Línuleg algebra A

Lausnir fyrir fyrsta skilaverkefni

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 2)

8. september 2015

Dæmi 1. Gefið er línulegt jöfnuhneppi

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & & & + & 3x_6 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & & & + & x_6 & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & & & = & 1 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & & & = & 6 \end{array}$$

(a) Setjið upp tilheyrandi aukið fylki.

(b) Leysið jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu og aftur-á-bak innsetningu.

(c) Er vigurinn $(1, 1, 3, -1, 0, 2)$ lausn á hneppinu?

Lausn.

(a) Aukna fylkið er

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 9 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

(b) Byrjum á að koma fylkinu á efra stallaform.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 9 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 - 4L_1}]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & -12 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{L_4 \to (-\frac{1}{3})L_4} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \to (-\frac{1}{5})L_3]{L_4 \to L_4 - L_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Beitum nú aftur-á-bak innsetningu á línulega jöfnuhneppið sem tilheyrir þessu síðasta aukna fylki. Breyturnar x_2, x_4 og x_5 eru frjálsar vegna þess að dálkar númer tvö, fjögur og fimm hafa ekki forustustuðla. Með því að setja $x_2 = s$, $x_4 = t$ og $x_5 = u$ fæst þá

$$x_6 = 1, \qquad x_3 = 6 - x_4 + x_5 - 4x_6 = 6 - t + u - 4 = 2 - t + u$$

og $x_1 = 6 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_6 = 6 + s - (2 - t + u) - 3t - 3 = 1 + s - 2t - u.$

Lausnir hneppisins eru því allir vigrar af gerðinni

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + s - 2t - u \\ s \\ 2 - t + u \\ t \\ u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

þar sem s, t og u mega vera hvaða rauntölur sem er. Með öðrum orðum er lausnamengi hneppisins 3-flatneskjan

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Takið vel eftir því að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er lausn á upphaflega hneppinu, en vigrarnir $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sem stika flatneskjuna, eru lausnir á tilheyrandi óhliðruðu hneppi.

(c) Vigurinn $(1, 1, 3, -1, 0, 2)$ er ekki lausn á hneppinu vegna þess að sjötta hnit hans er 2 en ekki 1.

Dæmi 2. Gefið er línulegt jöfnuhneppi $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ og látum $\mathbf{A}$ vera tilheyrandi aukið fylki, þ.e.a.s. $\mathbf{A} = [\mathbf{C} \,|\, \mathbf{b}]$. Sannið eftirfarandi fullyrðingar eða hrekið þær með mótdæmum.

(a) Ef hneppið hefur fleiri en eina lausn, þá hafur fylkið $\mathbf{A}$ a.m.k. eina línu sem er núll.

(b) Ef fylkið $\mathbf{A}$ hefur línu sem er núll, þá hefur hneppið fleiri en eina lausn.

(c) Ef hneppið hefur enga lausn, þá hefur rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{C}$ a.m.k. eina línu sem er núll

(d) Ef rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{C}$ hefur línu sem er núll, þá hefur hneppið enga lausn.

(e) Til er vigur $\mathbf{c}$ sem hefur þann eiginleika að hneppið $\mathbf{Cx} = \mathbf{c}$ hefur enga lausn.

(f) Ef hneppið hefur lausn, þá hefur hneppið $\mathbf{Cx} = \mathbf{c}$ lausn fyrir hvaða vigrur $\mathbf{c}$ sem er.

Lausn. (a) Röng fullyrðing. Til dæmis er $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ mótdæmi.

(b) Röng fullyrðing. Til dæmis et fylkið $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$ mótdæmi.

(c) Rétt fullyrðing. Látum $\mathbf{U}$ tákna rudda efri stallagerð fylkisins $\mathbf{C}$. Ef $\mathbf{U}$ hefur enga núlllínu, þá er hægt að leysa jöfnuhneppið $\mathbf{Ux} = \mathbf{v}$ með aftur-á-bak innsetningu fyrir hvaða hægri hlið $\mathbf{v}$ sem er. Af því má sjá að sérhvert línulegt jöfnuhneppi, sem hefur $\mathbf{C}$ sem stuðlafylki, hefur lausn.

(d) Röng fullyrðing. Til dæmis er $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$ mótdæmi.

(e) Röng fullyrðing. Til dæmis er $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \end{array}\right]$ mótdæmi.

(f) Röng fullyrðing. Til dæmis er $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$ mótdæmi.

Dæmi. 3. Gerið grein fyrir að sérhverjar tvær af jöfnum línulega jöfnuhneppisins hér að neðan hafi sameiginlega lausn, en hneppið sjálft hafi enga.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & 6y & = & 11 \\ 5x & + & y & = & 6 \end{array}$$

Túlkið lausnamengi hverrar jöfnu fyrir sig sem línu í hnitasléttunni og sýnið með lauslegri skýringarmynd hvað hér er á seyði.

Lausn. Lítum fyrst á hneppið sem fyrstu tvær jöfnurnar mynda. Með því að draga þá fyrri frá þeirri seinni fæst hneppið

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ & - & 8y & = & 8 \end{array}$$

og með aftur-á-bak innsetningu fæst að þetta hneppi hefur nákvæmlega eina lausn, $(x, y) = (5, -1)$. Á sama hátt fæst að línulegu jöfnuhneppin, sem annars vegar fyrsta og þriðja jafnan og hins vegar önnur og þriðja jafnan mynda, hafa bæði nákvæmlega eina lausn.

Lítum nú á hneppið í heild og komum tilheyrandi auknu fylki á efra stallaform.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{9}{8}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{89}{9} \end{array}\right].$$

Þar sem neðsta jafnan í línulega jöfnuhneppinu, sem tilheyrir síðasta aukna fylkinu, hefur enga lausn þá hefur upphaflega jöfnuhneppið ekki heldur neina lausn.

Af tæknilegum ástæðum verður ekki teiknuð mynd hér. Rúmfræðileg túlkun þessarar niðurstöðu er hins vegar sú að sérhverjar tvær af línunum þremur skerast, en línurnar skerast ekki allar þrjár í sama punkti.

Dæmi. 4. Finnið öll möguleg gildi á rauntölunum a og b þannig að jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 1 \\ x & - & 4y & = & b \end{array}$$

hafi

(a) enga lausn

(b) nákvæmlega eina lausn

(c) óendanlega margar lausnir

Lausn. Víxlum fyrst á jönunum og fáum hneppið

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 4y & = & b \\ ax & + & y & = & 1 \end{array}$$

Drögum svo efri jöfnuna frá þeirri neðri og fáum línulega jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & b \\ & & (1+4a)y & = & 1-ab \end{array}$$

Út frá þessu hneppi getum við nú ályktað með eftirfarandi hætti.

(a) Engin lausn fæst þegar $1 + 4a = 0$ og $1 - ab \neq 0$, en það jafngildir því að $a = -\frac{1}{4}$ og $b \neq -4$.

(b) Við fáum nákvæmlega eina lausn þegar $1 + 4a \neq 0$ þ.e.a.s. þegar $a \neq -\frac{1}{4}$.

(c) Hneppið hefur óendanlega margar lausnir þegar $a = -\frac{1}{4}$ og $b = -4$.