Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Vika 4

Kafli 2: Fjöldatölur, teljanleiki, fylki

Kafli 3: Algrím, stöðvunarvandamálið, flækjustig

Fjöldatölur mengja (cardinality)

- Fjöldatölur
- Teljanleg mengi
- Reiknanleiki

Fjöldatala

- **Skilgreining:** Fjöldatala mengis A er sama og fjöldatala mengis B, táknað $|A| = |B|$, þá og því aðeins að til sé gagntækt fall frá A til B.
- Ef til er eintækt fall frá A til B þá er fjöldatala A minni en eða jöfn fjöldatölu B, táknað $|A| \leq |B|$
- Ef $|A| \leq |B|$ og A og B hafa mismunandi fjöldatölur (þ.e. hafa ekki sömu fjöldatölu), þá segjum við að fjöldatala A sé minni en fjöldatala B, táknað $|A| < |B|$

Fjöldatala

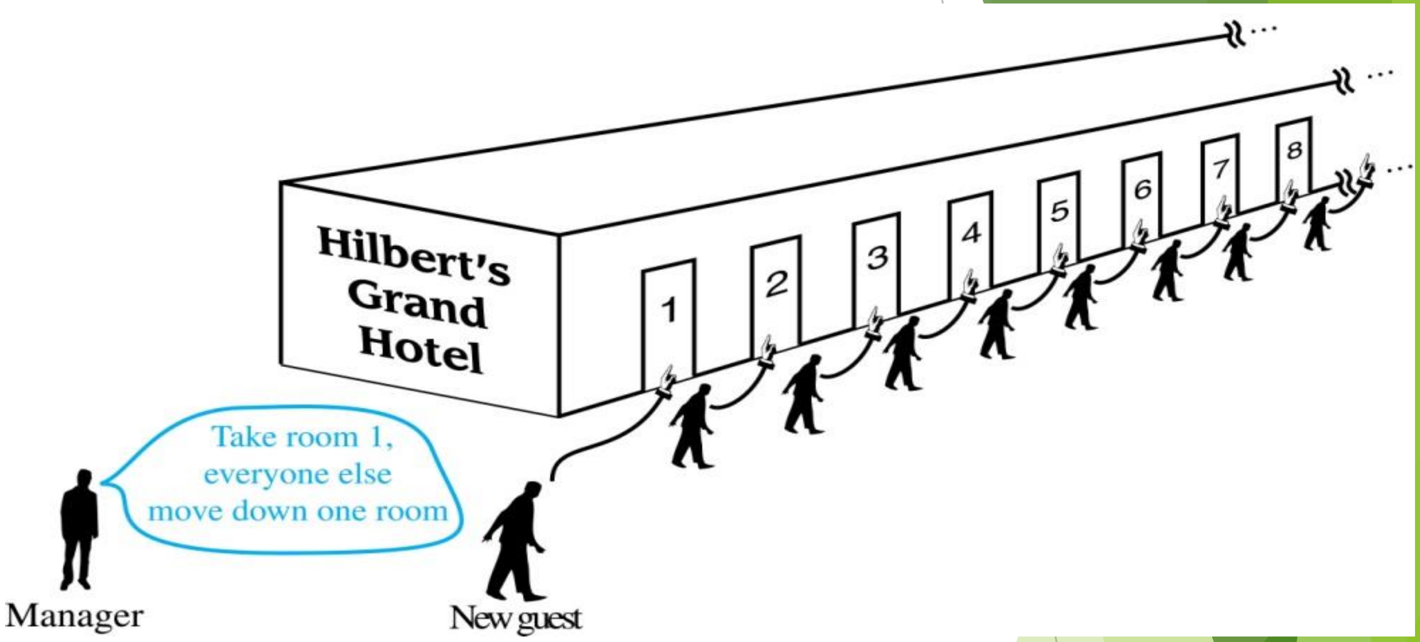
- **Skilgreining:** Mengi sem er annaðhvort endanlegt eða hefur sömu fjöldatölu og jákvæðu heiltölurnar ($\mathbb{Z}^+$) er kallað teljanlegt. Mengi sem er ekki teljanlegt er sagt vera óteljanlegt.
- Mengi rauntalna R er óteljanlegt.
- Þegar óendanlegt mengi S er teljanlegt (teljanlega óendanlegt) er fjöldatala þess $\aleph_0$ (þar sem $\aleph$ (aleph) er fyrsti stafurinn í hebreska stafrófinu). Við skrifum $|S| = \aleph_0$ og segjum að fjöldatala S sé aleph-núll.

Ákvörðun teljanleika

- Óendanlegt mengi er teljanlegt þþaa hægt sé að telja upp öll stök mengisins í runu, þar sem vísarnir í rununni eru jákvæðar heiltölur, þ.e.
$$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$
þannig að öll stökin í S komi fyrir í rununni
- Ástæða þessa er að það hlýtur að vera til gagntækt (eintækt og átækt) fall
$$\mathrm{f}: \mathbb{Z}^+ \to S$$
og við getum þá látið $a_i = f(i)$, þ.e. $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots$

Hótelið hans Hilberts

- Hótelið inniheldur teljanlega óendanlega mörg herbergi
- Við getum ávallt bætt við gesti (hvers vegna?)
- Við getum ávallt bætt við teljanlega mörgum gestum
- Við getum jafnvel bætt við öllum gestum sem koma í teljanlega mörgum rútum sem hver inniheldur teljanlega marga nýja gesti



Hvernig sýnum við teljanleika mengis?

