Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

LÍNULEG ALGEBRA A OG B

Lausnir fyrir annað skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 3)

20. september 2014

Dæmi 1. Gefin eru fylkin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Segið til um hvort fylkin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{AB}$ (hvert um sig) eru af

(a) efri stallagerð (b) ruddri efri stallagerð.

Finnið síðan metorð (e. *rank*) allra fylkjanna.

LAUSN. Fljótséð er að $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Fylkið $\mathbf{A}$ er af efri stallagerð, en hvorugt hinna fylkjanna.

(b) Fylkið $\mathbf{A}$ er ekki af ruddri efri stallagerð (t.d. eru forustustuðlar þess ekki talan 1). Hvorugt hinna fylkjanna er af ruddri efri stallagerð samkvæmt lið (a).

Fylkið $\mathbf{A}$ er af efri stallagerð og hefur þrjár línur sem eru ekki núll svo að $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 3$. Fylkið $\mathbf{B}$ er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sem er af efri stallagerð og hefur nákvæmlega tvær línur sem eru ekki núll svo að $\text{Rank}(\mathbf{B}) = 2$. Fylkið $\mathbf{AB}$ er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sem er af efri stallagerð og hefur nákvæmlega tvær línur sem eru ekki núll svo að $\text{Rank}(\mathbf{AB}) = 2$.

Skilgreining. Látum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vera línulega óháða vigra úr $\mathbb{R}^3$. Mengið

$$P = \{\mathbf{a} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \tag{*}$$

kallast **sléttan** (eða **planið**) **gegnum a sem v og w spanna**.

Dæmi 2. Látum P tákna sléttuna gegnum $(1, 1, 1)$, sem vigrarnir $(0, 1, 1)$ og $(1, 2, 3)$ spanna.

(a) Finnið vigur (a, b, c), annan en núllvigurinn, sem er hornréttur á báða vigrana $(0, 1, 1)$ og $(1, 2, 3)$.

(b) Sýnið að um alla punkta (x, y, z) í sléttunni P gildi að

$$ax + by + cz = a + b + c. \tag{**}$$

(c) Sýnið að vigrarnir $(0,1,1)$, $(1,2,3)$ og (a,b,c) séu línulega óháðir, þar sem (a,b,c) er vigurinn, sem þið funduð í lið (a)

(d) Ályktið út frá lið (c) að umræddir þrír vigrar spanni allt $\mathbb{R}^3$.

(e) Gerum nú ráð fyrir að punktur (x,y,z) uppfylli jöfnuna (**). Sýnið fyrst að unnt sé að skrifa vigurinn $(x-1,y-1,z-1)$ sem línulega samantekt af vigrunum $(0,1,1)$ og $(1,2,3)$ og ályktið síðan út frá því að punkturinn (x,y,z) sé í sléttunni P.

Þegar sléttan P er sett fram með því að nota (*) þá segjum við að hún sé **gefin með stikaframsetningu**, en þegar hún er sett fram með því að nota (**), þá segjum við að hún sé **gefin með jöfnu**.

Eins og berlega má sjá af dæminu hér að ofan er unnt að setja sérhverja sléttu í $\mathbb{R}^3$ fram með jöfnu.

Lausn. (a) Vigur (a,b,c) er hornréttur á hina tvo ef og aðeins ef hann er lausn á jöfnuhneppinu

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 3c & = & 0 \end{array}$$

en fljótséð er að lausnamengi hennar er línan gegnum $(0,0,0)$ sem vigurinn $(1,1,-1)$ spannar. Setjum því

$$(a,b,c) = (1,1,-1).$$

(b) Látum (x,y,z) vera einhvern punkt úr P. Þá eru til rauntölur s og t sem uppfylla $(x,y,z) = (1,1,1) + s(0,1,1) + t(1,2,3)$ og við fáum því

$$\begin{aligned} x+y-z &= (1,1,-1)\cdot(x,y,z) \\ &= (1,1,-1)\cdot[(1,1,1)+s(0,1,1)+t(1,2,3)] \\ &= (1,1,-1)\cdot(1,1,1)+s(1,1,-1)\cdot(0,1,1)+t(1,1,-1)\cdot(1,2,3) \\ &= 1+1+(-1)+s0+t0 = 1. \end{aligned}$$

(c) Fylkið $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ hefur umrædda þrjá vigra sem dálkvigra. Með einföldum línuaðgerðum fæst að rudd efri stallagerð þess hefur forustustuðul í hverjum dálki og þar með eru vigrarnir línulega óháðir.

(d) Látum $\mathbf{A}$ tákna fylkið í lið (c). Þar sem rudd efri stallagerð þess hefur forustustuðul í öllum dálkum, þá hefur það enga núlllínu. Af því leiðir að jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hefur (nákvæmlega eina) lausn fyrir sérhvern vigur $\mathbf{b}$ úr $\mathbb{R}^3$, en það þýðir að dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna allt hnitarúmið $\mathbb{R}^3$.

(e) Af jöfnunni $x+y-z=1$ leiðir að

$$\begin{aligned} (1,1,-1)\cdot(x-1,y-1,z-1) &= (1,1,-1)\cdot(x,y,z)+(1,1,-1)\cdot(-1,-1,-1) \\ &= x+y-z-1 = 1-1 = 0. \end{aligned}$$

Samkvæmt lið (d) eru til rauntölur r, s og t sem uppfylla jöfnuna

$$(x-1,y-1,z-1) = r(1,1,-1)+s(0,1,1)+t(1,2,3)$$

svo ef báðar hliðar jöfnunnar eru depilmargfaldaðar með vigrinum $(1,1,-1)$, þá fæst $0 = r$. Við fáum því $(x-1, y-1, z-1) = s(0,1,1) + t(1,2,3)$ og þar með

$$(x, y, z) = (1,1,1) + s(0,1,1) + t(1,2,3)$$

en það merkir að punkturinn (x, y, z) er í P.

