



# Tölvunarfræði 1

## Fyrirlestur 18: Endurkvæmni II

Hjálmtyr Hafsteinsson  
Haust 2015





# Í síðasta fyrirlestri

- Endurkvæmni (*recursion*)
- Dæmi um endurkvæmni
  - **Factorial**
  - Reiknirit Evklíðs
  - Fibonacci tölur
- Eiginleikar endurkvæmni

**Kafli 2.3**



HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Í þessum fyrirlestri

- Endurkvæmni í myndum
- Gray kóðar
- Endurkvæm grafík
  - H-tré
  - Þríhyrningur Sierpinskis
  - Brotamyndir

**Kafli 2.3**

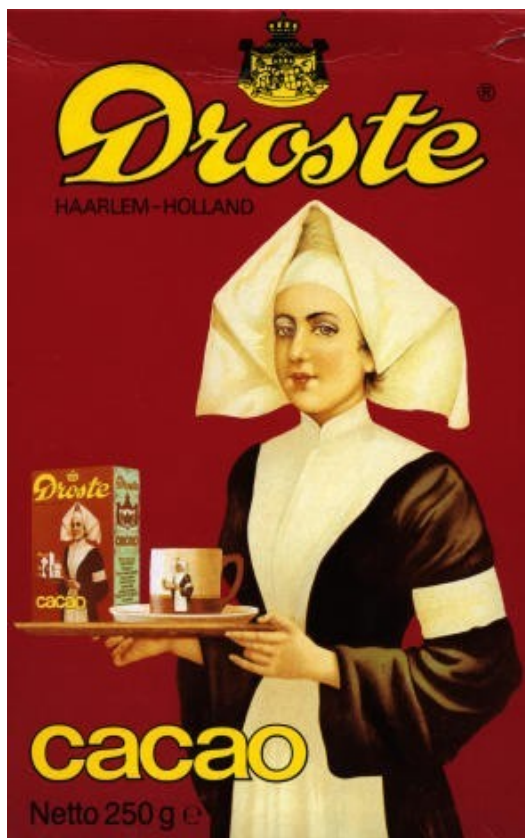


HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Endurkvæmar myndir



Droste kakó umbúðir hafa endurkvæma mynd



"Royal tryggir öruggan bakstur"



