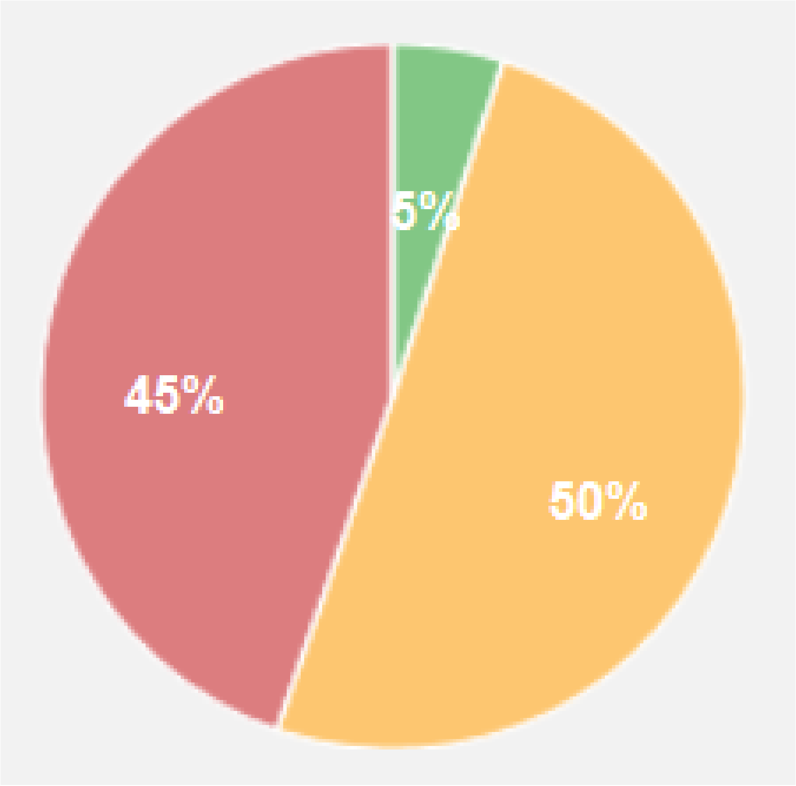
Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 3

Skýrsla vefkerfis



Táknun falla

- Skilgreina má föll á ýmsa vegu
  - Upptalning fallsgilda þannig að sérhvert stak formengis hafi skilgreint fallsgildi
  - Reiknanleg segð
    - $f(x) = x + 1$
  - Tölvuforrit
    - T.d. Java forrit sem, fyrir gefna heiltölu n reiknar n-tu Fibonacci töluna (sjá t.d. kafla 5)

Spurningar

Ímynd (fallsgildi) d?

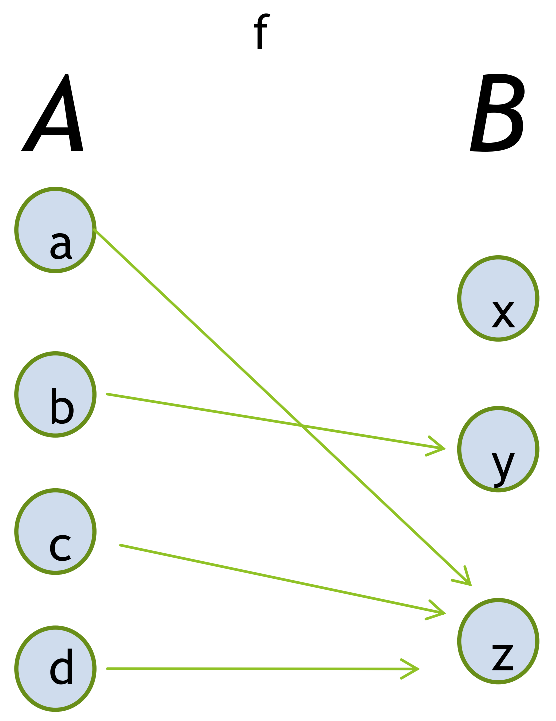
Formengi f?

Bakmengi f?

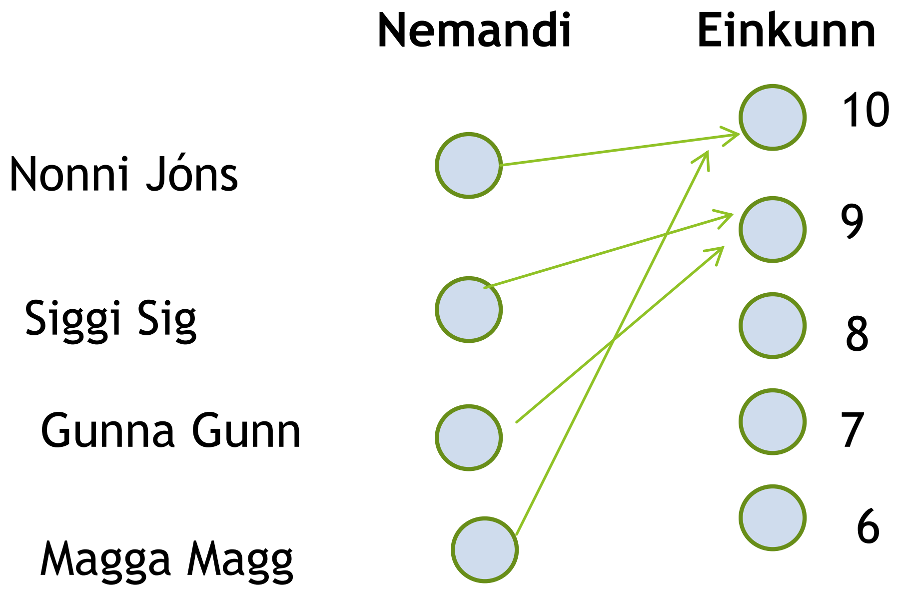
Formynd y?

f(A) = ?

Formynd(ir) z er(u)?



