Línuleg algebra B

Lausnir fyrir tíunda skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 12)

15. nóvember 2014

Dæmi 1. Sýnið fyrst að fylkin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

hafi sömu kennimargliðu og gerið síðan grein fyrir að annað þeirra sé hornalínugeranlegt en hitt ekki.

Lausn. Kennimargliða fylkisins $\mathbf{A}$ er $p_{\mathbf{A}}(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 4-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{bmatrix}$ og þar sem ákveða þríhyrningsfylkis er margfeldi stakanna á hornalínu þess, þá fæst að

$$p_{\mathbf{A}}(t) = (4-t)(2-t)^2.$$

Á sama hátt fáum við að kennimargliða fylkisins $\mathbf{B}$ er $p_{\mathbf{B}}(t) = (4-t)(2-t)^2$.

Lítum nú á eiginrúm fylkjanna tveggja og byrjum á $\mathbf{A}$. Táknum $E_2(\mathbf{A})$ það eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$ sem tilheyrir eigingildinu 2 og $E_4(\mathbf{A})$ það eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$ sem tilheyrir eigingildinu 4.

$E_2(\mathbf{A}) = \mathrm{Null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ og ljóst er að fylkið $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hefur metorð 2 svo að $\mathrm{Dim}(E_2(\mathbf{A})) = 1$.

$E_4(\mathbf{A}) = \mathrm{Null}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)$ og ljóst er að fylkið $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ hefur metorð 2 svo að $\mathrm{Dim}(E_4(\mathbf{A})) = 1$.

Skoðum nú eiginrúm fylkisins $\mathbf{B}$ og notum samsvarandi tákn fyrir eiginrúm þess og við notuðum fyrir $\mathbf{A}$.

$E_2(\mathbf{B}) = \mathrm{Null}(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ og ljóst er að fylkið $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hefur metorð 1 svo að $\mathrm{Dim}(E_2(\mathbf{B})) = 2$.

$E_4(\mathbf{B}) = \mathrm{Null}(\mathbf{B} - 4\mathbf{I}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}\right)$ og ljóst er að fylkið $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

hefur metorð 2 svo að $\mathrm{Dim}(E_4(\mathbf{B})) = 1$.

Almennt vitum við (sjá setningu 20.2.2 í fyrirlestrum) að fylki úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ er hornalínugeranlegt ef og aðeins ef til er grunnur fyrir $\mathbb{R}^n$ þar sem allir vigraranir eru eiginvigrar fylkisins.

Þar sem bæði eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$ eru af víddinni 1, þá er hámarksfjöldi línulega óháðra eiginvigra þess tveir. Af því má ráða að ekki er til grunnur fyrir $\mathbb{R}^3$ þar sem allir vigrarnir eru eiginvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ og þess vegna er það ekki hornalínugeranlegt.

Ef við veljum vigur $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ úr $E_4(\mathbf{B})$ og tvo línulega óháða vigra $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ úr $E_2(\mathbf{B})$ þá mynda $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ grunn fyrir $\mathbb{R}^3$ og þar með er fylkið $\mathbf{B}$ hornalínugeranlegt.

Athugasemd. Um hvort eigingildi fylkisins $\mathbf{B}$ fyrir sig gildir að algebruleg margfeldni og rúmfræðileg margfeldni þess er sú sama svo að fylkið $\mathbf{B}$ er hornalínugeranlegt samkvæmt setningu 21.1.4 í fyrirlestrunum. Um fylkið $\mathbf{A}$ gildir hins vegar að algebruleg margfeldni eigingildisins 2 er stærri en rúmfræðileg margfeldni þess svo að $\mathbf{A}$ er ekki hornalínugeranlegt samkvæmt sömu setningu.

Dæmi 2. [Úr prófi í maí 2014]

(i) Útskýrið hugtökin *metorð* (e. rank) og *núllvídd* (e. nullity) fylkis.

(ii) Útskýrið hugtakið *eigingildi* (e. eigenvalue) ferningsfylkis.

(iii) Gerið grein fyrir að metorð fylkisins $\mathbf{A}$, sem er skilgreint hér á eftir, sé í mesta lagi 2.

(iv) Sýnið að talan 0 sé eitt af eigingildum fylkisins $\mathbf{A}$, sem er skilgreint hér á eftir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 2/9 & 1/7 \\ 1/3 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lausn. (i) *Metorð* fylkis er fjöldi þeirra línuvigra, sem eru ekki núll, í ruddri efri stallagerð þess.

Núllvídd fylkis er víddin á núllrúmi þess.

