TÖL104G Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði Verkefnablað 6 — Lausn

14. október 2015

1. (25%) Hverjir af eftirfarandi rökstuddum forritstextum í sauðakóða eru rétt rökstuddir? Ef eitt svar er rangt fæst ekkert fyrir dæmið.

   a)
   ```
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=0}
   ```
   b)
   ```
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=1}
   ```
   c)
   ```
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=2}
   ```
   d)
   ```
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=1 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=2}
   ```
   e)
   ```
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=0 }
   x := x+1
   { x er heiltala, x>=2}
   ```
   f)
   ```
   { x er heiltala, x>=1 }
   ```

```
x := x*10
{ x er heiltala, x>=10}
```

g)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=1}
```

h)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=20}
```

i)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=10 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=100}
```

j)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=1 }
x := x*10
{ x er heiltala, x>=100}
```

Svar: a, b, d, f, g, i eru rétt rökstuddir. c, e, h, j eru rangt rökstuddir.

2. (25%) Hverjir eftirfarandi forritskafla eru rétt rökstuddir? Athugið að það dugar ekki að eftirskilyrðið sé satt eftir að forritskaflanum lýkur heldur verður sú niðurstaða að vera afleiðing röksemdafærslu eins og lýst er í glærunum um rökstudda forritun, þar sem fyrir forskilyrði F, lykkjuskilyrði C, fastayrðingu I, eftirskilyrði E og stofn lykkju S þarf að gilda:

   - $F \to I$
   - $\{I \wedge C\}S\{I\}$
   - $I \wedge \neg C \to E$

   Ef eitt svar er rangt fæst ekkert fyrir dæmið.

   a)
   ```
   { x er heiltala, x>=1 }
   meðan x>10
       { x>10 }
       x := x-1
   { x er heiltala, x<=10 }
   ```

   b)
   ```
   { x er heiltala, x>=1 }
   meðan x>10
       { x>=10 }
       x := x-1
   { x er heiltala, x<=10 }
   ```

	$g(n) = 1$	$g(n) = \log(n)$	$g(n) = n$	$g(n) = n\log(n)$	$g(n) = n^2$	$g(n) = n!$	$g(n) = 3^n$	$g(n) = 2^n$
$f(n) = 1$								
$f(n) = 2$								
$f(n) = \log(n)$								
$f(n) = n\log(n)$								
$f(n) = n^2\log(n)$								
$f(n) = \frac{1}{3}$								
$f(n) = n^3$								
$f(n) = n^2$								
$f(n) = 2^n$								
$f(n) = n!$								
$f(n) = 3^n$								

Tafla 1: Stærðargráður falla.

c)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
meðan x>10
    { x>=1 }
    x := x-1
{ x er heiltala, x<=10 }
```

d)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
meðan x>10
    { x>=1 }
    x := x-1
{ x er heiltala, 1<=x<=10 }
```

e)
```
{ x er heiltala, x>=1 }
meðan x>10
    { x>10 }
    x := x-1
{ x er heiltala, 1<=x<=10 }
```

Svar: Liðir c og d er rétt rökstuddir. a, b og e eru rangt rökstuddir.

3. (25%) Íhugið töflu 1. Íhugið sérhvert fall $f(n) = \ldots$ í vinstra dálki töflunnar og setjið merkið $\in$ í viðeigandi reiti í töflunni ef fallið $f(n)$ er í því mengi falla sem röðin er merkt með, þ.e. ef fallið $g(n)$ efst í dálkinum, sem dálkurinn er merktur með, ríkir yfir viðkomandi falli $f(n)$ sem röðin er merkt með. Með öðrum orðum setjið $\in$ ef $f(n)$ er í $O(g(n))$.

   Ef 5 reitir eru rangt merktir verður einkunnin núll fyrir þetta dæmi.

   Svar: Sjá töflu 2 á næstu síðu.

	$g(n) = 1$	$g(n) = \log(n)$	$g(n) = n$	$g(n) = n\log(n)$	$g(n) = n^2$	$g(n) = n!$	$g(n) = 3^n$	$g(n) = 2^n$
$f(n) = 1$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = 2$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = \log(n)$		$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = n\log(n)$				$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = n^2\log(n)$						$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = \frac{1}{3}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = n^3$						$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = n^2$					$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = 2^n$						$\in$	$\in$	$\in$
$f(n) = n!$						$\in$		
$f(n) = 3^n$						$\in$	$\in$	

Tafla 2: Stærðargráður falla.

4. (25%) Hver verður fjöldi umferða gegnum stofninn í lykkjunni í helmingunarleit ef fjöldi þeirra gilda sem leitað er í er $2^n - 1$, fyrir einhverja heiltölu $n \geq 0$? Sannið svarið ykkar. Þið megið gera ráð fyrir að fyrir jákvæðar heiltölur i og j gildi $\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor = i + \lfloor \frac{j-i}{2} \rfloor$.