Formengi, bakmengi, varpmengi, ímynd (fallsgildi) Möggu Magg, formynd 9



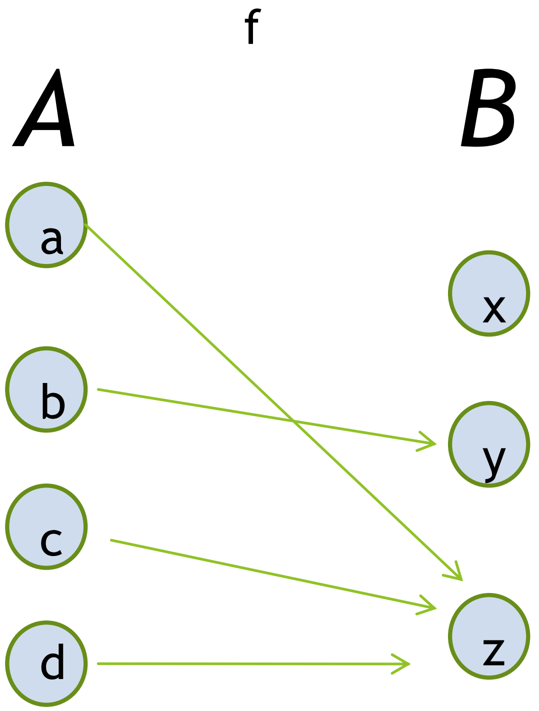
Föll og mengi

- Ef $f: A \rightarrow B$ er fall og $S \subseteq B$ þá skilgreinum við

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

$f(\{a, b, c\})$ er?

$f(\{c, d\})$ er?



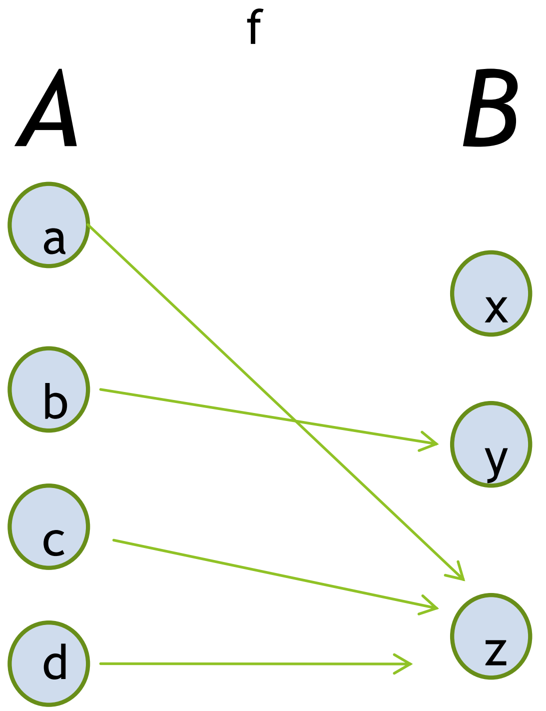
Föll og mengi

- Ef $f: A \to B$ er fall og $S \subseteq B$ þá skilgreinum við

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

$f(\{a, b, c\})$ er? $\{y, z\}$

$f(\{c, d\})$ er?



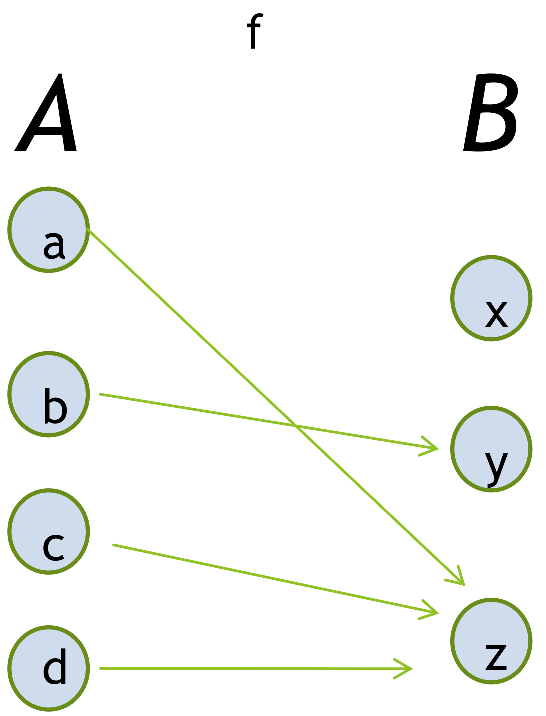
Föll og mengi

- Ef $f: A \to B$ er fall og $S \subseteq A$ þá skilgreinum við

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

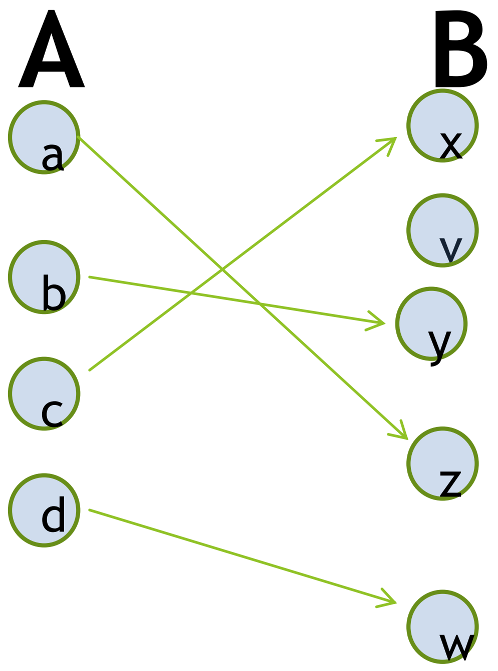
$f(\{a, b, c\})$ er? $\{y, z\}$

$f(\{c, d\})$ er? $\{z\}$



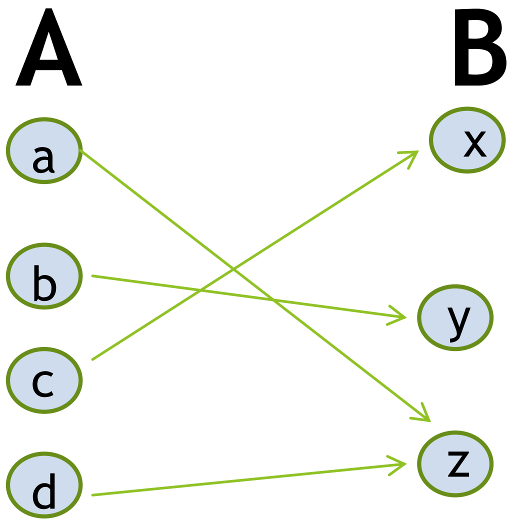
Eintæk föll (injective, one-to-one)