frá New Yorker tímaritinu, ágúst 2008

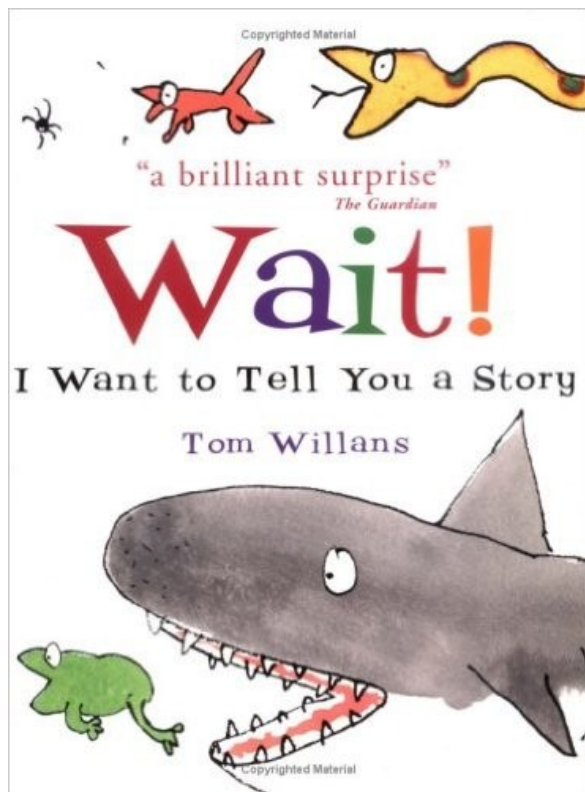


HÁSKÓLI ÍSLANDS

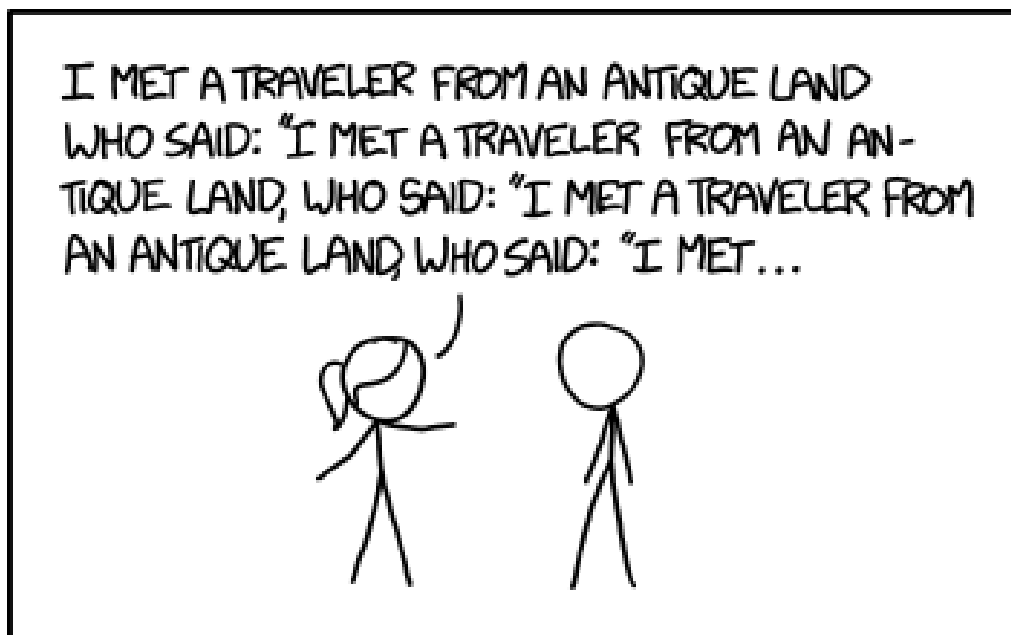
IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Endurkvæmar sögur



Dýr sem segir sögu til þess að sleppa við að verða étin. Sagan er um dýr sem segir sögu til þess að sleppa við að verða étin. ...



frá [xkcd.com](http://xkcd.com)

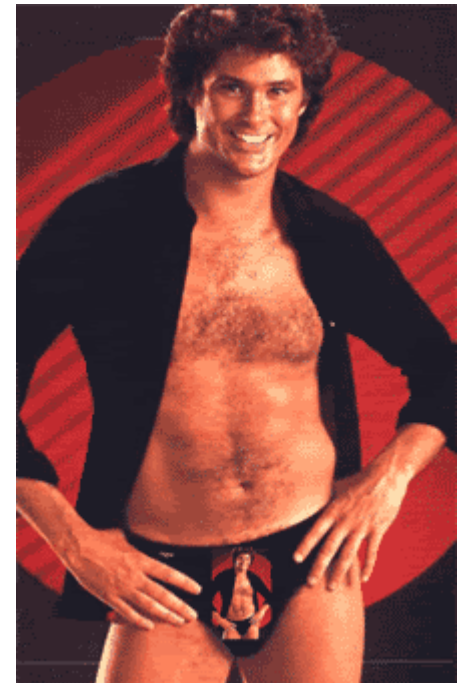
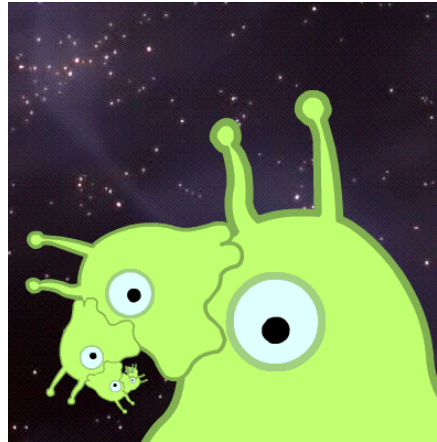


HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Endurkvæmar hreyfimyndir



HÁSKÓLI ÍSLANDS

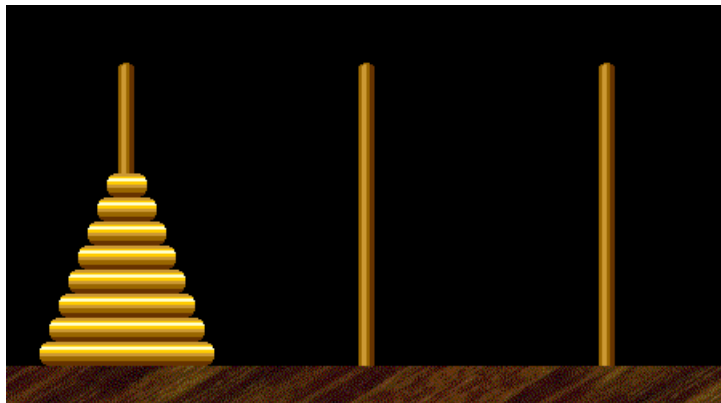
IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



