Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 7

Kafli 5: Fleiri endurkvæm algrím
Kafli 6: Talningar

Fleiri endurkvæm algrím

- Hrópmerkt
- Veldishafning
- Stærsti samdeilir
- Helmingunarleit

Hrópmerkt (factorial)

{
Notkun: $x :=$ hrópmerkt(n)
Fyrir: n er heiltala, $n \geq 0$
Eftir: $x = n!$
}

stef hrópmerkt(n: heiltala)
    ef $n = 0$ **þá**
        skila 1
    annars
        skila n ·hrópmerkt$(n - 1)$

Einföld veldishafning

{
Notkun: x := veldi(a,n)
Fyrir: n er heiltala, $n \geq 0$, a er rauntala
Eftir: $x = a^n$
}

stef veldi(a: rauntala, n: heiltala)
    ef $n = 0$ **þá**
        skila 1
    annars
        skila $a \cdot$veldi(a,$n-1$)

Stærsti samdeilir (gcd)

{
Notkun: x := gcd(a,b)
Fyrir: a, b eru heiltölur, $0 \leq a < b$
Eftir: x er stærsti samdeilir a og b
}

stef gcd(a, b: heiltala)
    ef $a = 0$ **þá**
        skila b
    annars
        skila $\gcd(b \mathbf{\ mod\ } a, a)$

Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: k := leita(i, j, x)
Fyrir: Runan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er til staðar og inniheldur heiltölur í vaxandi röð, $1 \leq i \leq j \leq n+1$
Eftir: $1 \leq k \leq n+1$ og
$a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1} < x \leq a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{j-1}$
}

stef leita(i, j, x: heiltölur)
  ef $i = j$ **þá skila** i
  $m := \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor$
  ef $a_m < x$ **þá**
    skila leita$(m+1, j, x)$
  annars
    skila leita(i, m, x)

Íhugið kallið leita(1,n+1,x)

Talningar (counting)

- Grunnatriði talningar
- Skúffureglan (pigeonhole principle)
- Samantektir og umraðanir (combinations and permuations)
- Tvíliðustuðlar (binomial coefficients) og tengdar jöfnur
- Almennar umraðanir og samantektir

Grunnatriði

- Margfeldisreglan
- Summureglan
- Frádráttarreglan
- Deilingarreglan
- Dæmi
- Trjárit

Grunnreglur: Margfeldisreglan

- **Margfeldisreglan:** G.r.f. verkefni sem samanstendur af tveimur undirverkefnum sem unnin eru í röð. Ef það eru n_1 aðferðir til að gera fyrra undirverkefnið og n_2 aðferðir til að gera seinna undirverkefnið þá eru $n_1 \cdot n_2$ aðferðir í heild til að vinna heildarverkið.
- Dæmi: Hvað eru margir sjö bita strengir til?
- Svar: Við veljum bitana sjö í röð og höfum tvo möguleika í hvert skipti. Heildarfjöldi möguleika verður þá $2^7 = 128$

Númeraplötur bíla

- Hve margar mismunandi númeraplötur er hægt að framleiða ef númerin samanstanda af tveimur bókstöfum fremst, úr 26 stafa safni, og síðan þremur tölustöfum, einn af 0-9?
- Svar: $26^2 \cdot 10^3 = 676000$

Grunnreglur: Summureglan

- **Summureglan:** G.r.f. verkefni sem samanstendur af tveimur undirverkefnum þannig að aðeins á að gera annað undirverkefnið. Ef það eru n_1 aðferðir til að gera annað undirverkefnið og n_2 aðferðir til að gera hitt undirverkefnið þá eru $n_1 + n_2$ aðferðir í heild til að vinna heildarverkið.
- **Dæmi:** Velja þarf tvo fulltrúa í Háskólaráð, sem annað hvort má vera kennari eða nemandi. Ef það eru 37 kennarar og 1234 nemendur (og enginn er bæði kennari og nemandi), hve marga valkosti höfum við?
- **Svar:** $37 + 1234 = 1271$

Summureglan tengd mengjum

- $|A \cup B| = |A| + |B|$ að því tilskildu að A og B séu sundurlæg.
- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ að því tilskildu að fyrir öll i, j gildi $i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- Aðrar reglur gilda ef mengin hafa sameiginleg stök