- Fall er sagt vera eintækt ef fyrir öll a_1 og a_2 í formenginu gildir að ef $f(a_1) = f(a_2)$ þá er $a_1 = a_2$.
- Sem sagt: Hver ímynd hefur í mesta lagi eina formynd.
- Dæmi: Hver einkunn hefur í mesta lagi einn nemanda.



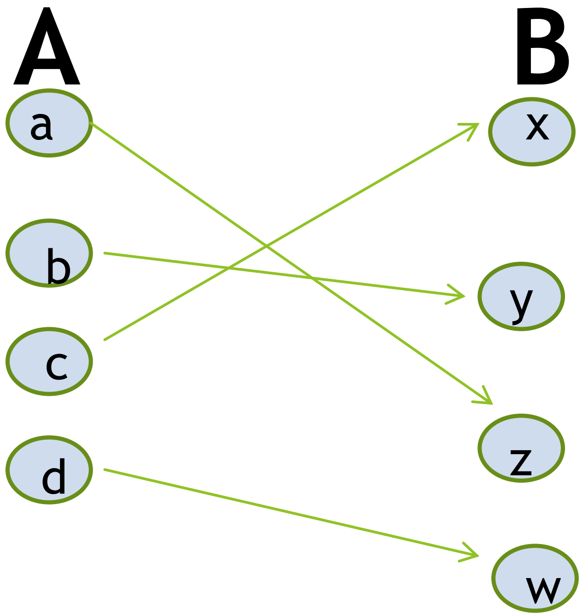
Átæk föll (surjective, onto)

- Fall er sagt vera átækt ef fyrir öll b í bakmenginu gildir að til er a í formenginu þannig að $\mathrm{f}(a) = b$.
- Sem sagt: Sérhvert stak í bakmenginu er ímynd a.m.k. eins staks í formenginu.
- Dæmi: Hver einkunn hefur að minnsta kosti einn nemanda.



Gagntæk föll (bijective, one-to-one and onto)

- Fall er sagt vera gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.
- Sem sagt: Sérhvert stak í bakmenginu er ímynd nákvæmlega eins staks í formenginu.
- Dæmi: Hver einkunn hefur að nákvæmlega einn nemanda.

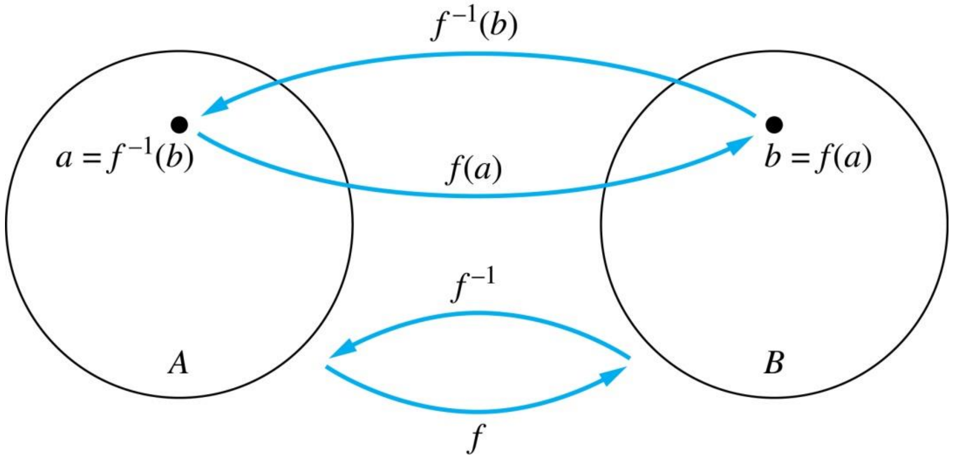


Hvernig sýnum við að fall sé eintækt eða átækt?