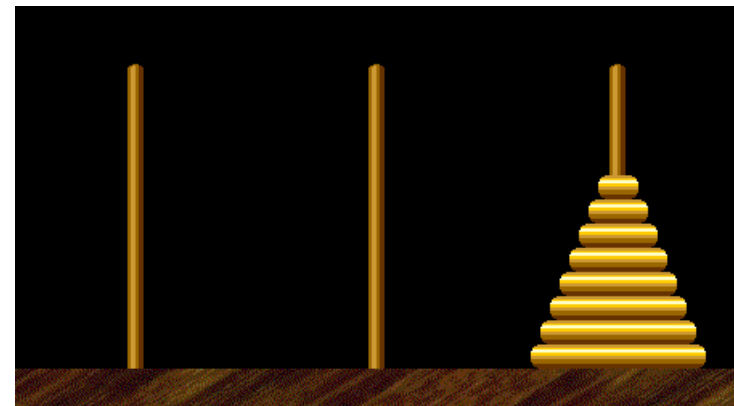


# Turnarnir í Hanoi

- Færa allar skífurnar frá vinstri staurnum yfir á hægri staurinn
  - Aðeins hægt að færa eina skífu í einu
  - Má aðeins setja minni skífu ofan á stærri



Upphaf

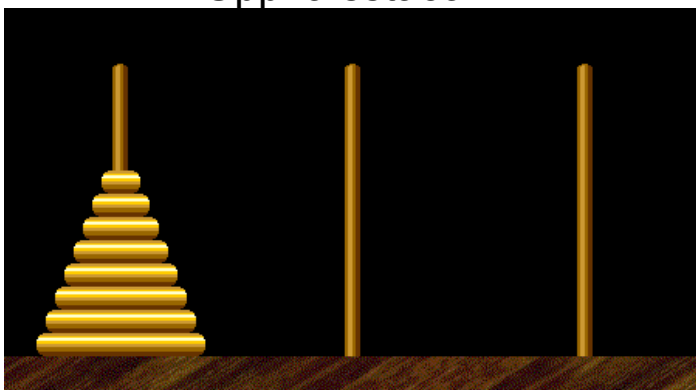


Endir



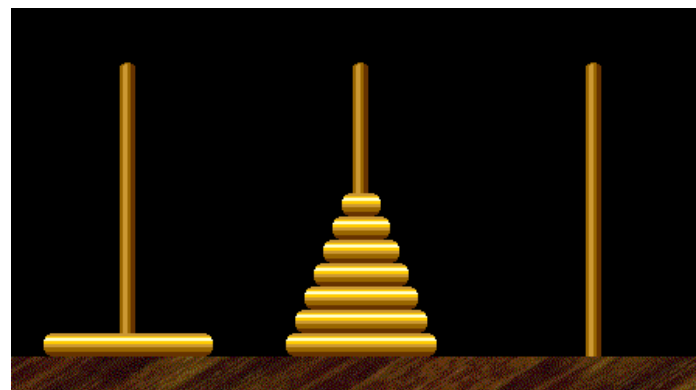
# Endurkvæm lausn

Upphafsstaða



Færa  $n-1$  minnstu skífurnar til hægri

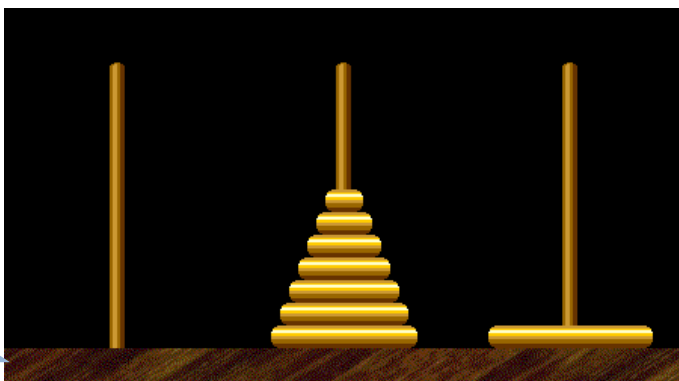
Endurkvæmni



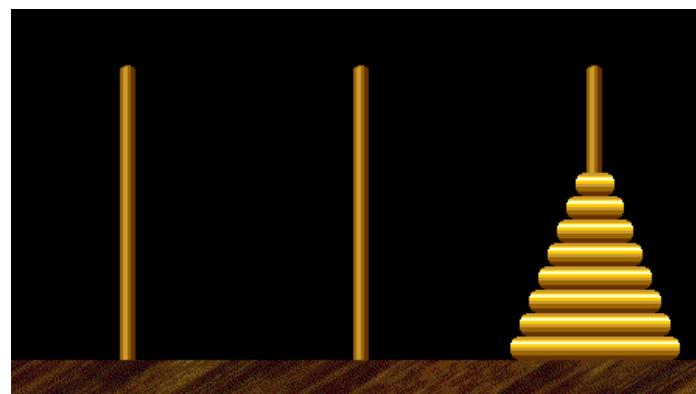
Færa stærstu skífuna til vinstri

Vefst yfir  
til hægri

Endurkvæmni



Færa  $n-1$  minnstu skífurnar til hægri



Lokastaða



HÁSKÓLI ÍSLANDS

ÍÐNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD





# Java kóði

```
public class TowersOfHanoi {  
  
    public static void moves(int n, boolean left) {  
        if (n == 0) return;  
        moves(n-1, !left);  
        if (left) System.out.println(n + " left");  
        else      System.out.println(n + " right");  
        moves(n-1, !left);  
    }  
  
    public static void main(String[] args) {  
        int N = Integer.parseInt(args[0]);  
        moves(N, true);  
    }  
}
```

Færa  $n-1$  minnstu skífunar til "hægri"

Færa stærstu skífuna til "vinstri"

Færa  $n-1$  minnstu skífunar til "hægri"

`moves(n, true)` : færa skífur 1 til  $n$ , einn staur til vinstri  
