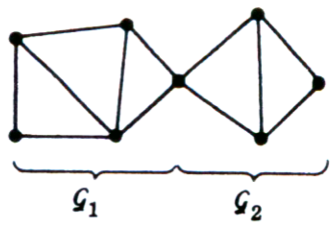
این معادله به فرم کلی رابطه $Y_n(D)e=i_S$ است و به دلیل اینکه در این شبکه منابع وابسته وجود دارد، ماتریس Y_n متقارن نیست. ملاحظه می شود که در بسیاری از موارد (وقتی که سلف ها روی یکدیگر اثر نداشته باشند) نوشتن معادلات به طور نظری ساده تر است. همچنین از این روش در حالت دائمی سینوسی نیز می توان استفاده کرد.

2-4: دوگانی:

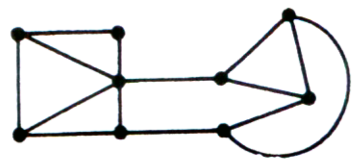
می خواهیم در این قسمت مفهوم دوگانی را که در بقیه این فصل و فصل 3 مورد استفاده قرار می گیرد کاملاً تشریح کنیم.

2-4-1: گراف های بی لولا، گراف های مسطح، مش ها، مش های بیرونی:

الف- گراف لولا دار، گرافی است که بتوان آن را به دو زیر گراف تفکیک کرد که تنها در یک گره مشترک هستند. در مقابل گراف بی لولا، گرافی است که اگر به دو زیر گراف تقسیم شود، این دو زیر گراف حداقل دارای دو گره مشترک باشند. شکل 2-20 یک گراف بی لولا و یک گراف لولا دار را نشان می دهد.



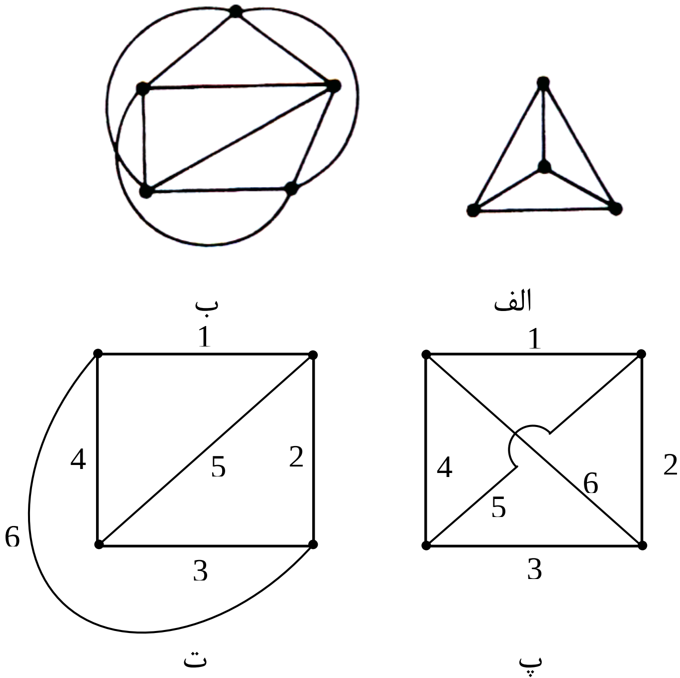
ب



الف

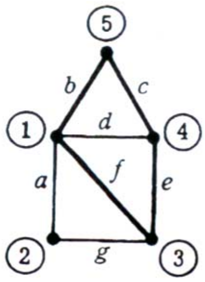
شکل 2-20: مثالی از گراف بی لولا (الف) و مثالی از گراف لولا دار (ب)

ب- گراف مسطح گرافی است، که بتوان آن را روی یک صفحه چنان رسم کرد، که هیچ دو شاخه آن یکدیگر را در نقطه ای که یک گره نباشد، قطع نکنند. در شکل 2-21 (الف) گراف مسطح، شکل 2-21 (ب) گراف نامسطح را نشان می دهد. همچنین شکل 2-21 (پ) گرافی را نشان می دهد که در ظاهر نامسطح است ولی در واقع مسطح است، به این علت که می توان آن را به شکل گراف شکل 2-21 (ت) رسم کرد.



شکل 21-2: گراف های لولا دار و بی لولا

پ- اصطلاح " مش" یا " مش داخلی " به حلقه ای اطلاق می شود که شاخه ای که جزء شاخه های مش نیست، داخل آن وجود نداشته باشد. همچنین "مش بیرونی" به حلقه ای گفته می شود که بیرون آن هیچ شاخه ای در کل شبکه وجود نداشته باشد. در شبکه 22-2، مجموعه شاخه های {b ،c ،d}، {d ،e ،f}، {a ،f ،g} مش و مجموعه شاخه های {a ،b ،c ،e ،g} مش بیرونی است.



شکل 22-2

مجموعه شاخه های {b، c، e، f} **و** {a ،d ،e ،g} حلقه هستند ولی نه مش و نه مش خارجی (بیرونی) به حساب نمی آیند.

در یک گراف پیوسته مسطح بی لولا، تعداد مش ها (مش های داخلی) از فرمول 35-2 به دست می آید. در این فرمول l تعداد مش ها، b تعداد شاخه ها، n_t تعداد کل گره و n تعداد کل گره ها به جز گره مبنا می باشد.

فرمول 35-2
$$l = b - n_t + 1 = b - n$$

برای مثال در شکل 22-2، $b = 7$ ، $n_t = 5$ ، $n = 4$ و $l = 3$ می باشد و از فرمول 35-2 تبعیت می کنند.

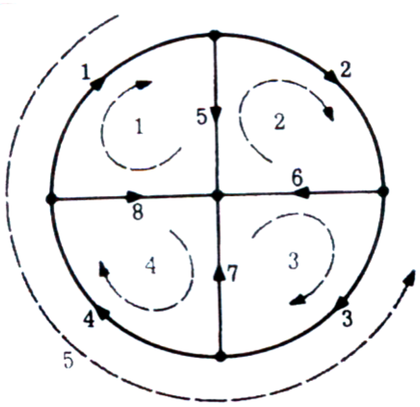
2-4-2: ماتریس تلاقی شاخه ها با مش ها (M_a):

اگر مجموعه مش ها و مش بیرونی در نظر گرفته شوند، در هر گراف پیوسته مسطح بی لـولا، هـر شـاخه متعلق به دو مش است، دو مش داخلی یا یک مش داخلی و یک مش بیرونی. جهت قراردادی مش ها به این صورت در نظر گرفته می شود، که جهت مش ها به صورت موافق جهت حرکت عقربه هـای سـاعت (سـاعت گرد) و جهت مش بیرونی مخالف حرکت عقربه های ساعت (پاد ساعت گرد) می باشد.

