Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 4

Kafli 3: Rökstudd forritun, algrím, stöðvunarvandamálið, stærðargráður, flækjustig

Margföldun með helmingun, tvöföldun og samlagningu

{
Notkun: $z := \text{margfalda}(x, y)$
Fyrir: $x \geq 0$
Eftir: z er xy þ.e. margfeldi x og y
}

stef margfalda(x, y: heiltölur)
    $p \coloneqq 0;\ q \coloneqq y;\ r \coloneqq x$
    meðan $r \neq 0$
        $\{\ xy = p + qr\ \}$
        ef r er oddatala **þá**
            $p \coloneqq p + q;\ r \coloneqq r - 1$
        annars
            $r \coloneqq r/2;\ q \coloneqq q + q$
    skila p

Trúlega elsta algrím sem þekkt er

„Reiknað“ með vogarskálum á steinöld?

Var notað í gömlum örgjörvum

Algeng viðfangsefni

- Leitarvandamál
  - Finna staðsetningu tiltekins gildis í runu (sequence), lista eða fylki (list, array)
  - Línuleg leit og helmingunarleit
- Röðunarvandamál
  - Setja gildi í runu, lista eða fylki í tiltekna röð (vaxandi, minnkandi, ...)
  - Insertion sort

Línuleg leit

- Algeng leitunaraðferð
- Ofureinföld í útfærslu
- Hægvirk fyrir mörg gildi
- Viðunandi fyrir fá gildi

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið ≠ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið $\neq 19$ er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið ≠ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið $\neq 19$ er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið ≠ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið ≠ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið $\neq 19$ er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið $\neq$ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

…

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið $\neq 19$ er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

…

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Línuleg leit, dæmi

- Leitum að 19 í rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðið ≠ 19 er tómt

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Eftir fyrstu umferð höfum við séð að fyrsta sætið inniheldur ekki 19

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Síðan höldum við áfram, eitt og eitt sæti í einu

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22
1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22
1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22
1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

…

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22
1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

og finnum loks 19

Línuleg leit (linear search)

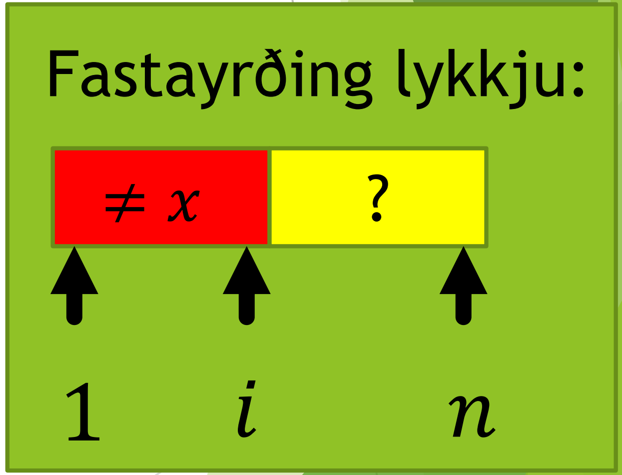
{
Notkun: i := leita$(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \dots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    ???

Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \dots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

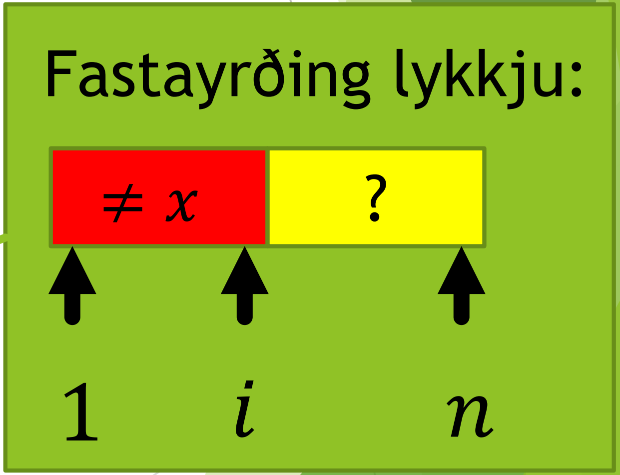
stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    ???



Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þá er $i = 0$, annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

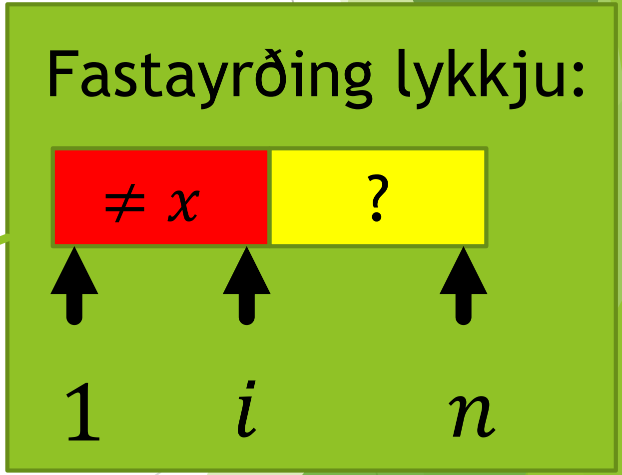
stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    ???
    meðan ???
        { $0 \le i \le n$, engin talnanna $a_1, \ldots, a_i$ er jöfn x }
        ???
    ???



Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    i := 0
    meðan ???
        { $0 \le i \le n$, engin talnanna $a_1, \ldots, a_i$ er jöfn x }
        ???
    ???

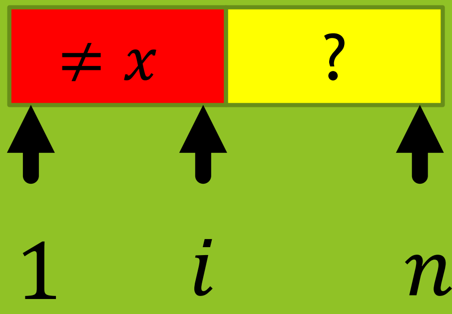


Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    i := 0
    meðan $i < n$
        { $0 \leq i \leq n$, engin talnanna $a_1, \ldots, a_i$ er jöfn x }
        ???
    ???

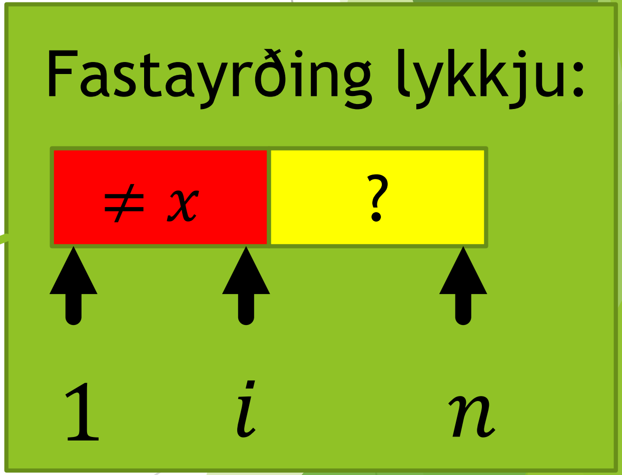
Fastayrðing lykkju:



Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \dots, a_n$ þá er $i = 0$, annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    i := 0
    meðan $i < n$
        { $0 \leq i \leq n$, engin talnanna $a_1, \dots, a_i$ er jöfn x }
        ???
    skila 0

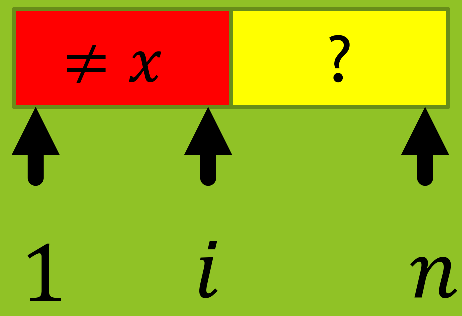


Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    i := 0
    meðan $i < n$
        { $0 \leq i \leq n$, engin talnanna $a_1, \ldots, a_i$ er jöfn x }
        i := i+1
        ef $a_i = x$ **þá skila** i
    skila 0

Fastayrðing lykkju:



Helmingunarleit

- Mjög hraðvirk leitaraðferð
- Flóknari en línuleg leit
- Krefst þess að gildin séu þegar röðuð
- Afar mikilvæg og algeng aðferð
- Allir þurfa að kunna helmingunarleit

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni $1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 12\ 13\ 15\ 16\ 18\ 19\ 20\ 22$
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 14 sem inniheldur $19 \geq 19$

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 14 sem inniheldur $19 \geq 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 14 sem inniheldur $19 \geq 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 13 sem inniheldur $18 < 19$

Helmingunarleit, dæmi

- Leitum að 19 í röðuðu rununni 1 2 3 5 6 7 8 10 12 13 15 16 18 19 20 22
- Í upphafi er óþekkta svæðið öll runan og svæðin < 19 og ≥ 19 eru tóm

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Runan inniheldur 16 gildi og miðjusætið er því sæti 8, sem inniheldur $10 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 12 sem inniheldur $16 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 14 sem inniheldur $19 \geq 19$