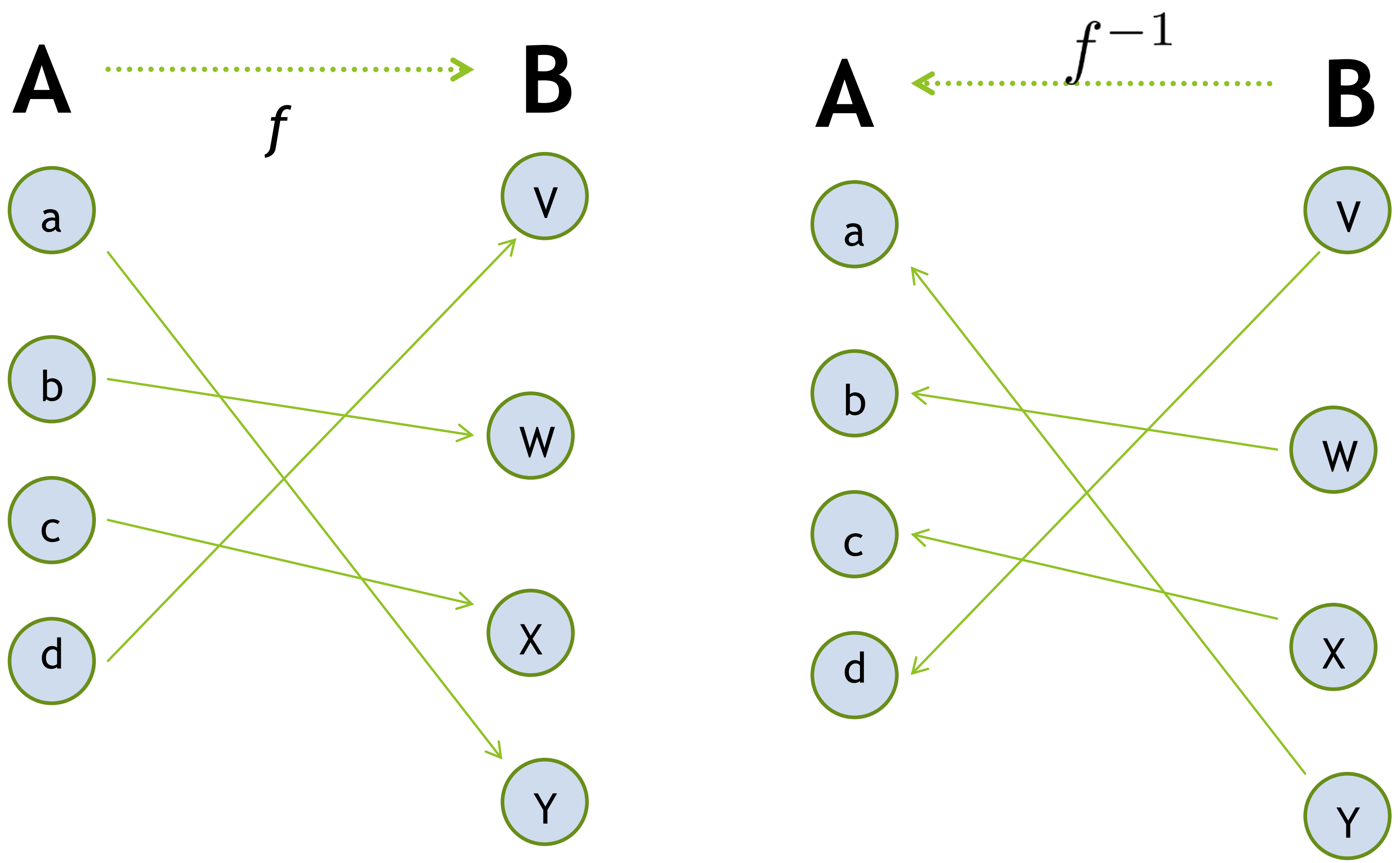
- Gerum ráð fyrir (G.r.f.) að $f: A \rightarrow B$ sé fall.
- Til að sýna að f sé eintækt þurfum við að sanna að ef $f(a_1) = f(a_2)$ þá er $a_1 = a_2$
- Til að sýna að f sé ekki eintækt þurfum við að finna tvö mismunandi gildi a_1 og a_2 í A þannig að $f(a_1) = f(a_2)$
- Til að sýna að f sé átækt íhugum við almennt gildi $b \in B$ og sýnum að til sé $a \in A$ þannig að $f(a) = b$
- Til að sýna að f sé ekki átækt finnum við gildi $b \in B$ þannig að fyrir öll $a \in A$ gildi að $f(a) \neq b$

Andhverfur falla

- Skilgreining: Látum $f: A \to B$ vera gagntækt fall. Þá er andhverfa f, táknað með f^{-1}, fall $f^{-1}: B \to A$ sem skilgreint er með
$$f^{-1}(y) = x \text{ þá og því aðeins að } f(x) = y$$
- Þessi skilgreining virkar aðeins ef f er gagntækt fall



Andhverfur falla



Dæmi

- Skilgreinum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með $f(x) = x^2$
- Er f andhverfanlegt (gagntækt) og ef svo, hver er andhverfan?
- Svar: ?

Dæmi

- Skilgreinum $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ með $f(x) = x^2$
- Er f andhverfanlegt (gagntækt) og ef svo, hver er andhverfan?
- Svar: f er ekki eintækt því $f(1) = 1 = f(-1)$. f er ekki átækt því ekki er til x þannig að $f(x) = -1$. f er því alls ekki gagntækt.

Dæmi

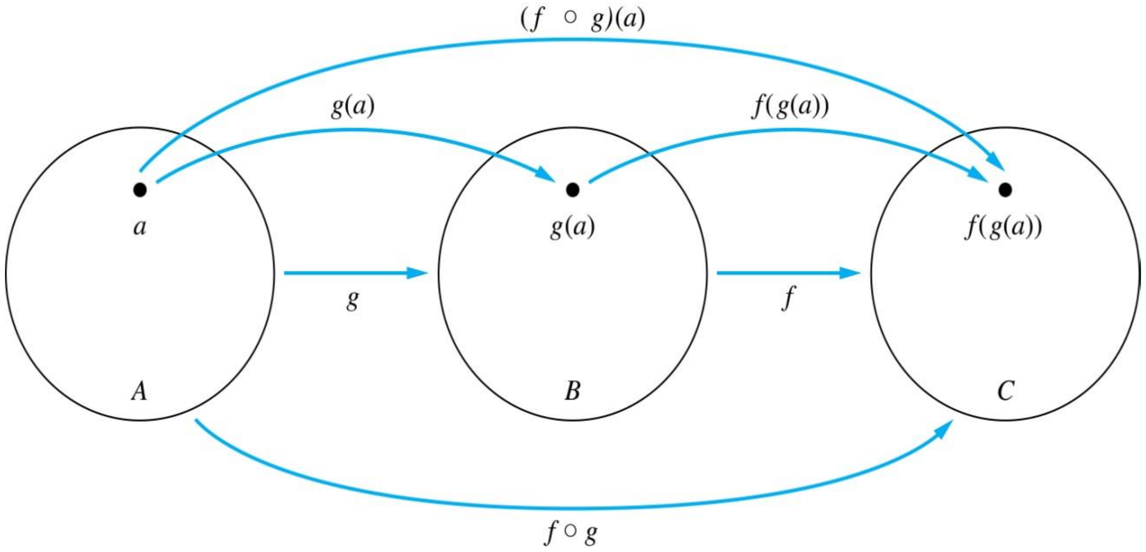
- Skilgreinum $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ með $f(x) = x^2$
- Er f andhverfanlegt (gagntækt) og ef svo, hver er andhverfan?
- Svar: ?