ماتریس M_a به صورت مستطیلی است و ابعاد آن $(l+1)\times b$ است ($l+1$ سطر و b ستون دارد). هر سطر این ماتریس متعلق به یک مش است (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و هر ستون آن متعلـق بـه یـک شـاخه است. عنصر m_{ik} (عنصری که در مش iام و شاخه kام قرار دارد و نشان دهنده تلاقی این مش و شاخه است) به صورت زیر مشخص می شود:

$$m_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و هم جهت با آن مش باشد.}\\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت آن مخالف جهت آن مش باشد.}\\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ متعلق به مش } i \text{ نباشد.}\end{cases}$$

برای مثال در گراف شکل 2-23، ماتریس M_a به صورت زیر است:



شکل 2-23: یک گراف مسطح جهت دار با هشت شاخه و پنج مش (با در نظر گرفتن مش بیرونی)

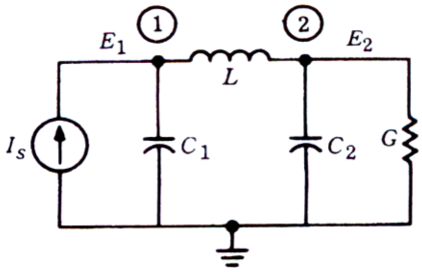
$$M_a = \text{مش ها}\quad \begin{array}{c|cccccccc} & \text{شاخه ها}\rightarrow 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

در هر ستون از ماتریس M_a، مشابه ماتریس A_a، یک عدد 1، یک عدد 1- و بقیه صفر است. رابطـه بـین این دو ماتریس بعداً بیشتر مشخص می شود.

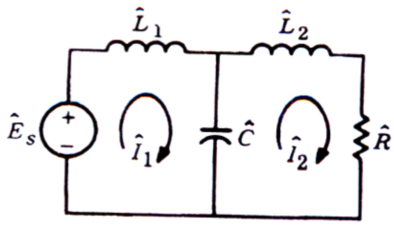
2-4-3: گراف های دوگان:

پیش از بیان گراف ها و شبکه های دوگان، مثالی را در نظر می گیریم تا مفاهیم بعدی کاملاً روشن باشد.

مثال 1: دو شبکه خطی تغییر ناپذیر با زمان، که در شکل 2-24 نشان داده شده اند، در نظر بگیرید. ورودی ها منابع سینوسی با فرکانس یکسان هستند. همچنین شبکه ها در حالت دائمی سینوسی هستند.



N



$\hat{N}$

شکل 2-24: دو شبکه نمونه برای تشریح دوگانی. اگر $C_1 = \hat{L}_1$ ،$C_2 = \hat{L}_2$ ،$L = \hat{C}$ ،$G = \hat{R}$، $I_S = \hat{E}_S$ باشد در این صورت این دو شبکه دوگان هستند.

در شبکه N، روابط فازوری گره را به صورت نظری به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} (j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L})E_1 - \frac{1}{j\omega L}E_2 = I_S & \text{فرمول 2-36} \\ -\frac{1}{j\omega L}E_1 + (j\omega C_2 + G + \frac{1}{j\omega L})E_2 = 0 & \text{فرمول 2-37} \end{cases}$$

همچنین برای شبکه $\hat{N}$، روابط فازوری مش را به صورت نظری می نویسیم:

$$\begin{cases} (j\omega \hat{L}_1 + \frac{1}{j\omega \hat{C}})\hat{I}_1 - \frac{1}{j\omega \hat{C}}\hat{I}_2 = \hat{E}_S & \text{فرمول 2-38} \\ -\frac{1}{j\omega \hat{C}}\hat{I}_1 + (j\omega \hat{L}_2 + \hat{R} + \frac{1}{j\omega \hat{C}})\hat{I}_2 = 0 & \text{فرمول 2-39} \end{cases}$$

چنانچه مقادیر قطعات دو مدار و فازور منابع ورودی دو مدار به صورت زیر به هم مربوط باشند:

$$G = \hat{R} \qquad C_2 = \hat{L}_2 \qquad L = \hat{C} \qquad C_1 = \hat{L}_1 \qquad I_S = \hat{E}_S$$

در این صورت دو فرمول 2-36 و 2-37 با دو فرمول 2-38 و 2-39 با یکدیگر همانند هستند. بنابراین حل مدار N در واقع حل مدار $\hat{N}$ نیز خواهد بود. این دو شبکه مثالی از دو شبکه دوگان هستند و بعضی روابط میان آنها وجود دارد.

شبکه N دارای سه گره است (با در نظر گرفتن گره مبنا) و شبکه $\hat{N}$ دارای سه مش است (با در نظر گرفتن مش بیرونی). هر دو شبکه پنج شاخه دارند. هر شاخه ای که میان دو گره از N قرار دارد (مثلاً سلفی که گره ① و گره ② را بهم وصل می کند). متناظر شاخه ای از $\hat{N}$ که بین مش های متناظر مشترک است می باشد (خازن مشترک بین مش های $\hat{1}$ و $\hat{2}$). منبع جریان I_S و خازن C_1 در شبکه N موازی بوده و بین گره ① و گره مبنا قرار دارند، همچنین منبع ولتاژ $\hat{E}_S$ و سلف $\hat{L}_1$ در شبکهٔ $\hat{N}$ سری بوده و مشترک بین مش $\hat{1}$ و مش بیرونی هستند و این مطلب برای ارتباط دو شبکه به همین صورت ادامه دارد. بنابراین برای روشن شدن مفهوم دوگانی باید در دو مرحله عمل کرد، مرحله اول در نظر گرفتن گراف های دوگان و در مرحله بعد تعریف شبکه های دوگان.

گراف مسطح بی لولای g را در نظر بگیرید. g دارای $n_t = n+1$ گره، b شاخه و در نتیجه $l = b - n$ مش دارد (بدون در نظر گرفتن مش بیرونی). گراف مسطح بی لولای $\hat{g}$ دوگان گراف g است اگر:

1. میان مش های g (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره های $\hat{g}$ (با در نظر گرفتن گره مبنا) یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

2. میان مش های $\hat{g}$ (با در نظر گرفتن مش بیرونی) و گره های g (با در نظر گرفتن گره مبنا) یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

3. میان شاخه های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد، به صورتی که اگر دو مش یک گراف، شاخه مشترکی داشته باشند، گره های متناظر این دو مش در گراف دیگر، شاخه متناظری خواهند داشت که آنها را به هم وصل می کند.

بنا به تعریف $\hat{g}$ دارای b شاخه، $l+1$ گره، n مش و یک مش بیرونی است. اگر $\hat{g}$ گراف دوگان g باشد، g نیز گراف دوگان $\hat{g}$ خواهد بود.

