Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 3

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 4)

22. september 2015

Dæmi 1. Látum P tákna sléttuna gegnum $(1, 2, 3)$, sem vigrarnir $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$ spanna.

(a) Sýnið að vigurinn $(1, 0, -1)$ sé hornréttur á báða vigrana $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$.

(b) Sýnið að sérhver vigur í $\mathbb{R}^3$ sem er bæði hornréttur á $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$ sé margfeldi af vigrinum $(1, 0, -1)$.

(c) Sýnið að

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = -2\}.$$

Lausn.

(a) Við höfum $(1, 0, -1)\cdot(1, 1, 1) = 1\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 1 = 0$ og $(1, 0, -1)\cdot(1, -1, 1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0$ en það þýðir að vigurinn $(1, 0, -1)$ er hornréttur á báða vigrana $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$.

(b) Vigur (x, y, z) úr $\mathbb{R}^3$ er hornréttur á vigrana $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$ þá og því aðeins að depilmargfeldi hans og hvors þeirra um sig sé jafnt núlli, en það er jafngilt

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Með Gauss-eðingu og aftur-á-bak innsetningu fæst svo að lausnir þessa jöfnuhneppis eru nákvæmlega öll margfeldi af vigrinum $(1, 0, -1)$.

(c) Ljóst er að P er innihaldið í menginu $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = -2\}$ þ.e.a.s. að sérhver vigur af gerðinni $(1, 2, 3) + s(1, 1, 1) + t(1, -1, 1)$ uppfyllir jöfnuna $x-z = -2$ og er þer með stak í menginu. Okkur nægir því að sýna að lausnamengi jöfnunnar $x - z = -2$ sé innihaldið í P.

Byrjum á að sýna að vigrarnir $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$ séu línulega óháðir. Ef a, b og c eru rauntölur sem uppfylla jöfnuna

$$a(1, 0, -1) + b(1, 1, 1) + c(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

þá fæst með því að depilmargfalda báðar hliðar jöfnunnar með $(1, 0, -1)$ að $2a + 0 + 0 = 0$ og þar með $a = 0$. Af því leiðir svo $b = c = 0$ vegna þess að vigrarnir $(1, 1, 1)$ og $(1, -1, 1)$ eru línulega óháðir. Þar með er sýnt að vigrarnir þrír eru línulega óháðir. Rudd efri stallagerð fylkisins sem hefur þessa vigra sem dálkvigra hefur þar með enga núlllínu og af því sést að vgrarnir þrír spanna allt $\mathbb{R}^3$.

Tökum nú einhvern vigur (u, v, w), sem er lausn á jöfnunni $x - z = -2$ og sýnum að til séu rauntölur s og t sem uppfylla

$$(u, v, w) = (1, 2, 3) + r(1, 1, 1) + s(1, -1, 1).$$

Þar sem vigrarnir vigrarnir $(1,0,-1)$, $(1,1,1)$ og $(1,-1,1)$ eru línulega óháðir þá eru til rauntölur r, s og t sem fullnægja jöfnunni

$$(u,v,w)-(1,2,3)=r(1,0,-1)+s(1,1,1)+t(1,-1,1).$$

Nú er vigurinn vinstra mengin við jafnaðarmerkið hornréttur á $(1,0,-1)$ og þar sem vigrarnir $(1,1,1)$ og $(1,-1,1)$ eru það líka, svo með því að depilmargfalda báðar hliðar jöfnunnar með $(1,0,-1)$ fáum við $0=2r$ og þar með

$$(u,v,w)=(1,2,3)+s(1,1,1)+t(1,-1,1).$$

Athugasemd. Takið eftir að nákvæmlega sömu röksemdafærslu og beitt er hér að ofan fæst eftirfarandi niðurstaða:

- Látum $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ og $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vera línulega óháða vigra úr $\mathbb{R}^3$ og setjum

$$P=\{\mathbf{a}+s\mathbf{v}+t\mathbf{w}\mid s,t\in\mathbb{R}\}.$$

  Ef $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ er hornréttur á bæði $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, þá er $P=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\}$.

Dæmi 2. Látum l tákna línuna gegnum punktinn $(0,2,2)$, sem vigurinn $(3,-1,3)$ stikar, m tákna línuna gegnum punktinn $(0,0,0)$, sem vigurinn $(1,2,1)$ stikar og P tákna sléttuna í dæmi 1.

(a) Gerið grein fyrir að línurnar l og m skerist ekki.

(b) Gerið grein fyrir að línan l liggi í sléttunni P.

(c) Sker línan m sléttuna P?

Lausn. (a) Línurnar skerast ef og aðeins ef til eru rauntölur s og t sem uppfylla jöfnuna

$$(0,2,2)+s(3,-1,3)=t(1,2,1)$$

en hún samsvarar línulega jöfnuhneppinu

$$\begin{array}{rcrcr} -3s & + & t & = & 0 \\ s & + & 2t & = & 2 \\ -3s & + & t & = & 2. \end{array}$$

Með því að draga fyrstu jöfnuna frá þeirri þriðju sést að þetta hneppi hefur enga lausn svo línurnar skerast ekki.

