Linear Control

Homework 4

Mohammad Rajabi Seraji - 9231039

95-96 S2

*** من بعد از اینکه استاد هفته‌ی پیش یک سری از سوالات رو از تمرین شماره‌ی سه برای حل کردن تعیین کردند؛ خبر نداشتم که دوباره یک هفته برای حل باقی اون تمرین‌ها زمان داده شده، به همین خاطر حل اون تمرین‌ها رو الان به همراه این تمرین‌ها براتون ارسال کردم؛ لطفا اگه امکان داره نمره‌ی این چند سوال رو هم اعمال بفرمایید.

تمرین سوم – سوال ۴

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته‌ی معادل را برای این سیستم بدست می‌آوریم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = (1+ks) \times \frac{a}{s(s+T)+a} \rightarrow Open\ loop\ transfer\ function = G(s) = \frac{a(1+ks)}{s(s+T)-aks}$$

برای اینکه خطای حالت ماندگار به ورودی شیب را حساب کنیم باید به شکل زیر عمل کنیم:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{b}{sG(s)}$$

حال باید ببینیم به ازای چه مقداری از k این خطا می‌تواند صفر باشد.

$$e_{ss} = 0 \rightarrow \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{b\big(s+(T-ak)\big)}{s(s+T)+a} \Rightarrow\ T-ak=0 \ \Rightarrow\ k=\frac{T}{a}$$

به ازای این مقدار از k این حد به سمت صفر میل می‌کند و خطای حالت دائم صفر می‌شود.

تمرین سوم – سوال ۵

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \left[kR(s) \times \left(\frac{G(s)}{1+G(s)}\right)\right] \xRightarrow[R(s)=\frac{1}{s}]{} E(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{kG(s)}{s\big(1+G(s)\big)}\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\left[1-\frac{G(s)}{1+G(s)}\right] = 0.2 \Rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)} = 0.8 \Rightarrow \boxed{if\ k=\frac{1}{0.8} \Rightarrow \lim sE(s) = 0}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{0.8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}}$$

تمرین سوم – سوال ۶

واقعا صورت سوال واضح نیست! الان معلوم نیست که N از چه نوعیه، واقعا نمی‌دونم.

تمرین سوم – سوال ۸

ابتدا مقدار E(s) را حساب می‌کنیم:

$$Open - loop\ transfer\ function = G(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s + \gamma} \times \frac{1}{s+1}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow \lim_{s\to 0} s \times \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{(s+1)(s+\gamma)}{(s+1)(s+\gamma) + \alpha s + \beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma+\beta} = 0 \quad \boxed{1}$$

$$Overshoot = e^{-\left(\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{0.5}}\right)\pi} \ , first\ we\ find\ \zeta. G(s) = \frac{(s+1)(s+\gamma)}{s^2 + (\gamma+1+a)s + \gamma + \beta} \Rightarrow \zeta = \frac{\gamma+1+\alpha}{2\omega_n}$$

$$\frac{16.3}{100} = \ e^{-\left(\frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{0.5}}\right)\pi} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2} \ , t_s(2\%) = 8 = \frac{4}{\zeta\omega_n} \ \Rightarrow \omega_n = 1 \ \Rightarrow \gamma + 1 + \alpha = 1 \, , \beta + \gamma = 1 \ \Rightarrow \boxed{\alpha = 0, \beta = 1}$$

تمرین چهارم

سوال اول-

$$Overshoot = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{5}{100} \Rightarrow \zeta \cong 0.69$$

$$\frac{Y(S)}{R(s)} = \frac{k}{s(s+1)^2+k} = \frac{k}{s^3+2s^2+s+k} = \frac{k}{s^3+2s^2+s+k}$$

این سیستم را با یک سیستم مرتبه دو تقریب می‌زنیم، این تقریب را به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$G_H(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{k}+\frac{2s^2}{k}+\frac{s}{k}+1}\ , G_L(s) = \frac{1}{1+d_1s+d_2s^2}$$

$$M^{(1)}(0) = \Delta^{(1)}(0) \Rightarrow\ d_1 = \frac{1}{k}\ , M^{(2)}(0) = \Delta^{(2)}(0) \Rightarrow 2d_2 = \frac{4}{k}$$

