TÖL104G Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði Verkefnablað 2 — Lausnir

9. september 2015

Dæmi 1 (25%)

Notið sanntöflu (*truth table*) til að sanna að yrðingin (*proposition*)

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

sé sísanna (*tautology*).
Lausn:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1

Þar eð síðasta súlan inniheldur aðeins 1 sjáum við að yrðingin er sísanna.

Dæmi 2 (50%)

Notið rökstyttingu (*resolution*) til að sanna að

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow (r \wedge s))] \rightarrow (p \rightarrow s)$$

Gera skal eftirfarandi skref.

Regla	Íslenskt nafn reglu	Enskt nafn reglu
$p \lor q \equiv q \lor p$	Víxlregla	Commutative
$p \land q \equiv q \land p$		
$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$	Tengiregla	Associative
$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$		
$p \land (q \lor r) \equiv p \land q \lor p \land r$	Dreifiregla	Distributive
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$		
$p \land 1 \equiv p$	Samsemdarregla	Idempotent
$p \lor 0 \equiv p$		
$p \land (p \lor q) \equiv p$	Gleypiregla	Absorbtion
$p \lor (p \land q) \equiv p$		
$p \lor \neg p \equiv 1$	Neitunarregla	Complementation
$p \land \neg p \equiv 0$		
$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$	De Morgans regla	De Morgan
$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$		
$\neg\neg p \equiv p$	Tvöföld neitun	Involution
$p \to q \equiv \neg p \lor q$	Nafnlaus	Anonymous

Tafla 1: Ýmsar rökreglur

1. Notið ýmsar umritunarreglur sem finna má í bókinni og einnig í töflu 1 til að breyta yrðingunni $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$ í einföldum skrefum á sniðið $a_1 \land a_2 \land \ldots \land a_n$ þar sem sérhvert a_i er á sniðinu $b_{i1} \lor b_{i2} \lor \ldots \lor b_{ik_i}$ og sérhvert b_{ij} er eitt af p, q, r, s, $\neg p$, $\neg q$, $\neg r$ eða $\neg s$. Einnig viljum við að sérhvert b_{ij} innihaldi hvorki bæði p og $\neg p$ né bæði q og $\neg q$, o.s.frv. Tiltakið í hverju skrefi hvaða umritunarreglu er verið að beita. Neðsta nafnlausa reglan[1] er til dæmis gagnleg, ásamt dreifireglum og reglum De Morgans.

   Takið eftir að yrðingin sem út kemur er á sniðinu sem kallast *conjunctive normal form* (við gætum kallað það *og-að staðalsnið* á íslensku), sem þykir sérlega hagstætt snið fyrir tölvuvæddar röksemdafærslur.

   Takið einnig eftir að þegar þessu skrefi er lokið þá er sérhvert a_i þekkt afleiðing, yrðing sem er óhjákvæmileg afleiðing af yrðingunni $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$.

   Gerið það sama fyrir neitunina af afleiðingunni sem þið viljið sanna, þ.e. fyrir $\neg(p \to s)$. Út úr því fáið þið einnig einhver ný a_i.

2. Teljið liðina $a_1, a_2, \ldots, a_n$ upp í númeraðri röð, einn lið í hverri línu.

3. Bætið síðan við nýjum númeruðum liðum sem hver og einn er búinn til með því að beita rökstyttingu á tvo fyrri liði. Tiltakið í hvert sinn hvaða tvo fyrri

[1]Ég veit ekki til þess að hún hafi nafn, en þetta er eina reglan fyrir $\to$ sem við þurfum í þessu verkefni.

liði er verið að stytta saman.

Takið eftir að sérhver nýr liður er ný þekkt óhjákvæmileg afleiðing.

4. Endirinn fæst þegar rökstyttingaraðgerð gefur niðurstöðuna 0, sem sýnir að það gefur mótsögn að gefa sér að forsendurnar séu sannar og að afleiðingin sé ekki sönn.

Lausn 1: Viljum sanna að

$$[(p \to q) \land (q \to (r \land s))] \to (p \to s)$$

Við munum nota rökstyttingu til að sanna þetta. Aðferðin felst í að sanna að

$$[(p \to q) \land (q \to (r \land s))] \land \neg(p \to s)$$

sé mótsögn.

1. Umritum fyrst $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$ á og-að staðalsnið.

   Beitum reglunni $p \to q \equiv \neg p \lor q$ tvisvar til til að losna við $\to$ og fáum $(p \to q) \land (q \to (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (q \to (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor (r \land s))$.

   Beitum síðan dreifireglu á aftari liðinn og fáum $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \land (\neg q \lor s)$, sem er á og-uðu staðalsniði.

