Línuleg algebra B

Lausnir fyrir fjórða skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 5)

3. október 2014

Dæmi 1. Vinirnir Anna, Jósafat og Pálína skutust inn í búð að kaupa bollur, súkkulaðistykki og kók. Anna keypti eina bollu, tvö súkkulaðistykki og tvær kækur og greiddi fyrir það 950 krónur. Jósafat keypti fjórar bollur, fjögur súkkulaðistykki og fjórar kækur og greiddi fyrir það 2.400 krónur. Pálína keypti fimm bollur, tvö súkkulaðistykki og tvær kækur og greiddi 2.600 krónur fyrir það. Þegar vinirnir fóru síðar að bera saman bækur sínar um þetta fór Pálínu að gruna að hún hefði verið snuðuð í viðskiptunum.

(a) Gerið grein fyrir að Pálína hafi verið snuðuð, að því gefnu að hin tvö hafi greitt rétt verð.

(b) Um hversu margar krónur var Pálína snuðuð?

Lausn. Táknum verð einnar bollu með x, eins súkkulaðistykkis með y og einnar kókar með z. Setjum upp jöfnur fyrir innkaup Önnu, Jósafats og Pálínu, í þeirri röð sem þau eru talin upp, og fáum jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 950 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 2400 \\ 5x & + & 2y & + & 2z & = & a \end{array}$$

þar sem a táknar upphæðina sem Pálína hefði með réttu átt að borga. Með því að framkvæma línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 - 4l_1$, $L_3 - 5L_1$ og $L_3 \to L_3 - 2L_2$ á hneppinu hér að ofan (í þessari röð) fæst hneppið

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 950 \\ & - & 4y & - & 4z & = & -1400 \\ & & & & 0 & = & a - 1950. \end{array}$$

Af þessu má sjá að hið rétta verð fyrir varninginn sem Pálína keypti er 1950 krónur og hún hefur því verið snuðuð um 650 krónur.

Dæmi 2.

(a) Finnið dæmi um hlutmengi í hnitarúmi, sem er lokað með tilliti til samlagningar en ekki með tilliti til margföldunar með tölu í hnitarúminu.

(b) Finnið dæmi um hlutmengi í hnitarúmi, sem er lokað með tilliti til margföldunar með tölu en ekki með tilliti til samlagningar í hnitarúminu.

(c) Finnið dæmi um hlutmengi í hnitarúmi, sem er hvorki lokað með tilliti til samlagningar né margföldunar með tölu í hnitarúminu.

Lausn. Við eftirlátum lesendum að ganga úr skugga um að eftirfarandi mengi uppfylli umbeðin skilyrði.

(a) Hlutmengið $[0, +\infty[$ í $\mathbb{R}$.

(b) Mengi allra vigra (x, y) úr $\mathbb{R}^2$ sem upfylla skilyrðið $xy = 0$. (Með öðrum orðum sammengi hnitaásanna.)

(c) Hlutmengið $\{1, 2\}$ í $\mathbb{R}$.

Dæmi 3. Við táknum vigurrúm allra samfelldra falla á $\mathbb{R}$ með $C(\mathbb{R})$. (Sjá bls 165 í kennslubók). Hver eftirtalinna falla eru í spanni mengisins $\{\cos(2x), \cos^2 x\}$ í $C(\mathbb{R})$?

(a) $f(x) = 3\sin^2 x$.

(b) $f(x) = \pi - x^3$.

(c) $f(x) = \sin(2x)$.

(d) $f(x) = 5$.

Lausn. (a) Þar sem jafnan $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ gildir fyrir öll x úr $\mathbb{R}$, þá fæst að jafnan

$$3\sin^2 x = 3\cos^2 x - 3\cos(2x)$$

gildir fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Þar með er fallið $\sin^2 x$ í spanni mengisins $\{\cos(2x), \cos^2 x\}$ í $C(\mathbb{R})$.

(b) Látum a og b vera einhverjar ákveðnar rauntölur og skilgreinum fall $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með því að setja $g(x) = a\cos(2x) + b\cos^2 x$. Þá er fallið g takmarkað; nánar til tekið gildir um öll x að

$$|g(x)| \leq |a\cos(2x) + b\cos^2 x| \leq |a\cos(2x)| + |b\cos^2 x| \leq |a| + |b|.$$

Fallið f er hins vegar ótakmarkað vegna þess að $\lim_{x\to+\infty}(\pi - x^3) = -\infty$. Það er því ljóst að f er ekki í spanni mengisins $\{\cos(2x), \cos^2 x\}$.

(c) Gerum ráð fyrir að til séu rauntölur a og b sem fullnægja jöfnunni

$$\sin(2x) = a\cos(2x) + b\cos^2 x$$

fyrir öll x úr $\mathbb{R}$. Ef við tökum $x = 0$, þá fæst jafnan $0 = a + b$, og ef við tökum $x = \pi/2$, þá fæst jafnan $0 = -a$. Af því leiðir að $a = b = 0$. Þar sem $\sin(2x)$ er ekki núll fyrir öll x þá sjáum við að slíkar tölur a og b geta ekki verið til og þar af leiðandi er fallið f ekki í spanni mengisins $\{\cos(2x), \cos^2 x\}$.

(d) Við vitum að um öll x úr $\mathbb{R}$ gildir að $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Af því leiðir auðveldlega að

$$5 = 10\cos^2 x - 5\cos(2x)$$

fyrir öll x úr $\mathbb{R}$ og þar með er fallið f í spanni mengisins $\{\cos(2x), \cos^2 x\}$.

Dæmi 4. Gerið grein fyrir að vörpunin

$$T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sé línuleg og finnið kjarna hennar.

Lausn. Í stað þess að sýna beint að vörpunin T sé línuleg, þá skulum við sýna að allar varpanir af þessari gerð séu línulegar.
Látum $\mathbf{A}$ vera tiltekið fylki af stærðinni $n \times k$ og látum $S : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times k}$ vera vörpunina sem gefin er með $S(\mathbf{X}) := \mathbf{XA}$. Þá fæst út frá vel þekktum reglum um fylkjareikning

$$S(\mathbf{X} + c\mathbf{Y}) = (\mathbf{X} + c\mathbf{Y})\mathbf{A} = \mathbf{XA} + (c\mathbf{Y})\mathbf{A} = \mathbf{XA} + c(\mathbf{YA}) = S(\mathbf{X}) + cS(\mathbf{Y})$$

og af því sést að vörpunin S er línuleg.

Finnum nú kjarna vörpunarinnar T. Rifjum fyrst upp að

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ ; \ T(\mathbf{X}) = \mathbf{O}\}.$$

Nú gildir að $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2a & -a \\ c+d & 2c & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
þá og því aðeins að $a + b = 0$, $2a = 0$, $-a = 0$, $c + d = 0$, $2c = 0$ og $-c = 0$, og ljóst er að þetta jöfnuhneppi hefur ekki aðrar lausnir en $a = b = c = d = 0$, svo að

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$