Grunnregla: Frádráttarreglan

- **Frádráttarreglan:** Ef verkefni má vinna annað hvort með einni af n_1 aðferðum, eða með einni af n_2 aðferðum þá er heildarfjöldi aðferða sem hægt er að vinna verkið $n_1 + n_2$ mínus fjöldi þeirra aðferða sem sameiginlegar eru í þessum tveimur upptalningum.
- Sem kemur okkur ekki á óvart því

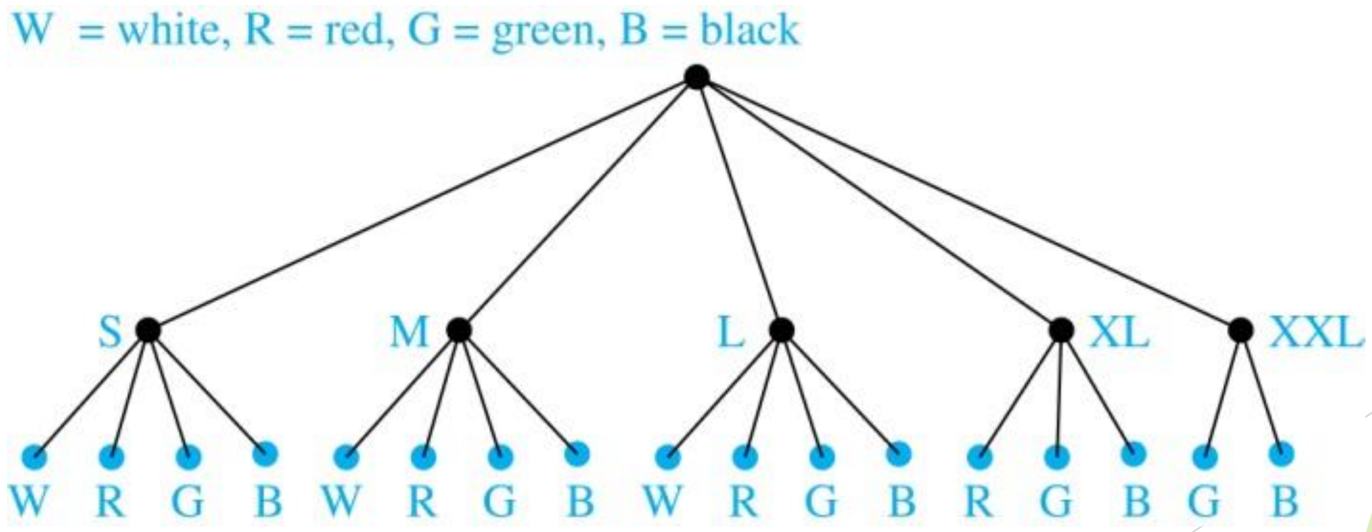
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Grunnregla: Deilingarreglan

- **Deilingarreglan:** Ef það eru n heildaraðferðir til að vinna eitthvert verk og fyrir sérhverja niðurstöðu verksins eru ávallt nákvæmlega d aðferðir (af þessum n) sem gefa sömu niðurstöðu þá er fjöldi mögulegra niðurstaðna n/d
- **Dæmi:** Hvað eru margar aðferðir til að raða fjórum manneskjum kringum hringborð ef við gerum ekki greinarmun á uppröðunum þar sem sama manneskja hefur sama sætisfélaga til vinstri og sama sætisfélaga til hægri?
- **Svar:** $\frac{4!}{4} = 6$