(ii) Við segjum að tvinntala λ sé *eigingildi* $n \times n$ fylkis $\mathbf{A}$ ef til er vigur $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ úr $\mathbb{C}^n$ sem uppfyllir skilyrðið
$$\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}.$$

(iii) Við vitum að metorð fylkis er jafnt dálkvídd þess. Ljóst er að dálkrúm fylkisins $\mathbf{A}$ er innihaldið í spanni vigranna $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/7 \\ -1/4 \end{bmatrix}$ svo að dálkvídd $\mathbf{A}$ er í mesta lagi 2. (Reyndar er fljótséð að dálkrúmið er spannað af vigrunum tveimur svo að metorð $\mathbf{A}$ er 2.)

(iv) Við vitum að summan af dálkvídd og núllvídd fylkisins $\mathbf{A}$ er 3 svo samkvæmt lið (iii) er núllvídd þess (að minnsta kosti) 1. Það er því til er vigur $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ úr $\mathbb{R}^3$ sem uppfyllir skilyrðið $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, en það þýðir að 0 er eigingildi $\mathbf{A}$.

Dæmi 3. [Úr prófi í desember 2012] Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki og λ vera tvinntölu.

(i) Hvað merkir að λ sé eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$?

(ii) Hvað merkir að vigur $\mathbf{w}$ úr $\mathbb{C}^n$ sé eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ og tilheyri eigingildinu λ?

Setjum nú $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(iii) Finnið öll eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

(iv) Finnið öll eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(v) Er fylkið $\mathbf{A}$ hornalínugeranlegt?

Lausn. (i) Það nerkir að til sé vigur $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ úr $\mathbb{C}^n$ sem uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}.$$

(ii) Það þýðir að $\mathbf{w}$ sé *ekki núllvigurinn* og $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

(iii) Eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru rætur kennimargliðunnar

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(t) &= \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1-t & -3 & -1 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{bmatrix} = \operatorname{Det}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3-t & 1 \end{bmatrix} - t\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1-t & -3 \\ 0 & 3-t \end{bmatrix} \\ &= -3+3-t-t(1-t)(3-t)) = -t(t-2)^2. \end{aligned}$$

Eigingildin eru því 0 og 2.

(iv) Við notum sama táknmál og í lausninni á dæmi 1 hér að framan og fáum

$$E_0(\mathbf{A}) = \operatorname{Null}(\mathbf{A}) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

og

$$E_2(\mathbf{A}) = \operatorname{Null}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

(v) Þar sem eiginrúmið $E_2(\mathbf{A})$ er aðeins einvítt þá er ekki hægt að finna grunn fyrir $\mathbb{R}^3$ þar sem allir vigrarnir eru eiginvigrar fylkisins $\mathbf{A}$. Þar með er fylkið ekki hornalínugeranlegt. (Sjá lausnina á dæmi 1.)

Dæmi 4. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og skilgreinum tvær runur $a_0, a_1, a_2, \ldots$ og $b_0, b_1, b_2, \ldots$ með því að setja $a_0 = 100$ og $b_0 = 10$ og

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

fyrir öll $n \geq 0$.

(i) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt.

(ii) Sýnið að um öll $n \geq 0$ gildi

$$a_n = 180c^n - 80d^n \qquad \text{og} \qquad b_n = 90c^n - 80d^n$$

þar sem c og d eru eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

[Ábending: Sjá bls 380 í kennslubók.]

Lausn. (i) Eigingildi $\mathbf{A}$ eru rætur kennimargliðunnar

$$\operatorname{Det} \begin{bmatrix} 4-t & -2 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} = (4-t)(1-t) + 2 = (t-3)(t-2).$$

Eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru því 2 og 3. Ef við veljum einn eiginvigur fyrir hvort eigingildi þá eru þeir línulega óháðir og mynda þar með grunn fyrir $\mathbb{R}^2$. Af því getum dregið þá ályktun að $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt. (Einnig væri hægt að vísa beint í setningu 21.1.1 úr fyrirlestrum.)

(ii) Ef við setjum $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ þá er $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ og við vitum að $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Við ætlum að leysa dæmið með því að finna eiginvigur $\mathbf{u}$ sem tilheyrir eigingildinu 2 og eiginvigur $\mathbf{v}$ sem tilheyrir eigingildinu 3. Finna síðan hnitvigurinn (r, s) fyrir vigurinn $\mathbf{x}_0$ miðað við raðgrunninn $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ og skrifa

$$\mathbf{x}_0 = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

Þá fæst $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^n (r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = r\mathbf{A}^n \mathbf{u} + s\mathbf{A}^n \mathbf{v} = r2^n \mathbf{u} + s3^n \mathbf{v}$.

Finnum nú eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

$E_2(\mathbf{A}) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ og $E_3(\mathbf{A}) = \operatorname{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Setjum því $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og finnum hnit vigursins $\mathbf{x}_0$ miðað við raðgrunninn $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Til þess þurfum við að leysa línulega jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

sem fljótséð er að hefur lausnina $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ 90 \end{bmatrix}$. Við fáum því

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = -80 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 90 \cdot 3^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{bmatrix}.$$

Jón Ingólfur Magnússon