Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 7

Kafli 5: Áfram með þrepasannanir og endurkvæmni

Endurkvæmar skilgreiningar og gerðarþrepun

- Endurkvæmt skilgreind föll
- Endurkvæmt skilgreind mengi og gerðir (structures)
- Gerðarþrepun (structural induction)
- Almenn þrepun (generalized induction)

Endurkvæmt skilgreind föll

- **Skilgreining:** Endurkvæm skilgreining (eða þrepunarskilgreining – inductive definition) á falli $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ samanstendur af tveimur skrefum:
  - **Grunnskref:** Skilgreining gildis fallsins í núlli eða nálægt núlli, þ.e. $f(0), f(1), \dots f(b)$, fyrir eitthvert b
  - **Þrepunarskref:** Regla til að finna fallgildið $f(n)$, fyrir $\mathrm{n} > b$ út frá fallsgildunum í $0, \dots, n-1$
- Fall$f: \mathbb{N} \rightarrow A$ samsvarar runu $a_0, a_1, \dots$, þar sem $a_i = f(i)$
- Við gerðum þetta áður með rakningarvensl
- Dæmi: Skilgreinum f með:
  - $f(0) = 3$
  - $f(n+1) = 2f(n) + 3$
  - Finnum $f(1), f(2), f(3)$
  - Lausn:
    - $f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$
    - $f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$
    - $f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$

Endurkvæmt skilgreind föll

- **Dæmi:** Sýnið endurkvæma skilgreiningu á

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

- **Lausn:**
  - Grunnskrefið gæti verið

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$$

  - Þrepunarskrefið gæti verið

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Fibonacci tölur

- Skilgreinum Fibonacci tölurnar sem endurkvæmt skilgreint fall
  - **Grunnskref:**
    - $f(0) = 0$
    - $f(1) = 1$
  - **Þrepunarskref:**
    - $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

- Eða, jafngilt:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \textbf{ef } n = 0 \\ 1 & \textbf{ef } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \textbf{ef } n > 1 \end{cases}$$

Endurkvæmar skilgreiningar á mengjum og gerðum (structures)

- **Endurkvæmar skilgreiningar** mengja samanstanda af tveimur hlutum:
  - Grunnskref skilgreinir **upphaflegt safn staka**
  - Þrepunarskref gefur reglurnar sem nota má til að **smíða ný stök í menginu** út frá þeim sem þegar er þekkt að eru í menginu
- Stundum er líka tilgreind **útilokunarregla**, sem segir að ekkert sé í menginu nema það sem hægt er að fá með ofangreindum skrefum
- Við munum ávallt gera ráð fyrir að slík útilokunarregla sé til staðar, jafnvel þótt hún sé ekki sérstaklega nefnd
- Við munum seinna sjá afbrigði þrepunar, **gerðarþrepun** (structural induction) sem notuð er til að sanna niðurstöður um endurkvæmt skilgreind mengi

Endurkvæmt skilgreind mengi

- **Dæmi:** Undirmengi S í $\mathbb{Z}$
  - Grunnskref: $3 \in S$
  - Þrepunarskref: Ef $x \in S$ og $y \in S$ þá er $x + y \in S$
  - Upphaflega er 3 í S, síðan $3 + 3 = 6$, síðan $3 + 6 = 9$, o.s.frv.
- **Dæmi:** Náttúrlegu tölurnar $\mathbb{N}$
  - Grunnskref: $0 \in \mathbb{N}$
  - Þrepunarskref: Ef $n \in \mathbb{N}$ þá er $n + 1 \in \mathbb{N}$
  - Upphaflega er 0 í $\mathbb{N}$, síðan $0+1=1$, síðan $1+1=2$, o.s.frv.