Dæmi

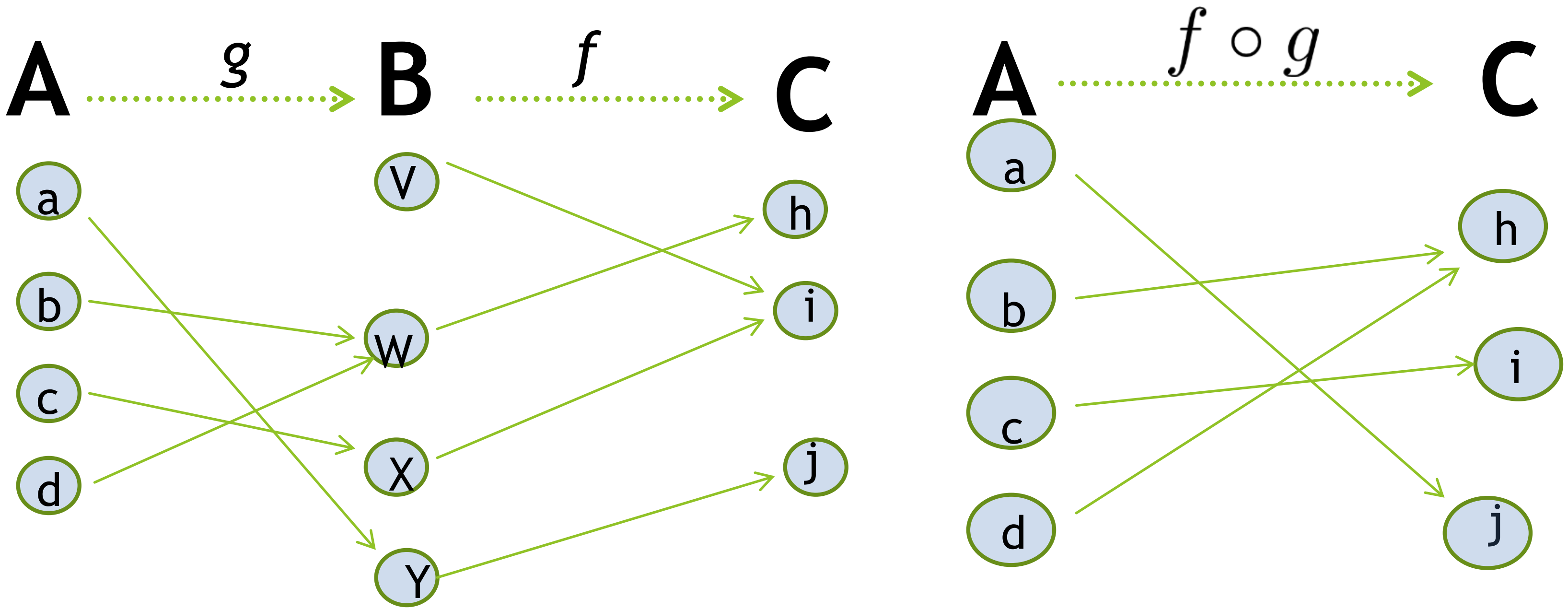
- Skilgreinum $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ með $f(x) = x^2$
- Er f andhverfanlegt (gagntækt) og ef svo, hver er andhverfan?
- Svar: Já, f er gagntækt og $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Samsett föll

- Skilgreining: Látum $f: B \to C$ og $g: A \to B$, þá er samsetta fallið $f \circ g: A \to C$ skilgreint með $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$



Samsett föll



Dæmi

- Ef $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 1$ þá er

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = ?$$

og

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = ?$$

Dæmi

- Ef $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 1$ þá er

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = (2x+1)^2$$

og

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = ?$$

Dæmi

- Ef $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x + 1$ þá er

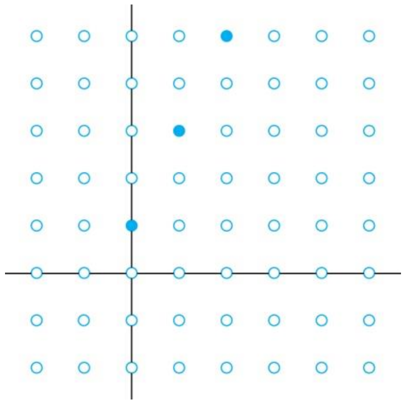
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = (2x+1)^2$$

og

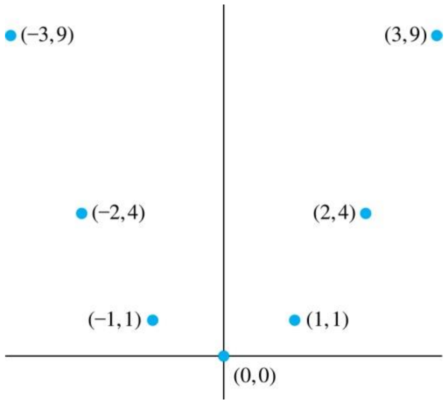
$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = 2x^2 + 1$$

Gröf falla

- Látum $f: A \to B$ vera fall. *Graf* fallsins er þá mengið $\{(a, b) \mid a \in A, f(a) = b\}$, þ.e. $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.