(b) Allir vigrar af gerðinni $(0,2,2)+s(3,-1,3)$ fullnægja jöfnunni $x-z=-2$.

(c) Línan m sker ekki sléttuna P vegna þess að enginn vigur af gerðinni $t(1,2,1)$ fullnægir jöfnunni $x-z=-2$.

Athugasemd. Við hefðum getað sleppt því að leysa lið (a) vegna þess út frá liðum (b) og (c) er hægt að álykta að l og m skerast ekki.

Dæmi. 3. Skilgreinum tvær varpanir

$$S:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y,z)\mapsto 2x+3y+z \qquad \text{og} \qquad T:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t\mapsto (t,3t,-t).$$

(a) Gerið grein fyrir að varpanirnar S, T, $S\circ T$ og $T\circ S$ séu allar línulegar.

(b) Finnið fylkin sem varpanirnar fjórar eru gefnar með.

(c) Finnið kjarna varpananna fjögurra.

(d) Gerið grein fyrir hvort varpanirnar fjórar eru, hver fyrir sig,

(i) eintækar (ii) átækar (iii) gagntækar.

Lausn. (a) - (b) Ljóst er að vörpunin S et línuleg og gefin með 1×3 fylkinu $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ og vörpunin T er línuleg og gefin með 3×1 fylkinu $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$.

Samkvæmt setningu 7.1.2 eru því samskeyttu varpanirnar $S\circ T$ og $T\circ S$ líka línulegar; sú fyrri gefin með 1×1 fylkinu $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=10$, en sú síðari með 3×3 fylkinu $\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\6 & 9 & 3\\-2 & -3 & -1\end{bmatrix}$.

(c) $S(x,y,z)=0$ þá og því aðeins að $2x+3y+z=0$ svo að kjarni vörpunarinnar S er sléttan gegnum núll í $\mathbb{R}^3$ sem gefin er með jöfnunni $2x+3y+z=0$.

$T(t)=(0,0,0)$ þá og því aðeins að $t=0$ svo að $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$.

$(S\circ T)(t)=10t=0$ þá og því aðeins að $t=0$ svo að $\mathrm{Ker}(S\circ T)=\{0\}$.

$(T\circ S)(x,y,z)=(2x+3y+z)(1,3,-1)(0,0,0)$ þá og því aðeins að $2x+3y+z=0$ svo að kjarni vörpunarinnar $T\circ S$ er sléttan gegnum núll í $\mathbb{R}^3$ sem gefin er með jöfnunni $2x+3y+z=0$.

(d) (i) Samkvæmt setningu 6.2.8 vitum við að línuleg vörpun er eintæk þá og því aðeins kjarni hennar innihaldi aðeins núllvigurinn. Af því getum við séð að varpanirnar T og $S\circ T$ eru eintækar, en hinar tvær ekki.

(ii) Vörpunin S er átæk vegna þess að um sérhverja rauntölu $t\in\mathbb{R}$ gildir að $S(0,0,t)=t$. Vörpunin T er ekki átæk vegna þess að hún tekur til dæmis ekki gildið $(1,0,0)$. Vörpunin $S\circ T$ erátæk vegna þess að um sérhverja rauntölu t gildir $(S\circ T)(t/10)=t$. Vörpunin $T\circ S$ er ekki átæk því að hún tekur til dæmis ekki gildið $(1,0,0)$.

(iii) Af liðum (i) og (ii) má ráða að vörpunin $S\circ T$ er gagntæk en hinar ekki.

Dæmi. 4. Gerum ráð fyrir að við vitum að tiltekin vörpun $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ sé línuleg og við vitum jafnframt að $S(2,1,-3)=(1,1)$, $S(0,1,1)=(2,3)$ og $S(0,1,-3)=(2,3)$. Finnið $S(1,1,1)$.

Lausn. Lausnin byggir á því að skrifa vigurinn $(1,1,1)$ sem línulega samantekt af vigrunum $(2,1,-3)$, $(0,1,1)$ og $(0,1,-3)$. Til þess þurfum við að leysa jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Við eftirlátum lesendum smáatriðin varðandi útreikningana en eina lausn þessa hneppis er $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$. Með því að nota okkur að vörpunin S er línuleg fáum við þá

$$\begin{aligned} S(1,1,1) &= S\left(\frac{1}{2}(2,1,-3) + (0,1,1) - \frac{1}{2}(0,1,-3)\right) \\ &= \frac{1}{2}S(2,1,-3) + S(0,1,1) - \frac{1}{2}S(0,1,-3) \\ &= \frac{1}{2}(1,1) + (2,3) - \frac{1}{2}(2,3) = \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{aligned}$$

Dæmi 5. Látum M vera mengi. Fyrir sérhver tvö hlutmengi A og B í M setjum við

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

og köllum þetta hlutmengi **samhverfan mismun** hlutmengjanna A og B.
Sýnið að $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lausn. Tökum fyrst eftir að

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Um sérhvert x gildir því að $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ þá og því aðeins að $(x \in A$ og $x \notin A \cap B)$ eða $(x \in B$ og $x \notin A \cap B)$, en það jafngildir því að $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.