Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra B

Lausnir fyrir sjötta skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 7)

27. október 2014

Dæmi 1. Reiknið ákveðu fylkisins $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) með því að koma því fyrst á efra stallaform,

(b) með því að beita liðun eftir vel valinni línu eða dálki.

Lausn. (a) Með því að framkvæma línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 - L_1$, $L_3 \to L_3 - 4L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_4$, $L_3 \to L_3 + 5L_2$ og $L_4 \to L_4 + 2L_2$ á fylkinu $\mathbf{A}$ fæst fylkið

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

en ákveða þess er núll vegna þess að þriðja línan er margfeldi af fjórðu línu. Við fáum því

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = -\mathrm{Det}(\mathbf{B}) = 0.$$

(b) Með liðun eftir annarri línu fáum við

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= -\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\left(\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) - \left(-\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= -(3-8+4-9) - (-1+16+3-8) = 0. \end{aligned}$$

(Hér eru ákveður 3×3 fylkjanna hægra megin við fyrsta jafnaðarmerkið báðar reiknaðar með liðun eftir þriðju línu.)

Dæmi 2. Látum $\mathbf{A}$ tákna margfeldi fylkjanna (vinstra megin við jafnaðarmerkið) í dæmi 6 á bls 236 í kennslubókinni. Gerið grein fyrir að $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

Lausn. Skrifum $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ þar sem $\mathbf{B}$ er 4×3 fylkið og $\mathbf{C}$ er 3×4 fylkið sem um er rætt. Við vitum að fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt þá og því aðeins að $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$. Okkur nægir því að sýna að fylkið $\mathbf{A}$ sé ekki andhverfanlegt.

Gerum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ sé andhverfanlegt og sýnum að það fái ekki staðist. Nú ef svo er, þá hefði jöfnuhneppið $\mathbf{BCx} = \mathbf{b}$ lausn fyrir alla vigra $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^4$ og þar með hefði jöfnuhneppið $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ líka lausn fyrir alla vigra $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^4$. Það getur hins vegar ekki verið vegna þess að rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{B}$ hefur að minnsta kosti eina línu sem er núll því það hefur fjórar línur en aðeins þrjá dálka. Við getum þar með ályktað að $\mathbf{A}$ sé ekki andhverfanlegt.

Dæmi 3. Notið Cramer-reglu til þess að leysa eftirfarandi línulegt jöfnuhneppi.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & - & y & + & 9z & = & -16 \end{array}$$

LAUSN. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}$.

Fyrir $j = 1, 2, 3$ látum við samkvæmt venju $\mathbf{A}_j(\mathbf{b})$ tákna fylkið sem fæst með því að setja $\mathbf{b}$ inn í stað j-ta dálkvigursins í $\mathbf{A}$.
Til þess að geta beitt Cramer-reglu þurfum við fyrst að ganga úr skugga um að ákveða fylkisins $\mathbf{A}$ sé ekki núll og þá hefur jöfnuhneppið nákvæmlega eina lausn og hún er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} \mathrm{Det}(\mathbf{A}_1(\mathbf{b})) \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_2(\mathbf{b})) \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_3(\mathbf{b})) \end{bmatrix}$$

Við fáum nú (útreikningar eftirlátnir lesendum):

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} = 48 \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_1(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ -16 & -1 & 9 \end{bmatrix} = 48 \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_2(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 4 & -16 & 9 \end{bmatrix} = 96 \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_3(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & -16 \end{bmatrix} = -96. \end{aligned}$$

Þar með hefur línulega jöfnuhneppið nákvæmlega eina lausn og hún er vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Dæmi 4. Samkvæmt venju látum við $C([-1, 2])$ tákna vigurrúm allra samfelldra falla á lokaða bilinu $[-1, 2]$ og setjum

$$A = \{f \in C([-1, 2]) \mid f(1) = 0\}.$$

Er A hlutrúm í $C([-1, 2])$?

LAUSN. Hlutmengið A er hlutrúm í $C([-1, 2])$ ef og aðeins ef eftirfarandi þrjú skilyrði eru uppfyllt:

(i) Núllvigur vigurrúmsins $C([-1,2])$ er í A.

(ii) Ef f og g eru úr A, þá er $f+g$ líka úr A.

(iii) Ef f er úr A og c er rauntala, þá er cf líka úr A.

Göngum nú á röðina og könnum hvort þessi skilyrði séu uppfyllt.

(i) Núllvigurinn í vigurrúminu $C([-1,2])$ er fastafallið núll á bilinu $[-1,2]$, þ.e.a.s. fallið sem tekur gildið núll í öllum punktum bilsins. Ljóst er að það tekur gildið núll í punktinum 1 svo það er í A.

(ii) Ef $f, g \in A$, þá fæst að $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ og þar með er fallið $f+g$ í A.

(iii) Ef $f \in A$ og c er rauntala, þá fæst að $(cf)(1) = c \cdot f(1) = c \cdot 0 = 0$ og þar með er fallið cf í A.

Hlutmengið A er því hlutrum í $C([-1,2])$.