Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 1

Yfirlit

- Yrðingarökfræði
  - Yrðingar, sanngildi, rökvirkjar, sanntöflur, rökjöfnur, sannanir, rökstytting
- Umsagnarökfræði
  - Umsagnir, magnarar, rökjöfnur, faldaðir magnarar, sannanir, rökstytting

Yrðing: Fullyrðing sem er áreiðanlega annaðhvort sönn eða ósönn

- Dæmi (annaðhvort satt eða ósatt):
  - Tunglið er úr grænum osti
  - 2+2=4
  - 1+2=5
- Gagndæmi (hvorki satt né ósatt):
  - Lokaðu hurðinni!
  - Hvað er klukkan?
- Vafasamt (kannski órætt):
  - x+1=2
- Vafasamt (kannski bæði satt og ósatt):
  - Spuni þessarar rafeindar er upp

Yrðingasegðir

- Yrðingabreytur: p,q,r,s,…
- Yrðingin sem er ávallt sönn er táknuð með T eða 1 og yrðingin sem er ávallt ósönn er táknuð með F eða 0
- Samsettar yrðingar eru settar saman úr smærri yrðingum og rökvirkjum:
  - Neitun (negation) $\neg$
  - Og-un (conjunction) $\wedge$
  - Eð-un (disjunction) $\vee$
  - Afleiðing (implication) $\rightarrow$
  - Jafngildi (biconditional) $\leftrightarrow$

Neitun – ekki (negation)

- Sanntafla neitunar:

p	$\neg p$
0	1
1	0

- Dæmi: Ef p stendur fyrir „tunglið er úr grænum osti“ þá stendur $\neg p$ fyrir „það er ekki svo að tunglið sé úr grænum osti“, eða „tunglið er ekki úr grænum osti“.

Og-un, og (conjunction)

- Sanntafla og

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Eð-un, eða (disjunction)

- Sanntafla eða

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tvíræðni „eða“ í mæltu og rituðu máli

- Ef skrifað er á matseðil „með þessum rétti fylgir súpa eða salat“, hvað þýðir það?
- Hvað ef skrifað er „með þessum rétti fylgir súpa og salat“?
- Sumir myndu skrifa „með þessum rétti fylgir súpa og salat en ekki bæði“, en það er ambögulegt og flestum myndi finnast „en ekki bæði“ óþarfi (nema kannski rökfræðingum)
- Sumir myndu skrifa hina merkinguna með „með þessum rétti fylgir súpa og/eða salat“ en það er verulega ambögulegt
- Í stærðfræði og rökfræði er merking „eða“ skýr og er samkvæmt sanntöflunni að framan
- Hin tegundin af „eða“ er kölluð „aðgreind eðun“ og hefur aðra sanntöflu en venjulegt „eða“
- Aðgreint „eða“ kallast „exclusive or“ á ensku, oft er sagt „xor“

Aðgreind eðun, xor

- Sanntafla

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Afleiðing, af því leiðir, ef … þá …

- Sanntafla

p	q	$p \rightarrow q$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

- Takið eftir að $p \rightarrow q$ er þá og því aðeins ósatt að p sé satt en q ósatt
- Sér í lagi er $p \rightarrow q$ satt alltaf þegar p er ósatt

$p \rightarrow q$ í mæltu máli og ritmáli

- ef p þá q
- p leiðir til q
- p leiðir af sér q
- **q ef p**
- **q hvenær sem p**
- p aðeins ef q
- **q er nauðsynlegt skilyrði fyrir p**
- p er nægjanlegt skilyrði fyrir q
- **Nægjanlegt skilyrði fyrir q er p**
- Nauðsynlegt skilyrði fyrir p er q

Ef … þá … og öfugt

- Á ensku: „and conversely“ eða jafnvel „and inversely“
- Tengd ensk hugtök: Converse, Contrapositive, Inverse
- Ef ég mæti þá er ég heill heilsu
- Og öfugt:
  - Ef ég er heill heilsu þá mæti ég (converse)
  - Ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu (inverse)
- Contrapositive: Ef ég er ekki heill heilsu þá mæti ég ekki
  - jafngilt upphaflegu yrðingunni