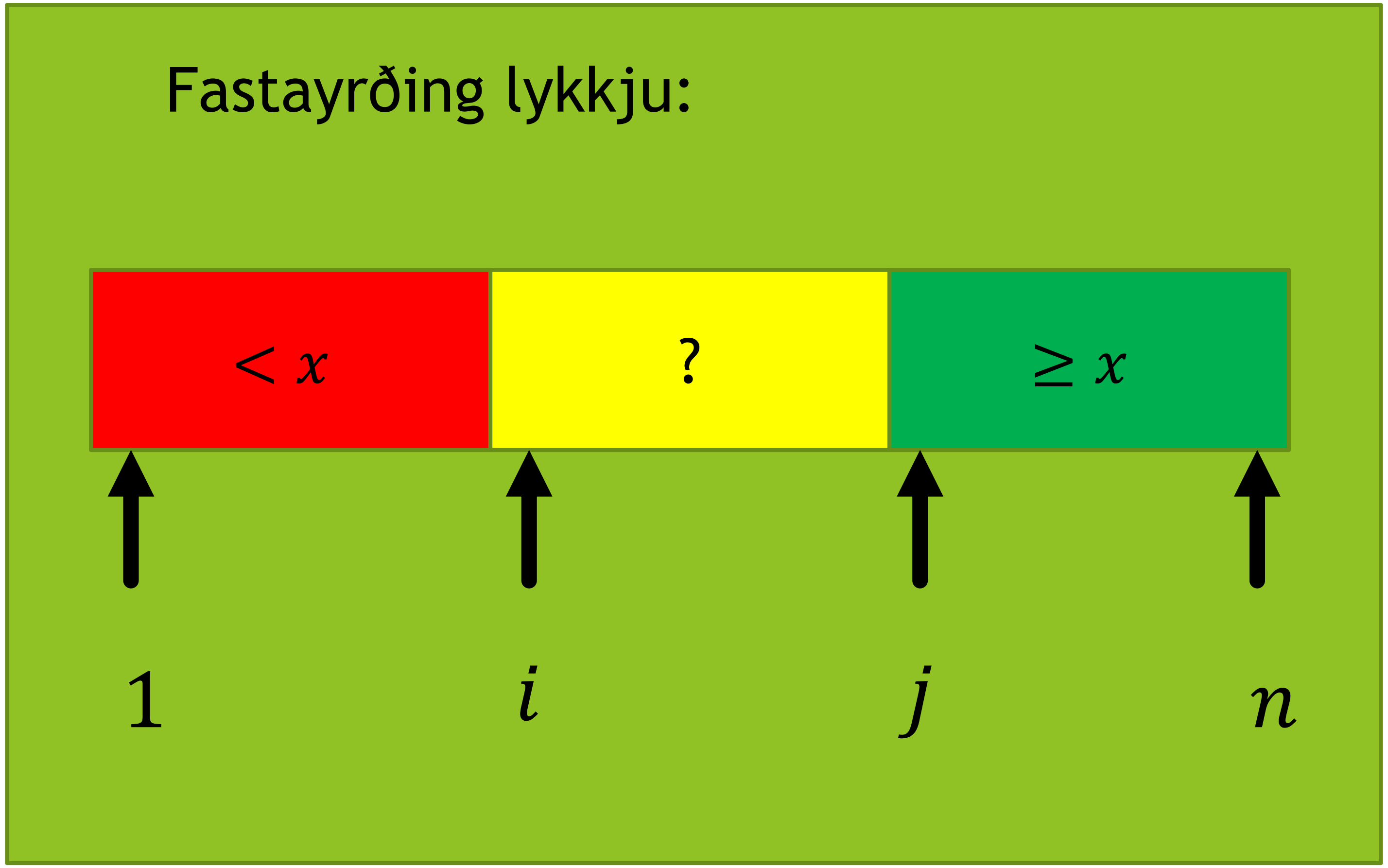
1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Næsta miðjusæti er sæti 13 sem inniheldur $18 < 19$

1	2	3	5	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19	20	22

- Óþekkta svæðið er tómt og leitinni er lokið

Grunnhugmynd helmingunarleitar



Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala,
$a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð
Eftir: $1 \leq i \leq n+1,\ \ a_1, \dots, a_{i-1} < x \leq a_i, \dots, a_n$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
???

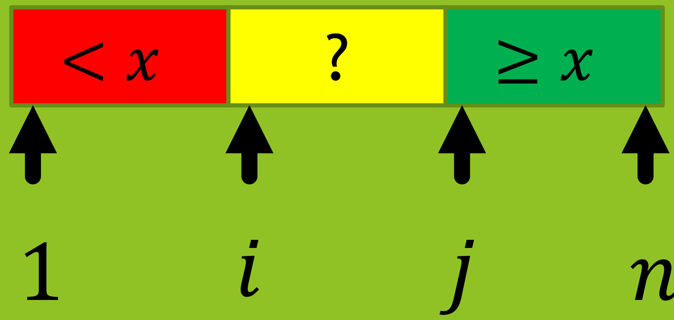
Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: i := leita(x, $a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala,
$a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð
Eftir: $1 \le i \le n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \le a_i, \dots, a_n$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)

???

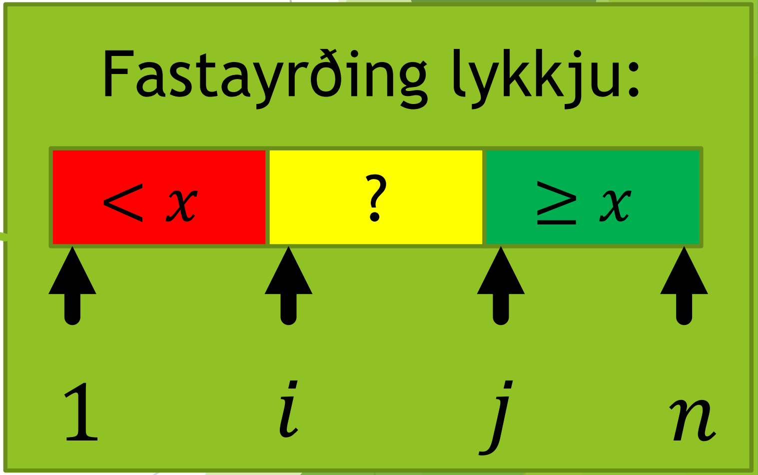
Fastayrðing lykkju:



Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: i := leita(x,$a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala,
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð
Eftir: $1 \leq i \leq n + 1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \leq a_i, \ldots, a_n$
}

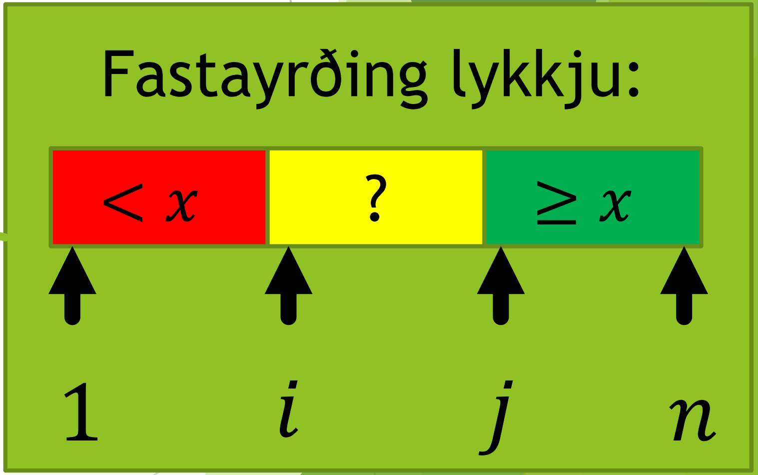
stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    ???
    meðan ???
        { $1 \leq i \leq j \leq n + 1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \leq a_j, \ldots, a_n$ }
        ???
    ???



Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: i := leita(x, $a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala,
$a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð
Eftir: $1 \le i \le n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \le a_i, \dots, a_n$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    ???
    meðan $i \neq j$
        { $1 \le i \le j \le n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \le a_j, \dots, a_n$ }
        ???
    ???



Helmingunarleit (binary search)

{

Notkun: i := leita(x, $a_1, a_2, \ldots, a_n$)

Fyrir: x er heiltala,

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð

Eftir: $1 \le i \le n+1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \le a_i, \ldots, a_n$

}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)

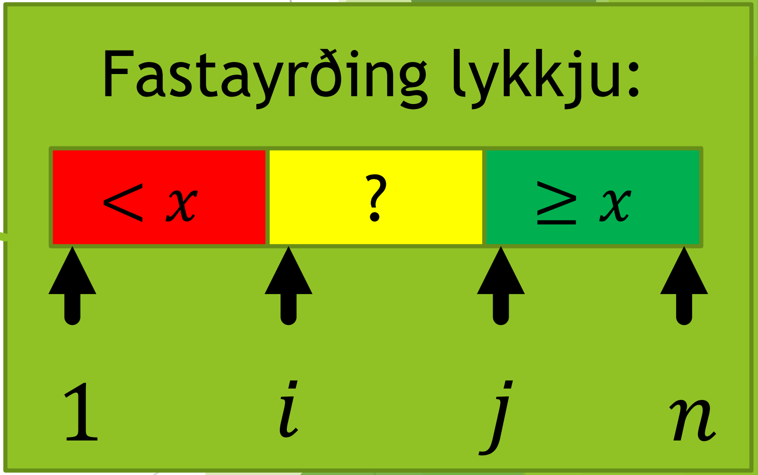
  ???

  meðan $i \ne j$

    { $1 \le i \le j \le n+1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \le a_j, \ldots, a_n$ }

    ???

  skila i



Helmingunarleit (binary search)

{

Notkun: i := leita(x, $a_1, a_2, \ldots, a_n$)

Fyrir: x er heiltala,

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð

Eftir: $1 \leq i \leq n+1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \leq a_i, \ldots, a_n$

}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)

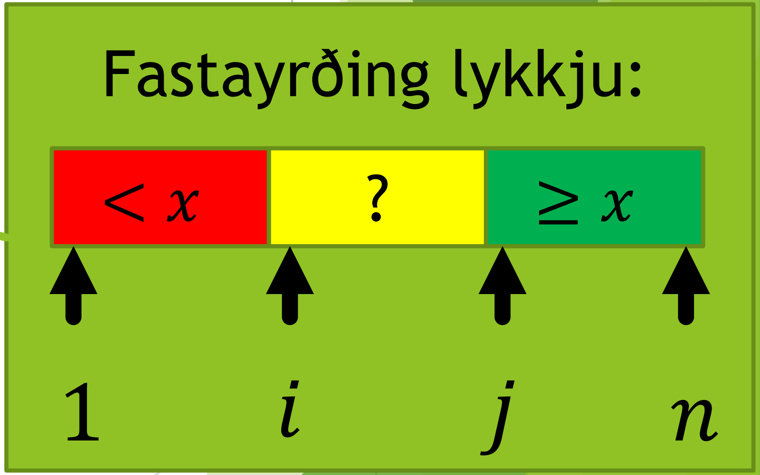
i := 1; $j := n + 1$

meðan $i \neq j$

{ $1 \leq i \leq j \leq n+1$, $a_1, \ldots, a_{i-1} < x \leq a_j, \ldots, a_n$ }

???

skila i



Helmingunarleit (binary search)

{

Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \dots, a_n$)

Fyrir: x er heiltala,

$a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð

Eftir: $1 \leq i \leq n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \leq a_i, \dots, a_n$