`moves(n, false)` : færa skífur 1 til  $n$ , einn staur til hægri



HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Keyrsla

```
% java TowersOfHanoi 3
1 left
2 right
1 left
3 left
1 left
2 right
1 left
```

Fjöldi hreyfinga: 7

([Java Visualizer](#))

```
% java TowersOfHanoi 4
1 right
2 left
1 right
3 right
1 right
2 left
1 right
4 left
1 right
2 left
1 right
3 right
1 right
2 left
1 right
```

Önnur hver hreyfing er færsla á minnstu skífunni

Hægt að sanna:  
Fjöldi hreyfinga til að leysa Hanoi-turn með  $n$  skífum er  $2^n - 1$

Fjöldi hreyfinga: 15



HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Óendurkvæm lausn

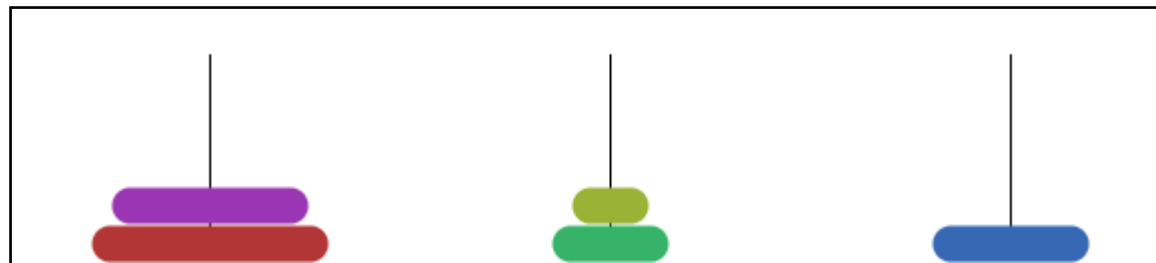
- Með því að skoða færslurnar sem koma út úr endurkvæmu aðferðinni sést:
  - Önnur hver hreyfing er færsla á minnstu skífunni
  - Minnsta skífan færir alltaf í sömu áttina (til hægri ef  $n$  jöfn tala)
- Lausnaraðferð:
  - Gera til skiptis:
    - Færa minnstu skífuna til hægri (vinstri ef  $n$  er oddatala)
    - Gera löglega færslu sem ekki nota minnstu skífuna





# Fyrirlestraræfing

1. Skrifið forritsbút sem setur rökbreytuna `ilagi` sem `true` ef öll stökin í fylkinu `a` eru á milli `lo` og `hi`, en `false` annars
2. Hvað tekur langan tíma að leysa Hanoi þrautina með 20 skífum ef hver færsla tekur 1 sek.?
3. Hver er næsta færsla í myndinni hér fyrir neðan?