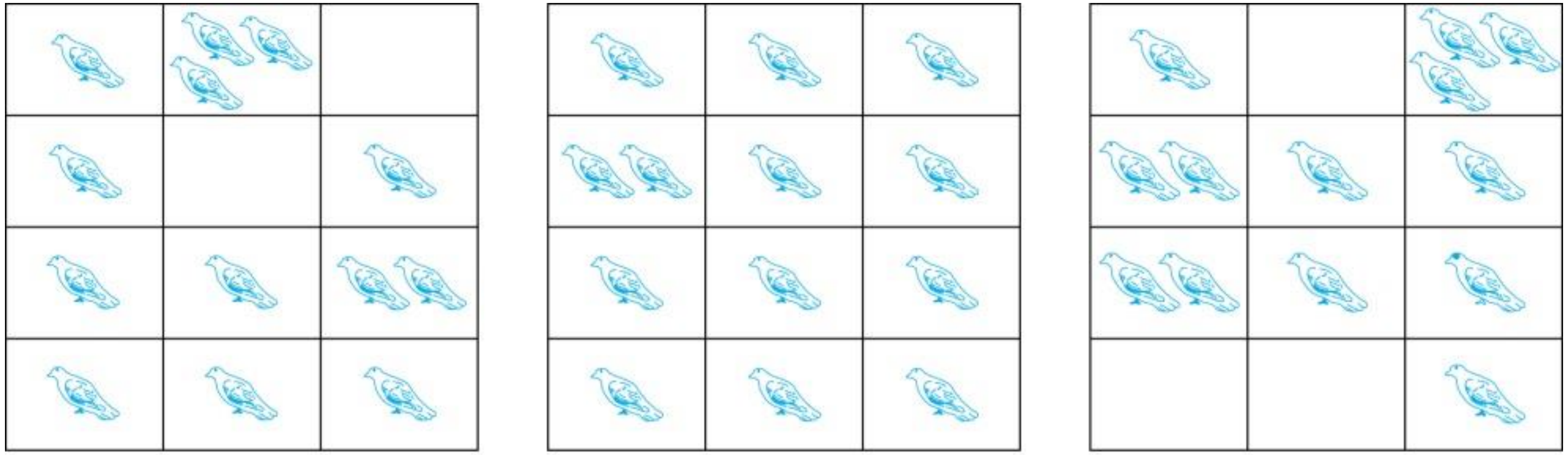
Trjárit

- **Trjárit:** Við getu leyst margs konar talningaverkefni með trjáritum, þar sem tréð greinist í hvert sinn sem við höfum valkosti og laufin tákna endanlegar niðurstöður.
- **Dæmi:** Bolir eru seldir í fimm mismunandi stærðum, S, M, L, XL og XXL. Hver stærð er til í fjórum litum, hvítt (W), rautt (R), grænt (G) og svart (B), nema XL sem aðeins er til í rauðu, grænu og svörti, og XXL sem aðeins er til í grænu og svörtu. Hvað þarf búðin að hafa margar gerðir af bolum til að bjóða allt sem til er?
- **Svar:** 17 gerðir



Skúffureglan (pigeonhole principle)

- Ef 13 dúfur setjast til svefns í 12 hreiðurkössum þá mun (a.m.k.) einn hreiðurkassinn innihalda fleiri en eina dúfu



(a) (b) (c)

- **Skúffureglan:** Ef k er jákvæð heiltala og $k + 1$ hlutur er settur í k skúffur þá mun að minnsta kosti ein skúffa innihalda tvo eða fleiri hluti

Skúffureglan

- **Fylgisetning:** Fall f frá mengi með $k+1$ gildi yfir í mengi með k gildi getur ekki verið eintækt

Almenna skúffureglan

- **Almenna skúffureglan:** Ef N hlutir eru settir í k skúffur þá mun að minnsta kosti ein skúffa innihalda að minnsta kosti $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ hluti
- **Dæmi:** Í hópi 100 manna eru að minnsta kosti $9 = \lceil 100/12 \rceil$ manns sem fæddust í einhverjum sama mánuði

Samantektir og umraðanir

- Samantektir
- Umraðanir
- Talningasannanir

Umraðanir (permutations)

- **Skilgreining:** Umröðun á mengi mismunandi hluta er runa sem inniheldur alla hlutina. Umröðun r staka úr menginu er kölluð r-umröðun (r-permutation)
- Dæmi: Látum $S = \{1,2,3\}$
  - Runan $3,1,2$ er umröðun á S
  - Runan $3,2$ er 2-umröðun á S
- Fjöldi r-umraðana á mengi með n stök er táknaður með
$$P(n, r)$$
  - 2-umraðanir mengisins $S = \{1,2,3\}$ eru $1,2$; $1,3$; $2,3$; $3,1$ og $3,2$. Þess vegna er
$$P(3,2) = 6$$