}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)

  i := 1; $j := n+1$

  meðan $i \neq j$

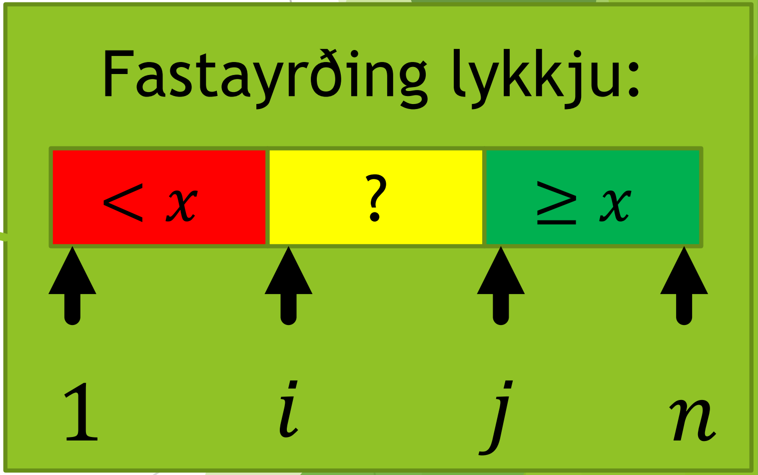
    { $1 \leq i \leq j \leq n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \leq a_j, \dots, a_n$ }

    $m := \lfloor (i+j)/2 \rfloor$

    ef $a_m < x$ **þá** $i := m+1$

    annars $j := m$

  skila i



Insertion sort

- Algeng einföld röðunaraðferð
- Röðunaraðferð byggð á samanburðum
- Alls ekki meðal hraðvirkustu aðferða
  - Góð til að raða stuttum runum
- Notuð sem hluti flóknari röðunaraðferða
- Allir þurfa að kunna þessa aðferð

Insertion sort dæmi

- Röðum rununni

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3

- Ástandið eftir hverja umferð

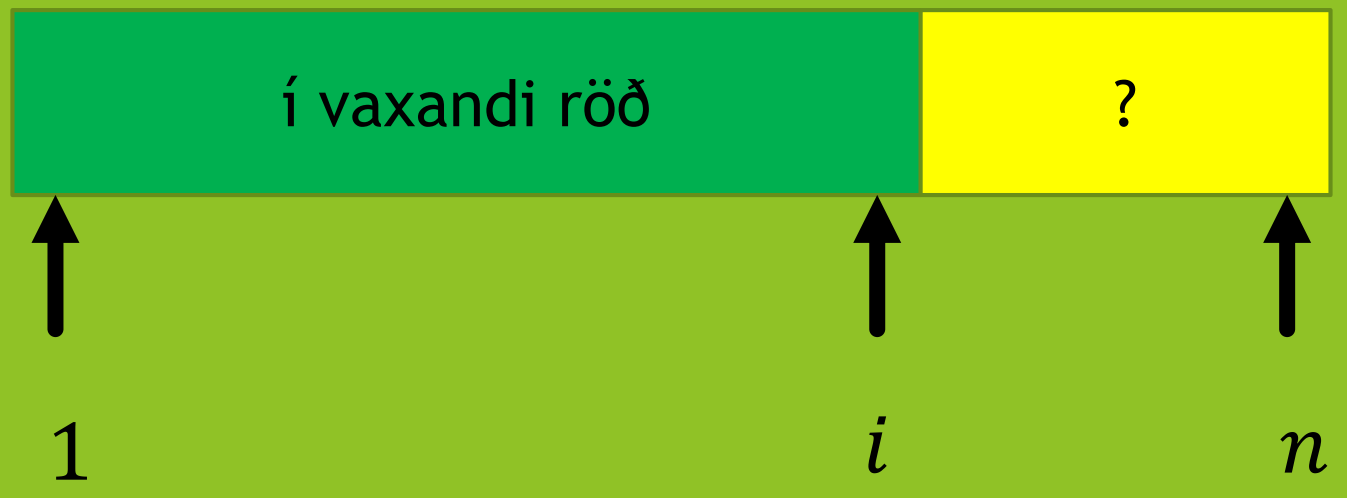
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	3	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	3	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	4	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	4	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	4	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3

.....

1	1	2	3	3	4	5	5	5	6	7	8	9	9	9	3
1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	6	7	8	9	9	9

Grunnhugmynd insertion sort

Fastayrðing lykkju:



Insertion sort dæmi

- Ástangið fyrir innri lykkju

1	1	3	4	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3

- Ástandið fyrir og eftir hverja umferð innri lykkju

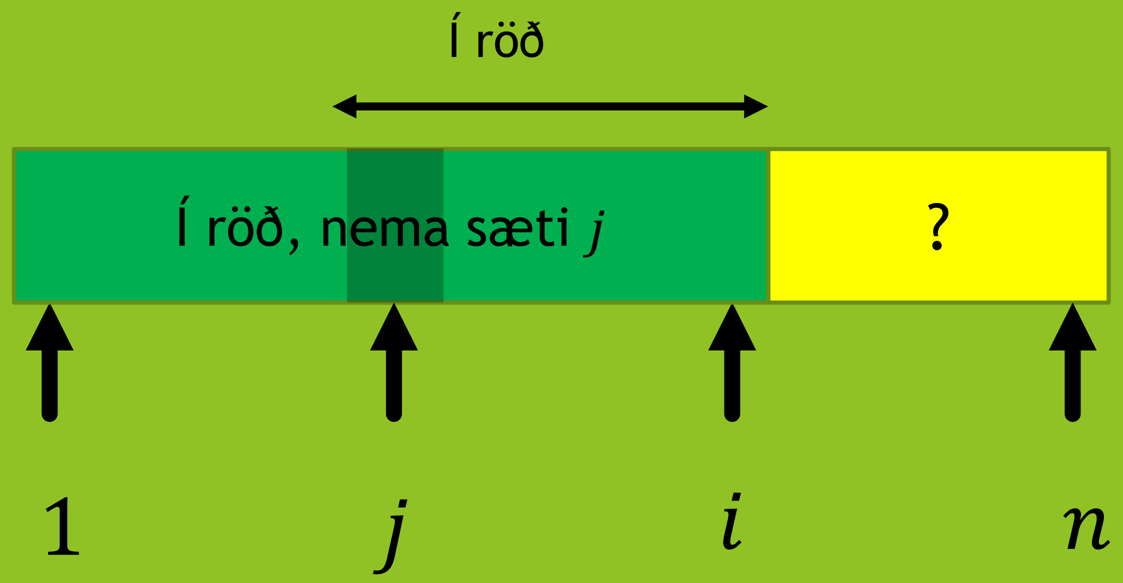
1	1	3	4	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	4	5	2	9	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	4	2	5	9	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	3	2	4	5	9	6	5	3	5	8	9	7	9	3
1	1	2	3	4	5	9	6	5	3	5	8	9	7	9	3

- Ástandið eftir innri lykkju

1	1	2	3	4	5	9	6	5	3	5	8	9	7	9	3

Innri lykkja insertion sort

Fastayrðing innri lykkju:



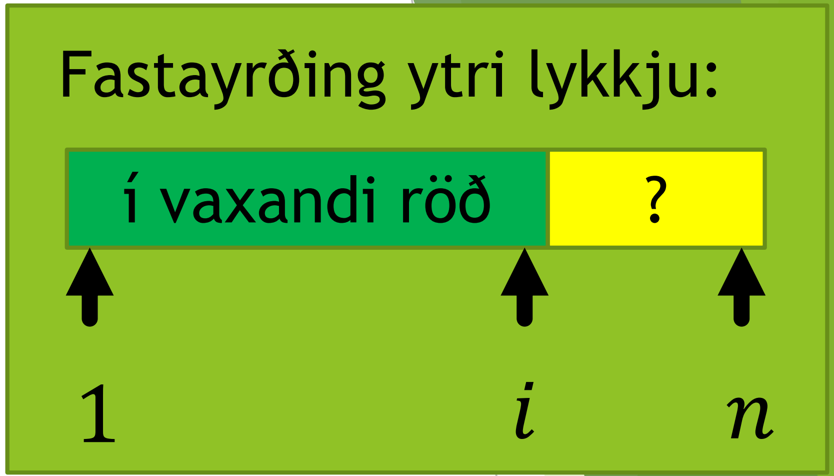
Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}
stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
???

Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
  ???

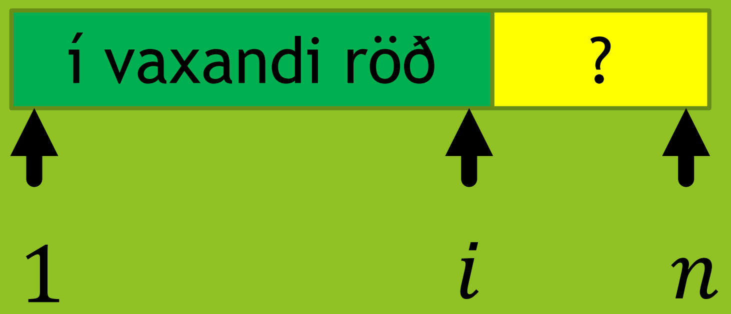


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    ???
    meðan ???
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        ???

Fastayrðing ytri lykkju:

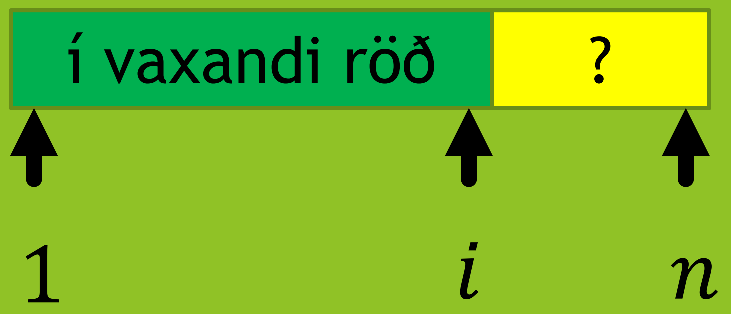


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    ???
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        ???