# Gray kóðar

- Leikritaskáldið Samuel Beckett samdi leikritið *Quad*
  - Fjórar persónur, koma og fara af sviðinu ein í einu
  - Hvert hlutmengi persóna er aðeins á sviðinu nákvæmlega einu sinni
- Hvernig eiga leikararnir að koma inn og fara út af sviðinu?
  - Getum ekki notað venjulega bitaröð
    - Á eftir 0111 kemur 1000 - of miklar breytingar



code	subset	move
0 0 0 0	empty	
0 0 0 1	1	enter 1
0 0 1 1	2 1	enter 2
0 0 1 0	2	exit 1
0 1 1 0	3 2	enter 3
0 1 1 1	3 2 1	enter 1
0 1 0 1	3 1	exit 2
0 1 0 0	3	exit 1
1 1 0 0	4 3	enter 4
1 1 0 1	4 3 1	enter 1
1 1 1 1	4 3 2 1	enter 2
1 1 1 0	4 3 2	exit 1
1 0 1 0	4 2	exit 3
1 0 1 1	4 2 1	enter 1
1 0 0 1	4 1	exit 2
1 0 0 0	4	exit 1

Gray code representations

Ever tried. Ever failed. No matter.  
Try Again. Fail again. Fail better.  
*Samuel Beckett*



HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Gray kóðar

- $n$ -bita Gray kóði er röð  $n$ -bita strengja
  - Hver strengur er aðeins frábrugðinn forvera sínum í nákvæmlega einum bita
- Skilgreindur af Frank Gray, Bell Labs árið 1947
- Notkun:
  - Upphafleg: Til að aðeins einn rofi þyrfti að breytast í hvert sinn
  - Núna: Í villukóðun og leiðréttingu gagna í sendingum
  - Núna: Í gagnasendingum á milli mismunandi klukkutíðna

code	subset	move
0 0 0 0	empty	
0 0 0 1	1	enter 1
0 0 1 1	2 1	enter 2
0 0 1 0	2	exit 1
0 1 1 0	3 2	enter 3
0 1 1 1	3 2 1	enter 1
0 1 0 1	3 1	exit 2
0 1 0 0	3	exit 1
1 1 0 0	4 3	enter 4
1 1 0 1	4 3 1	enter 1
1 1 1 1	4 3 2 1	enter 2
1 1 1 0	4 3 2	exit 1
1 0 1 0	4 2	exit 3
1 0 1 1	4 2 1	enter 1
1 0 0 1	4 1	exit 2
1 0 0 0	4	exit 1

*Gray code representations*



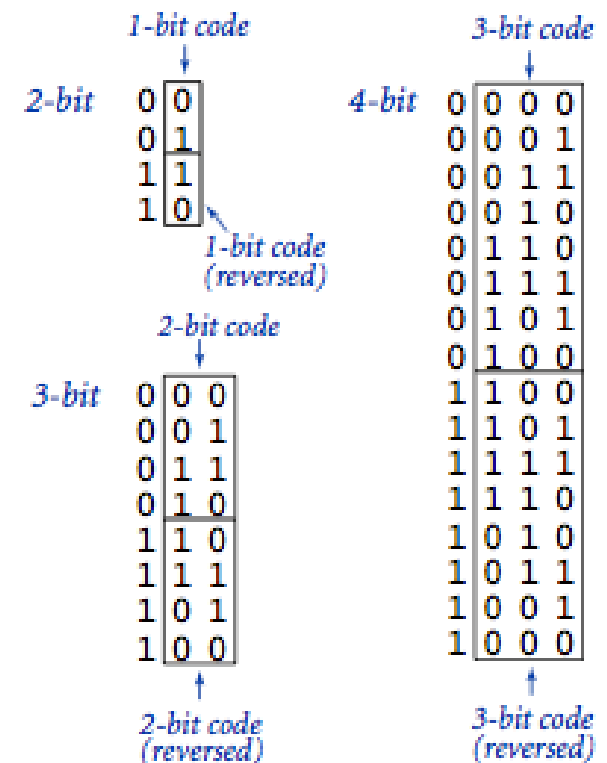
HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD



# Að búa til Gray kóða

- Notum endurkvæmni til að búa til Gray kóða
- $n$ -bita Gray kóði:
  - Fyrst kemur  $(n-1)$ -bita kóði með 0 fyrir framan
  - Síðan kemur  $(n-1)$ -bita kóði í öfugri röð með 1 fyrir framan
- Grunntilfellið:
  - 0-bita Gray kóði er tómur strengurinn
  - Þá er 1-bita Gray kóði: 0 og svo 1



