Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra B

Lausnir fyrir fimmta skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 6)

12. október 2014

Dæmi 1. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ eigi sér óendanlega margar hægri andhverfur og finnið þær.

(b) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ eigi sér enga vinstri andhverfu.

Lausn. (a) Við viljum finna öll fylki $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$ sem fullnægja skilyrðinu $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$, m.ö.o. öll fylki $\mathbf{X}$ þar sem fyrri dálkurinn er lausn á hneppinu $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og sá síðari lausn á hneppinu $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nú er $\mathbf{A}$ af efri stallagerð svo með aftur-á-bak innsetningu fæst að lausnamengi fylkjajöfnunnar $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3s & -3t \\ -s & -t \\ 2s & 2t \end{bmatrix} \ ; \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Ef til væri 3×2 fylki $\mathbf{B}$ sem uppfyllti skilyrðið $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_3$, þá hefði línulega jöfnuhneppið $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ lausnina $\mathbf{Ab}$ fyrir hvaða dálkvigur $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^3$ sem er. Það fær hins vegar ekki staðist vegna þess að rudd efri stallagerð 3×2 fylkis hefur að minnsta kosti eina línu sem er núll.

Dæmi 2. Hverjar eftirtalinna varpana eru línulegar?

(a) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (e^x, e^y - 1, x - y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x \cos(y + z)$.

(c) $D : \mathbb{P}_5 \to \mathbb{P}_5$, $p(t) \mapsto tp''(t) + p(2t)$, þar sem $\mathbb{P}_n$ táknar vigurrúm allra margliða af stigi minna eða jafnt n.

Lausn. (a) Þar sem $S(0, 0) = (1, 0, 0)$ þá er vörpunin S ekki línuleg vegna þess að línulegar varpanir varpa ávallt núllviginum í núllvigurinn.

(b) Vörpunin T er ekki línuleg vegna þess að hún varðveitir ekki margföldun með tölu eins og sjá má af því að $2 \cdot T(1, \pi/2, 0) = 2 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2 + 0) = 0$, en $T(2(1, \pi/2, 0)) = T(2, \pi, 0) = 2\cos(\pi) = -2$.

(c) Sýnum að vörpunin D sé línuleg. Látum p og q vera einhverjar margliður af stigi 5 eða lægra og látum c vera einhverja rauntölu. Þá fæst

$$\begin{aligned} D(p + c \cdot q)(t) &= t(p + c \cdot q)''(t) + (p + c \cdot q)(2t) \\ &= t(p''(t) + c \cdot q''(t)) + p(2t) + c \cdot q(2t) \\ &= (tp''(t) + p(2t)) + c \cdot (tq''(t) + q(2t)) \\ &= D(p)(t) + c \cdot D(q)(t) \end{aligned}$$

og af því sést að vörpunin D er línuleg.

Dæmi 3. Kynnið ykkur (t.d. á bókasafninu eða netinu) merkingu hugtaksins **Kronecker-margfeldi** (e. *Kronecker product*) tveggja fylkja.

(a) Setjið fram (á íslensku) nákvæma skilgreiningu á hugtakinu.

(b) Sýnið með dæmi hvernig Kronecker-margfeldi 1×3 fylkis og 2×2 fylkis lítur út.

Lausn. Hér látum við nægja að gefa vefslóðina:
http://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product#Definition

Dæmi 4. Leysið eftirfarandi línulegt jöfnuhneppi með LU-þáttun (Sjá fyrirlestur 29. september og bls 489 í kennslubók.).

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & 5y & + & 2z & = & 7 \\ 4x & - & y & + & 9z & = & -16 \end{array}.$$

(Hér er aðalatriðið að sýna að þið kunnið að nota LU-þáttun.)

Lausn. Við byrjum á því að koma stuðlafylkinu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ á efra stallaform

með því að beita á það línuaðgerðunum $L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1$, $L_3 \to L_3 - 2L_1$ og

$L_3 \to L_3 + 3L_2$ (í þessari röð). Þá fæst fylkið $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ og tilheyrandi $\mathbf{L}$

fæst síðan með því að beita andhverfu línuaðgerðunum í öfugri röð á einingarfylkið $\mathbf{I}_3$; nánar til tekið þurfum við að framkvæma línuaðgerðirnar $L_3 \to L_3 - 3L_2$, $L_3 \to L_3 + 2L_1$ og $L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1$ (í þessari röð) á fylkinu $\mathbf{I}_3$.

Þá fáum við fylkið $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ og þar með er

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

LU-þáttun stuðlafylkisins $\mathbf{A}$.

Notum nú þessa þáttun til að leysa línulega jöfnuhneppið. Fyrst leysum við hneppið

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}$$

með áfram innsetningu og fáum lausnina $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix}$ og síðan leysum við línulega jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix}$$

með aftur-á-bak innsetningu og fáum lausnina $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, sem er þá jafnframt lausn á upphaflega hneppinu.