Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra B

Lausnir fyrir níunda skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 11)

14. nóvember 2014

Dæmi 1.

(a) Útskýrið hugtakið *hnitaskiptafylki* frá raðgrunni $\mathcal{B}$ til raðgrunns $\mathcal{C}$ fyrir endanlega vítt vigurrúm V.

(b) Finnið hnitaskiptafylki frá raðgrunninum $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ til raðgrunnsins $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Lausn. (a) Það er eina fylkið $\mathbf{P}$ sem uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad \text{fyrir alla vigra } \mathbf{v} \text{ úr } V.$$

(b) Látum $\mathbf{P}$ tákna hnitaskiptafylkið frá $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$. Fyrsti dálkur $\mathbf{P}$ er hnitavigur vigursins $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{C}$ og annar dálkur $\mathbf{P}$ er hnitavigur vigursins $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{C}$. Við getum því fundið $\mathbf{P}$ með því að finna rudda efri stallagerð aukna fylkisins

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

því hún verður einmitt $[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{P}\,]$. Ef við framkvæmum línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 - 3L_1$, $L_1 \to L_1 + L_2$ og $L_2 \to -\frac{1}{2}L_2$, þá fáum við ruddu efri stallagerðina

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

og þar með er $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Dæmi 2. Finnið grunn fyrir línurúm fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -2 \\ 2 & 2i & i \\ 2i & 3 & -2i \end{bmatrix}.$$

Lausn. Komum fylkinu $\mathbf{A}$ á efra stallaform.

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -2 \\ 2 & 2i & i \\ 2i & 3 & -2i \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3-(1+i)L_1]{L_2 \to L_2+(i-1)L_1} \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -2 \\ 0 & -2 & 2-i \\ 0 & 5-2i & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_3 \to L_3+\frac{1}{2}(5-2i)L_2]{} \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -2 \\ 0 & -2 & 2-i \\ 0 & 0 & 6-\frac{9}{2}i \end{bmatrix}.$$

Línurnar í síðasta fylkinu mynda þá grunn fyrir línurúm fylkisins $\mathbf{A}$. Tökum eftir því að þar sem línurúmið er þrívítt þá er það jafnt $\mathbb{C}^3$ og við gætum þess vegna tekið hvaða grunn sem er fyrir $\mathbb{C}^3$, til dæmis staðlaða grunninn $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Dæmi 3. (Úr sjúkra- og upptökuprófi maí 2014)

(a) Útskýrið hugtökin *línuleg vörpun* (e. linear mapping) og *einsmótun* (e. isomorphism).

(b) Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Gerið grein fyrir hvort vörpunin

$$S : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{CAC}$$

sé línuleg eða ekki.

(c) Látum $\mathbf{A}$ vera eins og í lið (b). Gerið grein fyrir að vörpunin

$$T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{AC}^T$$

sé einsmótun.

(d) Finnið fylki einsmótunarinnar T úr lið (c) miðað við raðgrunninn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lausn. (a) Línuleg vörpun er vörpun milli tveggja vigurrúma $T : U \to V$, sem varðveitir samlagningu og margföldun með tölu, m.ö.o. fullnægir eftirfarandi skilyrði

$T(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + rT(\mathbf{y})$ fyrir alla vigra $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr U og allar rauntölur r.

(b) Vörpunin S er ekki línuleg vegna þess að

$$S\left((-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og $(-1)S\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og því

er $(-1)S\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \neq S\left((-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

(c) Tökum fyrst eftir að fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt eins og sjá má til dæmis af því að ákveða þess er ekki núll.

Við ætlum að sýna á tvo ólíka vegu að T sé einsmótun.

Fyrri sönnun: Vörpunin

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}^T$$

er einsmótun (hún er andhverfa sjálfrar sín) og vörpunin

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{X}$$

er líka einsmótun og andhverfa hennar er $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$. Þar sem T er samskeyting þessara tveggja einsmótana þá er hún líka einsmótun.

Síðari sönnun: Fyrir $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ og $r \in \mathbb{R}$ gildir

$$T(\mathbf{X}+r\mathbf{Y}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}+r\mathbf{Y})^T = \mathbf{A}(\mathbf{X}^T+r\mathbf{Y}^T) = \mathbf{A}\mathbf{X}^T + r\mathbf{A}\mathbf{Y}^T = T(\mathbf{X}) + rT(\mathbf{Y})$$

svo að vörpunin T er línuleg. Ef $T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}^T = \mathbf{O}$, þá er $\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}\right)^T = \mathbf{O}$ og þar með vitum við að vörpunin T er eintæk. En nú gildir að

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Range}(T)) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$$

og þar með $\mathrm{Dim}(\mathrm{Range}(T)) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ vegna þess að $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) = 0$. Hlutrúmið $\mathrm{Range}(T)$ í $\mathbb{R}^{2\times 2}$ hefur því sömu vídd og $\mathbb{R}^{2\times 2}$ en það hefur í för með sér að $\mathrm{Range}(T) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(d) Látum $\mathcal{B}$ tákna umræddan raðgrunn og $\mathbf{M}$ tákna fylki línulegu vörpunarinnar miðað við hann. Dálkarnir í $\mathbf{M}$ eru þá hnitavigrar vigranna $T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$ miðað við $\mathcal{B}$ (í þessari röð). Nú er

$$T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

svo að hnitavigur $T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)$ miðað við $\mathcal{B}$ er $\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}$. Með samskonar útreikningum fæst að hnitavigrar $T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$ miðað við $\mathcal{B}$ eru (í sömu röð) $\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}$.

Við sjáum því að

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\2&1&0&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}$$

Dæmi 4. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Finnið öll eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

(b) Finnið öll eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$ og segið til um víddir þeirra.

Lausn. (a) Eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru rætur kennimargliðunnar

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 2-t & -3 & 1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 1 & -3 & 2-t \end{bmatrix}$$

og með liðun eftir fyrsta dálki fáum við $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 2-t & -3 & 1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 1 & -3 & 2-t \end{bmatrix} =$
$(2-t)\mathrm{Det}\begin{bmatrix} -(2+t) & 1 \\ -3 & 2-t \end{bmatrix} - \mathrm{Det}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2-t \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -(2+t) & 1 \end{bmatrix} =$
$(2-t)((t+2)(t-2)+3) - 3(t-1) + (t-1) = (2-t)(t^2-1) - 2(t-1) = -t(t-1)^2$.
Eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru því 0 og 1.

(b) Eiginrúm eigingildisins 0 er hlutrúmið

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

og þar sem $\mathbf{A}$ er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ þá fáum við

$$\mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Þar sem þetta eiginrúm er spannað af einum vigri þá er það af víddinni 1.
Eiginrúm eigingildisins 1 er hlutrúmið

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

og þar sem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ þá fáum við

$$\mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Þar sem vigrarnir $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mynda grunn fyrir þetta eiginrúm þá er það af víddinni 2.

Jón Ingólfur Magnússon