2-, 3-, and 4-bit Gray codes





# Java forrit fyrir Gray kóða

([Java Visualizer](#))

```
public class GrayCode {  
  
    public static void yarg(String prefix, int n) {  
        if (n == 0) StdOut.println(prefix);  
        else {  
            gray(prefix + "1", n - 1);  
            yarg(prefix + "0", n - 1);  
        }  
    }  
  
    public static void gray(String prefix, int n) {  
        if (n == 0) StdOut.println(prefix);  
        else {  
            gray(prefix + "0", n - 1);  
            yarg(prefix + "1", n - 1);  
        }  
    }  
  
    public static void main(String[] args) {  
        int N = Integer.parseInt(args[0]);  
        gray("", N);  
    }  
}
```

Fallið `yarg(pre, n)` býr til `n`-bita viðsnúinn Gray kóða með `pre` fyrir framan og prentar hann út

Fallið `gray(pre, n)` býr til `n`-bita Gray kóða með `pre` fyrir framan og prentar hann út

Áhugaverð endurkvæmni með tveimur föllum, sem skiptast á



# Java kóði fyrir *Quad*

```
public class Beckett {  
  
    public static void moves(int n, boolean forward) {  
        if (n == 0) return;  
        moves(n-1, true);  
        if (forward) System.out.println("enter " + n);  
        else         System.out.println("exit  " + n);  
        moves(n-1, false);  
    }  
  
    public static void main(String[] args) {  
        int N = Integer.parseInt(args[0]);  
        moves(N, true);  
    }  
}
```

Forrit til að skrifa út hvenær leikararnir eiga að fara á sviðið og af sviðinu

Mjög svipað forritinu fyrir Turnana í Hanoi

```
% java Beckett 3  
enter 1  
enter 2  
exit  1  
enter 3  
enter 1  
exit  2  
exit  1
```



HÁSKÓLI ÍSLANDS

IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD

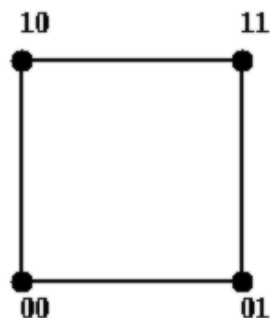


# Gray kóðar og ofurteningar

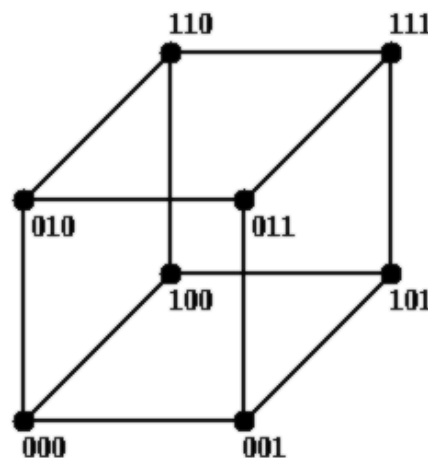
- Hægt að setja Gray kóða fram sem ferðalag um ofurtening (*hypercube*)