با داشتن گراف g، گراف دوگان آن $(\hat{g})$ را به ترتیب زیر می سازیم:

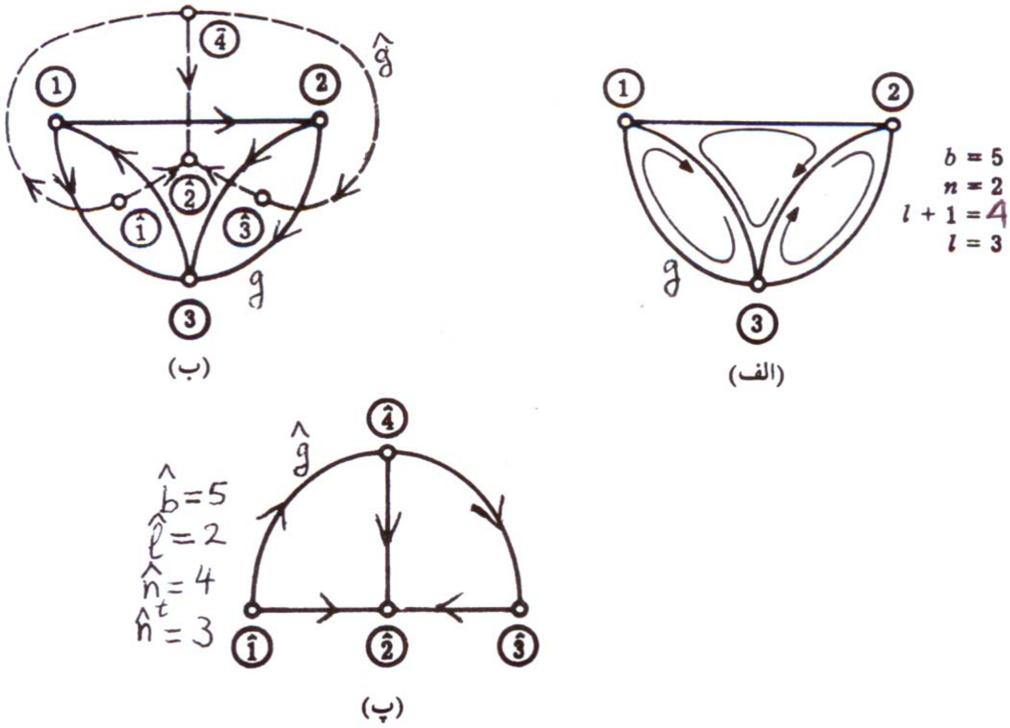
1- برای هر یک از مش های g با احتساب مش بیرونی، یک گره متناظر از $\hat{g}$ می سازیم. به این ترتیب گره $\hat{1}$ را متناظر مش 1 در نظر گرفته و گره $\hat{1}$ را درون مش 1 رسم می کنیم. در مورد هر یک از گره های $\hat{2}$، $\hat{3}$، ... همچنین گره $\widehat{l+1}$، که متناظر با مش بیرونی است، عمل مشابهی انجام می دهیم.

2- برای هر شاخه، مانند k از g، که میان مش های i و j مشترک است، یک شاخه $\hat{k}$ از $\hat{g}$ را که به گره های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ متصل است، متناظر می سازیم.

به این ترتیب ساختمان گراف به دست آمده $\hat{g}$ یک دوگان گراف g می باشد.

مثال 2: یک گراف مسطح در شکل 25-2 (الف) ترسیم شده است. در این گراف بدون در نظر گرفتن مش بیرونی، سه مش وجود دارد. گره های $\hat{1}$، $\hat{2}$، $\hat{3}$ را مطابق شکل 25-2 (ب) در درون هر یک از مش ها قرار می دهیم. گره $\hat{4}$ را در بیرون گراف g قرار می دهیم، زیرا گره $\hat{4}$ متناظر مش بیرونی خواهد بود.

برای تکمیل گراف $\hat{g}$، هرگاه دو مش موجود در g دارای یک شاخه مشترک باشند، دو گره متناظر با آن دو مش را با شاخه ای به هم وصل می کنیم و اصطلاحاً می گوئیم این دو شاخه متناظر بر یکدیگر عمود هستند. خطوط خط چین شکل 25-2 (ب) شاخه های گراف $\hat{g}$ را نشان می دهند. در شکل 25-2 (پ)، گراف دوگان $(\hat{g})$ با شکل بهتری مجدداً رسم شده است.



شکل 25–2: تشریح طرز ساختن یک گراف دوگان. (الف) گراف مفروض،
(ب) مراحل ساختن، (پ) گراف دوگان

در صورتی که گراف g جهت دار باشد، می توان با استفاده از جهت شاخه های آن، جهت شاخه های گراف دوگان آن را تعیین نمود. می توان هر شاخه از گراف g را مشابه یک بردار فرض کرده و آن را به اندازه 90 درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت چرخاند تا جهت شاخه متناظر آن در گراف دوگان آن $(\hat{g})$ مشخص شود (همانند جهت شاخه های g و $\hat{g}$ در شکل 25-2).

لازم به ذکر است که اگر یکی از گره های گراف g را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم، به دلیل اینکه متناظر گره مبنا در g، مش بیرونی در $\hat{g}$ است، شاخه هائی که به گره مبنا در g متصل هستند، متناظر با شاخه هائی هستند، که در $\hat{g}$ مش بیرونی را تشکیل می دهند.

همچنین تناظر میان گراف g و دوگان آن $(\hat{g})$ شامل شاخه در مقابل شاخه، گره در مقابل مش و گره مبنا در مقابل مش بیرونی است. به علاوه ماتریس تلاقی A_a گراف g با ماتریس M_a از گراف $\hat{g}$ یکسان می باشد. همچنین معادلات KCL برای تمام گره های گراف دوگان که به صورت $\hat{A}_a\hat{j}=0$ است (با در نظر گرفتن گره مبنا) برابر با معادلات KVL تمام مش های گراف داده شده، که به صورت $M_aV=0$ است (با در نظر گرفتن مش بیرونی)، می باشد. برای مثال روابط KVL گراف شکل 23-2 را با روابط KCL گراف دوگان آن مقایسه کنید.

2-4-4: شبکه های دوگان:

در این قسمت تنها شبکه هائی که گراف پیوسته مسطح بی لولا داشته و همـه عناصـر آنهـا اجـزای یـک قطبی باشند در نظر می گیریم. به عبارت دیگر سلف های تزویج شده، ترانسفورماتورها و منـابع وابسـته را از بحث خارج می کنیم.

شبکه N را دوگان شبکه $\hat{N}$ گویند، چنانچه بندهای الف و ب زیر صادق باشند:

الف) گراف $\hat{g}$ از شبکه $\hat{N}$ دوگان گراف g از شبکه N باشد.

ب) معادله شاخه هر کدام از شاخه های شـبکه $\hat{N}$ از معادلـه شـاخه متنـاظر آن در شـبکه N بـا انجـام جایگزینی های زیر به دست آید:

$$v \to \hat{j} \quad , \quad j = \hat{v} \quad , \quad q \to \hat{\Phi} \quad , \quad \Phi \to \hat{q}$$

به این معنا که:

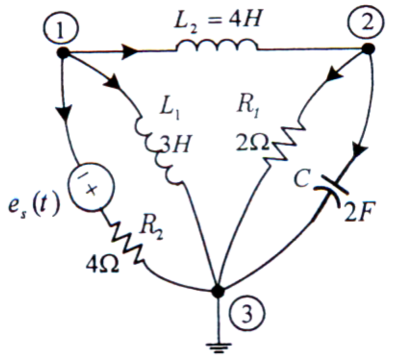
$$R \to \hat{G} \quad , \quad G \to \hat{R} \quad , \quad C \to \hat{L} \quad , \quad L \to \hat{C} \quad , \quad i_S \to \hat{v}_S \quad , \quad v_S \to \hat{i}_S$$

مثال: شبکه شکل 2-26 را در حالت دائمی سینوسی در نظر بگیرید.

الف- معادلات گره را به روش میان بر به دست آورید.

ب- دوگان شبکه را به دست آورده آن را رسم نمائید.

ج- معادلات مش را در شبکه دوگان به روش میان بر به دست آورده و با معادلات گره بند (الف) مقایسـه کنید.