Strengir

- **Skilgreining:** Skilgreinum mengið Σ^*, kallað mengi strengja yfir stafrófið Σ, með endurkvæmri skilgreiningu:
  - Grunnskref: $\lambda \in \Sigma^*$ (λ táknar tóma strenginn)
  - Þrepunarskref: Ef w er í Σ^* og x er í Σ þá er wx í Σ^*
- **Dæmi:** Ef $\Sigma = \{0,1\}$ þá eru strengirnir í Σ^* bitastrengirnir $\lambda, 0,1,00,01,10,11,$ o.s.frv.
- **Dæmi:** Ef $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, sýnum að aab sé í Σ^*
- **Lausn:**
  - **Þar eð** $\lambda \in \Sigma^*$ **og** $a \in \Sigma$ **þá er** $a \in \Sigma^*$
  - **Þar eð** $a \in \Sigma^*$ **og** $a \in \Sigma$ **þá er** $aa \in \Sigma^*$
  - **Þar eð** $aa \in \Sigma^*$ **og** $b \in \Sigma$ **þá er** $aab \in \Sigma^*$

Samskeyting strengja

- **Skilgreining:** Setja má saman tvo strengi með **samskeytingu**. Látum Σ vera stafrófið og Σ^* vera mengi strengja yfir það stafróf. Við skilgreinum samskeytingu strengja, táknuð með samskeytingaraðgerðinni $\cdot$, endurkvæmt á eftirfarandi hátt:
  - Grunnskref: Ef $w \in \Sigma^*$ þá skilgreinum við $w \cdot \lambda = w$
  - Þrepunarskref: Ef $w_1 \in \Sigma^*$ og $w_2 \in \Sigma^*$ og $x \in \Sigma$ þá $w_1 \cdot (w_2 x) = (w_1 \cdot w_2)x$
- Oft ritum við $w_1 w_2$ í stað $w_1 \cdot w_2$
- Ef $w_1 = abra$ og $w_2 = cadabra$ þá er samskeytingin $w_1 \cdot w_2 = abracadabra$

Lengd strengs

- **Dæmi:** Sýnið endurkvæma skilgreiningu á lengd strengs
- **Lausn:** Lengd strengs má skilgreina sem fallið $l: \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ með endurkvæmri skilgreiningu:
  - $l(\lambda) = 0$
  - $l(wx) = l(w) + 1$, fyrir $w \in \Sigma^*$ og $x \in \Sigma$

  Eða, jafngilt:

$$l(s) = \begin{cases} 0 & \textbf{ef } s = \lambda \\ l(w) + 1 & \textbf{ef } s = wx \textbf{ fyrir eitthvert } w \textbf{ og } x \end{cases}$$

Svigar í jafnvægi

- **Dæmi:** Sýnum endurkvæma skilgreiningu á menginu P sem inniheldur þá strengi yfir stafrófið $\Sigma = \{(,)\}$ sem hafa sviga í jafnvægi
- **Lausn:**
  - **Grunnskref:** $\lambda \in P$
  - **Þrepunarskref:** Ef $x \in P$ og $y \in P$ þá er $(x)y \in P$
- Sýnið að (()(())) sé í P
- Hvers vegna er))(() ekki í P?

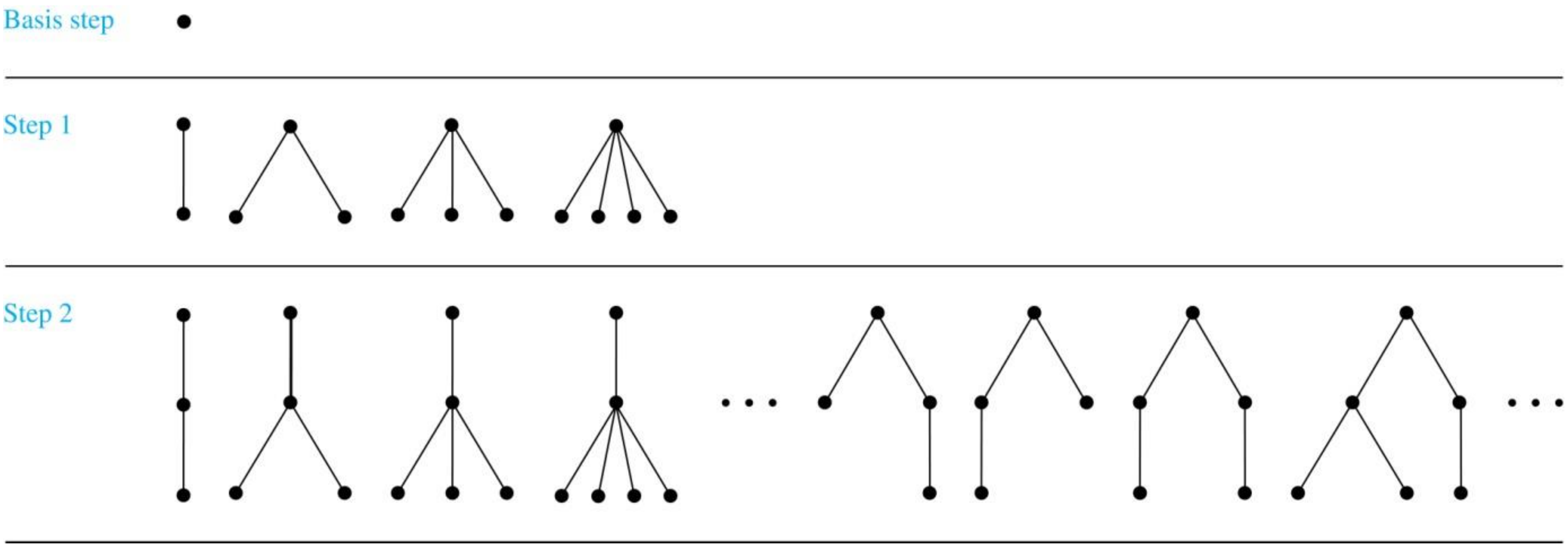
Vel sniðnar segðir (well-formed formulae, wff) í yrðingareikningi