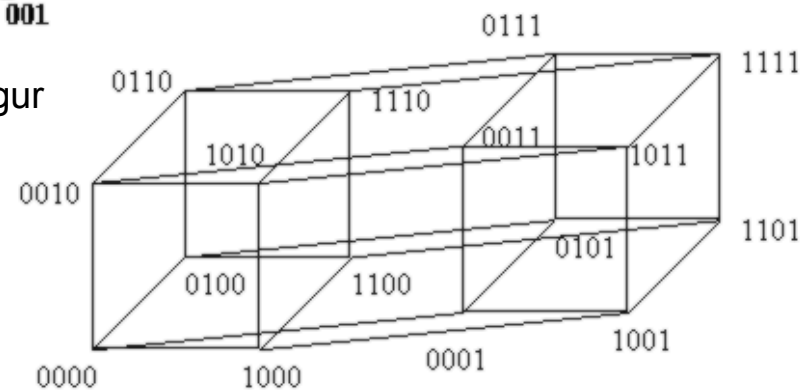
1-víður teningur



2-víður teningur



3-víður teningur



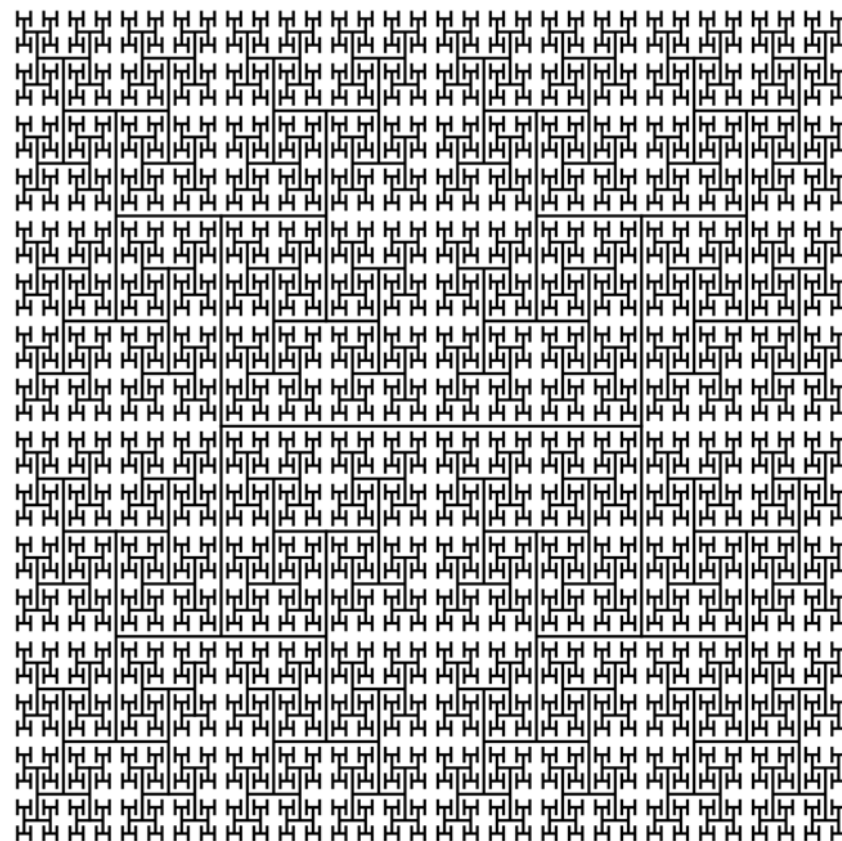
4-víður teningur

Hver lína (stika) breytir einum bita í kóðanum



# Endurkvæm teikning

- Flestar brotamyndir (fractals) eru búnar til endurkvæmt
- Skoðum H-tré (*H-tree*)
- Notkun:
  - Senda tímamerki til allra punkta í rökrás. Jafnlangir vírar til allra
  - Skipulag örbylgjuloftneta
  - Leggja út tvíundartré



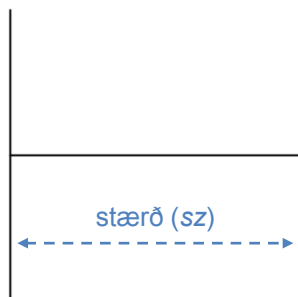
HÁSKÓLI ÍSLANDS

ÍÐNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD

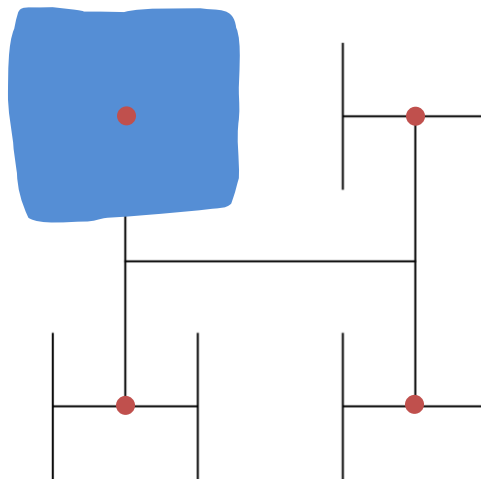


# H-tré

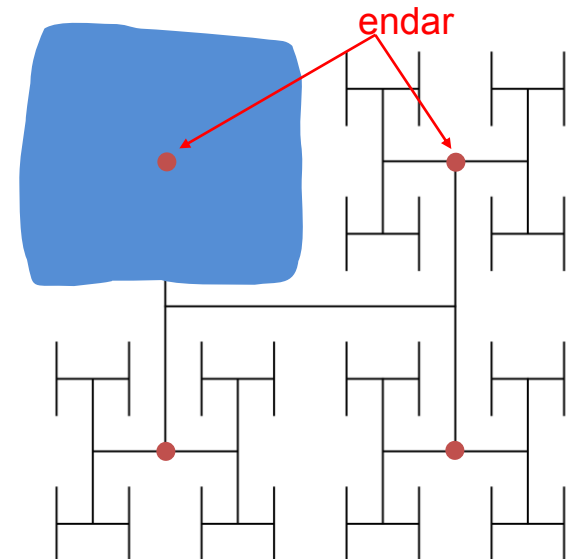
- H-tré af stigi  $n$ :
  - Teikna eitt H
  - Teikna 4  $(n-1)$ -stigs H-tré, sem hvert er tengt við einn enda H-sins



