TÖL104G Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði Verkefnablað 4 — Lausnir

23. september 2015

1. **(20%)** Íhugaðu eftirfarandi föll. Fyrir sérhvert þeirra segðu til um hvort þau eru eintæk og hvort þau eru átæk og hvert myndmengi (stundum kallað varpmengi) þeirra er. Séu þau ekki eintæk skaltu sanna það. Séu þau eintæk skaltu tilgreina segð (formúlu) fyrir andhverfa fallið sem verkar til baka frá varpmenginu í formengið.

   a) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = x^2$.

   Svar: Ekki eintækt vegna þess að $f(-1) = 1 = f(1)$. Ekki átækt (vegna þess að ekki er til x þ.a. $f(x) = -1$). Myndmengið er $\mathbb{R}^+$.

   b) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = |x|$.

   Svar: Ekki eintækt vegna þess að $f(-1) = 1 = f(1)$. Ekki átækt (vegna þess að ekki er til x þ.a. $f(x) = -1$). Myndmengið er $\mathbb{R}^+$.

   c) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = \sqrt{|x|}$.

   Svar: Ekki eintækt vegna þess að $f(-1) = 1 = f(1)$. Ekki átækt (vegna þess að ekki er til x þ.a. $f(x) = -1$). Myndmengið er $\mathbb{R}^+$.

   d) Fallið $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ skilgreint með $f(x) = x^2$.

   Svar: Eintækt. Ekki átækt (vegna þess að ekki er til x þ.a. $f(x) = 2$). Myndmengið er $M = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\right\}$. Andhverfa fallið er $f^{-1} : M \to mathdsN$ með $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

   e) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = x^3$.

   Svar: Bæði eintækt og átækt. Myndmengið er því $\mathbb{R}$. Andhverfa fallið er $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

f) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = x^4$.

Svar: Ekki eintækt vegna þess að $f(-1) = 1 = f(1)$. Ekki átækt (vegna þess að ekki er til x þ.a. $f(x) = -1$). Myndmengið er $\mathbb{R}^+$.

g) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = x^5$.

Svar: Bæði eintækt og átækt. Myndmengið er því $\mathbb{R}$. Andhverfa fallið er $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

h) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = 2x + 5$.

Svar: Bæði eintækt og átækt. Myndmengið er því $\mathbb{R}$. Andhverfa fallið er $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$.

i) Fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skilgreint með $f(x) = \frac{x+5}{2}$.

Svar: Bæði eintækt og átækt. Myndmengið er því $\mathbb{R}$. Andhverfa fallið er $f^{-1}(x) = 2x - 5$.

j) Fallið $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ skilgreint með $f(x) = 2x - 5$.

Svar: Eintækt. Ekki átækt vegna þess að ekkert x gefur $f(x) = 0$. Myndmengið er mengi oddatalna $O = \{2x+1|x \in \mathbb{Z}\}$. Andhverfa fallið er $f^{-1} : O \to \mathbb{Z}$ með $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$.

2. **(20%)** Íhugaðu eftirfarandi pör falla, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skrifaðu segðir (formúlur) fyrir samsettu föllin $f \circ g$ og $g \circ f$ fyrir öll pörin og tilgreindu einnig myndmengið bæði fyrir $f \circ g$ og fyrir $g \circ f$.

a) $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{|x|}$

Svar: $f \circ g(x) = |x|$ með myndmengi $\mathbb{R}^+$. $g \circ f(x) = |x|$ með myndmengi $\mathbb{R}^+$.

b) $f(x) = x^3$ og $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Svar: $f \circ g(x) = x$ með myndmengi $\mathbb{R}$. $g \circ f(x) = x$ með myndmengi $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = |x|$ og $g(x) = x^3$

Svar: $f \circ g(x) = |x^3| = |x|^3$ með myndmengi $\mathbb{R}^+$. $g \circ f(x) = |x^3| = |x|^3$ með myndmengi $\mathbb{R}^+$.

d) $f(x) = x^3$ og $g(x) = x + 3$

Svar: $f \circ g(x) = (x+3)^3$ með myndmengi $\mathbb{R}$. $g \circ f(x) = x^3 + 3$ með myndmengi $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 3$

Svar: $f \circ g(x) = (x+3)^2$ með myndmengi $\{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = [0, \infty[$. $g \circ f(x) = x^2 + 3$ með myndmengi $\{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 3\} = [3, \infty[$.