- **Skilgreining:** Vel sniðnar segðir í yrðinareikningi hafa rökfastana $\mathbf{1}$ og $\mathbf{0}$, yrðingabreytur, $p, q, r, \ldots$ auk aðgerðanna ¬, ∧, ∨, → og ↔.
- **Grunnskref:**
  1. $\mathbf{1}$ og $\mathbf{0}$ eru vel sniðnar segðir
  2. Ef s er yrðingabreyta þá er s vel sniðin segð
- **Þrepunarskref:** Ef E og F eru vel sniðnar segðir þá eru eftirfarandi vel sniðnar segðir:
  1. $(\neg E)$
  2. $(E \wedge F)$
  3. $(E \vee F)$
  4. $(E \rightarrow F)$
  5. $(E \leftrightarrow F)$
- **Dæmi:**
  - $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge 0))$ er vel sniðin segð
  - $pq \vee$ er ekki vel sniðin segð

Rótföst tré (rooted tree)

- **Skilgreining:** Skilgreinum endurkvæmt mengi rótfastra trjáa, þar sem rótfast tré samanstendur af mengi hnúta (node, vertex), þar sem einn hnútur er merktur sem rót, ásamt stikum (edge) sem tengja saman hnútana
  - Grunnskref: Einn hnútur r er rótfast tré, þar sem r er rótin
  - Þrepunarskref: Gerum ráð fyrir að $T_1, T_2, \dots, T_n$ séu sundurlæg rótföst tré með rótum $r_1, r_2, \dots, r_n$. Netið (graph) sem fæst með því að bæta við einum hnúti r sem ekki er í neinu trjánna $T_1, T_2, \dots, T_n$ og hafa r sem rót í nýju neti sem fæst með því að bæta við stiku frá r til sérhvers af hnútunum $r_1, r_2, \dots, r_n$, er þá einnig rótfast tré.