Segð fyrir fjölda umraðana

- **Setning:** Ef n er jákvæð heiltala og r er heiltala þannig að $1 \leq r \leq n$ þá eru til
$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
r-umraðanir á mengi með n stökum
- **Fylgisetning:** Ef n er jákvæð heiltala og $1 \leq r \leq n$ þá er
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dæmi

- Hvað eru margir möguleikar á að velja þá sem fá gull, silfur og brons í 100 manna keppni?
- Svar: $P(100,3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$

Samantektir (combinations)

- **Skilgreining:** r-samantekt staka úr mengi er óraðað val r staka úr menginu. Sem sagt: r-samantekt er einfaldlega undirmengi með r stökum
- Fjöldi r-samantekta úr mengi með n stökum er táknað með $C(n,r)$ og einnig með $\binom{n}{r}$. Þessar tölur eru kallaðar tvíliðustuðlar (binomial coefficient)
- **Dæmi:** Látum S vera mengið $\{a,b,c,d\}$, þá er $\{a,c,d\}$ 3-samantekt úr S. Það er sama og $\{d,c,a\}$ því röðin skiptir ekki máli
- $C(4,2) = 6$ vegna þess að 2-samantektir úr $\{a,b,c,d\}$ eru undirmengin sex $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$ og $\{c,d\}$

Samantektir

- **Setning:** Fjöldi r-samantekta úr mengi með n stökum, þar sem $0 \leq r \leq n$, er

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

- **Fylgisetning:**

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

Talningarsannanir

- Algengar aðferðir til að sanna jöfnur með talningu eru eftirfarandi:
- **Sönnun með tvöfaldri talningu:** Notum talningu til að sanna að báðar hliðar jöfnu gefi sama fjölda
- **Sönnun með gagntæku falli:** Sýnum að til sé gagntækt fall milli þeirra hluta sem taldir eru öðru megin jöfnu og þeirra hluta sem taldir eru hinu megin jöfnunnar

Tvíliðustuðlar og samantektir

- **Skilgreining:** *Tvíliða* er summa tveggja liða svo sem $x + y$
- Stuðullinn við $x^r y^{n-r}$ þegar reiknað er úr $(x+y)^n$ er $C(n,r) = \binom{n}{r}$
- **Dæmi:**
  $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2$
- **Tvíliðusetningin:**