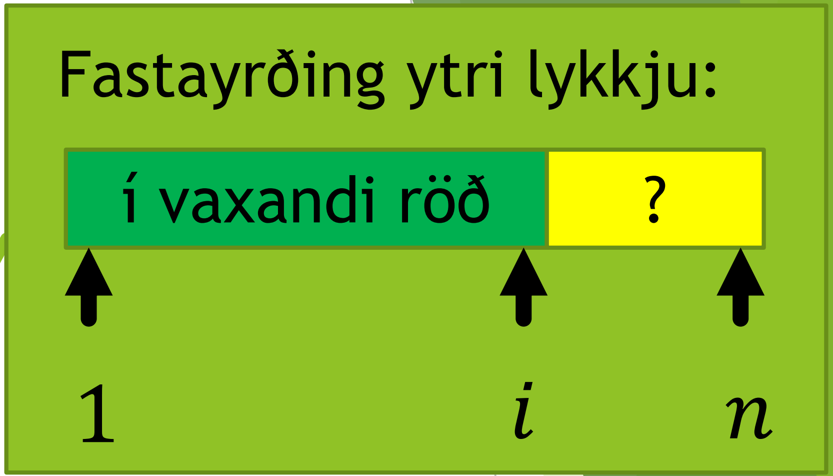
Fastayrðing ytri lykkju:



Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

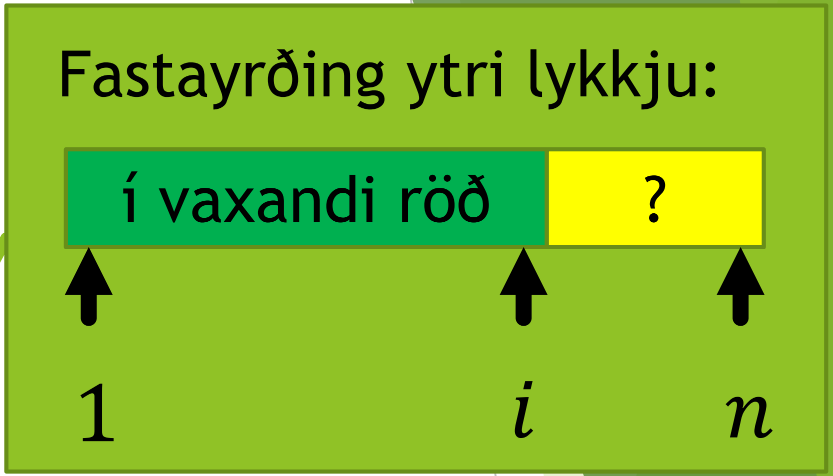
stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        ???

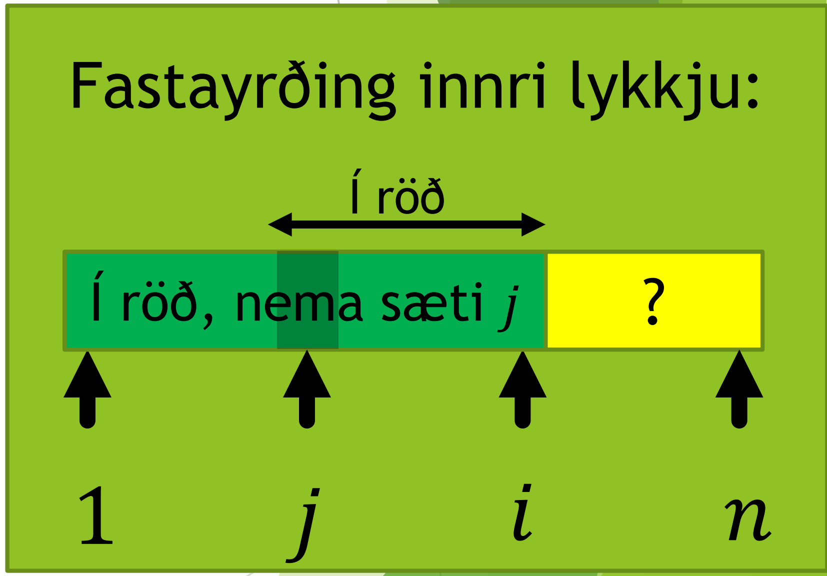


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        ???

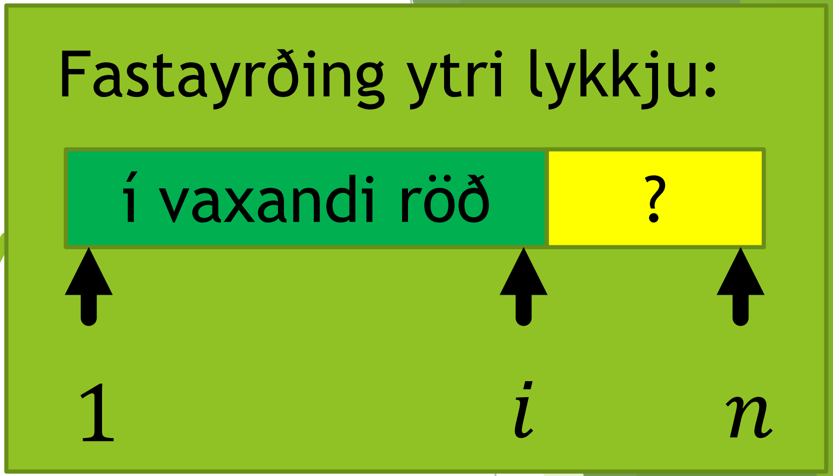


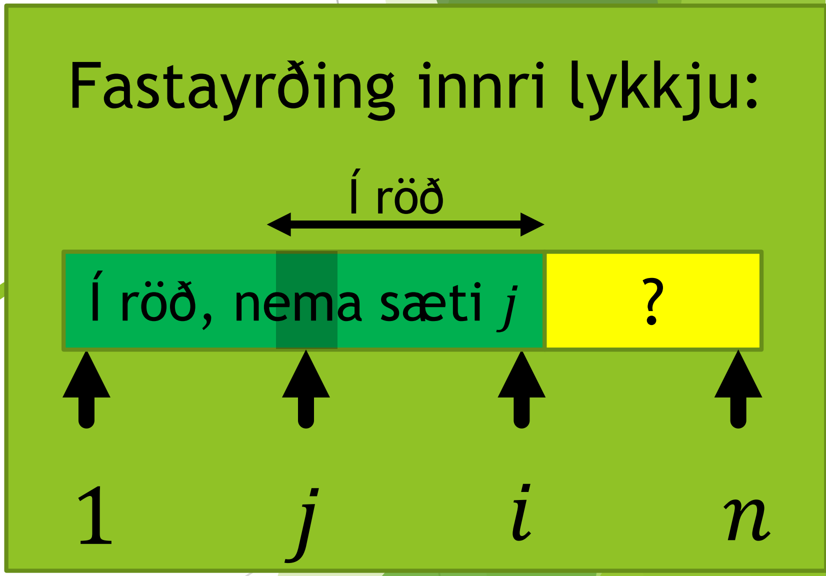


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        ???
        meðan ???
            { $1 \leq j \leq i \leq n$, $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, }
            { $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er einnig í vaxandi röð. }
            { Gildið í sæti a_j er því ef til vill of aftarlega. }
            ???





Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \dots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \dots, a_n$: runa af rauntölubreytum)

  $i := 0$

  meðan $i \neq n$

    { $a_1, a_2, \dots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }

    ???

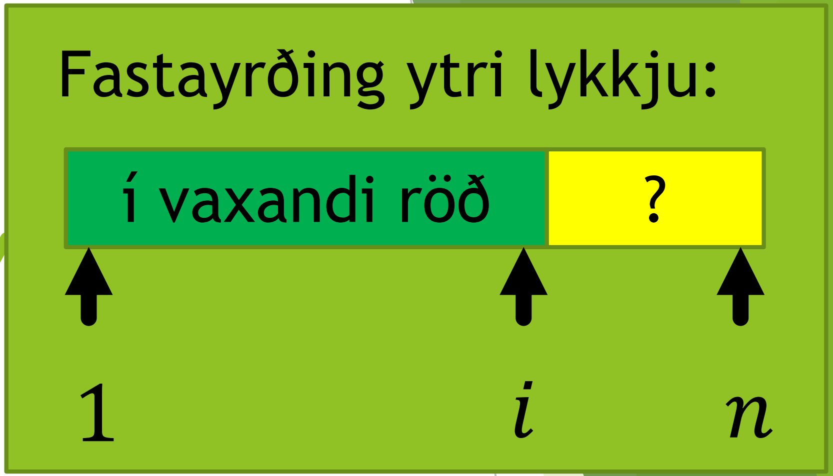
    meðan $j \neq 1$ **og** $a_j < a_{j-1}$

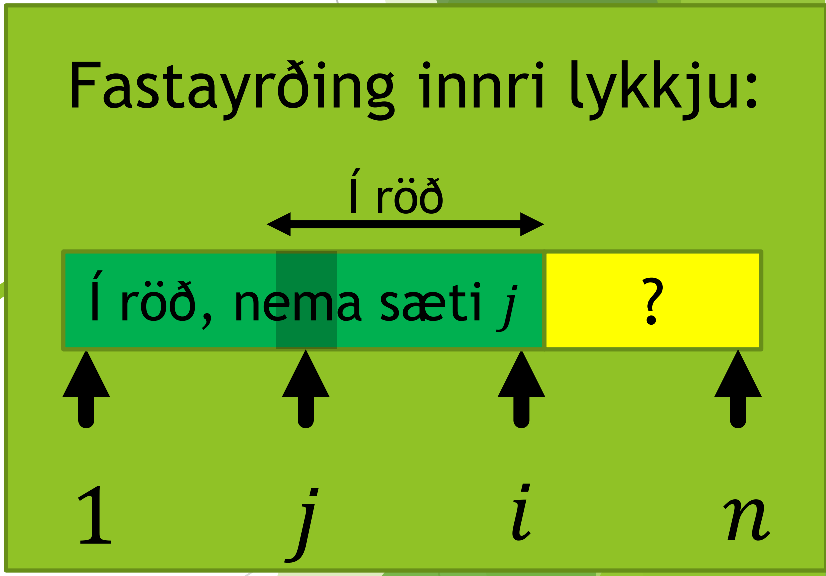
      { $1 \leq j \leq i \leq n$, $a_j, a_{j+1}, \dots, a_i$ er í vaxandi röð, }

      { $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_i$ er einnig í vaxandi röð. }

      { Gildið í sæti a_j er því ef til vill of aftarlega. }

      ???