Grafið fyrir $f(n) = 2n + 1$,
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

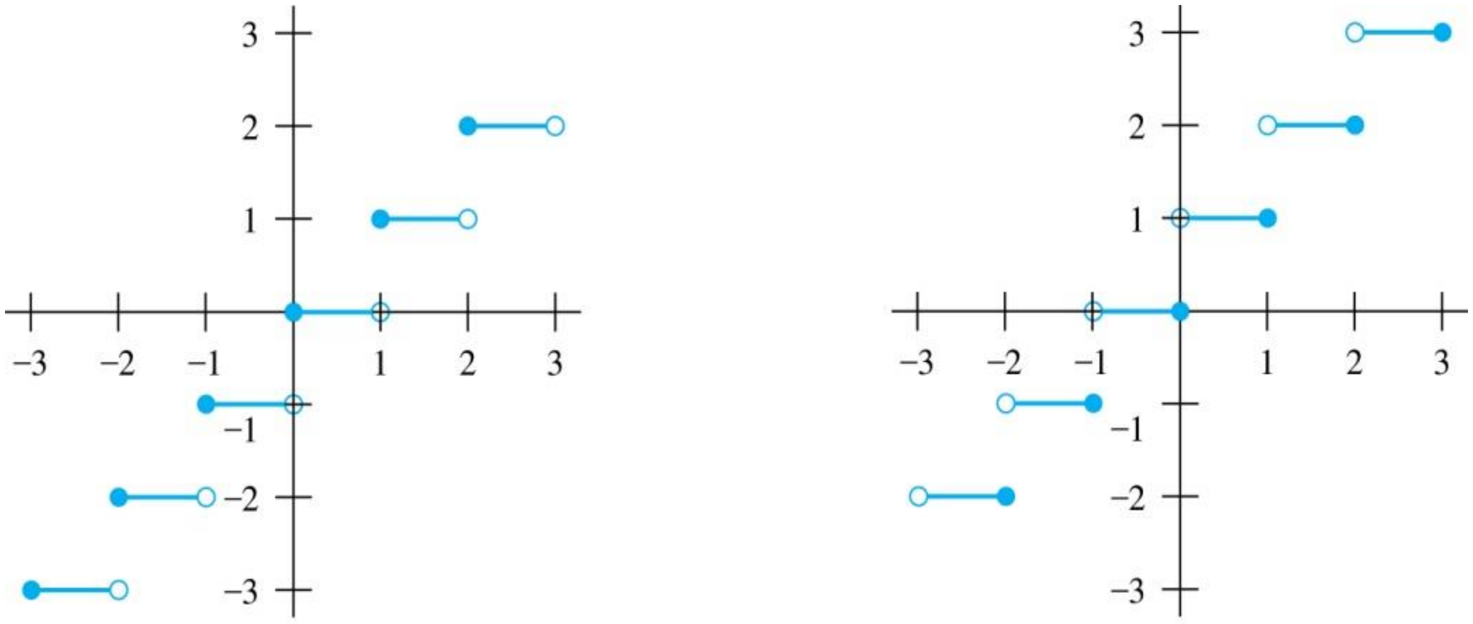


Grafið fyrir $f(x) = x^2$,
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Nokkur mikilvæg föll

- Fallið *floor*, táknað
$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$
  er stærsta heiltala minni en eða jöfn x
- Fallið *ceiling*, táknað
$$f(x) = \lceil x \rceil$$
  er minnsta heiltala stærri en eða jöfn x
- Dæmi
  - $\lfloor 3.5 \rfloor = 3,\ \lceil 3.5 \rceil = 4$
  - $\lfloor -1.5 \rfloor = -2,\ \lceil -1.5 \rceil = -1$

Gröfin fyrir *floor* og *ceiling*



(a) $y = [x]$

(b) $y = [x]$

Gagnlegt um *floor* og *ceiling*

x er rauntala, n er heiltala
(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ þá og því aðeins að $n \leq x < n + 1$ (1b) $\lceil x \rceil = n$ þá og því aðeins að $n - 1 < x \leq n$ (1c) $\lfloor x \rfloor = n$ þá og því aðeins að $x - 1 < n \leq x$ (1d) $\lceil x \rceil = n$ þá og því aðeins að $x \leq n < x + 1$
(2) $\mathrm{x} - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ (3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Dæmi um sönnun eiginleika skyldra falla

- Dæmi: Viljum sanna að ef x er rauntala þá er
$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor$$
- Sönnun: Gerum, án takmarkana, ráð fyrir að $x = n + \epsilon$, þar sem n er heiltala og $0 \leq \epsilon < 1$.
  - Tilfelli 1: $0 \leq \epsilon < ½$
    - $2x = 2n + 2\epsilon$ og $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ þar eð $0 \leq \epsilon < 1$. Einnig er $\lfloor x + ½ \rfloor = n$ þar eð $\mathrm{x} + ½ = n + (½ + \epsilon)$ og $0 \leq ½ + \epsilon < 1$. Þarmeð er $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ og einnig er $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor = n + n = 2n$.
  - Tilfelli 2: $½ \leq \epsilon < 1$
    - $2x = 2n + 2\epsilon = (2n + 1) + (2\epsilon - 1)$ og $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ þar eð $0 \leq 2\epsilon - 1 < 1$. Einnig er $\lfloor x + ½ \rfloor = \lfloor n + (½ + \epsilon) \rfloor = \lfloor n + 1 + (\epsilon - ½) \rfloor = n + 1$ þar eð $0 \leq \epsilon - ½ < 1$. Þar með er $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ og einnig er $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + ½ \rfloor = n + (n + 1) = 2n + 1$.

Hrópmerkt

- Skilgreining: Fallið $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$, táknað með $f(n) = n!$ er margfeldi fyrstu n jákvæðu heiltalnanna, þar sem n er ekki-neikvæð heiltala.
  - $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n,\ f(0) = 1$

    Eða
  - $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$
- Dæmi:
  - $f(0) = 0! = 1$
  - $f(2) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$
  - $f(6) = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
  - $f(30) = 815915283247897734345611269596115894272000000000$

Formúla Stirlings:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Þar sem $f(n) \sim g(n)$ þýðir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Hlutskilgreind föll

- Skilgreining: Hlutskilgreint fall $f\colon A \to B$ er hlutmengi í $A \times B$ sem uppfyllir það skilyrði að fyrir sérhvert stak $a \in A$ er í mesta lagi til eitt par $(a, b) \in f$. Ef slíkt par er til þá telst f vera skilgreint fyrir a og við skrifum $f(a) = b$. Annars segjum við að f sé óskilgreint fyrir a.
- Dæmi: Fallið $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ þar sem $f(n) = \sqrt{n}$, fyrir $n \geq 0$, en óskilgreint annars.
- Hlutskilgreind föll eru líka mikilvæg þegar við íhugum forrit sem kannski skila gildi en kannski ekki.
- Föll sem eru skilgreind á öll gildi í sínu formengi eru kölluð fullskilgreind föll og ef annað er ekki tekið fram þá munum við gera ráð fyrir að föll séu fullskilgreind.

