Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 2

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 3)

15. september 2015

Dæmi 1. Gefin eru fylkin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Segið til um hvort fylkin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{BA}$ (hvert um sig) eru af

(a) efri stallagerð (b) ruddri efri stallagerð.

Finnið síðan metorð (e. *rank*) allra fylkjanna.

Lausn.

- Fylkið $\mathbf{A}$ er ekki af efri stallagerð og þar með ekki heldur af ruddri efri stallagerð. Það er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ sem er af efri stallagerð og hefur enga núlllínu. Af því sést að $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 3$.
- Fylkið $\mathbf{B}$ er af efri stallagerð en ekki af ruddri efri stallagerð. Hvorug línanna í $\mathbf{B}$ er núll svo að $\text{Rank}(\mathbf{B}) = 2$.
- Fylkið $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ er ekki af efri stallagerð og þar með ekki heldur af ruddri efri stallagerð. Það er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix}$ sem er af efri stallagerð og hefur enga núlllínu. Þar með er $\text{Rank}(\mathbf{BA}) = 2$.

Dæmi 2.

(a) Er vigurinn $(1, 0, 1, 1)$ í spanni vigranna $(2, 0, 1, 1)$ og $(3, 0, 0, 2)$?

(b) Eru ofangreindir þrír vigrar línulega óháðir?

Lausn. (a) Vigurinn $(1, 0, 1, 1)$ er í spanni vigranna $(2, 0, 1, 1)$ og $(3, 0, 0, 2)$ ef og aðeins ef jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hefur lausn. Setjum upp aukna fylkið og beitum Gauss-eyðing:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - \frac{1}{2}L_1]{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_4} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Þar eð línulega jöfnuhneppið sem tilheyrir síðasta aukna fylkinu hefur enga lausn þá er vigurinn $(1,0,1,1)$ ekki í spanni vigranna $(2,0,1,1)$ og $(3,0,0,2)$

(b) Vigrarnir þrír eru línulega óháðir þá og því aðeins að óhliðraða jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hafi enga aðra lausn en núlllausnina. Af útreikningunum í lið (a) má sjá að fylkið $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sem er af efri stallagerð og hefur forusutustuðul í hverjum dálki. Hneppið hefur því engar aðrar lausnir en núlllausnina og þar með eru vigrarnir línulega óháðir.

Dæmi. 3. Fyrir hvaða rauntölur a og b er línulega jöfnuhneppið

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ósamkvæmt?

Lausn. Hér ber okkur að finna *allar* rauntölur a og b sem gera jöfnuhneppið ósamkvæmt. Með því að setja upp aukna fylkið sem tilheyrir hneppinu og beita línuaðgerðum fáum við:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - (1-a)L_2]{L_3 \to L_3 - aL_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-ab & 1+a \end{array}\right]$$

Af þessu getum við ályktað að hneppið hefur

- Nákvæmlega eina lausn ef $ab \neq 1$.
- Óendanlega margar lausnir ef $ab = 1$ og $1 + a = 0$.
- Enga lausn ef $ab = 1$ og $1 + a \neq 0$.

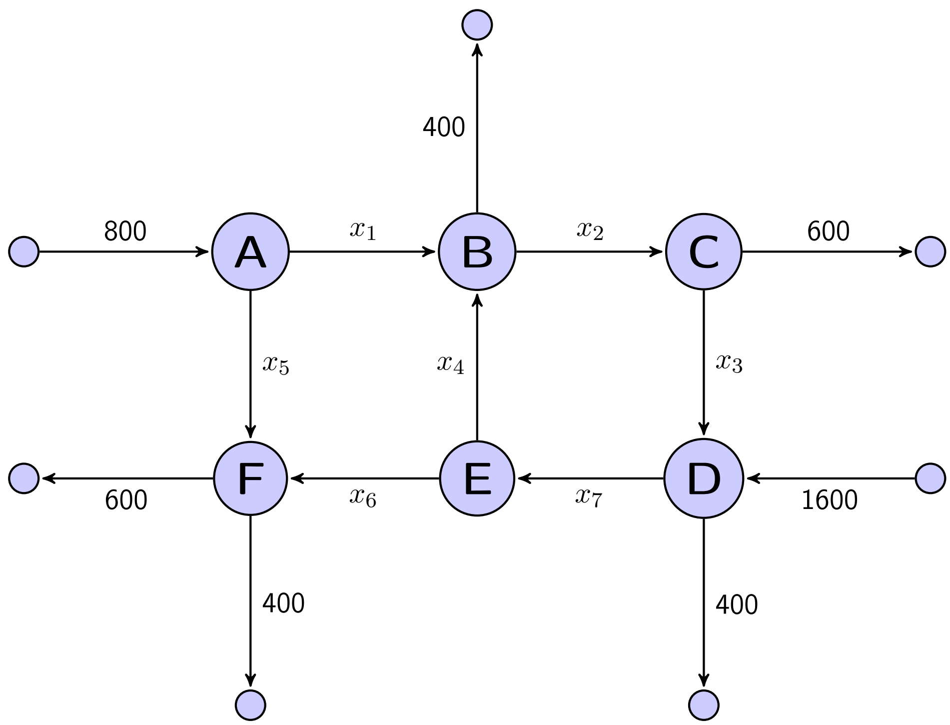
Niðurstaðan er því sú að hneppið er ósamkvæmt þá og því aðeins að $a \neq 0$, $a \neq -1$ og $b = 1/a$.