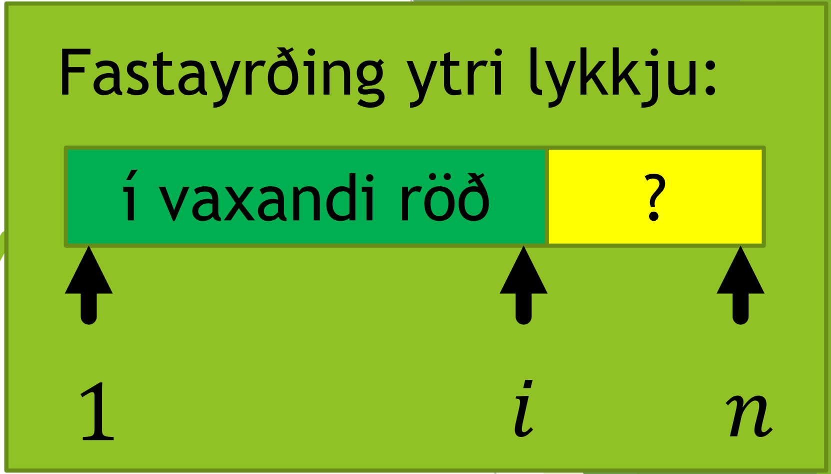


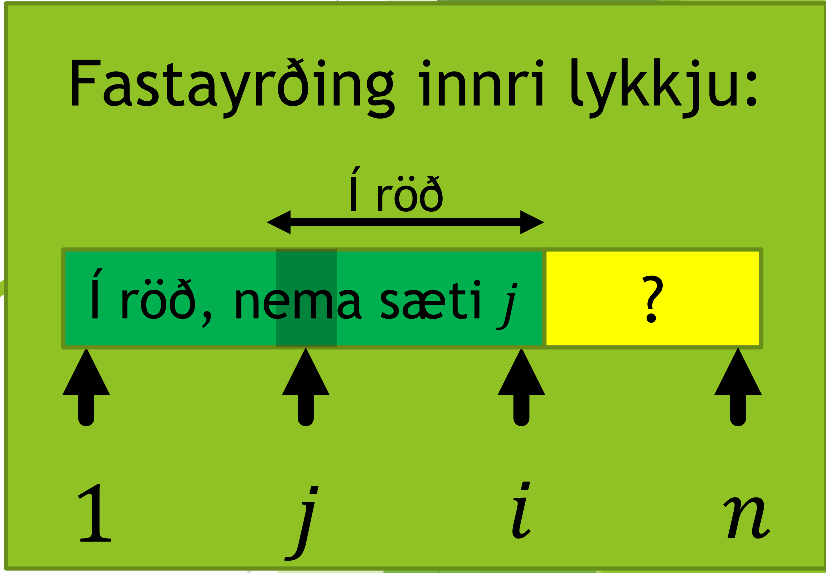


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        $i := i + 1$; $j := i$
        meðan $j \neq 1$ **og** $a_j < a_{j-1}$
            { $1 \leq j \leq i \leq n$, $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, }
            { $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er einnig í vaxandi röð. }
            { Gildið í sæti a_j er því ef til vill of aftarlega. }
            ???

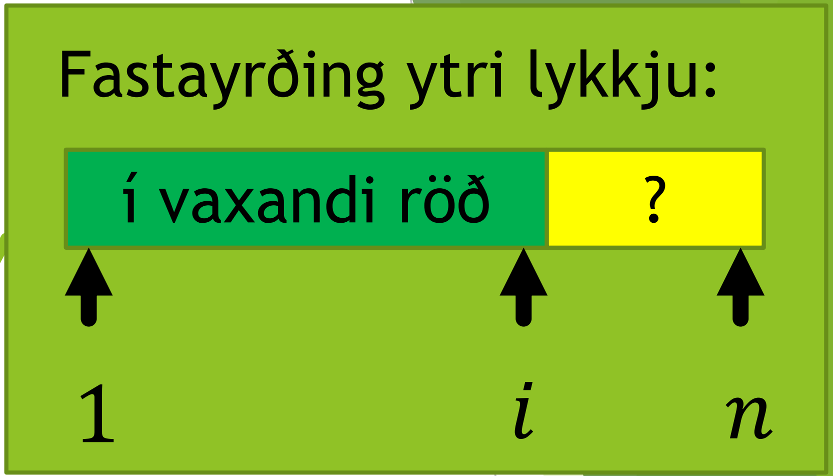


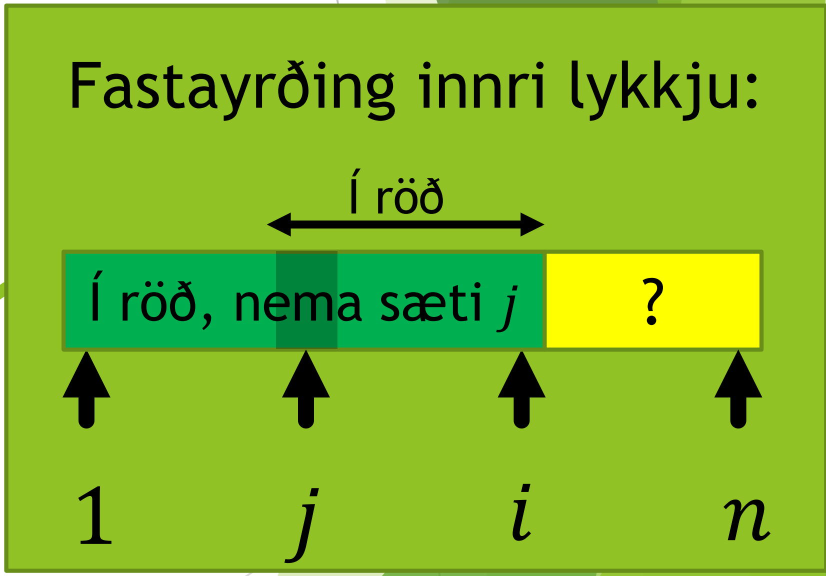


Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \ldots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        $i := i + 1; \quad j := i$
        meðan $j \neq 1$ **og** $a_j < a_{j-1}$
            { $1 \leq j \leq i \leq n$, $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er í vaxandi röð, }
            { $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_i$ er einnig í vaxandi röð. }
            { Gildið í sæti a_j er því ef til vill of aftarlega. }
            $\boxed{m := a_j; \quad a_j := a_{j-1}; \quad a_{j-1} := m;}$ $\quad j := j - 1$





Víxlum gildunum í a_j og a_{j-1}
Færir gildið framar í rununni

Stöðvunarvandamálið

- Getum við skrifað stef (fall) sem tekur forrit sem viðfang og ákvarðar hvort keyrslu forritsins lýkur?
- **Svar:** Notum óbeina sönnun til að sýna að þetta er ekki hægt
- Gerum ráð fyrir að slíkt stef sé til og köllum það H

  Notkun: $svar$:= H(P)
  Fyrir: P er skrá sem inniheldur forrit
  Eftir: $svar$ er **satt** ef keyrslu P lýkur, annars **ósatt**

Stöðvunarvandamálið

- Skrifum eftirfarandi forrit og setjum í skrá S:

ef H(S) **þá**
    meðan satt skrifa „ha!“
annars
    stöðva keyrslu strax

Stöðvast aldrei

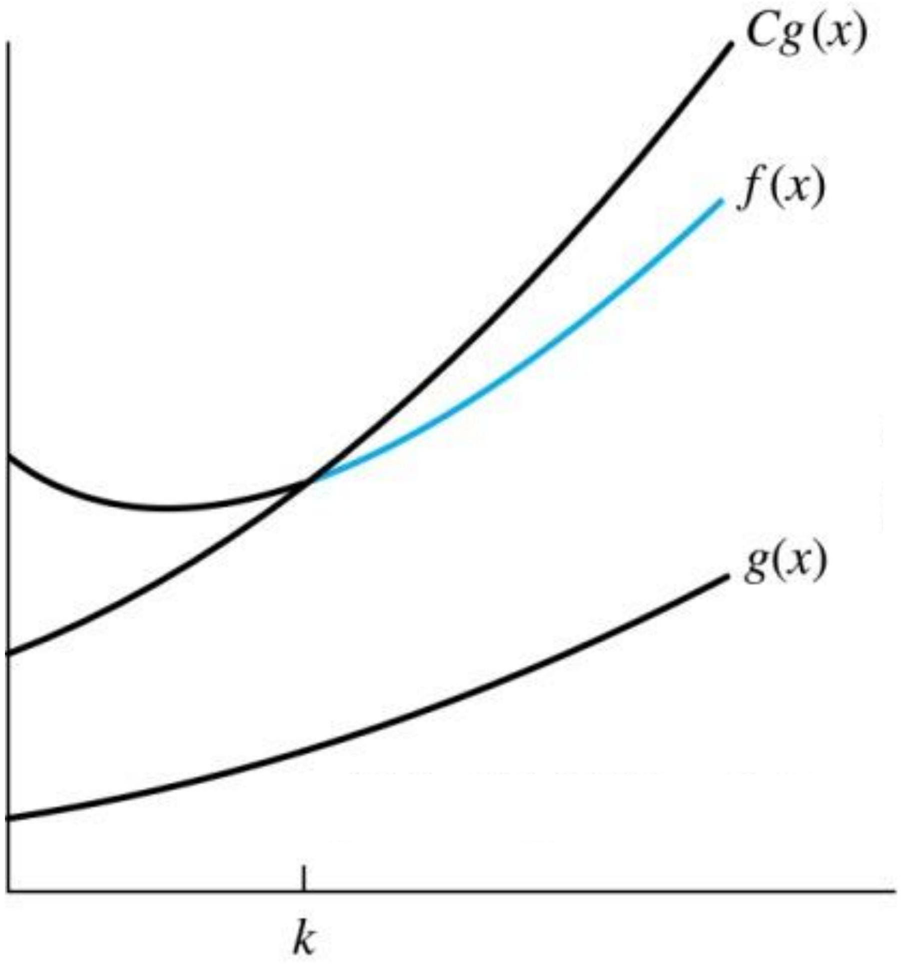
Stöðvast strax

- Forrit þetta stöðvast þá ef það stöðvast ekki og stöðvast ekki ef það stöðvast - mótsögn
- Forsendan að hægt sé að skrifa slíkt stef H getur því ekki staðist

Vöxtur falla og stærðargráður þeirra

- **Skilgreining:** Látum f og g vera föll $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eða $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Við segjum að $f(x)$ sé $O(g(x))$ ef til eru fastar C og k þannig að fyrir öll $x > k$ gildi
$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$
- Við segjum „$f(x)$ er stóra-O af $g(x)$“, „f er stóra-O af g“ eða „ g ríkir yfir f“
- Fastarnir C og k eru kallaðir ***vitni*** um að $f(x)$ sé $O(g(x))$