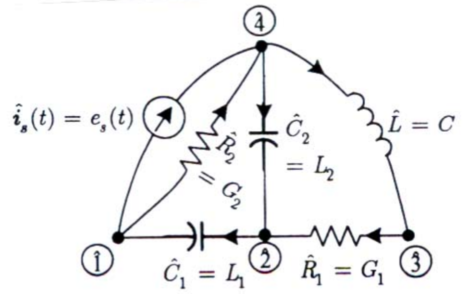


شکل 2-26: شبکه مثال مورد بحث برای به دست آوردن معادلات گره

حل: پس از شماره گذاری گره ها و نیز معادل نورتن شاخه شامل R_2 معادلات گره به صورت زیر است:

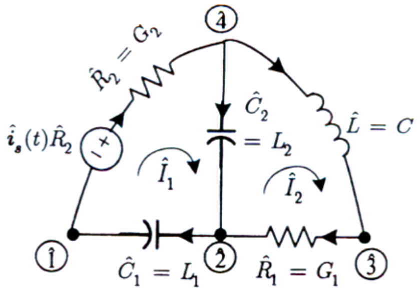
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & j\omega C + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_S}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن دوگان شبکه، با توجه به روش ذکر شده در بخش 2-4-3 ابتدا گـراف دوگـان را بـه دست آورده و پس از آن با جای گذاری شاخه های متناظر، شبکه دوگان به صورت شکل 2-27 به دست می آید.



شکل 27-2: شبکه دوگان شبکه شکل 26-2

با توجه به شماره گذاری مش ها و نیز معادل تونن شاخه شامل $\hat{R}_2$، مدار شکل 28-2 به دست می آید. و معادلات مش این شبکه با روش میان بر به صورت زیر به دست می آید:



شکل 28-2: مدار معادل شبکه شکل 27-2

$$\begin{bmatrix} \hat{R} + \frac{1}{j\omega\hat{C}_1} + \frac{1}{j\omega\hat{C}_2} & -\frac{1}{j\omega\hat{C}_2} \\ -\frac{1}{j\omega\hat{C}_2} & j\omega\hat{L} + \hat{R}_1 + \frac{1}{j\omega\hat{C}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_2\hat{I}_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری اندازه قطعات شبکه دوگان برحسب قطعات شبکه اصلی یعنی:

$$\hat{L} \to C \ , \ \hat{G} \to R \ , \ \hat{I}_S \to E_S \ , \ \hat{C} \to L$$

معادلات مش به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & j\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\hat{I}_1 \to E_1 \quad , \quad \hat{I}_2 \to E_2$ تبدیل شود، مشاهده می شود که معادلات مش شبکه دوگان، همان معادلات گره شبکه اصلی است. لذا در صورتی که شبکه اصلی تجزیه و تحلیل شود، از نتایج به دست آمده، نتایج تحلیل شبکه دوگان نیز مشخص می شود.

همچنین لازم به ذکر است که دوگانی یک رابطه متقابل است، به این معنی که اگر $\hat{N}$ دوگان شبکه N باشد، N نیز دوگان شبکه $\hat{N}$ خواهد بود.

2-5: تجزیه و تحلیل مش:

2-5-1: معادلات حاصل از KVL:

شبکه دلخواه N را که گراف آن پیوسته، مسطح و بی لولا است را در نظر بگیرید. (این شبکه خطی یا غیر خطی، تغییر پذیر یا تغییر ناپذیر با زمان می باشد).

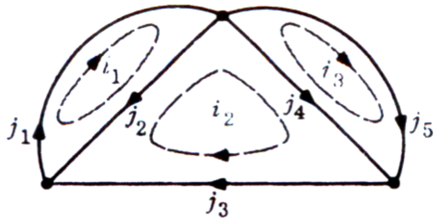
فرض کنید شبکه n_t گره و b شاخه دارد. در نتیجه بدون در نظر گرفتن مش بیرونی، شبکه $l = b - n_t + 1$ مش دارد. مش ها را با شماره های 1، 2، ... و l شماره گذاری کرده و جهت های قراردادی عقربه های ساعت را برای آنها به کار می بریم.

اگر KVL را در مش ها اعمال کنیم یک دستگاه l معادله جبری خطی همگن از b مجهول v_1، $v_2 ,..., v_b$ که به طور خطی مستقل هستند، که جمعاً معادله ماتریسی 2-40 را می سازند، حاصل می شود.

$$KVL : Mv = 0$$ فرمول 2-40

در این فرمول M یک ماتریس $l \times b$ بوده که از حذف سطر متناظر با مش بیرونی ماتریس تلاقی مش با شاخه (M_a) حاصل می شود. همچنین v بردار ولتاژ شاخه ها است.

مثال 1: گراف جهت دار شکل 2-29 را که دوگان گراف شکل 2-7 است، در نظر بگیرید. این گراف، سه گره و پنج شاخه دارد و در نتیجه $l = 5 - 3 + 1 = 3$ می باشد. سه مش این گراف مطابق شکل شماره گذاری شده و جهت آنها موافق عقربه های ساعت است.



شکل 2-29: گرافی شامل 3 گره، 5 شاخه و 3 مش (بدون مش بیرونی)

برای این مثال فرمول 2-40 به صورت زیر می شود:

$$Mv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات فوق به صورت سه معادله بر حسب متغیرهای ولتاژ شاخه ها به شرح زیر هستند:

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$-v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

$$-v_4 + v_5 = 0$$

مشاهده می شود که این معادلات، معادلات مش به دست آمده از اعمال KVL در مش ها هستند و این معادلات به طور خطی نا بسته اند (مستقل هستند)، زیرا هر معادله دارای متغیری است که در دو معادله دیگر وجود ندارد.

2-5-2: معادلات حاصل از KCL:

در شبکه N مذکور در بخش 1-5-2 اگر جریان مش ها به صورت $i_l ,..., i_2 , i_1$ نام گذاری شوند، در این صورت می توان جریان شاخه ها را بر حسب ترکیب خطی جریان مش ها به صورت معادله ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathrm{KCL} : \mathrm{j} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{i}$$ فرمول 41-2

در این فرمول j، بردار جریان شاخه ها، M^{T} ترانهاده ماتریس خلاصه شده تلاقی شاخه ها و مش ها (M) و i بردار جریان مش ها است.