Dæmi. 4. Myndin hér að neðan lýsir umferðarálagi (mælt í fjölda bíla á klukkustund) á neti einstefnugatna.

(a) Notið allar upplýsingar sem felast í myndinni til að setja upp línulegt jöfnuhneppi sem lýsir sambandinu á milli óþekktu stærðanna $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

(b) Leysið jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu.

(c) Gefum okkur nú að $x_6 = 400$ og $x_7 = 1500$. Gerið grein fyrir að hneppið hafi þá aðeins eina lausn og finnið hana.



Lausn. (a) Með því að rekja okkur eftir gatnamótunum í stafrófsröð og nota okkur að fjöldi bíla sem fer inn í gatnamót er jafn fjöldanum sem fer út úr þeim fáum við línulega jöfnuhneppið

$$
\begin{aligned}
800 &= x_1 + x_5 \\
x_1 + x_4 &= 400 + x_2 \\
x_2 &= 600 + x_3 \\
1600 + x_3 &= 400 + x_7 \\
x_7 &= x_4 + x_6 \\
x_5 + x_6 &= 1000.
\end{aligned}
$$

(b) Aukna fylkið sem tilheyrir línulega jöfnuhneppinu hér að ofan er

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000
\end{array}\right]
$$

og rudd efri stallagerð þess er

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Við sjáum að breyturnar x_6 og x_7 eru frjálsar svo ef við setjum $x_6 = s$ og $x_7 = t$, þá fæst að almenn lausn hneppisins er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -600 \\ -1200 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

þar sem s og t mega vera hvaða rauntölur sem er.

(c) Með því að setja $s = 400$ og $t = 1500$ inn í almennu lausnina hérna að ofan fæst $x_1 = 200$, $x_2 = 900$, $x_3 = 300$, $x_4 = 1100$ og $x_5 = 600$.

Dæmi 5. Látum $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vera upptalningu af vigrum í $\mathbb{R}^m$ og búum til nýja upptalningu $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ af vigrum í $\mathbb{R}^m$ með því að setja $\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1$ og

$$\mathbf{w}_j := \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_j \qquad \text{fyrir} \quad j = 2, \ldots, k.$$

Sýnið að upptalningin $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sé línulega óháð þá og því aðeins að upptalningin $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ sé línulega óháð.

Lausn. Gefum okkur fyrst að vigarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ séu línulega óháðir og sýnum að vigrarnir $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ séu línulega óháðir. Til þess þurfum við að sýna að eina línulega samantektin af vigrunum $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ sem gefur núllvigurinn sé sú sem hefur alla stuðla jafna núlli. Gerum því ráð fyrir að $c_1, c_2, \ldots, c_k$ séu rauntölur sem uppfylla jöfnuna

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

og sýnum að það hafi í för með sér að $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Með því að setja $\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_j$ inn í stað $\mathbf{w}_j$ í jöfnunni hér að ofan fáum við

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \;=\; c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k \;&=\; c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \cdots + c_k(\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k) \\ &=\; (c_1 + \cdots + c_k)\mathbf{v}_1 + (c_2 + \cdots + c_k)\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

En vigrarnir $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eru línulega óháðir svo

$$\mathbf{0} \;=\; (c_1 + \cdots + c_k)\mathbf{v}_1 + (c_2 + \cdots + c_k)\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

jafngildir því að $c_1 + \cdots + c_k \;=\; c_2 + \cdots + c_k \;=\; \cdots \;=\; c_k \;=\; 0$ og með aftur-á-bak innsetningu sjáum við að $c_1 = \cdots = c_k = 0$ er eina lausnin á þessu hneppi.

Gefum okkur næst að vigarnir $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ séu línulega óháðir og sýnum að vigarnir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ séu línulega óháðir. Á sama hátt og áður gerum við ráð fyrir að $c_1, c_2, \ldots, c_k$ séu rauntölur sem uppfylla jöfnuna

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

og sýnum að það hafi í för með sér að $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Tökum fyrst eftir því að

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_j - \mathbf{w}_{j-1} \qquad \text{fyrir} \quad j = 2, \ldots, k$$

svo með innsetningu í jöfnuna hér að ofan fáum við

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \;=\; c_1\mathbf{w}_1 + c_2(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) + \cdots + c_k(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}) \\ &= (c_1 - c_2)\mathbf{w}_1 + (c_2 - c_3) + \cdots + (c_{k-1} - c_k)\mathbf{w}_{k-1} + c_k\mathbf{w}_k. \end{aligned}$$

Þar sem vigrarnir $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ eru línulega óháðir, þá hefur þetta í för með sér

$$c_1 - c_2 = c_2 - c_3 = \cdots = c_{k-1} - c_k = c_k = 0$$

og fljótséð er að þetta hneppi hefur aðeins lausnina $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Athugasemd. Í sönnuninni hér að ofan höfum við ekki notað neitt umfram það að hnitarúmið $\mathbb{R}^m$ er *vigurrúm*. Niðurstaðan er því rétt þó í stað hnitarúmsins $\mathbb{R}^m$ komi hvaða vigurrúm V sem er.