Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 5

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 6)

7. október 2015

Dæmi 1. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ eigi sér óendanlega margar vinstri andhverfur og finnið þær.

(b) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ eigi sér enga hægri andhverfu.

Lausn. (a) Við viljum finna öll fylki $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$, sem fullnægja jöfnunni $\mathbf{XA} = \mathbf{I}_2$, en hún gildir þá og því aðeins að stökin í $\mathbf{X}$ uppfylli eftirfarandi skilyrði

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{11} & - & x_{12} & + & x_{13} & = & 1 \\ & & 2x_{12} & + & x_{13} & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_{21} & - & x_{22} & + & x_{23} & = & 0 \\ & & 2x_{22} & + & x_{23} & = & 1. \end{array}$$

Með því að beita aftur-á-bak innsetningu á jöfnuhneppin tvö fáum við almennu lausnirnar

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

þar sem s og t mega vera hvaða rauntölur sem er. Af því leiðir svo að vinstri andhverfur fylkisins $\mathbf{A}$ eru öll fylki af gerðinni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3s & -s & 2s \\ -3t & -t & 2t \end{bmatrix}$$

þar sem s og t mega vera hvaða rauntölur sem er.

(b) Beitum óbeinni sönnun og gerum ráð fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ eigi sér hægri andhverfu $\mathbf{B}$. Um sérhvern vigur $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^3$ gildir þá að hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hefur lausnina $\mathbf{Bb}$. Það stenst hins vegar ekki vegna þess að rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$ hefur núlllínu.

Dæmi 2. Leysið eftirfarandi línulegt jöfnuhneppi með LU-þáttun (Sjá fyrirlestur 28. september og bls 489 í kennslubók.).

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

(Hér er aðalatriðið að sýna að þið kunnið að nota LU-þáttun.)

Lausn. Við byrjum á að koma stuðlafylkinu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ á efra stallaform með því að nota eingöngu umskiptingar. Þegar umskiptingunum $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1$ og $L_3 \to L_3 + \frac{1}{3}L_2$ er beitt á fylkið $\mathbf{A}$ (í þessari röð) þá fæst fylkið $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Til þess að finna tilheyrandi L-fylki þurfum við að beita andhverfu umskiptingunum í öfugri röð á einingarfylkið $\mathbf{I}_3$; nánar til tekið þurfum við að beita umskiptingunum $L_3 \to L_3 - \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \to L_3 + L_1$ og $L_2 \to L_2 + 2L_1$ (í þessari röð) á fylkið $\mathbf{I}_3$. Þá fæst fylkið $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ og þar með LU-þáttunin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \mathbf{LU}.$$

Leysum jöfnuhneppið $\mathbf{Lx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ með áfram innsetningu og fáum lausnina $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Leysum síðan jöfnuhneppið $\mathbf{Uy} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ með aftur-á-bak innsetningu og fáum lausnina $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, sem jafnframt er lausn á upphaflega jöfnuhneppinu.

Dæmi. 3. Kynnið ykkur (til dæmis á bókasafninu eða netinu) merkingu hugtaksins **Hessenberg-fylki** (e. *Hessenberg matrix*).

(a) Setjið fram (á íslensku) nákvæma skilgreiningu á hugtakinu.

(b) Setjið fram dæmi um Hessenberg-fylki af stærðinni 5×5.

Lausn. (a) Við segjum að fylki $\mathbf{A}$ sé **Hessenberg-fylki** ef það er ferningsfylki, sem fullnægir öðru hvoru eftirfarandi skilyrða:

- $\mathbf{A}_{ij} = 0$ ef $i > j + 1$.
- $\mathbf{A}_{ij} = 0$ ef $j > i + 1$.

Ferningsfylki sem fullnægja fyrra skilyrðinu kallast **efri Hessenberg-fylki**, en ferningsfylki sem fullnægja síðara skilyrðinu kallast **neðri Hessenberg-fylki**.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ er dæmi um efra Hessenberg-fylki og $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ er dæmi um neðra Hessenberg-fylki.

Dæmi. 4. Munum að $\mathbb{P}_n$ táknar vigurrúm allra margliða af stigi í mesta lagi n. Sýnið að vörpunin

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2, \qquad p(t) \longmapsto 2p(t+1) - t^2 p''(t)$$

sé línuleg og finnið síðan kjarna hennar. Er hún eintæk? Er hún átæk?

Lausn. Sýnum að vörpunin T sé línuleg. Látum p og q vera einhverjar margliður af stigi 2 eða lægra og látum c vera einhverja rauntölu. Þá fæst, fyrir sérhvert t úr $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(p + c \cdot q)(t) &= 2(p + c \cdot q)(t+1) - t^2 (p + c \cdot q)''(t) \\ &= 2p(t+1) + 2c \cdot q(t+1) - t^2 (p''(t) + c \cdot q''(t)) \\ &= (2p(t+1) - t^2 p''(t)) + c \cdot (2q(t+1) - t^2 q''(t)) \\ &= T(p)(t) + c \cdot T(q)(t). \end{aligned}$$

Við höfum þá sýnt að $T(p + c \cdot q) = T(p) + c \cdot T(q)$ og af því sést að vörpunin T er línuleg.
Sérhverja margliðu p úr $\mathbb{P}_2$ er hægt að setja fram á nákvæmlega einn hátt sem

$$p(t) = at^2 + bt + c,$$

þar sem a, b og c eru rauntölufastar. Við fáum þá að

$$T(p)(t) = 2\left[a(t+1)^2 + b(t+1) + c\right] - t^2 2a = (4a + 2b)t + 2(a + b + c)$$

fyrir öll t úr $\mathbb{R}$. Við sjáum því að $T(p)$ er núllmargliðan þá og því aðeins að $(4a + 2b)t + 2(a + b + c) = 0$ fyrir öll t úr $\mathbb{R}$, en það jafngildir því að tölurnar a, b og c fullnægi jöfnuhneppinu

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & + & b & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0. \end{array}$$

Með Gauss-eyðingu og aftur-á-bak innsetningu fæst að lausnamengi þess er

$$\{(r, -2r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

og þar með fæst

$$\operatorname{Ker}(T) = \left\{rt^2 - 2rt + r \in \mathbb{P}_2 \mid r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Þar sem $\operatorname{Ker}(T)$ inniheldur fleiri margliður en núllmargliðuna þá er vörpunin T ekki eintæk. Ljóst er að T er ekki átæk þar sem hún tekur engar annars stigs margliður sem gildi.

Dæmi 5. Látum $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vera upptalningu á vigrum í vigurrúmi V. Sannið eftirfarandi fullyrðingar eða hrekið þær með mótdæmum.

(a) Til er j úr $\{1, \ldots, k\}$ sem hefur þann eiginleika að upptalningin $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j$ er línulega óháð.

(b) Ef upptalningin $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ er línulega háð, þá er $\mathbf{v}_k$ í spanni vigranna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

Lausn. (a) Þessi fullyrðing er röng. Ef $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, þá er ekki til neitt slíkt j.
Athugasemd. Ef gert er ráð fyrir að fyrsti vigurinn í upptalningunni sé ekki núll, þá er fullyrðingin rétt.

(b) Fullyrðingin er röng. Til dæmis gildir þetta ekki um upptalninguna $0, 1$ í $\mathbb{R}$. Annað mótdæmi er svo upptalningin $(1, 0), (2, 0), (0, 1)$ í $\mathbb{R}^2$.

Jón Ingólfur Magnússon