مثال 2: در گراف شکل 29-2 معادلات KCL را بنویسید:

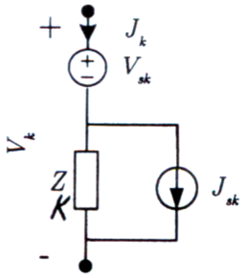
$$\mathrm{j} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{i} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \mathrm{j}_1 \\ \mathrm{j}_2 \\ \mathrm{j}_3 \\ \mathrm{j}_4 \\ \mathrm{j}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{i}_2 \\ \mathrm{i}_3 \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که جریان همه شاخه ها برحسب ترکیب خطی از جریان مش ها به صورت زیر است:

$$\mathrm{j}_1 = \mathrm{i}_1 \;,\quad \mathrm{j}_2 = \mathrm{i}_1 - \mathrm{i}_2 \;,\quad \mathrm{j}_3 = \mathrm{i}_2 \;,\quad \mathrm{j}_4 = \mathrm{i}_2 - \mathrm{i}_3 \;,\quad \mathrm{j}_5 = \mathrm{i}_3$$

2-5-3: تجزیه و تحلیل مش در شبکه های خطی تغییر نا پذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی:

فرض کنید شبکه N خطی تغییر ناپذیر با زمان با b شاخه و $\mathrm{n_t}$ گره است. همچنین گراف آن مسطح، پیوسته و بی لولا باشد. علاوه بر آن تمام منابع شبکه سینوسی و دارای فرکانس های یکسان باشند. رابطه فازوری ولتاژ شاخه نمونه نشان داده شده در شکل 30-2 به صورت فرمول 42-2 می باشد:



شکل 30-2: یک شاخه نمونه

فرمول 42-2 $$V_K = Z_K(J_K - J_{SK}) + V_{SK} = Z_K J_K - Z_K J_{SK} + V_{SK} \quad , \quad K = 1,2,...,b$$

مجموعه روابط فرمول 42-2، که برای تک تک شاخه ها صادق است، به صورت فرمول ماتریسی 43-2 می باشد:

فرمول 43-2 $$V = Z_b(j\omega)J - Z_b(j\omega)J_S + V_S$$

در این فرمول $Z_b(j\omega)$ ماتریس امپدانس شاخه ها است.
همچنین برای شبکه N محدودیت های KVL و KCL به شکل ماتریسی به صورت زیر برقرار است:

فرمول 44-2 $$KVL : MV = 0$$
فرمول 45-2 $$KCL : J = M^T I$$

لازم به ذکر است که این دو فرمول ماتریسی نیز به صورت فازوری است. با استفاده از فرمول های 43-2 ، 44-2 ، 45-2 فرمول 46-2 به دست می آید و پس از آن معادله اصلی تحلیل مش به صورت فرمول 47-2 به دست می آید:

فرمول 46-2
$$\left[M\, Z_b(j\omega)\, M^T \right] I = MZ_b(j\omega)J_S - MV_S$$

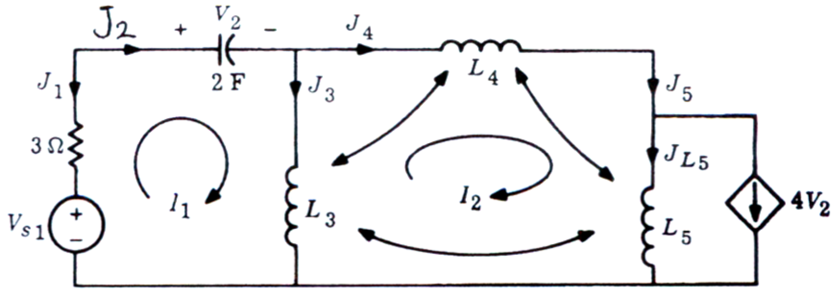
فرمول 47-2 $$Z_m(j\omega)\ I = E_S$$

در این فرمول $Z_m(j\omega) = MZ_b(j\omega)M^T$ ماتریس امپدانس مش و $E_S = MZ_b(j\omega)J_S - MV_S$ بردار منبع ولتاژ مش است (Z_b یک ماتریس $b \times b$ ، Z_m یک ماتریس $l \times l$ و E_S یک بردار l مولفه ای است).
معادلات مش یک دستگاه l معادله جبری خطی برحسب l مجهول $I_1, I_2, ..., I_l$ (فازور جریان مش ها) است. با حل معادلات مش ها به صورت $I = Z_m^{-1}(j\omega)E$ فازورجریان مش ها به دست می آید. سپس با

استفاده از فرمول 45-2 فازور جریان شاخه ها و با استفاده از فرمول 43-2 فازور ولتاژ شاخه ها به دست می آید.

مثـال 1: در شبکه LTI شـکل 31-2، فـازور V_{S_1} نشـان دهنـده ولتـاژ منبـع سینوسـی بـه صـورت $v_{S_1}(t)=|V_{S_1}|\cos(\omega t+\angle V_{S_1})$ می باشد، بنابراین ماتریس مختصر شـده تلاقـی شـاخه هـا و مـش هـا بـه صورت زیر است:

$$M=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



شکل 31-2: شبکه تجزیه و تحلیل شده در مثال 1

فرض کنید ماتریس اندوکتانس سلف های تزویج شده موجود در شاخه های 3 و 4 و 5 چنین باشد.

$$L=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

بنابراین رابطه ولتاژ این سه شاخه برحسب جریان آنها به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}V_3\\ V_4\\ V_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3j\omega & j\omega & -j\omega\\ j\omega & 4j\omega & 2j\omega\\ -j\omega & 2j\omega & 5j\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_3\\ J_4\\ J_5\end{bmatrix}$$

همچنین جریان شاخه 5 (J_5) با رابطه زیر به جریان سلف موجود در این شاخه مربوط می شود:

$$J_5=J_{L5}+4V_2=J_{L5}+\frac{2}{j\omega}J_2$$

معادلات شاخه ها به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3j\omega & j\omega & -j\omega \\ 0 & -4 & j\omega & 4j\omega & 2j\omega \\ 0 & -10 & -j\omega & 2j\omega & 5j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{S_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه 2-48، Z_m به دست آمده و با استفاده از رابطه 2-49، E_S به دست آمـده و در نهایـت با استفاده از رابطه 2-50، که رابطه اصلی در تحلیل مش است، رابطه 2-51 به دست می آید.

$$Z_m(j\omega) = M\,Z_b(j\omega)\,M^T$$ فرمول 2-48

$$E_S = M\,Z_b(j\omega)J_S - M\,V_S$$ فرمول 2-49

$$Z_m(j\omega)I = E_S$$ فرمول 2-50

$$\begin{bmatrix} 5+3j\omega+\frac{1}{2j\omega} & -3j\omega \\ -16-3j\omega & 16j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$ فرمول 2-51

2-5-3-1: خواص ماتریس امپدانس مش:

1– چنانچه شبکه مورد بحث اجزاء تزویج شده نداشته باشد، $Z_b(j\omega)$ قطـری بـوده و $Z_m(j\omega)$ متقـارن است، به این معنی که $Z_m = Z_m^T$.

2– چنانچه شبکه اجزاء تزویج شده نداشته باشد، ماتریس امپدانس مش $[Z_m(j\omega)]$ را می توان به صورت نظری چنین نوشت:

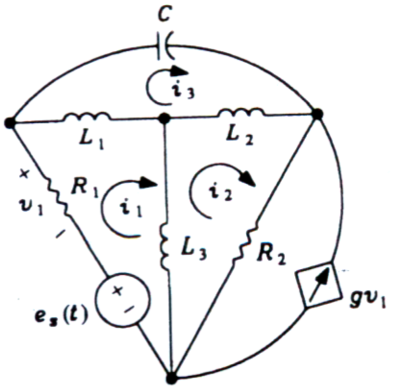
الف: عنصر قطری Z_m واقع در سطر و ستون i ام را Z_{ii} بنامید. Z_{ii} مجموع امپـدانس هـای تمـام شـاخه های واقع در مش i بوده و سلف امپدانس مش i نامیده می شود.

ب: عنصر $(i\,,\,k)$ ام Z_m را Z_{ik} بنامید. Z_{ik} منفی مجموع امپدانس های تمام شاخه هائی است که میان مش های i و k مشترک باشند و امپدانس متقابل میان مش i و مش k نامیده می شود.