3. **(20%)** Látum A, B, C, D, E, F vera mengin

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \,|\, |x|+|y|<1\} \\
B &= \{(x,y) \,|\, |x|+|y|\le 1\} \\
C &= \{(x,y) \,|\, |x|<1 \wedge |y|<1\} \\
D &= \{(x,y) \,|\, |x|<1 \wedge |y|\le 1\} \\
E &= \{(x,y) \,|\, x^2+y^2<1\} \\
F &= \{(x,y) \,|\, x^2+y^2\le 1\}
\end{aligned}
$$

Fylltu út í eftirfarandi töflu og settu táknið $\subseteq$ þar sem mengið sem röðin stendur fyrir er undirmengi mengisins sem súlan stendur fyrir. Til dæmis skaltu setja $\subseteq$ í öll sæti í hornalínunni vegna þess að $A \subseteq A$ og $B \subseteq B$, o.s.frv., og setja skal $\subseteq$ í röð A, súlu B **þþaa** $A \subseteq B$.

Ef fjögur sæti eru röng í töflunni fæst ekkert fyrir þetta dæmi.

Athugið: Gagnlegt er að teikna myndir af mengjunum.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Svar:

	A	B	C	D	E	F
A	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
B		$\subseteq$				$\subseteq$
C			$\subseteq$	$\subseteq$		
D				$\subseteq$		
E			$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
F						$\subseteq$

Sjá líka skýringarmynd í Uglunni í lausnamöppunni.

4. **(20%)**

   a) Hvað er veldismengið af $\{a,b,c\}$?

   Svar: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

   b) Hvað er veldismengið af $\{a, \emptyset, \{a\}\}$?

   Svar: $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{a,\emptyset\}, \{a,\{a\}\}, \{\emptyset,\{a\}\}, \{a,\emptyset,\{a\}\}\}$.

   c) Ef $A=\{a,b,c\}$ og $B=\{\emptyset, a, \{a\}, b, c, d\}$, hvað er þá $|\mathbb{P}(A)\cup B|$?

Svar:

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{P}(A) \cup B| = \\
&|\mathbb{P}(A)| + |B| - |\mathbb{P}(A) \cap B| = \\
&2^3 + 6 - |\{\emptyset, \{a\}\}| = \\
&8 + 6 - 2 = \\
&12
\end{aligned}$$

d) Ef A er mengi með n stökum og a, b eru tiltekin mismunandi stök í A, hve mörg stök $\mathbb{P}(A)$ innihalda bæði a og b?

Svar: 2^{n-2}.

Útskýring: Þetta er nákvæmlega jafn mörg mengi og mengin sem hvorki innihalda a né b vegna þess að sérhvert mengi X sem inniheldur hvorki a né b samsvarar einu og aðeins einu mengi Y sem bæði inniheldur a og b með því að $X \cup \{a, b\} = Y$. Svarið við næsta lið er því einnig svar við þessum lið.

e) Ef A er mengi með n stökum og a, b eru tiltekin mismunandi stök í A, hve mörg stök $\mathbb{P}(A)$ innihalda hvorki a né b?

Svar: 2^{n-2}.

Útskýring: Hlutmengin í A sem hvorki innihalda a né b eru nákvæmlega hlutmengin í $A - \{a, b\}$. Fjöldi þeirra er því $2^{|A-\{a,b\}|} = 2^{n-2}$.

5. **(20%)** Ef A og B eru endanleg mengi og $|A| = n$ og $|B| = m$, hve mörg mismunandi vensl eru þá möguleg frá A til B?

Svar: 2^{nm}.

Útskýring: Vensl frá A til B eru hlutmengi í $A \times B$. Fjöldi þeirra er því $|\mathbb{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^{nm}$.