Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra B

Lausnir fyrir þriðja skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 4)

26. september 2014

Dæmi 1. Skilgreinum tvær línur í $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} l &= \{\, (-1,1,1) + t(1,-2,1) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ m &= \{\, (1,0,3) + t(1,1,-1) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

(a) Skerast línurnar l og m?

(b) Eru línurnar l og m samsíða?

(c) Eru l og m ein og sama línan?

Lausn. (a) Við þurfum að kanna hvort til eru rauntölur s og t sem uppfylla skilyrðið

$$(-1,1,1) + s(1,-2,1) = (1,0,3) + t(1,1,-1)$$

en það er jafngilt því að vigurinn $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ sé lausn á línulega jöfnuhneppinu

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Með því að setja upp tilheyrandi aukið fylki og framkvæma línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 + 2L_1$ og $L_3 \to L_3 - L_1$ fæst aukna fylkið

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

og af því má ráða að hneppið hefur enga lausn. Línurnar tvær hafa þar með engan sameiginlegan punkt.

(b) Samkvæmt skilgreiningu eru línurnar samsíða ef og aðeins ef stefnuvigrarnir $(1,-2,1)$ og $(1,1,-1)$ eru samsíða. Ljóst er að svo er ekki.

(c) Út frá liðum (a) og (b), hvorum fyrir sig, er unnt að álykta að línurnar eru ólíkar.

Dæmi 2.

(a) Er vigurinn $(1,-2,4,1,0)$ í spanni vigranna $(1,0,1,1,-1)$, $(1,2,3,2,1)$ og $(2,2,1,1,1)$?

(b) Eru umræddir fjórir vigrar línulega óháðir?

Lausn. (a) Við viljum kanna hvort til séu rauntölur x, y og z sem uppfylla skilyrðið

$$(1,-2,4,1,0)=x(1,0,1,1,-1)+y(1,2,3,2,1)+z(2,2,1,1,1).$$

Með því að skrifa vigrana sem dálkvigra fæst línulegt jöfnuhneppi sem gefið er með aukna fylkinu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

og með því að beita á það nokkrum línuaðgerðum fæst aukna fylkið

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Af síðustu línu þessa fylkis sést svo að hneppið hefur enga lausn og þar með er vigurinn $(1,-2,4,1,0)$ ekki í spanni vigranna $(1,0,1,1,-1)$, $(1,2,3,2,1)$ og $(2,2,1,1,1)$.

(b) Vigrarnir fjórir eru línulega óháðir því ljóst er, að sé síðara fylkinu hér að ofan komið á efra stallaform þá hefur það forustustuðul í sérhverjum dálki.

Dæmi 3. Setjum $\mathbf{A}:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Eru línuvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ línulega óháðir?

(b) Eru dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ línulega óháðir?

(c) Spanna línuvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ allt hnitarúmið $\mathbb{R}^4$?

(d) Spanna dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ allt hnitarúmið $\mathbb{R}^3$?

Lausn. Sé línuaðgerðunum $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$ og $L_3 \to L_3 + 2L_2$ beitt á fylkið $\mathbf{A}$ (í þessari röð) þá fæst fylkið

$$\mathbf{B}:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

sem er af efri stallagerð.

(a) Þar sem engin lína í fylkinu $\mathbf{B}$ er núll, þá eru línuvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ línulega óháðir.

(b) Dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ eru línulega háðir vegna þess að síðasti dálkurinn í $\mathbf{B}$ hefur engan forustustuðul.

(c) Línuvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna allt $\mathbb{R}^4$ ef og aðeins ef línulega jöfnuhneppið $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn fyrir sérhvern vigur $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^4$. Það jafngildir því að rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}^T$ hafi forustustuðul í sérhverri línu, en það er útilokað vegna þess að línurnar eru fjórar en dálkarnir aðeins þrír. Línuvigrarnir spanna því ekki $\mathbb{R}^4$.

(d) Fylkið $\mathbf{B}$ hefur forustustuðul í sérhverri línu svo að línulega jöfnuhneppið $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hefur lausn fyrir sérhvern vigur $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^3$. Dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna því $\mathbb{R}^3$.

Dæmi 4. Látum $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vera varpanir sem skilgreindar eru með

$$S(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) := (x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + (y+2x)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) := (x+y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Gerið grein fyrir hvort vörpunin S er línuleg og finnið fylki hennar ef svo er.

(b) Gerið grein fyrir hvort vörpunin T er línuleg og finnið fylki hennar ef svo er.

Lausn. (a) Fljótséð er að

$$S(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) := (x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + (y+2x)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Þar með er vörpunin S línuleg og fylki hennar er $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) Vörpunin er ekki línuleg því að hún varðveitir ekki margföldun með tölu. Þetta sést með því að skoða annars vegar

$$(-1)T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = (-1)(0+0-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og hins vegar

$$T((-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = (0+0+1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$