Ef … þá … og öfugt (framhald)

- Inverse: Ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu
  - converse er contrapositive af inverse
  - þau eru jafngild hvoru öðru en ekki jafngild upphaflegu yrðingunni
  - Íhugið þann sem mætir ekki (aldrei) en er (stundum) heill heilsu.
    - Uppfyllir hann skilyrðið „ef ég mæti þá er ég heill heilsu“? **JÁ**!
    - En hvað með skilyrðið „ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu“? **Nei**.
- $p \to q$
  - Converse: $q \to p$
  - Inverse: $\neg p \to \neg q$
  - Contrapositive: $\neg q \to \neg p$

Jafngildi (biconditional)

- $\boldsymbol{p}$ er nauðsynlegt og nægjanlegt fyrir $\boldsymbol{q}$
- Ef $\boldsymbol{p}$ þá $\boldsymbol{q}$ og öfugt
- $\boldsymbol{p}$ eff $\boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{p}$ þá og því aðeins að $\boldsymbol{q}$
- „ég mæti þá og því aðeins að ég sé heill heilsu“
- „nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að ég mæti er að ég sé heill heilsu“
- $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$

Jafngildi - sanntafla

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \land (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Önnur algeng leið til að skilgreina tvíundarvirkja, sbr. margföldunartöflur

$p \leftrightarrow q$		q	
		0	1
p	0	1	0
	1	0	1

Sanntöflur samsettra yrðinga

- Ein súla fyrir hverja breytu
- Ein súla fyrir hverja aðgerð
- Niðurstöðusúlan er súla síðustu aðgerðar

Jafngildar yrðingar

- Hvernig komumst við að því hvort tvær yrðingar, p og q eru jafngildar, þ.e. $p \equiv q$? (Athugið að p og q geta hér verið samsettar með rökvirkjum svo sem $\rightarrow$ og $\wedge$ og $\neg$ o.s.frv.)

1. Búum til sanntöflur fyrir báðar yrðingarnar og athugum hvort útkomusúlan er eins í báðum
2. Notum þekkt jafngildi til að breyta annarri yrðingunni í hina
3. Athugum hvort samsetta yrðingin $p \leftrightarrow q$ er sísanna (tautology), til dæmis með aðferðum 1 og 2
4. Athugum, hvort í sínu lagi, hvort $p \rightarrow q$ og $q \rightarrow p$ (þetta er algengasta aðferðin og sú sem er minnst líkleg til að vera vandræðaleg)
5. …

Notkun sanntaflna til að sanna eða afsanna jafngildi

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Spurning: Hve margar raðir eru í sanntöflu með n breytum?

- Í hvert sinn sem breytu er bætt við tvöfaldast fjöldi raða
- Ef engin breyta er til staðar er aðeins ein röð, til dæmis yrðingarnar $1 < 2$ og $2 < 1$:

$1 < 2$
1

$2 < 1$
0

Forgangur aðgerða

Aðgerð (virki)	Forgangur
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Framhald - Yfirlit

- Uppfyllanlegar yrðingar, sísönnur og mótsagnir
- Rökfræðilegt jafngildi
  - Mikilvæg jafngildi
  - Sönnun jafngilda
- Staðalsnið (bæði oft notuð í rökrásum)
  - Eð-að staðalsnið
  - Og-að staðalsnið (notað í rökstyttingu)

Uppfyllanlegar kröfur, samræmanleiki (consistency, satisfiability)

- Yrðing sem hefur þann eiginleika að til eru gildi fyrir rökbreyturnar þannig að yrðingin sé sönn kallast uppfyllanleg, samræmanleg (consistent, satisfiable)
- Einstakur möguleiki á að gefa rökbreytunum gildi er oft kallaður **túlkun**
- Samræmanleg (uppfyllanleg) yrðing er því yrðing sem hefur túlkun sem gerir hana sanna
- Hver túlkun samsvarar einni röð í sanntöflunni
- Engar mótsagnir eru samræmanlegar, en allar aðrar yrðingar eru það
- Allar sísönnur eru því samræmanlegar