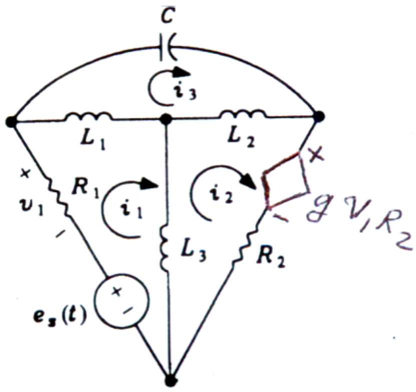
3– چنانچه تمام منابع را به منابع ولتاژ تبدیل کنیم، در این صورت E_{SK} جمع جبری تمـام منـابع ولتـاژ موجود در مش K است. اگر جهت قراردادی جریان مش از ترمینال مثبت منبع ولتاژ خـارج شـود، آن منبـع ولتاژ را با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی در نظر می گیریم.

4– در حالتی که شبکه N عناصر تزویج شده داشـته باشـد $Z_b(j\omega)$ قطـری نبـوده و $Z_m(j\omega)$ متقـارن نیست.

مثال: معادلات حالت دائمی سینوسی مش مدار شکل 32-2 را به روش نظری بنویسید. سلف ها روی یکدیگر اثری ندارند.



شکل 32-2: مداری برای تحلیل میان بر مش در حالت سینوسی



شکل 33-2: مدار معادل شکل 32- 2

حل: همانطوری که در روش میان بر تحلیل گره در بخش 5-3-2 عنوان شد، در روش تحلیل مش به صورت میان بر نیز در صورتی که در شبکه منابع وابسته وجود داشته باشد ولی سلف ها روی هم اثر نداشته باشند، می توان به منابع وابسته مانند منابع مستقل نگریست و در آخرین مرحله با تغییرات لازم و بیان منابع برحسب متغیرهای مناسب، معادلات اصلی مش را به دست آورد.

در به کار بردن این روش از خواص ماتریس امپدانس مش که در بخش 1-3-5-2 عنوان شد، استفاده می شود.

بنابراین در ابتدا منبع جریان وابسته را به منبع ولتاژ تبدیل کرده و مدار معادلی به صورت شکل 33-2 به دست می آوریم. پس از آن معادله ماتریسی فازوری $Z_m I = E_S$ را که معادله اصلی مدار در تحلیل مش است به صورت نظری به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_3 & -j\omega L_3 & -j\omega L_1 \\ -j\omega L_3 & R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 & -j\omega L_2 \\ -j\omega L_1 & -j\omega L_2 & j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{S_1} \\ -gR_2V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نظر به اینکه آن قسمت از این فرمول، که مربوط به منبع وابسته است بایـد بـه طـرف اول رابطـه منتقـل شود، بنابراین در سطر دوم این رابطه با تغییرات لازم $-gR_2V_1$ را از طرف دوم ماتریس به طرف اول منتقل کنیم. با توجه به بسط سطر دوم این رابطه ماتریسی این موضوع روشن می شود.

$$(-j\omega L_3)I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3)I_2 + (-j\omega L_2)I_3 = -gR_2V_1 = gR_1R_2I_1$$

و یا

$$(-gR_1R_2 - j\omega L_3)I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3)I_2 + (-j\omega L_2)I_3 = 0$$

بنابراین معادلات گره به صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_3 & -j\omega L_3 & -j\omega L_1 \\ -gR_1R_2 - j\omega L_3 & R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 & -j\omega L_2 \\ -j\omega L_1 & -j\omega L_2 & j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{S_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همانطوری که ملاحظه می شود ماتریس Z_m متقارن نیست و دلیل آن وجود منبع وابسته در مدار است.

در صورتی که مقادیر عددی برای اجزاء مدار در نظر گرفته شود، با استفاده از رابطه ماتریسی $I = Z_m^{-1}E_S$ جریان مش ها به دست می آید و سپس با استفاده از رابطه ماتریسی $J = M^T I$ جریان شاخه ها و با استفاده از رابطه ماتریسی $V = Z_bJ + V_S - Z_bJ_S$، ولتاژ شاخه ها به دست خواهد آمد.

2-6: خلاصه:

فرمول های اصلی که در تحلیل گره و مش مورد استفاده قرار می گیرند در جدول زیر خلاصه شده اسـت. در این جدول (جدول 1-2) نشان داده شده، که دو روش تحلیل گره و تحلیل مش دوگان یکدیگر هستند.

جدول 1-2: خلاصه تجزیه و تحلیل های گره و مش

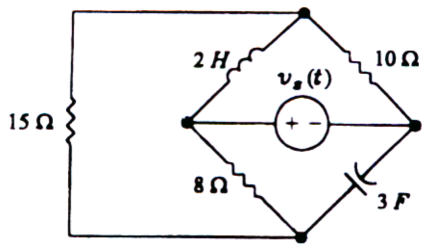
	تجزیه و تحلیل گره	**تجزیه و تحلیل مش**
متغیرهای شبکه	e، ولتاژ های گره نسبت به مبنا	i ، جریان های مش ها
مطالب اساسی	$Aj = 0 \quad (KCL)$ $v = A^T e \quad (KVL)$	$Mv = 0 \quad (KVL)$ $j = M^T i \quad (KCL)$
معادلات شاخه	$j = Y_b v + j_S - Y_b v_S$	$v = Z_b j + v_S - Z_b j_S$

معادلات شبکه	$\boxed{Y_n e = i_S}$	$\boxed{Z_m i = e_S}$
	$Y_n = AY_bA^T$ $i_S = AY_b v_S - Aj_S$	$Z_m = MZ_bM^T$ $e_S = MZ_b j_S - Mv_S$

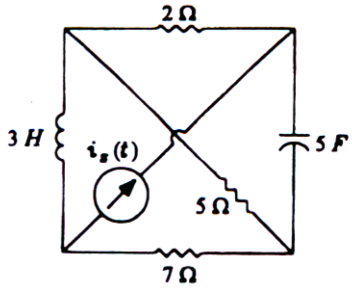
مسائل:

1- **الف-** با استفاده از تبدیل منبع، منبع ولتاژ dc شکل مسأله 1-2 الف را به منابع جریان dc تبدیل کنید.

ب- با استفاده از تبدیل منبع، منبع جریان dc شکل مسأله 1-2 ب را به منابع ولتاژ dc تبدیل کنید.



شکل مسأله (1-2 الف)



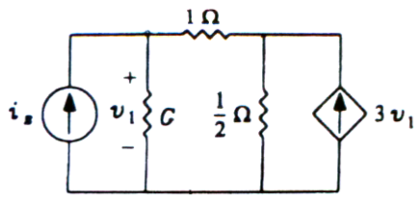
شکل مسأله (1-2 ب)

2- در مدار شکل مسأله 2-2:

الف- معادلات گره را به صورت نظری بنویسید.

ب- مقدار G را چنان تعیین کنید، که مدار جواب یکتائی داشته باشد.

