Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 4

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 5)

29. september 2015

Athugið. Lausn á dæmi 7 af vikublaði 4 verður ekki skrifuð upp hér.

Dæmi 1. Samkvæmt venju látum við $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tákna vigurrúm allra raungildra falla á $\mathbb{R}$. Látum f og g vera föll úr $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sem skilgreind eru með $f(t) := e^{2t}$ og $g(t) := e^{3t}$.

(a) Sýnið að hlutmengið $\{f, g\}$ í $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sé línulega óháð.

(b) Er fallið $t \mapsto \sin(t)$ í spanni f og g í $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Lausn.

(a) Gerum ráð fyrir að a og b séu rauntölur sem fullnægja skilyrðinu

$$af + bg = 0_{\mathbb{R}},$$

þar sem $0_{\mathbb{R}}$ táknar núllfallið á $\mathbb{R}$, og sýnum að $a = b = 0$. M.ö.o ætlum við að sýna að jafnan sé aðeins uppfyllt fyrir $a = b = 0$.

Við skulum átta okkur fyrst á því að jafnan þýðir að um öll t úr $\mathbb{R}$ gildi

$$ae^{2t} + be^{3t} = 0.$$

Með því að taka $t = 0$ fæst $a + b = 0$ og þar með $b = -a$ og við getum því ályktað að

$$0 = ae^{2t} - ae^{3t} = ae^{2t}(1 - e^{t}), \quad \text{fyrir öll } t \in \mathbb{R}.$$

Ef við setjum $t = 1$ inn í síðustu jöfnuna fáum við $ae^2(1 - e) = 0$, en það hefur í för með sér að $a = b = 0$.

(b) Látum h tákna fallið $t \mapsto \sin t$. Við ætlum að sýna að þetta fall sé ekki í spanni fallanna f og g. M.ö.o. ætlum við að sýna að ekki séu til rauntölur a og b sem fullnægja skilyrðinu $h = af + bg$, en það jafngildir skilyrðinu

$$\sin t = ae^{2t} + be^{3t}, \quad \text{fyrir öll } t \in \mathbb{R}.$$

Beitum óbeinni sönnun og gerum ráð fyrir að slíkar tölur séu til. Fyrir $t = 0$ fæst $0 = a + b$ og þar með $\sin t = ae^{2t}(1 - e^{t})$ fyrir öll t úr $\mathbb{R}$. Með því að stinga $t = \pi$ inn í síðustu jöfnu fáum við $0 = ae^{2\pi}(1 - e^{\pi})$ og þar með $a = 0$, en það er fráleitt því að h er ekki núllfallið.

Dæmi 2. Vinirnir Anna, Jósafat og Pálína skutust inn í búð að kaupa bollur, súkkulaðistykki og kók. Jósafat keypti fjórar bollur, fjögur súkkulaðistykki og fjórar kækur og greiddi fyrir það 2.400 krónur. Pálína keypti fimm bollur, tvö súkkulaðistykki og tvær kækur og greiddi 2.600 krónur fyrir það, en Anna keypti eina bollu, tvö súkkulaðistykki og tvær kækur.

(a) Hvað greiddi Anna fyrir það sem hún keypti?

(b) Hvað kostar ein bolla?

Lausn. Táknum verð einnar bollu með x, eins súkkulaðistykkis með y og einnar kókar með z. Setjum upp jöfnur fyrir innkaup Jósafats, Pálínu og Önnu í þeirri röð sem þau eru talin upp, og fáum línulega jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 4y & + & 4z & = & 2400 \\ 5x & + & 2y & + & 2z & = & 2600 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & a \end{array}$$

þar sem a táknar upphæðina sem Anna greiddi fyrir varninginn. Með því að beita einföldum línuaðgerðum á þetta hneppi fáum við hneppið

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1200-a \\ & & y & + & z & = & a-600 \\ & & & & 0 & = & 3a-2200 \end{array}$$

(a) Af síðara hneppinu sést að Anna greiddi $2200/3$ krónur.