Runur og summur

- Runur (sequences)
  - Mismunarunur (arithmetic sequences)
  - Hlutfallsrunur (geometric sequences)
- Rakningarvensl (recurrence relations)
  - Dæmi: Fibonacci runan
- Summur (sums)
  - Stundum kallaðar *raðir*

Inngangur

- Runur eru gildi í ákveðinni röð
  - 1,1,2,3,5,8
  - 1,3,9,27,81,...
- Runur koma oft fyrir í stærðfræði, tölvunarfræði og ýmsum öðrum greinum svo sem grasafræði og tónlist
- Við munum sjá þann orðaforða sem notaður er til að ræða runur og summur

Runur

- Runa er fall frá hlutmengi heiltalnanna (oftast mengið $\{1,2,3,\ldots\}$ eða mengið $\{1,2,3,\ldots\}$) í eitthvert mengi S
- Ritháttturinn a_n er notaður til að tákna ímynd heiltölunnar n. Við getum hugsað um a_n sem ígildi $f(n)$ þar sem $f\colon\{0,1,2,\ldots\} \to S$. Við köllum a_n ***lið*** í rununni

Runur

- Dæmi:
  - Íhugið rununa $\{a_n\}$ þar sem

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

  - Runan er

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

Hlutfallsrunur

- Skilgreining: Hlutfallsruna er runa á sniðinu

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n, \dots$$

þar sem a kallast **frumliðurinn** og r kallast **hlutfallið** sem hvort tveggja eru tölur (oftast rauntölur)

- Dæmi:

1. Látum $a = 1$ og $r = -1$ þá fæst runan
$$\{b_n\} = \{b_0, b_1, b_2, \dots\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$
2. Látum $a = 2$ og $r = 5$ þá fæst runan
$$\{c_n\} = \{c_0, c_1, c_2, \dots\} = \{2, 10, 50, 250, 1250, \dots\}$$
3. Látum $a = 6$ og $r = 1/3$ þá fæst runan
$$\{d_n\} = \{d_0, d_1, d_2, \dots\} = \{6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots\}$$

Mismunarunur

- Skilgreining: Mismunaruna er runa á sniðinu
$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+nd, \dots$$

  þar sem a kallast **frumliðurinn** og d kallast **mismunurinn** sem hvort tveggja eru tölur (oftast rauntölur)

- Dæmi:
  1. Látum $a = -1$ og $d = 4$ þá fæst runan
  $$\{s_n\} = \{s_0, s_1, s_2, \dots\} = \{-1,3,7,11,15, \dots\}$$
  2. Látum $a = 7$ og $d = -3$ þá fæst runan
  $$\{t_n\} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\} = \{7,4,1,-2,-5, \dots\}$$
  3. Látum $a = 1$ og $d = 2$ þá fæst runan
  $$\{u_n\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\} = \{1,3,5,7,9, \dots\}$$

Strengir

- Skilgreining: Strengur er endanleg runa stafa úr endanlegu mengi (kallað stafrófið)
  - Stafrófið getur verið hvaða endanlegt mengi sem er, sérhvert stak í stafrófinu kallast stafur
- Runur stafa eða bita eru mikilvægar í tölvunarfræði
- Tómi strengurinn er táknaður með λ í þessu námskeiði (í öðrum námskeiðum er hann stundum táknaður með ϵ
- Tómi strengurinn hefur lengd 0
- Strengurinn $abcde$ hefur lengd 5

Rakningarvensl

- Skilgreining: *Rakningarvensl* fyrir runu $\{a_n\}$ er jafna sem skilgreinir a_n sem fall af einum eða fleiri fyrri liðum rununnar, þ.e. fall af einhverjum eða öllum af $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ fyrir öll $n > n_0$, þar sem n_0 er ekki-neikvæð heiltala
- Runa er kölluð *lausn* á rakningarvenslunum ef liðir rununnar uppfylla rakningarvenslin
- *Frumskilyrði* rununnar tilgreina liðina sem eru fyrir framan fyrsta liðinn sem rakningarvenslin skilgreina

Spurningar um rakningarvensl

- Dæmi 1: Látum $\{a_n\}$ vera runu sem uppfyllir rakningarvenslin $a_n = a_{n-1} + 3$ fyrir $n = 1,2,3,4, \dots$ og gerum ráð fyrir að $a_0 = 2$. Hvað eru þá a_1, a_2 og a_3? (Hér er $a_0 = 2$ frumskilyrðið)
- Svar: Við sjáum af rakningarvenslunum að

$$a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$a_2 = 5 + 3 = 8$$
$$a_3 = 8 + 3 = 11$$

Spurningar um rakningarvensl

- Dæmi 2: Látum $\{a_n\}$ vera runu sem uppfyllir rakningarvenslin $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ fyrir $n = 2,3,4,\ldots$ og gerum ráð fyrir að $a_0 = 3$ og $a_1 = 5$. Hvað eru þá a_2 og a_3? (Hér eru $a_0 = 3$ og $a_1 = 5$ frumskilyrðin)
- Svar: Við sjáum af rakningarvenslunum að

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

Fibonacci runan

- Skilgreining: Fibonacci runan $f_0, f_1, f_2, \ldots$ er skilgreind með:
  - Frumskilyrði: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$
  - Rakningarvensl: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- Dæmi: Finnið f_2, f_3, f_4, f_5 og f_6
- Svar:

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1\\
f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2\\
f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3\\
f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5\\
f_6 &= f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8
\end{aligned}
$$