Mikilvæg jafngildi

Regla	Íslenskt nafn reglu	Enskt nafn reglu
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Víxlregla	Commutative
$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$	Tengiregla	Associative
$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Dreifiregla	Distributive
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Samsemdarregla	Idempotent
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \vee p \wedge q \equiv p$	Gleypiregla	Absorbtion
$p \vee \neg p \equiv 1$ $p \wedge \neg p \equiv 0$	Neitunarregla	Complementation
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgans regla	De Morgan
$\neg\neg p \equiv p$	Tvöföld neitun	Involution
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$		

Röksemdafærslur

- Algeng sönnunarverkefni eru
  - Sanna að $p \equiv q$ eða (næstum sama merking) $p \leftrightarrow q$
    - $p \equiv q$ þýðir „yrðingin p er jafngild yrðingunni q“
    - $p \leftrightarrow q$ þýðir „yrðingin $p \leftrightarrow q$ er sönn“
    - Ef önnur þessara fullyrðinga er sönn þá er hin sönn
    - $\equiv$ er ekki yrðinaaðgerð heldur svokallað metatákn
  - Sanna að $p \vdash q$ eða (næstum sama merking) $p \rightarrow q$
    - $p \vdash q$ þýðir „yrðingin p leiðir til yrðingarinnar q“
    - $p \rightarrow q$ þýðir „yrðingin $p \rightarrow q$ er sönn“
    - Ef önnur þessara fullyrðinga er sönn þá er hin sönn
    - $\vdash$ er ekki yrðinaaðgerð heldur svokallað metatákn

Staðalsnið – normal forms

- Fyrir sérhverja yrðingu er hægt að finna jafngilda yrðingu á eð-uðu staðalsniði (disjunctive normal form) og jafngilda yrðingu á og-uðu staðalsniði (conjunctive normal form)
- Eð-að staðalsnið

$$(a_{11} \wedge a_{12} \wedge \cdots \wedge a_{1r_1}) \vee (a_{21} \wedge a_{22} \wedge \cdots \wedge a_{2r_2}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \wedge a_{n2} \wedge \cdots \wedge a_{nr_n})$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{r_n} a_{ij}$$

- Og-að staðalsnið

$$(b_{11} \vee b_{12} \vee \cdots \vee b_{1s_1}) \wedge (b_{21} \vee b_{22} \vee \cdots \vee b_{2s_2}) \wedge \cdots \wedge (b_{m1} \vee b_{m2} \vee \cdots \vee b_{ms_m})$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{s_m} b_{ij}$$

- Þar sem sérhvert a_{ij} og b_{ij} er á sniðinu p eða $\neg p$ fyrir einhverja yrðingarbreytu p

Staðalsnið - dæmi

- Yrðingin

$$p \leftrightarrow q$$

hefur eð-aða staðalsniðið

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Hún hefur og-aða staðalsniðið

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

Rithåttur - sértilfelli

- Athugið að

$$\bigvee_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\bigwedge_{i=1}^{0} c_i = 1$$

- Svipað eins og

$$\sum_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\prod_{i=1}^{0} c_i = 1$$

Staðalsnið - sértilfelli

- Og-að staðalsnið fyrir 0 og 1:

$$0 = \bigwedge_{i=1}^{1} 0 = \bigwedge_{i=1}^{1} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigwedge_{i=1}^{0} 0 = \bigwedge_{i=1}^{0} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

- Eð-að staðalsnið fyrir 0 og 1:

$$0 = \bigvee_{i=1}^{0} 1 = \bigvee_{i=1}^{0} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigvee_{i=1}^{1} 1 = \bigvee_{i=1}^{1} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