   Svar: Fjöldi umferða verður n. Ástæða þess er að eftir k umferðir inniheldur óþekkta svæðið (gula svæðið) $2^{n-k} - 1$ sæti (gildi). Við munum sanna það hér fyrir neðan með þrepasönnun á k. En afleiðing þessa er að óþekkta svæðið er tómt eftir nákvæmlega n umferðir og n verður því heildarfjöldi umferða.

   Hjálparsetning: Ef fjöldi óþekktra sæta í helmingunarleit, eins og hún er útfærð í glærum námskeiðsins, á undan einhverri umferð lykkjunnar, er $j - i = 2^n - 1$, fyrir eitthvert $n > 0$, þá verður fjöldi óþekktra sæta eftir þá umferð $2^{n-1} - 1$.

   Sönnun: Í umferðinni um lykkjuna er reiknaður miðjuvísir

$$\begin{aligned}
m &= \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor \\
&= i + \lfloor \frac{j-i}{2} \rfloor \text{ (gefið á verkefnablaði, sjá líka hjálparsetningu aftar)} \\
&= i + \lfloor \frac{2^n - 1}{2} \rfloor \text{ (samkvæmt þrepunarforsendu)} \\
&= i + \frac{2^n}{2} - 1 \text{ (vegna þess að } 2^n - 1 \text{ er oddatala, því } n > 0) \\
&= i + 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

   Í umferðinni um lykkjuna mun annaðhvort i eða j fá nýtt gildi.

Tilfelli 1, i fær nýtt gildi: Nýja gildið sem i fær er

$$i' = m + 1 = i + 2^{n-1}$$

Eftir þá gildisveitingu er stærð óþekkta svæðisins

$$\begin{aligned} j - i' &= j - (m+1) \\ &= j - (i + 2^{n-1}) \\ &= (j - i) - 2^{n-1} \\ &= 2^n - 1 - 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

sem er það sem þurfti að sanna.

Tilfelli 2, j fær nýtt gildi: Nýja gildið sem j fær er

$$j' = m = i + 2^{n-1} - 1$$

Eftir þá gildisveitingu er stærð óþekkta svæðisins

$$\begin{aligned} j' - i &= i + 2^{n-1} - 1 - i \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

sem er það sem þurfti að sanna.

Setning: Fjöldi umferða í helmingunarleit er n ef leitað er í runu $2^n - 1$ gilda.

Sönnun: Helmingunarleitinni er lokið þegar $i = j$, þ.e. þegar óþekkta svæðið er tómt. Í upphafi er óþekkta svæðið af stærð $2^n - 1$. Við munum sanna með þrepasönnun að stærð óþekkta svæðisins eftir k umferðir, fyrir $k = 0, \ldots, n$, er $2^{n-k} - 1$. Afleiðing þessa er að óþekkta svæðið verður tómt nákvæmlega þegar fjöldi umferða verður n, sem er það sem þarf að sanna.

Þrepasönnun:

Grunnur: Fyrir $n = 0$ er setningin sönn því eftir 0 umferðir, þ.e. áður en nokkur umferð er farin þá er fjöldi óþekktra sæta $j - i = n = 2^n - 1 = 2^{n-0} - 1 = 2^{n-k} - 1$.

Þrepun:

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að búið sé að fara k umferðir, þar sem $0 \leq k < n$, og gerum ráð fyrir að fjöldi óþekktra sæta sé $j - i = 2^{n-k} - 1$.

Þrepunarkref: Þar eð $i \neq j$ munum við fara aðra umferð. Við þurfum að sanna að eftir þá umferð sé fjöldi óþekktra sæta $2^{n-(k+1)} - 1$, en það er einmitt það sem hjálparsetningin að ofan segir.

Hjálparsetning: Ef i og j eru heiltölur, $j \geq i \geq 0$ þá er $\lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor = i + \lfloor\frac{j-i}{2}\rfloor$.

Sönnun: Það eru tvö tilfelli sem þarf að íhuga.

Tilfelli 1, $i + j$ er slétt tala. Þá eru annaðhvort bæði i og j sléttar tölur eða bæði i og j eru oddatölur. Í báðum tilvikum er $j - i$ slétt tala. Þar með fáum við

$$\begin{aligned} \lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor &= \frac{i+j}{2} \\ &= i + \frac{j-i}{2} \\ &= i + \lfloor\frac{j-i}{2}\rfloor \end{aligned}$$

sem er það sem sanna þurfti.

Tilfelli 2, $i + j$ er oddatala. Þá er önnur talnanna i og j slétt tala og hin er oddatala. Í báðum tilvikum er $j - i$ oddatala. Þar með fáum við

$$\begin{aligned} \lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor &= \frac{i+j-1}{2} \\ &= i + \frac{j-i-1}{2} \\ &= i + \lfloor\frac{j-i}{2}\rfloor \end{aligned}$$

sem er það sem sanna þurfti.