Byggjum rótföst tré



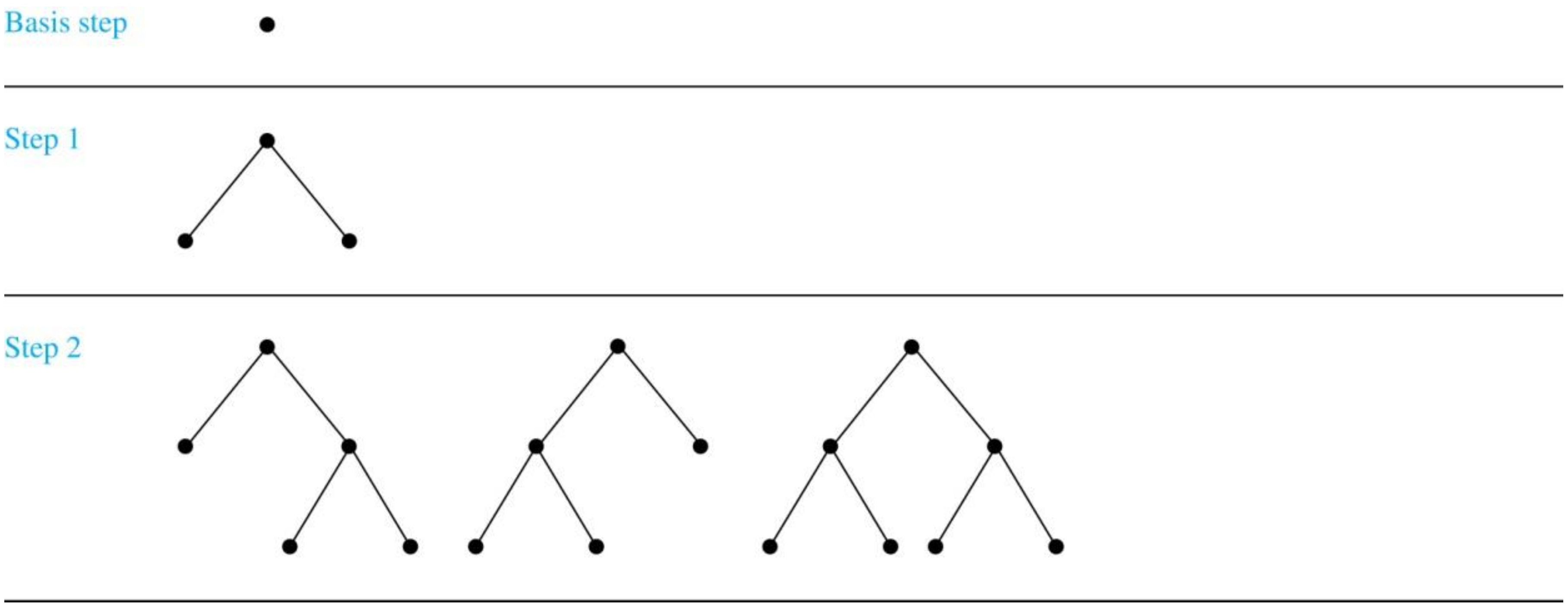
Fullskipuð tvíundartré

- **Skilgreining:** Fullskipuð tvíundartré eru skilgreind endurkvæmt á eftirfarandi hátt:
  - **Grunnskref:** Einstakur hnútur r er fullskipað tvíundartré með rót r
  - **Þrepunarskref:** Ef r er hnútur og T_1 er fullskipað tvíundartré með rót r_1 og T_2 er fullskipað tvíundartré með rót r_2 þá má smíða nýtt fullskipað tvíundartré með rót r með því að setja vinstri stiku (left edge) frá r til r_1 og aðra hægri stiku (right edge) frá r til r_2

  Athugið að við gerum greinarmun á vinstri stiku og hægri stiku, öfugt við venjuna í almennum trjám í netafræðinni (graph theory)

    - Við segjum þá að r_1 sé **vinstra barn** (left child) r og að r_2 sé **hægra barn** (right child) r
    - Við segjum einnig að T_1 sé **vinstra undirtré** (left subtree) hnútarins r og að T_2 sé **hægra undirtré** (right subtree) hnútarins r
    - Við segjum einnig að hnúturinn r sé foreldri (parent) hnútarins r_1 og hnútarins r_2
    - Við skrifum stundum $T_1 \cdot T_2$ til að tákna þá aðgerð að smíða nýtt fullskipað tvíundartré með vinstra undirtré T_1 og hægra undirtré T_2

Byggjum fullskipuð tvíundartré



Gerðarþrepun (structural induction)