(b) Af niðurstöðunni í lið (a) og jöfnu eitt í síðara hneppinu sést að ein bolla kostar í krónum talið $1200 - \frac{2200}{3} = \frac{1400}{3}$.

Dæmi. 3. Skilgreinum varpanir $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ með

$$S(x,y,z) = (x^2+y, x^2-y+z) \qquad \text{og} \qquad T(x,y) = (x-y, y-x).$$

Gerið fyrst grein fyrir hverjar varpananna S, T og $T \circ S$ eru línulegar og finnið tilheyrandi fylki fyrir þær þeirra sem eru línulegar. Gerið svo grein fyrir hverjar þeirra eru átækar, eintækar eða gagntækar.

Lausn. Vörpunin S er ekki línuleg vegna þess að $S(-1,0,0) = (1,1)$ en $-S(1,0,0) = (-1,-1)$.

Vörpunin T er línuleg, gefin með fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Skoðum nú samskeyttu vörpunina:

$$\begin{aligned} (T \circ S)(x,y,z) &= T(x^2+y, x^2-y+z) \\ &= \big((x^2+y)-(x^2-y+z), (x^2-y+z)-(x^2+y)\big) = (2y-z, z-2y). \end{aligned}$$

Af þessu sést að vörpunin $T \circ S$ er línuleg og gefin með fylkinu $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Könnum nú hvort varpanirnar séu átækar, eintækar eða gagntækar.

- Vörpunin S er átæk vegna þess að um öll (a,b) úr $\mathbb{R}^2$ gildir að $S(0,a,a+b) = (a,b)$. Þar sem um öll x gildir $S(-x,0,0) = S(x,0,0)$, þá er vörpunin ekki eintæk og þar með ekki gagntæk.

- Vörpunin T er hvorki eintæk né átæk og þar með ekki gagntæk. Þetta sést til dæmis út frá því að $T(1,1) = T(0,0) = (0,0)$ og út frá því að jafnan $T(x,y) = (1,0)$ hefur enga lausn.

- Vörpunin $T \circ S$ er hvorki eintæk né átæk og þar með ekki gagntæk. Þetta sést til dæmis út frá því að $(T \circ S)(1,0,0) = (T \circ S)(0,0,0) = (0,0)$ og út frá því að jafnan $(T \circ S)(x,y,z) = (1,0)$ hefur enga lausn.

Dæmi. 4. Látum $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ vera línulegu vörpunina sem skilgreind er með

$$h(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x-y & 2x \\ z & 2z \end{bmatrix}.$$

Gerið fyrst grein fyrir að vörpunin h sé línuleg og finnið síðan kjarna hennar.

Lausn. Látum (a,b,c,d) og (x,y,z,w) vera vigra úr $\mathbb{R}^4$ og r vera rauntölu. Þá fæst

$$\begin{aligned} h\big(r(a,b,c,d) + (x,y,z,w)\big) &= h(ra+x, rb+y, rc+z, rd+w) \\ &= \begin{bmatrix} (ra+x)-(rb-y) & 2(ra+x) \\ (rc+z) & 2(rc+z) \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-y & 2x \\ z & 2z \end{bmatrix} \\ &= rh(a,b,c,d) + h(x,y,z,w). \end{aligned}$$

Af þessu má svo sjá að vörpunin h er línuleg.

Rifjum nú upp að **kjarni** línulegu vörpunarinnar h, táknaður $\mathrm{Ker}(h)$, er mengi allra vigra úr $\mathbb{R}^4$ sem h varpar í núll. Við höfum því að vigur (x,y,z,w) er í $\mathrm{Ker}(h)$ þá og því aðeins að

$$h(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x-y & 2x \\ z & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en það jafngildir því að $x - y = 0$, $2x = 0$, $z = 0$ og $2z = 0$. Eina lausn þessa línulega jöfnuhneppis er bersýnilega $x = y = z = 0$ og við fáum þar með að

$$\mathrm{Ker}(h) = \{(0,0,0,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ w \in \mathbb{R}\}.$$