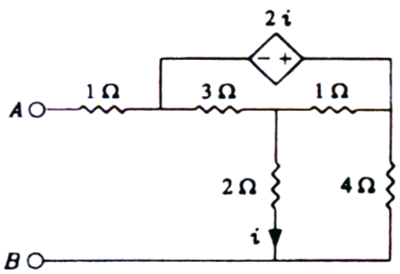
پ- وضع جواب مدار را به ازاء $G = \frac{1}{3}s$ و $i_S = 2A$ تعیین کنید.



شکل مسأله 2-2

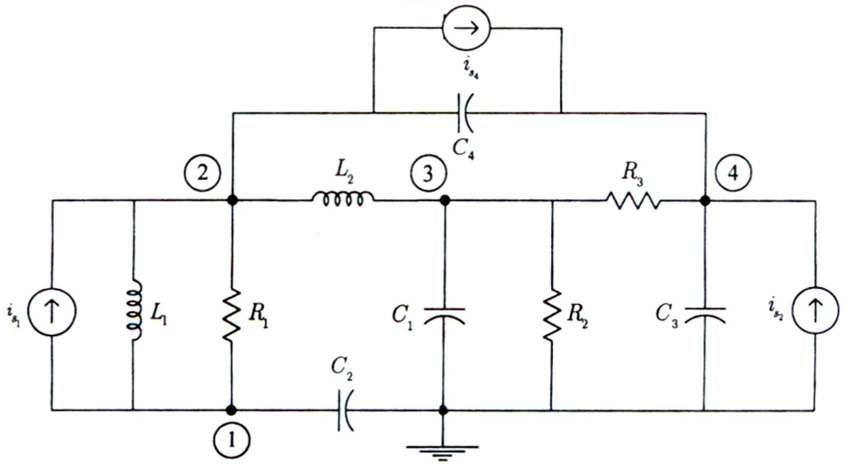
3- با بکار بردن روش تحلیل مش امپدانس دیده شده مدار شکل مسأله 3-2 را در سرهای A و B تعیین کنید.

(راهنمائی: یک منبع ولتاژ فرضی بین A و B قرار دهید).



شکل مسأله 3-2

4- شبکه نشان داده شده در شکل 4-2 در حالت دائمی سینوسی است. برای این مدار به روش منظم تجزیه و تحلیل گره را انجام دهید.

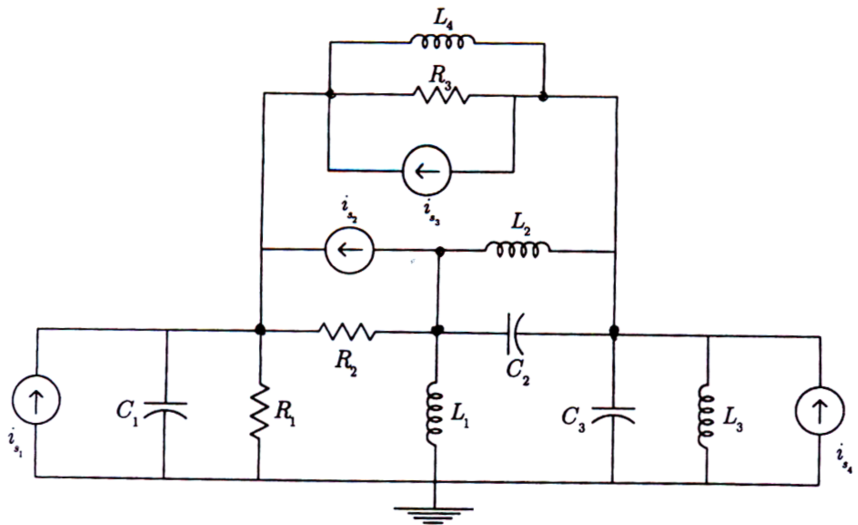


شکل مسأله 4-2

5- در شبکه شکل مسأله 5-2 ماتریس ادمیتانس گره را به روش میان بر برای دو حالت زیر به دست آورید.

الف: حالت دائمی سینوسی

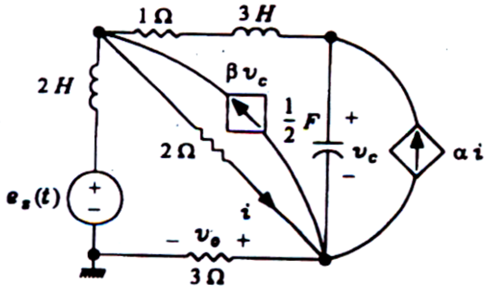
ب: در حالت انتگرال دیفرانسیل بدون شرائط اولیه



شکل مسأله 5-2

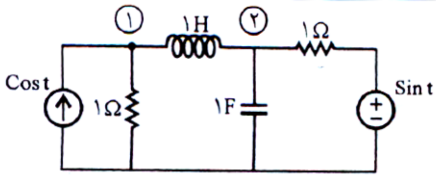
6- معادلات گره را در مدار شکل مسأله 6-2 در حالت دائمی سینوسی به روش میان بر بنویسید.

$$e_S(t) = 2\,\mathrm{Sin}(3t + 60^0)$$



شکل مسأله 6-2

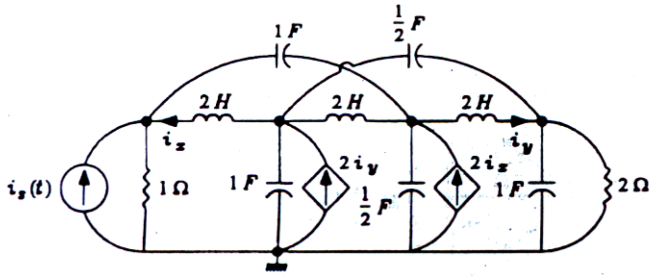
7- ماتریس ادمیتانس گره $Y_n(j\omega)$ برای مدار شکل مسأله 7-2 را به دست آورید.



شکل مسأله 7-2

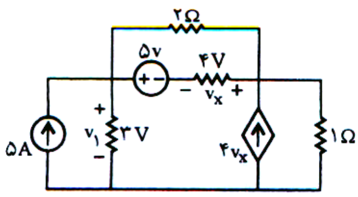
8- برای مدار شکل مسأله 8-2 معادلات گره را در حالت دائمی سینوسی به روش میان بر بنویسید.

$$\left[\, i_S(t) = 2\,Sin\ (t - 30^0) \,\right]$$



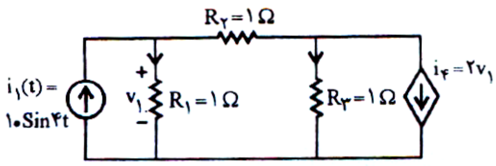
شکل مسأله 8-2

9- در مدار شکل مسأله 9-2، با استفاده از تحلیل گره، ولتاژ V_1 را به دست آورید.



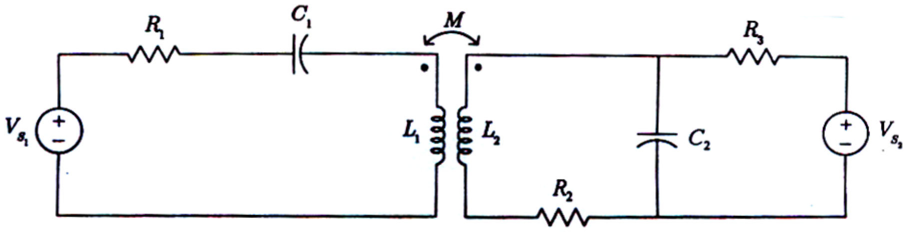
شکل مسأله 9-2

10- در مدار شکل مسأله 10-2، با استفاده از تحلیل گره، ولتاژ دو سر مقاومت R_3 را به دست آورید.