- **Skilgreining:** Gerðarþrepun er aðferð til að sanna að öll stök í mengi S sem skilgreint er með endurkvæmri skilgreiningu uppfylli tiltekna umsögn P. Gerðarþrepunin felst í eftirfarandi skrefum:
  - **Grunnskref:** Sönnum að $P(x)$ gildi fyrir öll stök x sem skilgreind eru í grunnskrefi skilgreiningarinnar á S
  - **Þrepunarskref:** Sönnum að ef $P(x)$ gildir fyrir sérhvert af þeim gildum x sem notuð eru sem byggingarblokkir í þrepunarskrefi skilgreiningarinnar á S þá gildi $P(z)$ fyrir gildið z sem smíðað er í þrepunarskrefinu
- Réttmæti gerðarþrepunar má sanna með venjulegri þrepun á fjölda þeirra skrefa sem notuð eru til að smíða viðkomandi gildi

Fullskipuð tvíundartré

- **Skilgreining:** Hæð fullskipaðs tvíundartrés er skigreint endurkvæmt á eftirfarandi hátt
  - **Grunnskref:** Hæð fullskipaðs tvíundartrés T sem einungis samanstendur af rót r er $h(T) = 0$
  - **Þrepunarskref:** Ef T_1 og T_2 eru fullskipuð tvíundartré þá er hæð fullskipaða tvíundartrésins $T = T_1 \cdot T_2$ skilgreint sem $h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2))$

- Fjöldi hnúta, $n(T)$, í fullskipuðu tvíundartré T uppfyllir eftirfarandi endurkvæmu skilgreiningu
  - **Grunnskref:** Fjöldi hnúta í fullskipuðu tvíundartré T sem einungis samanstendur af rót r er $n(T) = 1$
  - **Þrepunarskref:** Ef T_1 og T_2 eru fullskipuð tvíundartré þá er fjöldi hnúta í fullskipaða tvíundartrénu $T = T_1 \cdot T_2$ reiknað sem $n(t) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$

Gerðarþrepun á fullskipuð tvíundartré

- **Setning:** Ef T er fullskipað tvíundartré þá er $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$
- **Sönnun:** Notum gerðarþrepun
  - **Grunnskref:** Þegar T samanstendur einungis af rót fáum við $n(T) = 1$ og $h(T) = 0$, þar af leiðir að $n(T) = 1 \leq 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{h(T)+1}$
  - **Þrepunarskref:** Gerum ráð fyrir að $n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1$ og að $n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1$ fyrir tvö fullskipuð tvíundartré T_1 og T_2. Þá er fjöldi hnúta í trénu $T = T_1 \cdot T_2$

$$
\begin{aligned}
n(T) &= 1 + n(T_1) + n(T_2) && \left(\text{samkvæmt endurkvæmri segð fyrir } n(T)\right) \\
&\leq 1 + \left(2^{h(T_1)+1} - 1\right) + \left(2^{h(T_2)+1} - 1\right) && (\text{samkvæmt þrepunarforsendu}) \\
&\leq 2 \cdot \max\left(2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{\max\left(h(T_1), n(T_2)\right)} - 1 && \left(\text{þar eð } \max(2^x, 2^y) = 2^{\max(x,y)}\right) \\
&= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 && (\text{samkvæmt endurkvæmri skilgreiningu } h(T)) \\
&= 2^{h(T)+1} - 1
\end{aligned}
$$

Almenn þrepun (generalized induction)

- Almenn þrepun er notuð til að sanna fullyrðingar um velröðuð mengi önnur en heiltölurnar
- Íhugum til dæmis röðun á $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ skilgreind með $(x_1, y_1) < (x_2 y_2)$ þá og því aðeins að $x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$ gildi. Þetta er kallað lexíkógrafísk röð (lexicographical ordering), eða einfaldlega stafrófsröðun, og er náskyld stafrófröð strengja. Athugið að út frá $<$ má síðan auðveldlega skilgreina $\leq$ og $>$ og $\geq$ með
  1. $(x_1, y_1) \leq (x_2 y_2) \leftrightarrow (x_1, y_1) < (x_2 y_2) \vee (x_1, y_1) = (x_2 y_2)$
  2. $(x_1, y_1) > (x_2 y_2) \leftrightarrow (x_2, y_2) < (x_1 y_1)$
  3. $(x_1, y_1) \geq (x_2 y_2) \leftrightarrow (x_1, y_1) > (x_2 y_2) \vee (x_1, y_1) = (x_2 y_2)$
- **Setning:** Sérhver síminnkandi runa tvennda, $(x_1, y_1) > (x_2 y_2) > (x_3 y_3) > \cdots$ er endanleg
- Við getum sannað þessa setningu með venjulegri þrepun á x_1
- Afleiðing af þessari setningu er að mengið $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ með samanburði $\leq$ er velraðað, þegar við tökum einnig tillit til þess að ávallt gildir eitt af þrennu: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ eða $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ eða $(x_1, y_1) > (x_2, y_2)$