stig 1



stig 2



stig 3



# H-tré í Java

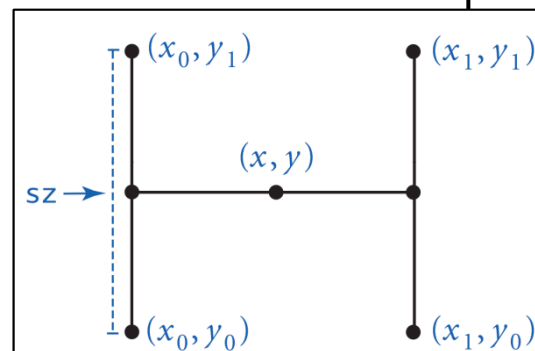
```
public class Htree {  
    public static void draw(int n, double sz, double x, double y) {  
        if (n == 0) return;  
        double x0 = x - sz/2, x1 = x + sz/2;  
        double y0 = y - sz/2, y1 = y + sz/2;  
  
        StdDraw.line(x0, y, x1, y);  
        StdDraw.line(x0, y0, x0, y1);  
        StdDraw.line(x1, y0, x1, y1);  
  
        draw(n-1, sz/2, x0, y0);  
        draw(n-1, sz/2, x0, y1);  
        draw(n-1, sz/2, x1, y0);  
        draw(n-1, sz/2, x1, y1);  
    }  
  
    public static void main(String[] args) {  
        int n = Integer.parseInt(args[0]);  
        draw(n, .5, .5, .5);  
    }  
}
```

```
StdDraw.line(x0, y, x1, y);  
StdDraw.line(x0, y0, x0, y1);  
StdDraw.line(x1, y0, x1, y1);
```

Teikna H-ið með miðju í  $(x, y)$

```
draw(n-1, sz/2, x0, y0);  
draw(n-1, sz/2, x0, y1);  
draw(n-1, sz/2, x1, y0);  
draw(n-1, sz/2, x1, y1);
```

Endurkvæmt teikna fjögur H af  
hálfri stærð með miðjur í endum  
upphaflega H-sins



Fyrsta H-ið er með miðju í  $(0.5, 0.5)$  og af stærð 0.5



# Samantekt

- Hvernig á að skrifa endurkvæm forrit?
  - Muna eftir grunntilviki, endurkvæmt skref
  - Rekja keyrslu endurkvæmra forrita
  - Teikna upp framkvæmd
- Af hverju að læra endurkvæmni?
  - Ný leið til að hugsa um lausn verkefna
  - Mikilvægt verkfæri fyrir forritara

Aðferðafræðin Deila-og-drottna (*Divide-and-conquer*) byggir á endurkvæmri hugsun, þó lausnirnar verði ekki endilega endurkvæmar



HÁSKÓLI ÍSLANDS

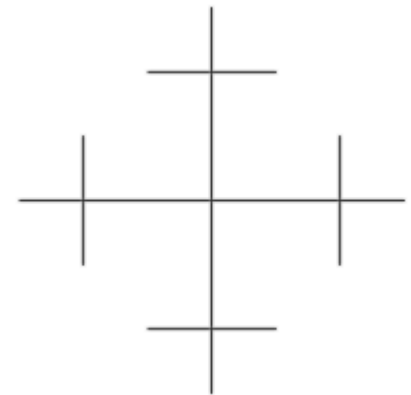
IDNADARVERKFRÆÐI-, VÉLAVERKFRÆÐI-  
OG TÖLVUNARFRÆÐIDEILD





## Fyrirlestraræfing

4. Í Gray kóðum breytist aðeins einn biti milli hliðstæðra strengja. Hversu margir bitar geta breyst á milli hliðstæðra strengja í venjulegum 8-bita tvíundarkóða?
5. Hvaða strengur kemur næst á eftir 11010 í 5-bita Gray kóða?
6. Útskýrið hvernig hægt væri að teikna einskonar endurkvæmt snjókorn á svipaðan hátt og H-tré eru teiknuð (Þá er + í stað H)





# Samantekt

- Í þessum tíma:
  - Fleiri endurkvæm föll **Kaflí 2.3**
  - Endurkvæm grafík
- Í næsta tíma:
  - Sýnidæmi: Síun (*percolation*) **Kaflí 2.4**
  - Stórt forrit fyrir alvöru verkefni