$f(x)$ er $O(g(x))$



Nokkrir punktar um O(...) ritháttt

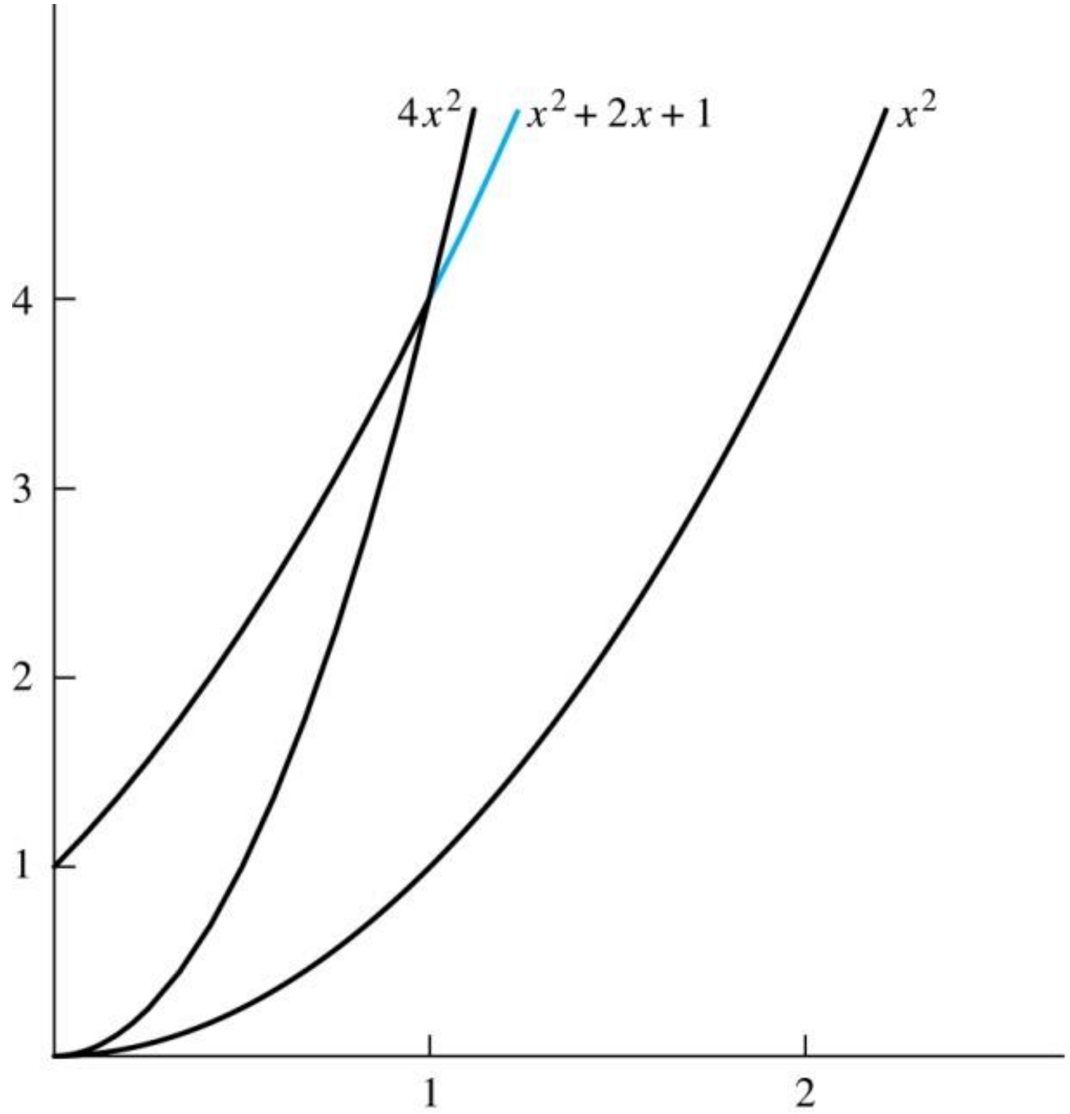
- Ef við getum fundið eina tvennd vitna, k og C þá eru óendanlega margar slíkar tvenndir
- Stundum er skrifað $f(x) = O(g(x))$ sem er ruglandi því það er misnotkun á $=$
  - Betra er að skrifa $f(x) \in O(g(x))$ því $O(g(x))$ stendur fyrir mengi þeirra falla f sem eru $O(g(x))$
- Í stað þess að skrifa
  - „til eru k og C þannig að fyrir öll $x > k$ gildir $|f(x)| \leq C|g(x)|$"
- sleppum við oft tölugildistáknunum og skrifum í staðinn
  - „til eru k og C þannig að fyrir öll $x > k$ gildir $f(x) \leq Cg(x)$"
- vegna þess að föllin sem við erum að eiga við eru jákvæð

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$

- Dæmi: Sýnum að $f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$
- **Lausn:** Setjum $k = 1$ og $C = 4$. Þá fáum við að fyrir $x > k = 1$ gildir að

$$
\begin{aligned}
|x^2 + 2x + 1| &= |(x+1)^2| \\
&< |(x+x)^2| \\
&= (2x)^2 \\
&= 4x^2 \\
&= Cx^2
\end{aligned}
$$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ er $O(x^2)$



Sami vaxtarhraði – sama stærðargráða

- Ef $f(x) = x^2 + 2x + 1$ og $g(x) = x^2$ þá gildir bæði:
  - $f(x)$ er $O(g(x))$ og
  - $g(x)$ er $O(f(x))$
- Við segjum þá (almennt undir þessum kringumstæðum) að föllin tvö séu **af sömu stærðargráðu**
- Ef við höfum þrjú föll, f, g og h, þannig að $f(x)$ er $O(g(x))$ og $g(x)$ er $O(h(x))$ þá gildir $f(x)$ er $O(h(x))$
- Í mörgum tilvikum er markmið okkar að finna minnsta fall g þannig að $f(x)$ er $O(g(x))$ - (margföldunarfasti í g skiptir hér ekki máli)

$7x^2$ er $O(x^3)$, n^2 er ekki $O(n)$

- Sýnum að $7x^2$ er $O(x^3)$
- Lausn: Látum $C = 1$ og $k = 7$ vera okkar vitni (myndi $C = 7$ og $k = 1$ virka?)

- Sýnum að n^2 er ekki $O(n)$
- Lausn: (Óbein sönnun) Gerum ráð fyrir að til séu vitni C og k þannig að
  $$n^2 \leq Cn \text{ fyrir öll } n > k.$$

  Deilum þá með n báðu megin við $\leq$ og drögum þá ályktun að $n \leq C$ þurfi að gilda fyrir öll $n > k$.

  Mótsögn (sem sannar að forsendan, að slík vitni séu til, gengur ekki)

Vaxtarhraði margliða

- Setning: Látum $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vera margliðu af gráðu n, þ.a. $a_n \neq 0$. Þá gildir að $f(x)$ er $O(x^n)$.
- Sönnun: Við fáum, fyrir $x > 1$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \\ &\leq |a_n x^n| + |a_{n-1}x^{n-1}| + \cdots + |a_1 x| + |a_0| \\ &= x^n \left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \cdots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n} \right) \\ &\leq x^n (|a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \end{aligned}$$

Veljum nú $k = 1$ og $C = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$.
Þá er ljóst að $f(x)$ er $O(x^n)$

Vaxtarhraðar nokkurra mikilvægra falla

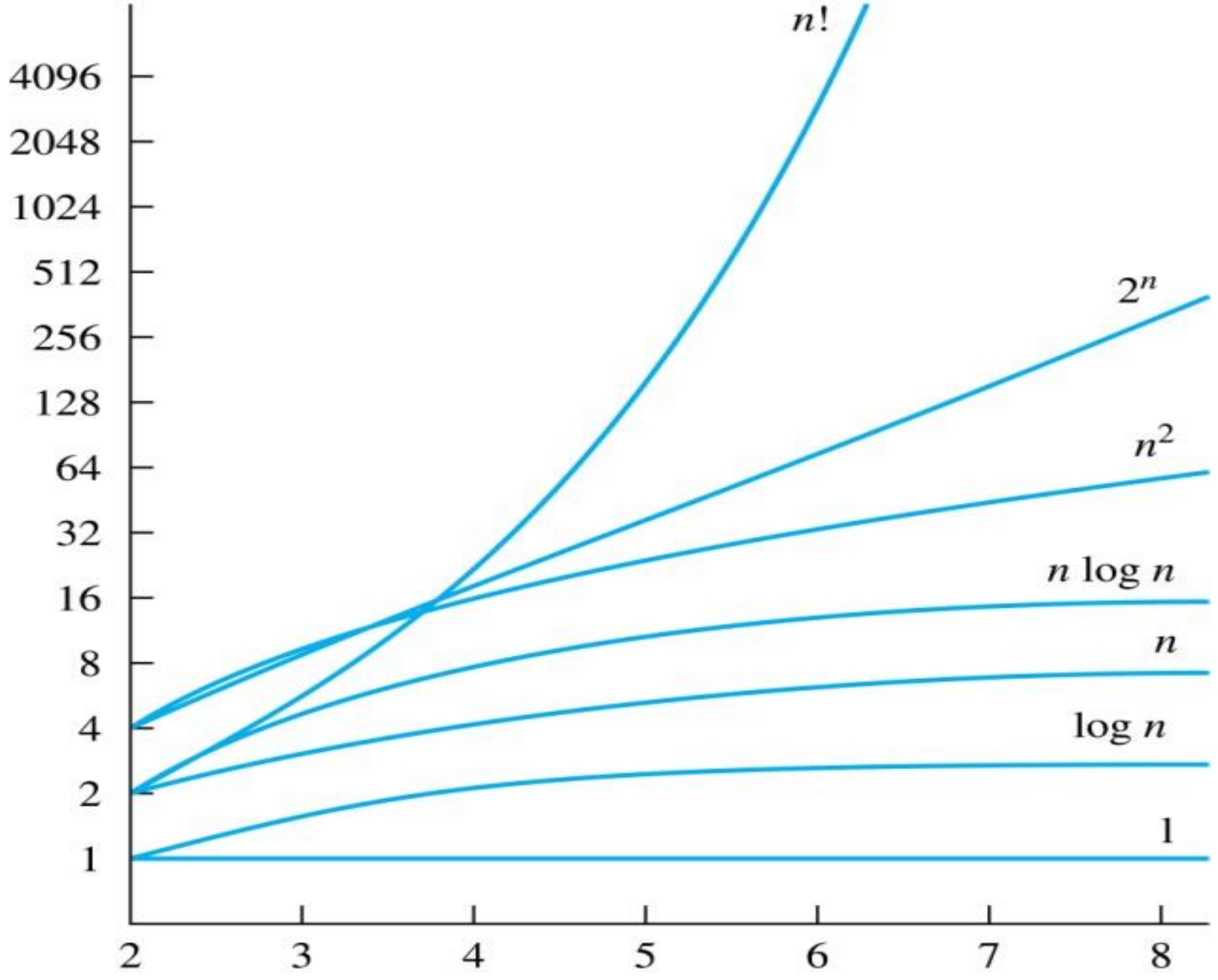
- Dæmi: Metum vaxtarhraða $1 + 2 + 3 + \cdots + n$
- Lausn: $1 + 2 + 3 + \cdots + n \leq n + n + \cdots + n = n^2$ og þess vegna gildir að $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ er $O(n^2)$, með vitnum $C = 1$ og $k = 1$

