

# STÆRÐFRÆÐIGREINING I (STÆ104)

## VIKUBLAÐ 10 MEÐ SKILADÆMUM 9

Dags.	Efni	Nótur	Adams Calculus
26.10.15.	7. Rúmmál, massi og massamiðjur	7.2-7.3	7.4, 7.5
28.10.15.	8. Diffurjöfnur	8.1-8.2	7.9, 18.1, 18.2
02.11.15.	8. Diffurjöfnur	8.3-8.5	3.7, 18.4, 18.5
04.11.15.	Hagnýtingar		ítarefni

### Dæmi:

30.

Við ætlum að skoða einfalt líkan fyrir stofnstærð dýrastofna. Látum  $P(t)$  tákna stofnstærðina á tímanum  $t$  og hugsum okkur að upphafstíminn sé  $t = 0$ . Þannig að fastinn  $P_0 = P(0)$  táknar upphafsstofnstærðina.

Gerum ráð fyrir að fastinn  $\beta$  sé fæðingartíðnin og fastinn  $\delta$  sé dánartíðnin. Þá er fjöldi fæðinga á tímanum  $t$  gefinn með  $\beta P(t)$  og fjöldi dauðsfalla  $\delta P(t)$ .

Það þýðir að breytingin á stofninum er gefin með

$$P'(t) = \beta P(t) - \delta P(t).$$

- 1.a. Gerum ráð fyrir að  $\beta$  og  $\delta$  séu jákvæðir fastar og finnið  $P(t)$ .
- 1.b. Gefið  $P_0$  ákveðið fast gildi. Prófið svo að gefa  $\beta$  og  $\delta$  mismunandi gildi þannig að  $\beta > \delta$ ,  $\beta < \delta$  og  $\beta = \delta$  og teiknið upp tilsvareandi lausnir  $P(t)$ .
- 1.c. Hvaða afdrifaríku áhrif hefur það á stofninn hvort  $\beta > \delta$ ,  $\beta < \delta$  eða  $\beta = \delta$ ?
- 2.a. Gerum nú ráð fyrir að dánartíðnin sé áfram föst  $\delta$ , en breytum  $\beta$  þannig að fæðingartíðnin minnki eftir því sem stofninn er stærri, þetta svarar til þess að það sé erfiðara að koma ungum á legg ef stofninn er stór því þá er meiri samkeppni um mat/svæði. Gerum því ráð fyrir að  $\beta = \beta_0 - \beta_1 P(t)$ , þar sem  $\beta_0$  og  $\beta_1$  eru jákvæðar tölur. Skilgreinum  $M = \frac{\beta_0 - \delta}{\beta_1}$ . Sýnið að

$$P(t) = \frac{MP_0}{(M - P_0)e^{-M\beta_1 t} + P_0}$$

lýsi stofnstærðinni. (Ábending: Hér er best að umrita umrita diffurjöfnuna þannig að hægt sé að skipta  $\frac{\beta_0 - \delta}{\beta_1}$  út fyrir  $M$  og leysa diffurjöfnuna svo með stofnbrotaliðun).

- 2.b. Hvað gerist þegar tíminn líður, hvernig hagar stofnstærðin sér?
- 2.c. Festið  $\delta$ ,  $\beta_0$  og  $\beta_1$  sem jákvæða fasta. Teiknið upp lausnina  $P(t)$  fyrir nokkur (jákvæð) gildi á  $P_0$ . Ég mæli með því að þið veljið  $P_0$  bæði stærra og minna en  $(\beta_0 - \delta)/\beta_1$ . Einnig er skynsamlegt að hafa  $\beta_0 > \delta$  svo að það fæðist að minnsta kosti jafnmargir og deyja.

Ábending: Ég mæli með því að þið notið Octave, Matlab, GeoGebra, Sage, Python eða WolframAlpha til þess að teikna myndirnar fyrir ykkur.

**Dæmi fyrir dæmatíma vikuna 02.11 – 06.11:**

- *Kafla* 7.4: 4, 5, 10.
- *Kafla* 7.5: 11, 12, 16.
- *Kafla* 7.9: 1, 7, 9, 11, 17, 28, 31.
- *Kafla* 3.7: 1, 5, 13, 24.
- *Kafla* 17.5: 1, 12.
- *Kafla* 17.6: 1, 5, 17.

**Skiladæmi:**

Skilið dæmi **30** í hólf dæmatímakennarans ykkar fyrir klukkan 16:00, föstudaginn 6. nóvember.

Benedikt Steinar Magnússon, 30. október 2015