Rökstytting

- Notuð til að sanna $u \vdash v$ fyrir yrðingar eða fyrstu gráðu röksegðir u og v
- Breytum fyrst segðinni $u \wedge \neg v$ (neitunin af $u \to v$) á og-að staðalsnið
- Eftir það er aðeins ein röksemdafærsluregla notuð:
  - $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \to a \vee c$
  - a og c geta verið eð-un núll eða fleiri liða
  - Ef bæði a og c eru tóm þá er niðurstaða afleiðingarinnar 0 (eða F, ef það hljómar betur)
- Höldum áfram að framleiða afleiðingar þar til afleiðingin 0 fæst eða ekki er hægt að framleiða fleiri afleiðingar
- Afleiðingarnar eru allar klausur í og-aða staðalsniðinu af $u \wedge \neg v$
  - Athugið að klausurnar sem bætt er við í rökstyttingu breyta ekki merkingu heildarsegðarinnar, en gefa okkur vonandi innsýn í merkinguna, sérstaklega þegar við komumst að því að ein afleiðingin er 0

Umsagnareikningur, umsagnarökfræði, fyrstu gráðu rökfræði

- Viðbætur:
  - Breytur: x,y,z
  - Umsagnir: P(x), Q(x), M(x)
  - Magnarar
- Umsagnir eru almennari útgáfa af yrðingabreytum
  - Innihalda umsagnir og breytur
  - Í stað breytu má setja stak úr viðkomandi ***óðali***
  - Eða breytan getur verið bundin magnara

Umsagnir

- Fyrir gefið mengi (kallast óðal) getum við skilgreint umsagnir
- Til dæmis fyrir óðal allra lífvera getum við skilgreint
  - M(x) = x er maður
  - D(x) = x er dauðlegur
- Fyrir óðal allra rauntalna getum við skilgreint
  - N(x) = x er náttúrleg tala
  - Z(x) = x er heiltala
  - Q(x) = x er ræð tala
  - P(x) = x>0
- Óðalið er oft táknað með tákninu U

Magnarar – tilvistarmagnari ∃

- Til er dauðleg lífvera
  - $\exists x: D(x)$
  - $\exists x\ D(x)$
  - $\exists y: D(y)$
- Til er jákvæð tala
  - $\exists x: P(x)$
- Til er jákvæð heiltala
  - $\exists x: P(x) \wedge N(x)$

Magnarar – almagnari ∀

- Allar lífverur eru dauðlegar
  - $\forall x: D(x)$
- Allar tölur eru jákvæðar
  - $\forall x: P(x)$
  - $\forall y: P(y)$

Forgangur magnara

- Magnarar hafa hærri forgang en rökaðgerðir
  - $\forall x: P(x) \land Q(x)$ hefur sömu merkingu og $(\forall x: P(x)) \land Q(x)$
    - Reyndar hefur hvorugt merkingu nema sem hluti stærri segðar vegna þess að x í $\mathrm{Q}(x)$ er ***óbundið*** og hefur ekkert gildi – hvorugt er lögleg umsagnasegð, ef við erum smámunasöm
  - $\forall x: \left(P(x) \land Q(x)\right)$ hefur aðra merkingu og er lögleg umsagnasegð

Löglegar og ólöglegar (með og án merkingar)

- Löglegar umsagnasegðir
  - $P(0)$
  - $\forall x: P(x)$
  - $\exists x: Q(x)$
  - $\forall x: \forall y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $\forall x, y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $R(1,2,3)$
- Ólöglegar umsagnasegðir
  - $P(x)$
  - $R(1,2, z)$

De Morgans reglur fyrir magnara

- Neitun tilvistar breytist í almögnun

$$\neg \exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

- Neitun alvistar breytist í tilvist

$$\neg \forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

Dæmi um sannanir – dæmi frá Lewis Carroll, höfundi Lísu í Undralandi

- Gefið er:
  - „Öll ljón eru grimm“
  - „Sum ljón drekka ekki kaffi“
- Viljum sanna:
  - „Sumar grimmar skepnur drekka ekki kaffi“
- Túlkun í umsagnareikningi:
  - Óðalið er allar skepnur eða allar lífverur
  - Táknum „x er ljón“ með $L(x)$
  - Táknum „x er grimm skepna“ með $G(x)$
  - Táknum „x drekkur kaffi“ með $K(x)$