Lausnir rakningarvensla

- Að finna segð (formúlu) fyrir n-ta lið runu sem skilgreind er með rakningarvenslum er kallað að *leysa rakningarvenslin*
- Slík segð segð er sögð vera á lokuðu sniði (ef hún inniheldur aðeins grunnaðgerðir og föll, ekki t.d. summumerki eða heildunarmerki)
- Ein aðferð sem getur virkað ef við erum getspök er að giska á rétta segð og sanna hana síðan með þrepun
- Við munum e.t.v. seinna sjá fleiri aðferðir til að leysa sum rakningarvensl (kafli 8)

Dæmi 1

- G.r.f. að rakningarvensl fyrir rununa $\{f_n\}$ séu $f_n = f_{n-1} + 2$ með frumskilyrði $f_0 = 1$. Þá er runan $1,3,5,7,\ldots$
- Við sjáum að mismunur liða er ávallt 2 og giskum á að lausnin sé $f_n = 2n + 1$
- Þrepasönnun
  - Grunnur, gildir fyrir $n = 0$: $f_0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$, sem passar
  - Þrepun:
    - Þrepunarforsenda: G.r.f. að $f_k = 2k + 1$ gildi fyrir öll $k < n$
    - Þrepunarskref: Þá er, samkvæmt rakningarvenslunum, $f_n = f_{n-1} + 2$, sem er samkvæmt þrepunarforsendu jafnt $2(n-1) + 1 + 2 = 2n - 2 + 1 + 2 = 2n + 1$

Dæmi 2

- G.r.f. að rakningarvensl fyrir rununa $\{f_n\}$ séu $f_n = 2f_{n-1}$ með frumskilyrði $f_0 = 1$. Þá er runan $1,2,4,8,\ldots$
- Við sjáum að hlutfallið milli liða er ávallt 2 og giskum á að lausnin sé $f_n = 2^n$
- Þrepasönnun
  - Grunnur, gildir fyrir $n = 0$: $f_0 = 1 = 2^0$, sem passar
  - Þrepun:
    - Þrepunarforsenda: G.r.f. að $f_k = 2^k$ gildi fyrir öll $k < n$
    - Þrepunarskref: Þá er, samkvæmt rakningarvenslunum, $f_n = 2f_{n-1}$, sem er samkvæmt þrepunarforsendu jafnt $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

Gagnlegar runur (sequences)

Nokkrar runur	
n-ti liður	Fyrstu 10 liðir
n^2	$1,4,9,16,25,36,49,64,81,100, \ldots$
n^3	$1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000, \ldots$
n^4	$1,16,81,256,625,1296,2401,4096,6561,10000, \ldots$
2^n	$2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024, \ldots$
3^n	$3,9,27,81,243,729,2187,6561,19683,59049, \ldots$
$n!$	$1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,3628800, \ldots$
f_n	$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, \ldots$

Summur (sums) og raðir (series)

- Summur liða $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ úr rununni $\{a_n\}$
- Ritháttur fyrir $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

eða

$$\textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j$$

eða

$$\sum_{m \le j \le n} a_j$$

eða

$$\textstyle\sum_{m \le j \le n} a_j$$

- j kallast *hlaupabreyta* eða *vísir* samlagningarinnar
- Athugið: Hvað ef $m > n$? Þá erum við að reikna summu núll liða, sem er núll

Summur

- Almennar, fyrir mengi S:

$$\sum_{j \in S} a_j$$

- Dæmi:

$$r^0 + r^1 + r^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} r^j$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

- Ef $S = \{2,5,7,10\}$ þá er $\sum_{j \in S} a_j = a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}$

Margfeldi

- Margfeldi þátta $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ úr rununni $\{a_n\}$
- Ritháttur fyrir $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$:

$$\prod_{j=m}^{n} a_j$$

- Athugið: Hvað ef $m > n$? Þá erum við að reikna margfeldi núll þátta, sem er **einn**

Raðir (series)

- Ef við höfum talnarunu $\{a_i\}$, þar sem i hleypur í gegnum $\mathbb{N}$ þá getum við skilgreind aðra runu $\{\sum_{j=0}^{i} a_j\}$
- Runan $\{\sum_{j=0}^{i} a_j\}$ kallast einnig **röð**

Jafnhlutfallaröð (geometric series)

- **Setning:** Summa liða úr hlutfallsrunu er

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \boldsymbol{ef\ r \neq 1} \\ (n+1)a & \boldsymbol{ef\ r = 1} \end{cases}$$

- **Sönnun:** Látum $S_n = \sum_{j=0}^{n} ar^j$, margföldum síðan báðum megin jafnaðarmerkis með r og fáum

$$rS_n = r\sum_{j=0}^{n} ar^j = \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} ar^j = \sum_{j=0}^{n} ar^j - a + ar^{n+1} = S_n + (ar^{n+1} - a)$$

- Sem sagt: $rS_n = S_n + (ar^{n+1} - a)$
- Einangrum síðan S_n:

$$S_n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \quad \boldsymbol{ef\ r \neq 1}$$

$$S_n = (n+1)a \quad \boldsymbol{ef\ r = 1}$$

Nokkrar summur

Summa	Lokuð segð
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \quad (\boldsymbol{ef}\ \boldsymbol{r \neq 1})$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (\boldsymbol{ef}\ \lvert\boldsymbol{x}\rvert < \boldsymbol{1})$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad (\boldsymbol{ef}\ \lvert\boldsymbol{x}\rvert < \boldsymbol{1})$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Nokkrar summur

Summa	Lokuð segð
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \quad (\boldsymbol{ef\ r \neq 1})$	$\dfrac{ar^{n-1} - a}{r - 1}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (\boldsymbol{ef\ \lvert x\rvert < 1})$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad (\boldsymbol{ef\ \lvert x\rvert < 1})$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Vorum að sanna þetta

Náskylt

Skissum sannanir fyrir þetta á töflunni í fyrirlestri, ef tími vinnst til (auðvelt!)