Línuleg algebra B

Lausnir fyrir sjöunda skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 8)

4. nóvember 2014

Dæmi 1. Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times m$ fylki og $\mathbf{B}$ vera $n \times n$ fylki.

(a) Sýnið að vörpunin

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{ACB}$$

sé línuleg.

(b) Gerið grein fyrir að vörpunin T sé gagntæk ef fylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru andhverfanleg.

(c) Gerum nú ráð fyrir að $m = n = 2$ og setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
Finnið $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ í þessu tilfelli.

Lausn. (a) Látum $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ vera $m \times n$ fylki og r vera rauntölu, þá fæst út frá almennum reiknireglum fyrir fylkjamargföldun

$$T(\mathbf{X}+r\mathbf{Y}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}+r\mathbf{Y})\mathbf{B} = \mathbf{AXB}+\mathbf{A}(r\mathbf{Y})\mathbf{B} = \mathbf{AXB}+r\mathbf{AYB} = T(\mathbf{X})+rT(\mathbf{Y}).$$

Þar með er sýnt að vörpunin T er línuleg.

(b) Skilgreinum vörpun $S : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ með því að setja $S(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1}$ fyrir öll $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Við vitum að vörpunin T er gagntæk þá og því aðeins að hún eigi sér andhverfu svo okkur nægir að sýna að vörpunin S sé andhverfa T. Látum $\mathbf{X}$ vera $m \times n$ fylki. Þá fáum við

$$(S \circ T)(\mathbf{X}) = S(T(\mathbf{X})) = S(\mathbf{AXB}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AXB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{X}$$

og á sama hátt fæst að $(T \circ S)(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Þetta sýnir að vörpunin S er andhverfa vörpunarinnar T, þ.e.a.s. $S = T^{-1}$.

(c) Samkvæmt lið (b) fáum við

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dæmi 2. Setjum $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = x + 2y + 3z = 0\}$.

(a) Gerið grein fyrir að U sé hlutrúm í $\mathbb{R}^3$.

(b) Finnið grunn fyrir U.

(c) Hver er vídd vigurrúmsins U?

Lausn. (a) U er hlutrúm í $\mathbb{R}^3$ vegna þess að það er lausnamengi óhliðraða jöfnuhneppisins

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

(b) Með því að draga efri jöfnuna frá þeirri neðri í hneppinu hér að ofan fæst hneppið

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

og aftur-á-bak innsetning gefur að lausnamengi þess er línan gegnum $(0,0,0)$ sem vigurinn $(1,-2,1)$ spannar. Mengið $\{(1,-2,1)\}$ er því grunnur fyrir vigurrúmið U.

(c) Þar sem fjöldi staka í grunninum, sem við fundum lið (b), er 1 þá er $\mathrm{Dim}(U) = 1$.

Dæmi 3. Setjum

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Finnið grunna fyrir línurúm, dálkrúm og núllrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(b) Finnið víddir hlutrúmanna þriggja í lið (a).

Lausn. Með því að framkvæma línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - L_1$, $L_3 \to L_3 + 2L_2$ og $L_2 \to (-1)L_2$ (í þessari röð) á fylkinu $\mathbf{A}$ fáum við fylkið

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sem er af efri stallagerð. Af því sjáum við strax að $\{(1,2,-1,1),(0,0,1,2)\}$ er grunnur fyrir línurúm fylkisins $\mathbf{A}$.

Þar sem fylkið $\mathbf{B}$ hefur forustustuðla sína í fyrsta og þriðja dálki, þá vitum að dálkar númer eitt og þrjú í fylkinu $\mathbf{A}$ mynda grunn fyrir dálkrúm þess, þ.e.a.s.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er grunnur fyrir $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Með því að beita aftur-á-bak innsetningu á óhliðraða jöfnuhneppið sem hefur $\mathbf{B}$ sem stuðlafylki fáum við

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

og af því má sjá að $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er grunnur fyrir núllrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(b) Þar sem sérhver grunnanna þriggja sem við fundum í (a) lið hefur nákvæmlega tvö stök þá eru umrædd vigurrúm öll af víddinni 2.

Dæmi 4. Skilgreinum fjórar margliður:

$$p_1(t) = t^3 + t^2 + t + 1, \quad p_2(t) = t^2 + 1, \quad p_3(t) = t^2 + t, \quad p_4(t) = t.$$

(a) Gerið grein fyrir að margliðurnar fjórar myndi grunn fyrir $\mathbb{P}_3$.

(b) Finnið hnitavigur margliðunnar $q(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 6$ miðað við raðgrunninn

$$\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\}.$$

Lausn. (a) Þar sem $\mathrm{Dim}(\mathbb{P}_3) = 4$, þá nægir okkur að sýna að margliðurnar fjórar séu línulega óháðar. Ef a, b, c og d eru einhverjar rauntölur, þá gildir um öll t að

$$ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t) + dp_4(t) = at^3 + (a + b + c)t^2 + (a + c + d)t + a + b.$$

Við sjáum því að $ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t) + dp_4(t)$ er núllmargliðan þá og því aðeins að

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & c & + & d & = & 0 \\ & & a & + & b & = & 0 \end{array}$$

Fljótséð er að þetta hneppi hefur aðeins lausnina $a = b = c = d = 0$ og þar með höfum við sýnt að margliðurnar fjórar eru línulega óháðar.

(b) Hnitavigur margliðunnar $q(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 6$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$ er eini vigurinn (a, b, c, d) í $\mathbb{R}^4$ sem uppfyllir skilyrðið

$$ap_1(t) + bp_2(t) + cp_3(t) + dp_4(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 6$$

en það er jafngilt því að

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a & = & 4 \\ a & + & b & + & c & = & 3 \\ a & + & c & + & d & = & 2 \\ & & a & + & b & = & 6 \end{array}$$

Eina lausn þessa hneppis er vigurinn $(4, 2, -3, 1)$ sem er því umbeðinn hnitavigur, þ.e.a.s. $[q(t)]_{\mathcal{B}} = (4, 2, -3, 1)$.