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

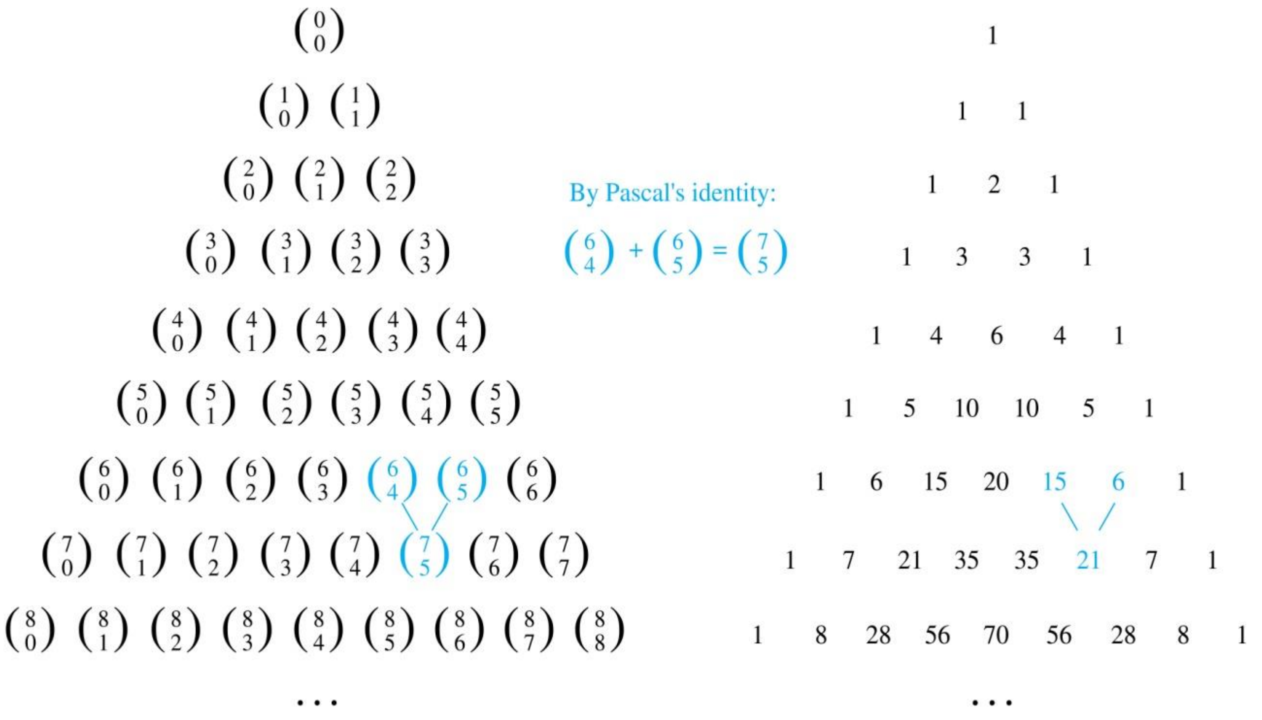
- **Fylgisetning:**

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Jafna Pascals og þríhyrningur Pascals

- Jafna Pascals:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$



(a) (b)

Almennar samantektir og umraðanir

- Umraðanir með endurtekningum
- Samantektir með endurtekningum
- Umraðanir með eins hlutum
- Dreifing hluta í skúffur

Umraðanir og samantektir með endurtekningum

- **Setning:** Fjöldi r-umraðana úr mengi með n stök þegar endurtekningar eru leyfðar er n^r
- **Sönnun:** Augljós afleiðing margföldunarreglunnar.
- **Setning:** Fjöldi r-samantekta úr mengi með n stökum þegar endurtekningar eru leyfðar er $C(n+r-1,r) = C(n+r-1,n-1)$
- **Sönnun:** Ef við röðum stökunum í menginu í einhverja röð, $a_1, a_2, \dots, a_n$ þá getum við táknað sérhverja r-samantekt sem runu af * og | með $n-1$ stykki af | sem gefa hólfaskiptingu í n hólf og sérhver * táknar eina endurtekningu á gildi sem valið er úr því hólfi. Fjöldinn á * verður þá r og heildarfjöldinn á * og | verður $n+r-1$. Möguleikarnir á að velja staðsetningar fyrir * eru $C(n+r-1,r)$ er sami og fjöldi möguleika á að velja staðsetningar fyrir |, þ.e. $C(n+r-1,n-1)$

Umraðanir með eins hlutum

- **Setning:** Fjöldi umraðana á n hlutum, þar sem við höfum n_1 eins hluti af tagi 1, n_2 eins hluti af tagi 2, …, n_k eins hluti af tagi k, er

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

Dreifing hluta í skúffur

- Leysa má margs konar talningarverkefni með því að telja fjölda möguleika á að setja hluti í skúffur
- Hlutirnir geta ýmist verið mismunandi, merktir (hægt að gera greinarmun á þeim, *distinguishable*) eða eins, ómerktir (*indistinguishable*)
- Skúffurnar geta ýmist verið merktar (*distinguishable*) eða ómerktar (*indistinguishable*)

Dreifing hluta í skúffur

- **Setning:** Það eru $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ mögulegar útkomur þegar n **merktum** hlutum er dreift í k **merktar** skúffur með fjölda n_i í skúffu i (gilda þarf $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$)
- **Dæmi:** Það eru $\frac{52!}{13!13!13!13!} \approx 5 \cdot 10^{28}$ mögulegar gjafir í Bridge, ef við gerum greinarmun á spilurum (Austur, Vestur, Norður, Suður)

- **Setning:** Það eru $C(n + r - 1, n - 1)$ mögulegar útkomur þegar r **ómerktum** (eins) hlutum er dreift í n **merktar** skúffur

- Það er engin einföld segð á lokuðu sniði fyrir fjölda möguleika á að dreifa n merktum hlutum í k ómerktar skúffur
- Það er engin einföld segð á lokuðu sniði fyrir fjölda möguleika á að dreifa n ómerktum hlutum í k ómerktar skúffur