TÖL104G
Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði
Verkefnablað 5 — Lausnir

25. september 2015

1. (25%) Sýnið segð á lokuðu sniði og fyrir eftirfarandi summur og einfaldið segðina. Ef hægt er að sýna einfalda og nákvæma tölu (til dæmis brot) þá skal gera það, annars sýna eins litla segð og hægt er (eins fáa stafi og hægt er), á lokuðu sniði.

   a) $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{2}$.

      Svar: 50.

   b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{3}$.

      Svar: $\frac{5}{3}$.

   c) $\sum_{i=1}^{10000} i$.

      Svar: 50005000.

   d) $\sum_{i=1}^{100} i^2$.

      Svar: 338350.

   e) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$.

      Svar: 2.

2. (25%) Finnið segð á lokuðu sniði fyrir a_n þar sem a_n er skilgreint með $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$, fyrir $n > 0$, ásamt frumskilyrðinu $a_0 = 1$. Sannið með þrepun að þessi segð sé lausn.

   Svar: Lausnin á rakningarvenslunum eru $a_n = \frac{1}{3^n}$

   Þrepasönnun:

Grunnur: Fyrir $n = 0$ fáum við annars vegar út frá frumskilyrðinu að $a_0 = 1$ og hins vegar úr lausninni $a_0 = \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1} = 1$. Þar eð þetta eru sömu gildi erum við búin að staðfesta segðina fyrir $n = 0$.

Þrepun:

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að $n > 0$ og að segðin $a_k = \frac{1}{3^k}$ sé sönn fyrir öll $k < n$.

Þrepunarskref: Reiknum þá a_n. Samkvæmt rakningarvenslunum fáum við $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$. Samkvæmt þrepunarforsendu fáum við þá $a_n = \frac{a_{n-1}}{3} = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{3} = \frac{1}{3^n}$, sem er það sem þurfti að sanna.

3. (25%) Látum $\{a_n\}$ vera runu sem uppfyllir rakningarvenslin $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Hvað eru a_2 og a_3 ef

   a) $a_0 = 1$ og $a_1 = 1$?

   Svar: $a_2 = 1$, $a_3 = 1$.

   b) $a_0 = 0$ og $a_1 = 0$?

   Svar: $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

   c) $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$?

   Svar: $a_2 = -1$, $a_3 = -2$.

   d) $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$?

   Svar: $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

   e) $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$?

   Svar: $a_2 = 3$, $a_3 = 4$.

4. (25%) Látum algebrulegar tölur vera allar rauntölur sem eru lausnir á margliðujöfnu á sniðinu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$, þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru heiltölur, ekki allar af $a_1, \ldots, a_n$ mega vera núll. Gefið er að sérhver slík jafna hefur í mesta lagi n rauntölulausnir.

   a) (5%) Sannið að mengi algebrulegra talna sé óendanlegt.

   Svar: Mengi heiltalna er hlutmengi í mengi algebrulegra talna því margliðan $x - n = 0$, þar sem n er hvaða heiltala sem er, er á ofangreindu sniði og lausn hennar, þ.e. n, er því algebruleg tala. Heiltölurnar eru óendanlega margar og eru hlutmengi í mengi algebrulegra talna og því hlýtur mengi algebrulegra talna að vera óendanlegt.

   b) (10%) Sannið að mengi algebrulegra talna sé teljanlegt.

   Svar: Fyrir sérhverjar heiltölu n og k er ljóst að það er endanlegt mengi margliðujafna á sniðinu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ eins og að ofan, sem uppfylla skilyrðið $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \leq k$. Sérhver margliðujafna eins og að ofan uppfyllir hins vegar slíkt skilyrði fyrir einhverjar heiltölur n og k. Látum L_{nk} vera mengi þeirra talna sem uppfyllir einhverja jöfnu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ þannig að $\sum_{i=0}^{n} |a_i| \leq k$. L_{nk} er þá endanlegt mengi fyrir hvert n og k. Mengið $L'_k = \cup_{n=0}^{\infty} L_{nk}$ er teljanlegt þar eð það er sammengi teljanlega margra endanlegra mengja. Mengið $\mathbb{A} = \cup_{k=1}^{\infty} L'_k$ er mengi allra algebrulegra talna og er þá teljanlegt þar eð það er sammengi teljanlega margra teljanlegra mengja.

c) (5%) Sannið að ræðu tölurnar séu hlutmengi í mengi algebrulegra talna.

Svar: Sérhver ræð tala $\frac{p}{q}$ er lausn á jöfnu á sniðinu $qx - p = 0$, sem er jafna á sniðinu að ofan. Sérhver ræð tala er því algebruleg tala.

d) (5%) Sannið að mengi algebrulegra talna sé ekki hlutmengi í mengi ræðra talna.

Svar: Jafnan $x^2 - 2 = 0$ hefur lausnina $x = \sqrt{2}$, sem er því algebruleg tala. Hins vegar er $\sqrt{2}$ ekki ræð tala og mengi algebrulegra talna getur því ekki verið hlutmengi $\mathbb{Q}$.

Athugið að sérhvert hlutmengi teljanlegs mengis er teljanlegt. Athugið að sammengi teljanlega margra teljanlegra mengja er teljanlegt. Athugið að teljanlegt mengi má vera endanlegt eða óendanlegt. Athugið að $\sqrt{2}$ er ekki ræð tala.