2. Neitunin á afleiðingunni er neitunin á $p \to s$, þ.e. $\neg(p \to s)$. Breytum þessu á og-að staðalsnið: $\neg(p \to s) \equiv \neg(\neg p \lor s)$ (samkvæmt reglunni neðst í töflunni), og einföldum síðan frekar með De Morgan, $\neg(\neg p \lor s) \equiv \neg\neg p \land \neg s$, og síðan notum við regluna um tvöfalda neitun og fáum $p \land \neg s$, sem er á og-uðu staðalsniði.

3. Við höfum nú eftirfarandi klausur:
   k_1: $\neg p \lor q$
   k_2: $\neg q \lor r$
   k_3: $\neg q \lor s$
   k_4: p
   k_5: $\neg s$
   og við höldum áfram að framleiða klausur með rökstyttingu. Fyrst (þetta er alls ekki eina leiðin) styttum við saman k_1 og k_4 og fáum
   k_6: q
   síðan k_3 og k_6 sem gefur
   k_7: s
   síðan k_5 og k_7 sem gefur
   k_8: 0
   og þar með erum við búin að sanna að það leiðir til mótsagnar að gera ráð fyrir að $p \to s$ sé ekki afleiðing af $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$. Við drögum því þá ályktun að $p \to s$ sé óhjákvæmileg afleiðing af $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$.

Lausn 2: Viljum sanna að

$$[(p \to q) \land (q \to (r \land s))] \to (p \to s)$$

Við munum nota rökstyttingu til að sanna þetta. Aðferðin felst í að leiða út klausur eða klausu sem jafngilda afleiðingunni út frá klausum eða klausu sem jafngilda forsendunni.

1. Umritum fyrst forsenduna $(p \to q) \land (q \to (r \land s))$ á og-að staðalsnið.

   Beitum reglunni $p \to q \equiv \neg p \lor q$ tvisvar til til að losna við $\to$ og fáum $(p \to q) \land (q \to (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (q \to (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor (r \land s))$.

   Beitum síðan dreifireglu á aftari liðinn og fáum $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor (r \land s)) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \land (\neg q \lor s)$, sem er á og-uðu staðalsniði.

2. Umritum síðan afleiðinguna $p \to s$ á og-að staðalsnið: $p \to s \equiv \neg p \lor s$ (samkvæmt reglunni neðst í töflunni). Þetta er ein klausa.

3. Við höfum nú eftirfarandi klausur frá forsendunni:
   k_1: $\neg p \lor q$
   k_2: $\neg q \lor r$
   k_3: $\neg q \lor s$
   og við höldum áfram að framleiða klausur með rökstyttingu. Styttum saman k_1 og k_3 og fáum
   k_4: $\neg p \lor s$

   og þar með erum við búin að sanna að forsendan leiðir til afleiðingarinnar.

Dæmi 3 (25%)

Nonni, Siggi og Gunni, allir sannsöglir og færir rökfræðingar, gengu eitt sinn saman inn á krá. Barþjónninn spurði þá hvort þeir vildu allir fá drykk. Nonni svaraði fyrstur „ég veit það ekki.“ Þá svaraði Siggi „ég veit það ekki.“ Loks svaraði Gunni „já.“

Útskýrið.

Lausn: Þegar rökfræðingarnir gengu inn á krána ætluðu þeir allir að fá drykk, en enginn þeirra vissi að svo væri fyrir hina rökfræðingana. Nonni gat því ekki svarað „já“ því þá hefði hann verið að fullyrða að Siggi og Gunni ætluðu báðir að fá drykk og hann gat ekki svarað „nei“ því þá hefði hann verið að fullyrða að annar hvor þeirra ætlaði ekki að fá drykk. Sem rökfræðingur gat hann því ekki sagt neitt annað en „ég veit það ekki“. Svipað gildir um Sigga, en þegar kom að Gunna þá vissi hann að bæði Nonni og Siggi ætluðu að fá drykk (annars hefði annar þeirra svarað „nei“), og hann vissi því að þeir ætluðu allir að fá drykk og svaraði því „já“.

Ef annar hvor fyrri rökfræðinganna hefði ekki viljað drykk hefði sá hinn sami svarað „nei“ því það væri þá rétt svar og hann myndi vita það, óháð því hvort hinir vildu drykk eður ei. Ef fyrri tveir rökfræðingarnir hefðu vitað fyrirfram um fyrirætlanir þeirra sem seinna svöruðu þá hefðu þeir svarað „já“. Eini möguleikinn á því að svör rökfræðinganna séu rökrétt er því að þeir vildu allir drykk en vissu ekki um fyrirætlanir hvers annars, fyrr en hinir svöruðu.