- Dæmi: Metum vaxtarhraða hrópmerkta fallsins $f(n) = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
- Lausn: $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leq n \times n \times \cdots \times n = n^n$ og þess vegna gildir að $n!$ er $O(n^n)$ með vitnum $C = 1$ og $k = 1$

Vaxtarhraðar nokkurra mikilvægra falla

- Dæmi: Metum vaxtarhraða $\log(n!)$
- Lausn: Frá fyrri glæru vitum við að fyrir $n > 0$ gildir $n! \leq n^n$ og þess vegna gildir að $\log(n!) \leq \log(n^n) = n\log(n)$, og þess vegna gildir að $\log(n!)$ er $O(n\log(n))$ með vitnum $C = 1$ og $k = 1$

Vöxtur ýmissa falla



Vaxtarhraðar með logrum, veldum og veldisvísum (logarithms, powers, exponents)

- Ef $d > c > 1$ þá
  - gildir að n^c er $O(n^d)$ en ekki gildir að n^d sé $O(n^c)$
- Ef $b > 1$ og c og d eru jákvæðar, þá
  - gildir að $(\log_b n)^c$ er $O(n^d)$ en ekki gildir að n^d sé $O\left((\log_b n)^c\right)$
- Ef $b > 1$ og d er jákvæð, þá
  - gildir að n^d er $O(b^n)$ en ekki gildir að b^n sé $O(n^d)$
- Ef $\mathrm{c} > \mathrm{b} > 1$, þá
  - gildir að b^n er $O(c^n)$ en ekki gildir að c^n sé $O(b^n)$

Samsetningar falla

- Ef $f_1(x)$ er $O(g_1(x))$ og $f_2(x)$ er $O(g_2(x))$ þá gildir að $(f_1 + f_2)(x)$ er $O(\max(|g_1(x)| + |g_2(x)|)$ þar sem $f_1 + f_2$ er skilgreint á augljósan hátt með $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- Þarmeð fæst að ef $f_1(x)$ er $O(g(x))$ og $f_2(x)$ er líka $O(g(x))$ þá gildir að $(f_1 + f_2)(x)$ er líka $O(g(x))$

- Ef $f_1(x)$ er $O(g_1(x))$ og $f_2(x)$ er $O(g_2(x))$ þá gildir að $(f_1 f_2)(x)$ er $O(g_1(x) g_2(x))$ (eða $O(g_1 g_2(x))$ þar sem $f_1 f_2$ er skilgreint á augljósan hátt með $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- ?
- ?
- ?
- ?
- ?
- ?
- ?
- ?
- ?
- ?

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$ (eða f_2)
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$ (eða f_8)

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$ (eða f_2)
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$ (eða f_8)
- $f_1(n) = (1.5)^n$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$ (eða f_2)
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$ (eða f_8)
- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_4(n) = 2^n$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
- $f_9(n) = 10000$
- $f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$ (eða f_2)
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$ (eða f_8)
- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$

Röðum föllum samkvæmt vaxtarhraða

$f_1(n) = (1.5)^n$
$f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$
$f_3(n) = (\log(n))^2$
$f_4(n) = 2^n$
$f_5(n) = \log(\log(n))$
$f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
$f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
$f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$
$f_9(n) = 10000$
$f_{10}(n) = n!$

- $f_9(n) = 10000$
- $f_5(n) = \log(\log(n))$
- $f_3(n) = (\log(n))^2$
- $f_6(n) = n^2(\log(n))^3$
- $f_8(n) = n^3 + n(\log(n))^2$ (eða f_2)
- $f_2(n) = 8n^3 + 17n^2 + 111$ (eða f_8)
- $f_1(n) = (1.5)^n$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_7(n) = 2^n(n^2 + 1)$
- $f_{10}(n) = n!$

Stóra Ómega – Ω-rithāttur (big-omega)

- **Skilgreining:** Látum f og g vera föll $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eða $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Við segjum að $f(x)$ sé $\Omega(g(x))$ ef til eru fastar $C > 0$ og k þannig að fyrir öll $x > k$ gildi
$$|f(x)| \geq C|g(x)|$$
- Við segjum „$f(x)$ er stóra-ómega af $g(x)$“
- Stóra-O gefur efri mörk á vöxt falls, en stóra-ómega gefur neðri mörk
- $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ þá og því aðeins að $g(x)$ sé $O(f(x))$ – þetta er afleiðing skilgreininganna

Stóra Þeta – Θ-ritháttur (big-theta)

- **Skilgreining:** Látum f og g vera föll $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eða $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Við segjum að $f(x)$ sé $\Theta(g(x))$ ef hvort tveggja gildir að
  - $f(x)$ er $O(g(x))$ og
  - $f(x)$ er $\Omega(g(x))$
- Við segjum „$f(x)$ er stóra-þeta af $g(x)$“, og við segjum líka „$f(x)$ er af stærðargráðu $g(x)$“, og við segjum líka „$f(x)$ og $g(x)$“ eru af sömu stærðargráðu
- Stóra-O gefur efri mörk á vöxt falls, en stóra-ómega gefur neðri mörk
- $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ þá og því aðeins að til séu fastar $C_1, C_2 > 0$ og k þannig að $C_1|g(x)| < |f(x)| < C_2|g(x)|$ fyrir öll $x > k$

Flækjustig algríma (complexity of algorithms)

- Tímaflækja (time complexity)
- Minnisflækja (space complexity)
- Flækjustig í versta tilfelli
- Hvernig skiljum við flækjustigið?

Flækjustig

- Ef gefið er algrím til að leysa tiltekið vandamál, hversu vel virkar algrímið fyrir inntak af gefinni stærð? Við spyrjum:
  - Hve mikinn tíma tekur algrímið til að leysa vandamálið?
  - Hve mikið minnisrými þarf algrímið til að leysa vandamálið?
- Greining okkar á tímanum sem algrímið krefst er greining á **tímaflækju** algrímsins (time complexity)
- Greining okkar á minnisrýminu sem algrímið krefst er greining á **minnisflækju** algrímsins (space complexity)

Flækjustig

- Við munum einbeita okkur að tímaflækju
- Greiningin á tímaflækjunni felst í að finna efri mörk á fjölda þeirra aðgerða sem algrímið þarf að framkvæma
  - Við notum þar $O(\dots)$ og $\Theta(\dots)$
- Slíka greiningu má nota til að komast að því hvort raunhæft er að nota viðkomandi algrím til að leysa vandamál af tiltekinni stærð
- Við getum líka notað slíka greiningu til að bera saman mismunandi algrím fyrir sama vandamál
- Við horfum fram hjá smáatriðum í viðkomandi útfærslu, þar með talið tölvugerðir, forritunarmál og þvíumlíkt því það flækir málið of mikið

Tímaflækja

- Til að greina tímaflækju ákvörðum við fjölda aðgerða svo sem samanburða og reikniaðgerða (plús, mínus, margföldun, ...)
- Meta má tímann sem tölva þarf til að leysa vandamál ef vitað er nokkurn veginn hve margar aðgerðir tölvan þarf að framkvæma
- Við horfum framhjá smáatriðum sem hafa hverfandi tímakostnað
- Við einbeitum okkur að **tímaflækju í versta tilfelli**, sem gefur okkur þá efri mörk á fjölda aðgerða sem framkvæma þarf fyrir vandamál af tiltekinni stærð
- Það er yfirleitt mun erfiðara að greina **meðaltímaflækju** en **tímaflækju í versta tilfelli**

Leit að hágildi

{
Notkun: x := max($a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur, $n > 0$
Eftir: x stærsta af $a_1, a_2, \ldots, a_n$
}

stef max($a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    m := a_1
    i := 1
    meðan $i \neq n$
        { $1 \leq i \leq n$, m er stærsta af $a_1, \ldots, a_i$ }
        i := i+1
        ef $a_i > m$ **þá** m := a_i
    skila m

Hver er tímaflækjan?

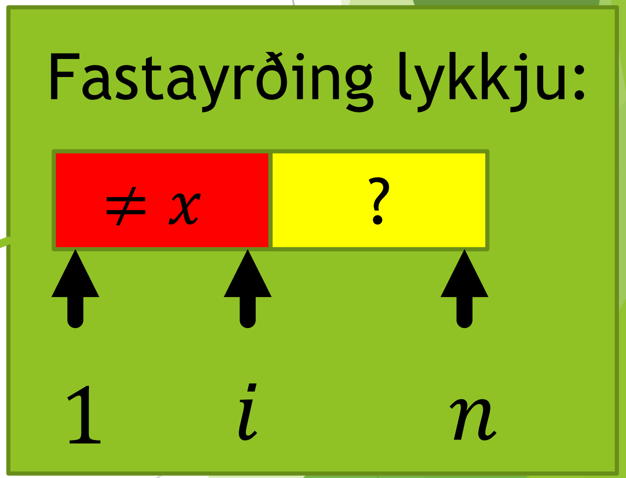
Hver er tímaflækjan?