Dæmi. 3. Látum P tákna sléttuna í $\mathbb{R}^3$ sem gefin er með jöfnunni

$$3x + 2y - 6z = 12.$$

(a) Finnið stikaframsetningu fyrir sléttuna P.

(b) Gerið grein fyrir hvort línan gegnum punktinn $(1,1,1)$, sem vigurinn $(1,2,3)$ spannar, skeri sléttuna P og finnið skurðpunktinn ef svo er.

Lausn. (a) Með því að beita aftur-á-bak innsetningu á jöfnuna

$$3x + 2y - 6z = 12.$$

fáum við $x = 4 - \frac{2}{3}y + 2z$ og stikaframsetning línunnar er því

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Stikaframsetning línunnar er

$$l = \{(1,1,1) + t(1,2,3) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}.$$

Við viljum kanna hvort og þá hvaða punktar af gerðinni

$$(1,1,1) + t(1,2,3) = (1+t, 1+2t, 1+3t)$$

eru í sléttunni, þ.e.a.s. uppfylla jöfnu sléttunnar. Með því að setja $(1+t, 1+2t, 1+3t)$ inn í jöfnu sléttunnar fæst jafan

$$3(1+t) + 2(1+2t) - 6(1+3t) = 12$$

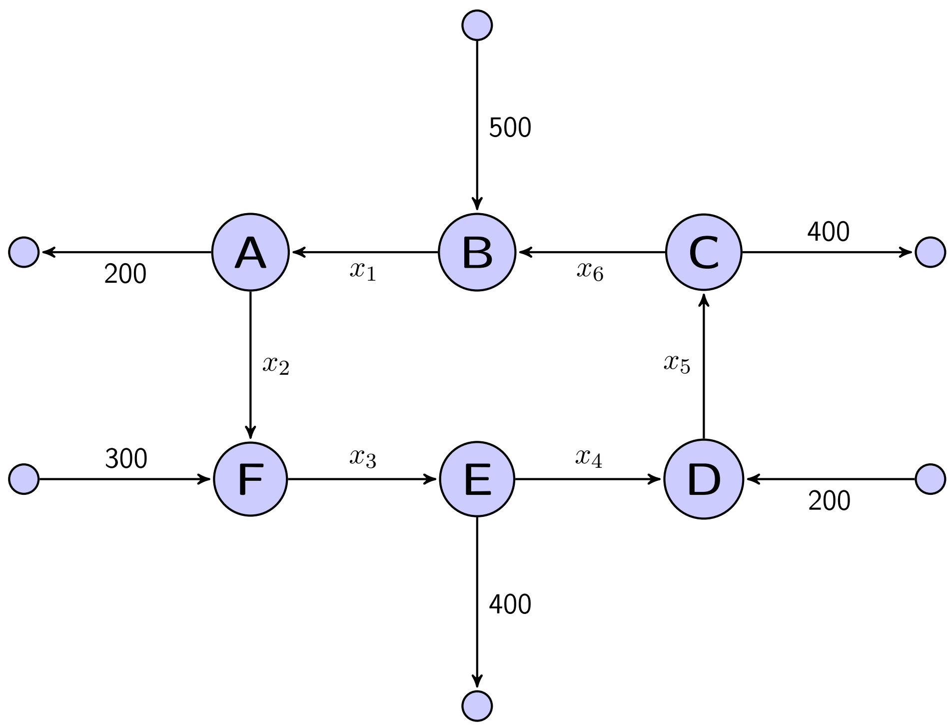
og eina lausn hennar er $t = -\frac{13}{11}$. Af því má svo ráða að línan og sléttan skerast í punktinum $-(\frac{2}{11}, \frac{15}{11}, \frac{28}{11})$.

Dæmi. 4. Myndin hér á eftir lýsir umferðarálagi (mældu í fjölda bíla á klukkustund) á neti einstefnugatna.

(a) Notið allar upplýsingar sem felast í myndinni til að setja upp línulegt jöfnuhneppi sem lýsir sambandinu á milli óþekktu stærðanna $x_1, x_2, \ldots, x_6$.

(b) Leysið línulega jöfnuhneppið.

(c) Gefum okkur nú að $x_1 = 600$. Gerið grein fyrir að hneppið hafi þá aðeins eina lausn og finnið hana.



Lausn. (a) Skoðum hver gatnamót fyrir sig og notum okkur að fjöldi bíla sem fer inn í þau þarf að standast á við fjölda bíla sem fer út úr þeim. Þá fæst jöfnuhneppið

A: $x_1 = 200 + x_2$

B: $x_1 = 500 + x_6$

C: $x_5 = 400 + x_6$

D: $x_5 = 200 + x_4$

E: $x_3 = 400 + x_4$

F: $x_3 = 300 + x_2$

(b) Með aftur-á-bak innsetningu (x_6 frjáls) fæst lausnamengið

$$\{(500, 300, 600, 200, 400, 0) + t(1, 1, 1, 1, 1, 1)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Ef $x_1 = 600$, þá er $x_6 = 100$ og samkvæmt lið (b) hefur hneppið í því tilfelli aðeins lausnina

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (600, 400, 700, 300, 500, 100)$$

Jón Ingólfur Magnússon