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4\zeta^2\omega_n^2\, , \frac{1}{d_2} = \omega_n^2\ \Rightarrow\ 2 = (0.69)^2k\ \Rightarrow\ \boxed{k \cong 4.200}$$

سوال دوم-

ابتدا باید نسبت $\frac{C(s)}{R(S)}$ را پیدا کنیم.

$$\frac{R(s)-\frac{3R(s)}{4s}-kC(s)}{s.s} + \frac{R(s)-\frac{3R(s)}{4s}-kC(s)}{s} = C(s)$$

$$\frac{(s+1)R(s)-\frac{3R(s)}{4s}-\frac{3}{4}R(s)-kC(s)-ksC(s)}{s^2} = C(s) \Rightarrow$$

$$R(s)\left[s+1-\frac{3}{4s}-\frac{3}{4}\right] = C(s)[s^2+ks+k] \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4s(s^2+ks+k)}{4s^2+s-3}$$

تمرین چهارم – سوال سه

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+a)}{s^2(s+20)+k(s+a)}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.4 \Rightarrow \zeta\omega_n = 10 \quad , M_P = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.432 \Rightarrow \boxed{\zeta \cong 0.258 \Rightarrow \omega_n = \frac{10}{0.258} \cong 38.75}$$

$$M^1 = d_1 + 2d_2 s\,, \Delta^1 = \frac{3}{ka}s^2 + \frac{40}{ka}s + \frac{1}{a}\,, \Delta^1(0) = M^1(0) \Rightarrow d_1 = \frac{1}{a}$$

$$M^2 = 2d_2, \Delta^2 = \frac{6}{ka} + \frac{40}{ka}\,, M^2(0) = \Delta^2(0) \Rightarrow d_2 = \frac{20}{ka}$$

$$G_H(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{ka} + \frac{20s^2}{ka} + \frac{s}{a} + 1}\,, G_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = 2\zeta\omega_n = 20\,, \frac{1}{d_2} = \omega_n^2 \Rightarrow d_2 = \frac{1}{38.75^2} = 6.65 \times 10^{-4} \Rightarrow ka = 30075\,,$$

$$d_1 = 0.0133 \Rightarrow \boxed{a = 75.187\,, k = 400.002}$$

تمرین چهارم – سوال چهار

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s(s^2+6s+10)+k}\,, \zeta = 0.5$$

مانند سوالات قبل عمل کرده و با استفاده از توابع تقریبی $G_L(s)$ یک تابع انتقال مرتبه دو بدست می‌آوریم.

$$G_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}\,, G_H(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{k} + \frac{6}{k}s^2 + \frac{10}{k}s + 1}$$

$$M^{(1)}(0) = \Delta^{(1)}(0) \Rightarrow d_1 = \frac{10}{k}, \qquad M^{(2)}(0) = \Delta^{(2)}(0) \Rightarrow 2d_2 = \frac{12}{k}$$

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4\zeta^2\omega_n^2\,, \frac{1}{d_2} = \omega_n^2 \Rightarrow 4 * \frac{1}{4} * \frac{k}{6} = \frac{25}{9} \Rightarrow \boxed{k = \frac{50}{3}}$$

تمرین چهارم – سوال پنج

ابتدا پاسخ حلقه بسته را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s(\tau s+1)+k}\,, \qquad y(t) = \frac{5}{2}e^{-t}sin2t \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2+4} \times \frac{5}{2} \quad , R(s) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\tau s^2 + s + k} = \frac{5}{s^2+2s+5} \Rightarrow \boxed{\frac{k}{\tau} = 5, \tau = \frac{1}{2}\,, k = \frac{5}{2}}$$

تمرین چهارم – سوال شش

ابتدا معادله مشخصه‌ی سیستم مکانیکی را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{1d^2x}{dt^2} = f(t) - 1x \Rightarrow s^2X(s) = F(s) - X(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2+1}$$

حال معادله‌ی کل سیستم را میابیم:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_C(s+1)}{s^2+1+k_C(s+1)} \Rightarrow k_C = \sqrt{2}\omega_n , k_C + 1 = \omega_n^2 \Rightarrow k_c^2 - 2k_c - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{k_c = 1 + \sqrt{3}}$$