**Háskóli Íslands** **Raunvísindadeild**

# Línuleg algebra A og B

## Lausnir fyrir fyrsta skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 2)

9. september 2014

**Dæmi 1.** Gefið er línulegt jöfnuhneppi

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 11x_5 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 10x_3 & - & 8x_4 & - & 28x_5 & = & 4 \end{array}$$

(a) Setjið upp tilheyrandi aukið fylki.

(b) Leysið jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu.

(c) Er vigurinn $(1, 2, 5, 7, -9)$ lausn á hneppinu?

Lausn.

(a) Aukna fylkið er

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 3 & -4 & -11 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 & 4 \end{array}\right]$$

(b) Byrjum á að koma fylkinu á efra stallaform.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 3 & -4 & -11 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 & 1 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}]{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & -6 & 9 & -6 & -23 & -5 \\ 0 & -9 & 19 & -11 & -46 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 + 3L_2]{L_3 \to L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -13 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 - 7L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -25 \end{array}\right]$$

Beitum nú aftur-á-bak innsetningu á línulega jöfnuhneppið sem tilheyrir þessu síðasta aukna fylki. Breytan $x_5$ er frjáls þar eð dálkur númer fimm er án forustustuðuls. Setjum $x_5 = t$ og fáum

$$x_4 = \frac{25}{2} - 3t, \qquad x_3 = 5 + t, \qquad x_2 = \frac{5 + 4x_3 - 3x_4 - 11x_5}{3} = -\frac{25}{6} + \frac{2t}{3}$$

og $x_1 = 3 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 6x_5 = \frac{29}{3} - \frac{2t}{3}$.

Lausnir hneppisins eru því allir vigrar af gerðinni

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{3} - \frac{2t}{3} \\ -\frac{25}{6} + \frac{2t}{3} \\ 5+t \\ \frac{25}{2} - 3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{3} \\ -\frac{25}{6} \\ 5 \\ \frac{25}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

þar sem $t$ má vera hvaða rauntala sem er. Með öðrum orðum er lausnamengi hneppisins 1-flatneskjan, þ.e.a.s. línan,

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{29}{3} \\ -\frac{25}{6} \\ 5 \\ \frac{25}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Takið eftir að vigurinn $\begin{bmatrix} \frac{29}{3} \\ -\frac{25}{6} \\ 5 \\ \frac{25}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ er lausn á upphaflega hneppinu, en vigurinn $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, sem stikar línuna, er lausn á tilheyrandi óhliðruðu hneppi.

(c) Vigurinn $(1, 2, 5, 7, -9)$ er ekki lausn á hneppinu vegna þess að hann uppfyllir ekki einu sinni fyrstu jöfnu þess.

**Dæmi 2.** Látum $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ vera lausnir á tilteknu jöfnuhneppi.

(i) Sýnið að um allar rauntölur $s$ og $t$ gildi að $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ er líka lausn á hneppinu ef það er óhliðrað.

(ii) Sýnið með dæmi að til séu rauntölur $s$ og $t$ sem hafa þann eiginleika að $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ er ekki lausn á hneppinu ef það er hliðrað.

(iii) Gerum nú ráð fyrir að hneppið sé hliðrað. Finnið nægjanlegt og nauðsynlegt skilyrði fyrir rauntölur $s$ og $t$ til þess að vigurinn $s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$ sé lausn á hneppinu.

Lausn. (i) Ef $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ eru lausnir á óhliðruðu línulegu jöfnuhneppi $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, þá gildir um allar rauntölur $s$ og $t$

$$\mathbf{A}(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s\mathbf{Au} + t\mathbf{Av} = s\mathbf{0} + t\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Þar með höfum við sýnt að vigurinn $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ er líka lausn á hneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(ii) Vigrarnir $(1, 0)$ og $(1, 1)$ eru báðir lausnir á hliðraða línulega jöfnuhneppinu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hins vegar er vigurinn $(1, 0) + (1, 1) = (2, 1)$ ekki lausn á hneppinu vegna þess að

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Ef $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ eru lausnir á línulegu jöfnuhneppi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ þar sem $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ og $s$ og $t$ eru rauntölur þá fæst

$$\mathbf{A}(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s\mathbf{Au} + t\mathbf{Av} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b} = (s + t)\mathbf{b}.$$

svo að vigurinn $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ er lausn á hneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ef og aðeins ef $(s + t)\mathbf{b} = \mathbf{b}$, en það er jafngilt því að $s + t = 1$ vegna þess að $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Við sjáum því að vigurinn $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ er lausn á hneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ þá og því aðeins að $s + t = 1$.

**Dæmi. 3.** Gerið grein fyrir að sérhverjar tvær af jöfnum línulega jöfnuhneppisins hér að neðan hafi sameiginlega lausn, en hneppið sjálft hafi enga.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ x & - & 6y & = & 9 \\ 5x & + & y & = & 45 \end{array}$$

Lausn. Lítum fyrst á hneppið sem fyrstu tvær jöfnurnar mynda. Með því að draga þá fyrri frá þeirri seinni fæst hneppið

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ & - & 8y & = & 8 \end{array}$$

og með aftur-á-bak innsetningu fæst að þetta hneppi hefur nákvæmlega eina lausn, $(x, y) = (3, -1)$. Á sama hátt fæst að línulegu jöfnuhneppin, sem annars vegar fyrsta og þriðja jafnan og hins vegar önnur og þriðja jafnan mynda, hafa bæði nákvæmlega eina lausn.

Lítum nú á hneppið í heild og komum tilheyrandi auknu fylki á efra stallaform.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & 9 \\ 5 & 1 & 45 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -9 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{9}{8}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 31 \end{array}\right].$$

Þar sem neðsta jafnan í línulega jöfnuhneppinu, sem tilheyrir síðasta aukna fylkinu, hefur enga lausn þá hefur upphaflega jöfnuhneppið ekki heldur neina lausn.

**Dæmi. 4.** Finnið öll möguleg gildi á rauntölunum $a$ og $b$ þannig að jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & ay & = & 1 \\ x & - & 4y & = & b \end{array}$$

hafi

(a) enga lausn

(b) nákvæmlega eina lausn

(c) óendanlega margar lausnir

Lausn. Drögum efri jöfnuna frá þeirri neðri og fáum línulega jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & ay & = & 1 \\ & - & (4+a)y & = & b-1 \end{array}$$

Út frá þessu hneppi getum við nú ályktað með eftirfarandi hætti.

(a) Engin lausn fæst þegar $a = -4$ og $b \neq 1$.

(b) Við fáum nákvæmlega eina lausn þegar $a \neq -4$.

(c) Hneppið hefur óendanlega margar lausnir þegar $a = -4$ og $b = 1$.