Almenn þrepun

- **Dæmi:** Notum almenna þrepun til að skilgreina $a_{m,n}$ fyrir $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ með
$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{ef } m = n = 0 \\ a_{m-1,n} + 1 & \text{ef } n = 0 \text{ og } m > 0 \\ a_{m,n-1} + n & \text{ef } n > 0 \end{cases}$$
- Sýnið að $a_{m,n} = m + \frac{n(n+1)}{2}$ sé vel skilgreint fyrir öll $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- **Sönnun:** Notum almenna þrepun
  - **Grunnskref:** $a_{0,0} = 0 = 0 + \frac{0(0+1)}{2}$ er vel skilgreint og hefur tilgreinda gildið
  - **Þrepunarskref:** Gerum ráð fyrr að fyrir öll (m',n') sem eru minni en (m,n) sé $a_{m',n'}$ vel skilgreint og $a_{m',n'} = m' + \frac{n'(n'+1)}{2}$. Þá sjáum við:
    - Ef $n = 0$ þá gildir samkvæmt þrepunarforsendu að
$$a_{m,n} = a_{m-1,n} + 1 = m - 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = m + \frac{n(n+1)}{2}$$
    - Ef $n > 0$ þá gildir samkvæmt þrepunarforsendu að
$$a_{m,n} = a_{m,n-1} + n = m + \frac{(n-1)n}{2} + n = m + \frac{n(n+1)}{2}$$

Sama í sauðakóða

{
Notkun: x := reikna(m,n);
Fyrir: m, n eru heiltölur, $m, n \geq 0$
Eftir: $x = m + n(n+1)/2$
}

stef reikna(m, n: heiltölur)
  ef $m = 0$ **og** $n = 0$ **þá skila** 0
  ef $n = 0$ **þá**
    skila reikna($m - 1$,n)+1
  annars
    skila reikna(m,$n - 1$)+n

Er þetta naumrétt?
Hvað þýðir það?

Er þetta rammrétt?
Hvað þýðir það?

Fleiri endurkvæm algrím

- Hrópmerkt
- Veldishafning
- Stærsti samdeilir
- Helmingunarleit

Hrópmerkt (factorial)

{
Notkun: x := hrópmerkt(n)
Fyrir: n er heiltala, $n \geq 0$
Eftir: $x = n!$
}

stef hrópmerkt(n: heiltala)
    ef $n = 0$ **þá**
        skila 1
    annars
        skila n ·hrópmerkt($n - 1$)

Einföld veldishafning

{
Notkun: x := veldi(a,n)
Fyrir: n er heiltala, $n \geq 0$, a er rauntala
Eftir: $x = a^n$
}

stef veldi(a: rauntala, n: heiltala)
    ef $n = 0$ **þá**
        skila 1
    annars
        skila a ·veldi(a,$n - 1$)

Stærsti samdeilir (gcd)

{
Notkun: x := gcd(a,b)
Fyrir: a, b eru heiltölur, $0 \leq a < b$
Eftir: x er stærsti samdeilir a og b
}

stef gcd(a, b: heiltala)
    ef $a = 0$ **þá**
        skila b
    annars
        skila $\mathrm{gcd}(b \ \mathbf{mod} \ a, a)$

Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: k := leita(i, j, x)
Fyrir: Runan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er til staðar og inniheldur heiltölur í vaxandi röð, $1 \leq i \leq j \leq n+1$
Eftir: $1 \leq k \leq n+1$ og
$a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1} < x \leq a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{j-1}$
}

stef leita(i, j, x: heiltölur)
    ef $i = j$ **þá skila** i
    $m \coloneqq \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor$
    ef $a_m < x$ **þá**
        skila leita$(m+1, j, x)$
    annars
        skila leita(i, m, x)

Íhugið kallið leita(1,n+1,x)