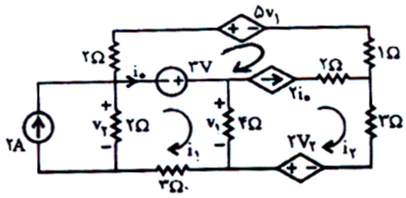
شکل مسأله 10-2

11- برای شبکه زیر معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را به دست آورید. شرائط اولیه صفر نیست.



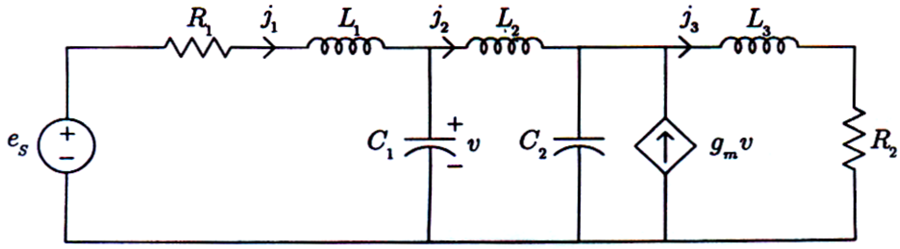
شکل مسأله 11-2

12- برای مدار شکل مسأله 12-2 دستگاه معادلات مش را به روش میان بر به دست آورید.



شکل مسأله 12-2

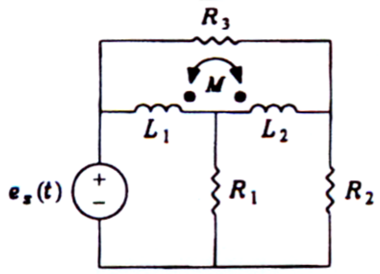
13- در شبکه زیر برای حالت دائمی سینوسی معادلات مش را به روش میان بر بنویسید. $e_S(t) = 2\sin\omega t$ است و سلف ها روی هم اثری ندارند.



شکل مسأله 13-2

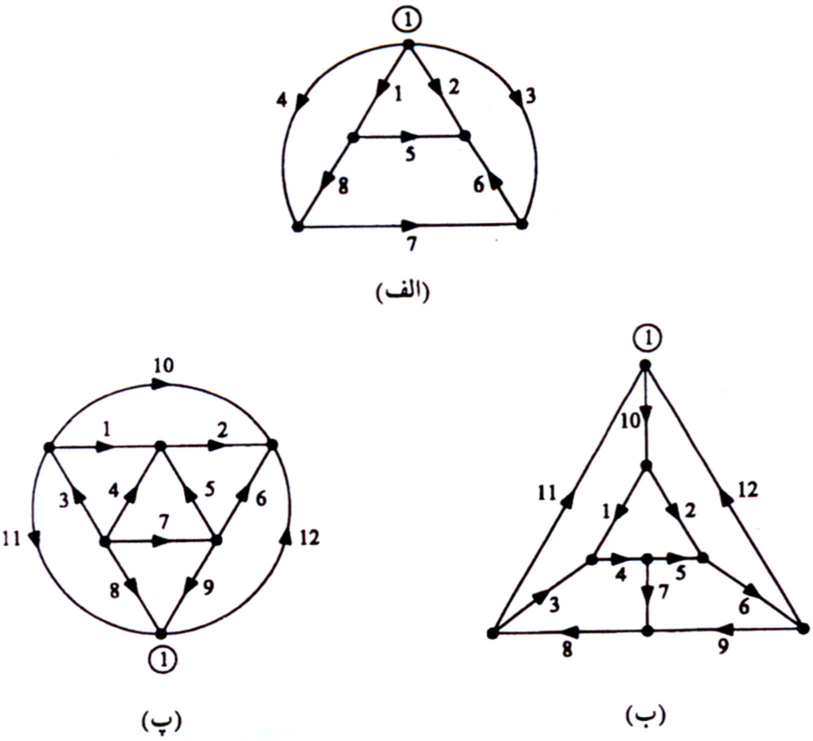
14- الف) معادلات مش را برای مدار شکل مسأله 14-2 بنویسید.

ب) معادلات گره را برای همین شبکه بنویسید.



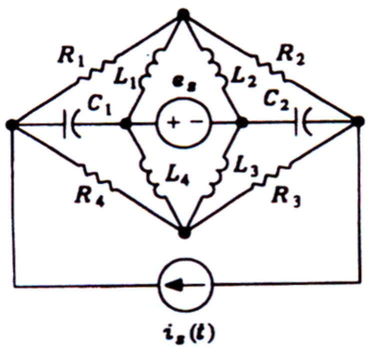
شکل مسأله 14-2

15- دوگان گراف های نشان داده شده در شکل مسأله 15-2 را چنان رسم کنید که مش بیرونی گراف دوگان متناظر با گره 1 مشخص شده در هر گراف باشد.



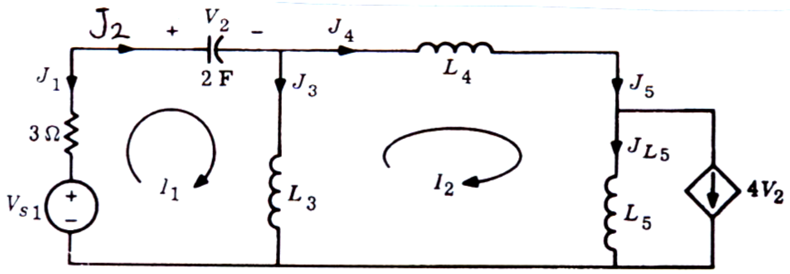
شکل مسأله 2-15

16- گراف دوگان و مدار کامل دوگان شبکه شکل 2-16 را رسم کنید.



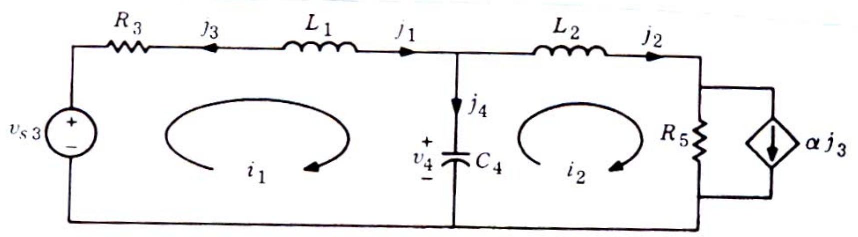
شکل مسأله 2-16

17- معادلات مش را برای شبکه نشان داده شده در شکل مسأله 2-17 به صورت نظری بنویسید. اندوکتانس متقابل میان سلف ها را صفر در نظر بگیرید (مدار در حالت دائمی سینوسی است).



شکل مسأله 2-17

18- معادلات مش را برای شبکه نشان داده شـده در شـکل مسـأله 18-2 بـه شـکل معـادلات انتگـرال دیفرانسیل به صورت نظری بنویسید. اندوکتانس متقابل میان سلف ها را صفر در نظر بگیرید.



شکل مسأله 18-2