Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

LÍNULEG ALGEBRA B

Lausnir fyrir áttunda skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 10)

13. nóvember 2014

Dæmi 1. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Samkvæmt dæmi 1 af vikublaði 8 er vörpunin

$$T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{ACB}$$

einsmótun (þ.e.a.s. línuleg og gagntæk).

(a) Finnið fylki vörpunarinnar T miðað við raðgrunninn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Finnið fylki vörpunarinnar T^{-1} miðað við sama raðgrunn.

LAUSN. (a) Við fáum $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} =$
$0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

svo að hnitavigur $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ miðað við umræddan raðgrunn er $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Með samskonar útreikningum fæst að hnitavigrar $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ og

$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ miðað við raðgrunninn eru (í sömu röð) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Við sjáum því að fylki línulegu vörpunarinnar miðað við raðgrunninn er

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Hér eru tvær leiðir færar. Annars vegar getum við notað okkur að $\mathbf{M}^{-1}$ er fylki vörpunarinnar T^{-1} miðað við umræddan raðgrunn og hins vegar getum við notað að

$$T^{-1} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$$

og fundið fylki vörpunarinnar T^{-1} miðað við raðgrunninn á sama hátt og í lið (a). Í báðum tilfellum fæst að fylki vörpunarinnar T^{-1} miðað við raðgrunninn sem um er rætt er

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Athugasemd. Vert er að taka eftir að $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ og $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$.

Dæmi 2. (Úr sjúkra- og upptökuprófi 2013)

(a) Finnið andhverfu fylkisins $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ og gangið úr skugga um að rétt hafi verið reiknað með því að margfalda hana með fylkinu $\mathbf{A}$.

(b) Látum $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vera línulegu vörpunina, sem miðað við raðgrunninn

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

er gefin með fylkinu $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Finnið fylki línulegu vörpunarinnar L miðað við venjulega raðgrunninn fyrir $\mathbb{R}^3$.

Lausn. (a) Með því að beita línuaðgerðunum $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \to L_2 - L_1$, $L_3 \to L_3 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 + L_2$ og $L_1 \to L_1 - 2L_3$ á aukna fylkið

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

fáum við aukna fylkið

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

og af því sést að $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(b) Látum $\mathcal{E}$ tákna venjulega raðgrunninn fyrir $\mathbb{R}^3$ og táknum samkvæmt venju fylkin fyrir L miðað við raðgrunnana $\mathcal{B}$ og $\mathcal{E}$ með $[L]_{\mathcal{B}}$ og $[L]_{\mathcal{E}}$.
Nú er $\mathbf{A}$ hnitaskiptafylkið frá $\mathcal{B}$ til $\mathcal{E}$ og $\mathbf{A}^{-1}$ hnitaskiptafylkið frá $\mathcal{E}$ til $\mathcal{B}$ svo að við fáum

$$[L]_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}[L]_{\mathcal{B}}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -24 & 66 \\ -6 & -6 & 22 \\ -6 & -8 & 24 \end{bmatrix}$$

Dæmi 3. (Úr sjúkra- og upptökuprófi 2012)

(a) Látum $n > 0$ vera heila tölu. Hvað merkir að vigurrúm V hafi *víddina* n?

(b) Hvað merkja hugtökin *dálkvídd*, *línuvídd* og *núllvídd* fyrir fylki?

(c) Finnið línuvídd, dálkvídd og núllvídd fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lausn. (a) Það merkir að sérhver grunnur fyrir V hafi nákvæmlega n vigra.

(b)

- Dálkvídd fylkis er víddin á dálkrúmi þess.
- Línuvídd fylkis er víddin á línurúmi þess.
- Núllvídd fylkis er víddin á núllrúmi þess.

(c) Ljóst er að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ spannar dálkrúm fylkisins $\mathbf{A}$ svo að dálkvídd þess er 1. Við vitum að línuvíddin er jöfn dálkvíddinni svo að hún er einnig 1 og þar sem summan af dálkvíddinni og núllvíddinni er 4 þá er núllvíddin 3.

Dæmi 4.

(a) Finnið allar tvinntölulausnir á jöfnunni $z^5 = -2$.

(b) Ritið töluna $(1+i)^8$ á formin $x + yi$, þar sem bæði x og y eru rauntölur.

Lausn. (a) Með því að skrifa $-2 = 2e^{\pi i}$ sjáum við að lausnir jöfnunnar eru allar tvinntölur af gerðinni $2^{\frac{1}{5}} e^{(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5})i}$ þar sem $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) $(1+i)^8 = \left((1+i)^2\right)^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16(-1)^2 = 16.$