TÖL 104G

Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði
Einstaklingverkefni viku: 9

Nemandi:
Rakel María Brynjólfsdóttir

Póstfang:
rmb3@hi.is

Dæmi 1: Hve mörg mismunandi fullskipuð tvíundartré T er til með eftirfarandi hæðir?

a) Hæð $h(T) = 1$. Svar: 1
b) Hæð $h(T) = 2$. Svar: 3
c) Hæð $h(T) = 3$. Svar: 21

Dæmi 2: Hve mörg mismunandi fullskipuð tvíundartré T er hægt að smíða með því að framkvæma þrepunarskrefið á glæru 15 fyrir viku 8 eftirfarandi oft?

a) Framkvæma þrepunarskrefið 0 sinnum. Svar: 1
b) Framkvæma þrepunarskrefið 1 sinnum. Svar: 1
c) Framkvæma þrepunarskrefið 2 sinnum. Svar: 3
d) Framkvæma þrepunarskrefið 3 sinnum. Svar: 21

Dæmi 3: Hve mörg mismunandi fullskipuð tvíundartré T er til, sem hafa eftirfarandi fjölda hnúta?

a) Fjöldi $n(T) = 1$ Svar: 1
b) Fjöldi $n(T) = 2$ Svar: 0
c) Fjöldi $n(T) = 3$ Svar: 1
d) Fjöldi $n(T) = 4$ Svar: 0
e) Fjöldi $n(T) = 5$ Svar: 2
f) Fjöldi $n(T) = 6$ Svar: 0
g) Fjöldi $n(T) = 7$ Svar: 5
h) Fjöldi $n(T) = 8$ Svar: 0
i) Fjöldi $n(T) = 9$ Svar: 14
j) Fjöldi $n(T) = 10$ Svar: 0

Dæmi 4: Hver er lágmarkshæð fullkskipaðs tvíundartrés T hefur fjölda hnúta $n(T) = 2^k - 1$, fyrir $k = 1,2,...?$ Sannið svar ykkar. Til að sanna svarið þurfið þið að sanna bæði að til sé tré með viðeigandi hæð og fjölda hnúta og að ekki sé til lægra tré með viðeigandi fjölda hnúta.

Svar:

Setning: $P(T)$ segir að tvíundartré T með $2^k - 1$ hnút hefur hæð $k - 1$.

Grunnur: Gildir fyrir $k = 1$. Tvíundartré með $2^1 - 1 = 1$ hnúta hefur hæðina $1 - 1 = 0$ sem er satt.

Þrepun:

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að $P(T)$ gildi, þ.e.a.s. ef tvíundartré hefur $n(T) = 2^k - 1$, þá er hæð þess $h(T) = k - 1$.

Þrepunarskref: Viljum sanna að tvíundartré með hæð $(k + 1) -1 = k$ hafi $2^{k+1} - 1$ hnúta.

Fyrst þurfum við að taka eftir því að þessi skilgreining á tvíundartrjám gefur okkur alltaf fullkomin tvíundartré (þ.e.a.s. allir hnútar, nema laufin, eiga tvö börn). Þegar hæðin er $2^k - 1$ þá er fjöldi laufa 2^{k-1}. Ef við hækkum hæðina um 1 þá verður hún k, þá bætist líka við fjölda hnúta og þeir verða 2^k. Af því sést í hver sinn sem hæðin hækkar þá hækkar fjöldi hnúta um 2^k.

Nú vitum við að ef við hækkum hæðina um 1 (uppí k) þá bætast 2^k hnútar við og þá fæst (skv. þreðunarforsendu):

$2^k + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ sem er það sem sanna þurfti.

Tökum líka eftir því að $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$ skv. glæru 19, vika 8. Í okkar tilfelli fæst þá að

$$2^k - 1 \leq 2^{k-1+1} - 1$$
$$2^k - 1 \leq 2^k - 1$$

sem er satt fyrir öll k.