- **Lausn:** Teljum fjölda samanburða
  - Fjöldi umferða í lykkjunni er $\boldsymbol{n-1}$
  - Samanburðurinn $a_i > m$ er framkvæmdur einu sinni í hverri umferð lykkjunnar
    - $\boldsymbol{n-1}$ **sinnum samtals**
  - Í byrjun hverrar umferðar lykkjunnar er athugað hvort $i \neq n$ og einnig í lok síðustu umferðar
    - $\boldsymbol{n}$ **sinnum samtals**
  - Heildarfjöldi samanburða er því $n - 1 + n = 2n - 1$
- Tímaflækja algrímsins er því $\Theta(n)$

Línuleg leit (linear search)

{
Notkun: i := leita($x, a_1, a_2, \ldots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eru heiltölur
Eftir: Ef x er ekki ein af $a_1, a_2, \ldots, a_n$ þá er $i = 0$,
annars er i minnsti vísir þ.a. $x = a_i$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
  i := 0
  meðan $i < n$
    { $0 \leq i \leq n$, engin talnanna $a_1, \ldots, a_i$ er jöfn x }
    i := i+1
    ef $a_i = x$ **þá skila** i
  skila 0



Hver er tímaflækja línulegrar leitar í versta tilfelli?

- **Lausn:** Teljum fjölda samanburða
  - Í versta tilfelli er fjöldi umferða í lykkjunni $\boldsymbol{n}$
  - Samanburðurinn $a_i = x$ er framkvæmdur í hverri umferð lykkjunnar
    - n sinnum samtals
  - Í byrjun hverrar umferðar er athugað hvort $i < n$ og einnig eftir lok síðustu umferðar
    - $n + 1$ sinnum samtals
  - Heildarfjöldi samanburða er því $n + n + 1 = 2n + 1$
- Tímaflækja algrímsins er því $\Theta(n)$

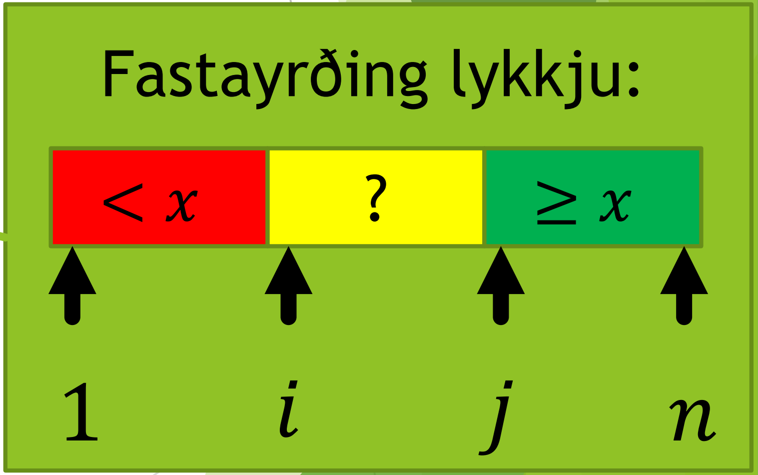
Hver er tímaflækja línulegrar leitar að meðaltali?

- **Lausn:** Gerum ráð fyrir að gildið sem leitað er að sé í rununni og að öll sæti í rununni séu jafnlíkleg til að innihalda gildið
  - Að meðaltali er fjöldi umferða í lykkjunni $\boldsymbol{n/2}$
  - Samanburðurinn $a_i = x$ er framkvæmdur í hverri umferð lykkjunnar
    - $n/2$ sinnum að meðaltali
  - Í byrjun hverrar umferðar er athugað hvort $i < n$ og einnig eftir lok síðustu umferðar
    - $n/2 + 1$ sinnum samtals
  - Heildarfjöldi samanburða er því $n/2 + n/2 + 1 = n + 1$
- Tímaflækja algrímsins er því $\Theta(n)$

Helmingunarleit (binary search)

{
Notkun: i := leita(x, $a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: x er heiltala,
$a_1, a_2, \dots, a_n$ eru heiltölur í vaxandi röð
Eftir: $1 \le i \le n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \le a_i, \dots, a_n$
}

stef leita(x : heiltala, $a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
  i := 1; $j := n + 1$
  meðan $i \ne j$
    { $1 \le i \le j \le n+1$, $a_1, \dots, a_{i-1} < x \le a_j, \dots, a_n$ }
    $m := \lfloor (i+j)/2 \rfloor$
    ef $a_m < x$ **þá** $i := m + 1$
    annars $j := m$
  skila i



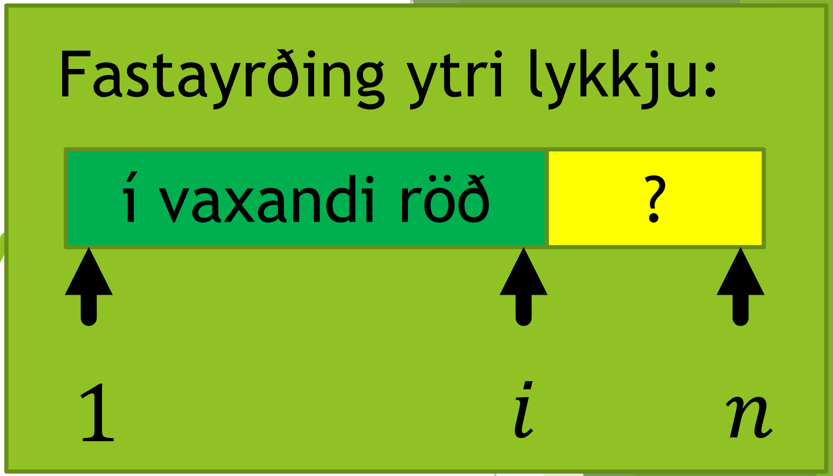
Hver er tímaflækja helmingunarleitar í versta tilfelli?

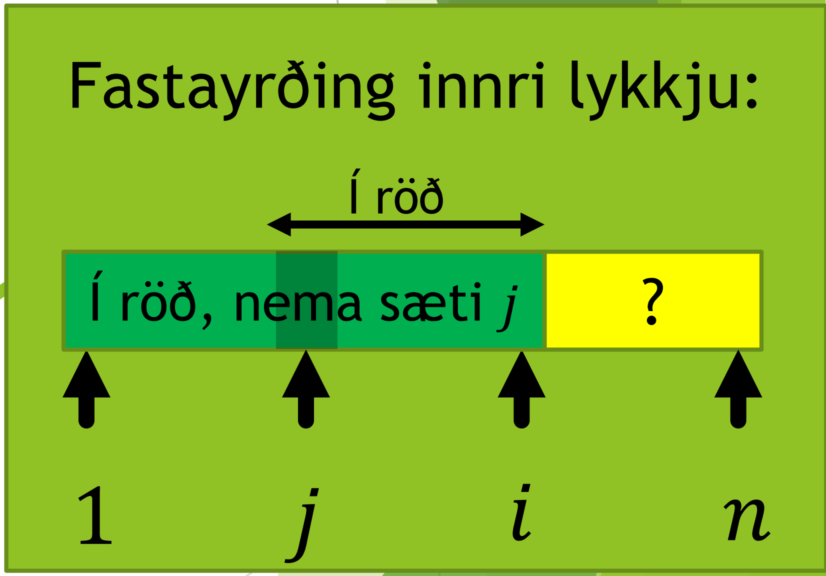
- **Lausn:** Teljum fjölda samanburða
  - Í hverri umferð lykkjunnar helmingast (a.m.k.) fjöldi óþekktra sæta, $\boldsymbol{j-i}$, sem í upphafi eru $\boldsymbol{n}$ talsins
    - Fjöldi umferða í lykkjunni er því í mesta lagi (fyrir $n > 0$)
      - $1 + log_2(n)$
  - Samanburðurinn $a_m < x$ er framkvæmdur einu sinni í hverri umferð lykkjunnar
    - Samtals $1 + log_2(n)$ sinnum í mesta lagi
  - Samanburðurinn $i \neq j$ er framkvæmdur einu sinni á undan hverri umferð lykkjunnar og einu sinni enn eftir að öllum umferðum er lokið
    - Samtals $2 + log_2(n)$ sinnum í mesta lagi
  - Heildarfjöldi samanburða er því $3 + 2\log_2(n)$
- Tímaflækja algrímsins er því $\Theta(\log(n))$, mun betri en línuleg leit

Röðun: Insertion sort

{
Notkun: raða($a_1, a_2, \dots, a_n$)
Fyrir: $a_1, a_2, \dots, a_n$ er runa af rauntölubreytum
Eftir: Gildunum í rununni hefur verið umraðað svo gildin eru í vaxandi röð
}

stef raða($a_1, a_2, \dots, a_n$: runa af rauntölubreytum)
    $i := 0$
    meðan $i \neq n$
        { $a_1, a_2, \dots, a_i$ er í vaxandi röð, $0 \leq i \leq n$ }
        $i := i + 1;\quad j := i$
        meðan $j \neq 1$ **og** $a_j < a_{j-1}$
            { $1 \leq j \leq i \leq n$, $a_j, a_{j+1}, \dots, a_i$ er í vaxandi röð, }
            { $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_i$ er einnig í vaxandi röð. }
            { Gildið í sæti a_j er því ef til vill of aftarlega. }
            $\boxed{m := a_j;\quad a_j := a_{j-1};\quad a_{j-1} := m;}$ $\;j := j - 1$





Víxlum gildunum í a_j og a_{j-1}
Færir gildið framar í rununni

Hver er tímaflækja insertion sort í versta tilfelli?

- **Lausn:** Teljum fjölda samanburða
  - Fjöldi umferða í ytri lykkjunni er $\boldsymbol{n}$, þar sem i hefur í byrjun hverrar umferðar gildin $i = 0,1,\ldots,n-1$
    - Fyrir hverja slíka umferð ytri lykkjunnar verða í versta tilfelli farnar i umferðir innri lykkju, með i samanburðum $a_j < a_{j-1}$ auk $i+1$ samanburða $j \neq 1$
      - Heildarfjöldi: $[0+1+\cdots+(n-1)]+[1+2+\cdots+n]=n^2$
    - Í upphafi hverrar umferðar ytri lykkju og einnig eftir síðustu er framkvæmdur einn samanburður, samtals $n+1$ samanburðir
  - Heildarfjöldi samanburða er því n^2+n+1
- Tímaflækja algrímsins er því $\Theta(n^2)$