Framhald sönnunar

- Forsendurnar eru þá
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \wedge \neg K(x))$
- Viljum sanna
  - $\exists x: (G(x) \wedge \neg K(x))$
- Notum rökstyttingu, setjum fyrst forsendur á Skolemiserað og-að staðalsnið
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$ verður $\forall x: (\neg L(x) \vee G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \wedge \neg K(x))$ verður $L(c) \wedge \neg K(c)$ þar sem c er skolem-fasti sem stendur fyrir eitthvert ljón sem ekki drekkur kaffi

Framhald sönnunar

- Neitum síðan afleiðingunni sem við viljum sanna, því við ætlum að nota óbeina sönnun, einföldum og setjum á og-að staðalsnið
  - $\neg\exists x: (G(x) \land \neg K(x))$
    - Notum De Morgans fyrir magnara:
  - $\forall x: \neg(G(x) \land \neg K(x))$
    - De Morgans fyrir neitun og-unar
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor \neg\neg K(x))$
    - Neitun neitunar styttist út
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor K(x))$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6
  - k_6: 0

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6
  - k_7: 0 – Sem sagt: „Sumar grimmar skepnur drekka ekki kaffi“

Annað dæmi í svipuðum stíl

- Gefið er
  - „Allar skepnur sem drekka svaladrykki eru friðsamar“
  - „Svali er tegund af svaladrykk“
  - „Fyrir allar tegundir svaladrykkja eru til ljón sem drekka þann drykk“
- Viljum sanna
  - „Sum ljón eru friðsöm“
- Búum til líkan
  - $F(x)$ táknar „x er friðsöm skepna“
  - $D(x, y)$ táknar „x drekkur svaladrykk af tegund y“
  - $L(x)$ táknar „x er ljón“
  - $S(y)$ táknar „y er tegund svaladrykks“
- Óðalið getur til dæmis verið skepnur og vörumerki

Framhald

- Þá fáum við forsendur sönnunar
  - „Allar skepnur sem drekka svaladrykki eru friðsamar“
    - $\forall x, y: (S(y) \land D(x,y) \rightarrow F(x))$
  - „Svali er tegund af svaladrykk“
    - $S(Svali)$
  - „Fyrir allar tegundir svaladrykkja eru til ljón sem drekka þann drykk“
    - $\forall y: \left(S(y) \rightarrow \exists x: \left(L(x) \land D(x,y)\right)\right)$
- Bætum við neituninni af afleiðingunni
  - „Öll ljón eru ekki friðsöm“
    - $\forall x: L(x) \rightarrow \neg F(x)$

Framhald

- Setjum á Skolemiserað og-að staðalsnið, með almagnara $\forall x, y$:
  - $S(y) \land D(x,y) \to F(x)$ verður (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \lor q$)
    - $\neg(S(y) \land D(x,y)) \lor F(x))$ og síðan (skv. De Morgan)
    - k_1: $\neg S(y) \lor \neg D(x,y) \lor F(x))$
    - k_2: $S(Svali)$
      - k_2 er þegar komið á rétt snið
- $S(y) \to \exists x: \left(L(x) \land D(x,y)\right)$ verður (með skolemiseringu, þar sem $j(y)$ er ljón sem drekkur y)
  - $S(y) \to \left(L(j(y)) \land D(j(y),y)\right)$ og síðan (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \lor q$)
  - $\neg S(y) \lor \left(L(j(y)) \land D(j(y),y)\right)$ og síðan (skv. dreifireglu)
  - $\left(\neg S(y) \lor L(j(y))\right) \land \left(\neg S(y) \lor D(j(y),y)\right)$ sem gefur tvær klausur
  - k_3: $\neg S(y) \lor L\left(j(y)\right)$
  - k_4: $\neg S(y) \lor D(j(y),y)$
- Neitunin af afleiðingunni, þ.e.
  $$L(x) \to \neg F(x)$$
  verður (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \lor q$) ein klausa
  - k_5: $\neg L(x) \lor \neg F(x)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x,Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$)

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$

k_2

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F(j(Svali))$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

    - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
    - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
    - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
    - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum k_2
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
    - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum k_2
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}
- 0

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D\big(j(y),y\big)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera k_2 $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}
- k_{11}: 0
  - Sum ljón eru því friðsöm