TÖL104G Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði Verkefnablað 3 — Lausnir

16. september 2015

1. Látið $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{2, \{3\}, 4\}$. Sýnið mengið $B - A$.

   Svar: $B - A = \{\{3\}, 4\}$.

2. Látið $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Sýnið

   a) $A \times B$.

      Svar: $A \times B = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$.

   b) $A \times C \times B$.

      Svar:

      $$A \times C \times B = \{(a, 1, b), (a, 1, c), (a, 2, b), (a, 2, c), (a, 3, b),\\ (a, 3, c), (b, 1, b), (b, 1, c), (b, 2, b), (b, 2, c), (b, 3, b), (b, 3, c)\}$$

   c) $A \times A \times A$.

      Svar:

      $$A \times A \times A = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a),\\ (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$$

3. Sýnið að fyrir öll mengi A, B og C gildir að $(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cup C)$.

   Svar: Þetta má gera á ýmsa vegu, til dæmis með stakatöflu eða Venn mynd (ásamt útskýringum, þetta eru svipaðar aðferðir í grunninum) eða með því að sýna að sérhvert stak í $(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$ er stak í $A \cup C$. Við munum nota síðastnefndu aðferðina og gera þetta formlega. Til að fá rétt fyrir dæmið þarf ekki að gera þetta alveg svona formlega, en samt þarf að koma skýrt fram runa röksemdafærsluskrefa sem leiða til niðurstöðunnar.

Takið eftir því að þessi mengjaójafna er í raun rökstyttingarreglan úr rökfræðinni í örlítið breyttum búningi.

Gerum því ráð fyrir $x \in (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$ og auðvitað einnig að $x \in U$ þar sem U er almengið sem er til umræðu, og við munum sanna að $x \in A \cup C$.

Sönnnun 1: Við munum gera ráð fyrir að $x \in (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$ og sanna að afleiðing af þessu er að $x \in A \cup C$.

1. $x \in (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$ (forsenda)

2. $x \in (A \cup \bar{B}) \wedge x \in (B \cup C)$ (afleiðing af 1. vegna skilgreiningar á sniðmengi)

3. $(x \in A \vee x \in \bar{B}) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (afleiðing af 2. vegna skilgreiningar á sammengi, tvisvar)

4. $(x \in A \vee (x \in U \wedge x \notin B)) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (afleiðing af 3. vegna skilgreiningar á fyllimengi, þar sem U er almengið)

5. $(x \in A \vee (1 \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (afleiðing af 4. vegna þess að $x \in U$ er satt, þ.e. 1)

6. $(x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (afleiðing af 5. vegna samsemdarreglu)

7. $(x \in A \vee \neg x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (afleiðing af 6. vegna skilgreiningar á $\notin$)

8. $x \in A \vee x \in C$ (afleiðing af 7. með rökstyttingu þar sem $\neg x \in B$ og $x \in B$ styttast út)

9. $x \in A \cup C$ (afleiðing af 8. samkvæmt skilgreiningu á sammengi)

Við fáum því afleiðinguna $x \in A \cup C$, sem er það sem þurfti að sanna til að klára dæmið.

En einnig má gera þetta með stakatöflu eða Venn myndum og þá þurfa að fylgja með úskýringar sem segja lesandanum hvernig eigi að draga þá ályktun að eitt mengi sé hlutmengi í öðru.

Sönnnun 2: Við munum gera ráð fyrir að $x \in (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$ og sanna að afleiðing af þessu er að $x \in A \cup C$. Ljóst er út frá skilgreiningunni á fyllimengi að annaðhvort gildir $x \in B$ eða $x \in \bar{B}$. Auk þess samkvæmt skilgreiningunni á sniðmengi er ljóst að bæði $x \in A \cup \bar{B}$ og $x \in B \cup C$.

Tilvik $x \in B$**:** Þar eð $x \in B$ er ljóst samkvæmt skilgreiningunni á fyllimengi að $x \notin \bar{B}$, en hins vegar er $x \in A \cup \bar{B}$ og þarmeð hlýtur $x \in A$ að gilda. Af því leiðir að $x \in A \cup C$ samkvæmt skilgreiningunni á sammengi.

Tilvik $x \in \bar{B}$**:** Þar eð $x \in \bar{B}$ er ljóst samkvæmt skilgreiningunni á fyllimengi að $x \notin B$, en hins vegar er $x \in B \cup C$ og þarmeð hlýtur $x \in C$ að gilda. Af því leiðir að $x \in A \cup C$ samkvæmt skilgreiningunni á sammengi.

4. Einfaldið mengjasegðirnar

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B \cup C)$.

Svar:

$$\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap (A \cup B \cup C) = \text{(vegna tengireglu)}\\
&(A \cup B) \cap ((A \cup B) \cup C) = \text{(vegna gleypireglu)}\\
&A \cup B
\end{aligned}$$

b) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A \cap B$. **Svar:**

$$\begin{aligned}
&(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A \cap B = \text{(vegna tengireglu)}\\
&(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap B) = \text{(vegna De Morgan)}\\
&\overline{(A \cap B)} \cap (A \cap B) = \text{(vegna fyllireglu)}\\
&\emptyset
\end{aligned}$$

eða

$$\begin{aligned}
&(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A \cap B = \text{(vegna tengireglu)}\\
&((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A) \cap B = \text{(vegna víxlreglu)}\\
&(A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cap B = \text{(vegna dreifireglu)}\\
&((A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})) \cap B = \text{(vegna fyllireglu)}\\
&(\emptyset \cup (A \cap \bar{B})) \cap B = \text{(vegna hlutleysu)}\\
&(A \cap \bar{B}) \cap B = \text{(vegna víxlreglu)}\\
&A \cap (\bar{B} \cap B) = \text{(vegna fyllireglu)}\\
&A \cap \emptyset = \text{(vegna drottnunar)}\\
&\emptyset
\end{aligned}$$

5. a) Látið $A = \{a, b, c, d\}$. Sýnið $\mathbb{P}(A)$. Hvað eru mörg stök í því?

Svar: $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\} \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \}$. Það hefur 16 stök.

b) Látið $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Hve mörg stök eru í $\mathbb{P}(A)$?

Svar: Það hefur 2^{100} stök.

c) Látið $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{0, 1\}$. Hvað eru mörg möguleg föll $f : A \to B$ sem hægt væri að skilgreina?

Svar: Það er hægt að skilgreina $2^4 = 16$ föll.

d) Látið $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{0, 1, 2\}$. Hvað eru mörg möguleg föll $f : A \to B$ sem hægt væri að skilgreina?

Svar: Það er hægt að skilgreina $3^4 = 81$ fall.

e) Látið $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ og $B = \{0, 1\}$. Hvað eru mörg möguleg föll $f : A \to B$ sem hægt væri að skilgreina?

Svar: Það er hægt að skilgreina 2^{100} föll.