- **Dæmi 1:** Hvernig sýnum við að mengi jákvæðra sléttra heiltalna S sé teljanlega óendanlegt?
- **Svar:** Þurfum að sýna gagntækt fall $f\colon \mathbb{Z}^+ \to S$. Skilgreinum $f(x) = 2x$ og málið er leyst. Fallið er eintækt vegna þess að ef $f(a) = f(b)$ þá fæst $2a = 2b$ og þarmeð $a = b$. Fallið er átækt vegna þess að ef z er jákvæð slétt tala þá er $\frac{z}{2}$ heiltala í $\mathbb{Z}^+$ og $f\left(\frac{z}{2}\right) = z$

Hvernig sýnum við teljanleika mengis?

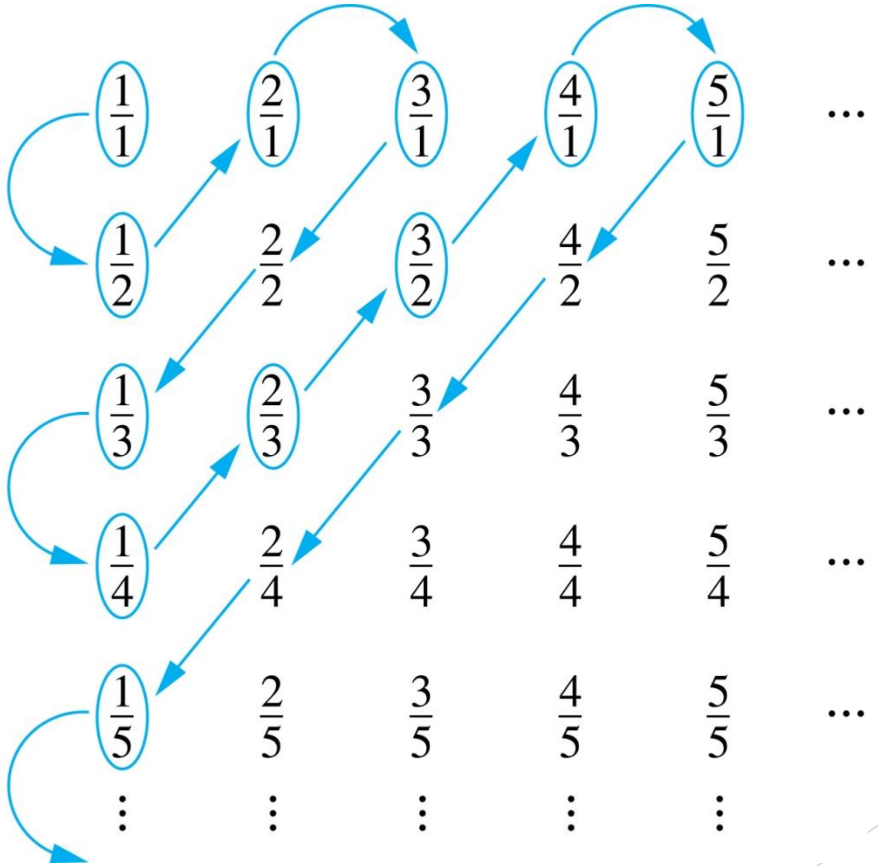
- **Dæmi 2:** Hvernig sýnum við að mengi heiltalna $\mathbb{Z}$ sé teljanlegt?
- **Svar:** Við getum talið stökin upp í röð: $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$
- eða við getum skilgreint gagntækt fall $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (athugið að $\mathbb{N}$ er teljanlegt):
  - Þegar n er slétt tala: $f(n) = n/2$
  - Þegar n er oddatala: $f(n) = -(n-1)/2$

Ræðu tölurnar eru teljanlegar

- **Skilgreining:** Ræð tala er tala sem hægt er að tákna sem $\frac{p}{q}$ þar sem p og q eru heiltölur og $q \neq 0$.
  - ¾ er ræð tala
  - $\sqrt{2}$ er ekki ræð tala
- **Dæmi 3:** Hvernig sýnum við að mengi ræðra talna, $\mathbb{Q}$, er teljanlegt?
- **Svar:** Sjá á næstu blaðsíðu hvernig hægt er að telja upp allar jákvæðar ræðar tölur

Jákvæðar ræðar tölur eru teljanlegar

Tölur sem ekki eru hringaðar eru ekki taldar með því þær eru endurtekningar



Strengir eru teljanlegir

- Dæmi 4: Hvernig sýnum við að mengi endanlegra strengja, S, yfir endanlegt stafróf er teljanlega óendanlegt?
- Svar: Sýnum að telja má upp alla strengina í runu. Fremst í rununni eru
  1. Allir strengir af lengd 0 í stafrófsröð
  2. Síðan allir strengir af lengd 1 í stafrófsröð
  3. Síðan allir strengir af lengt 2 æi stafrófsröð
  4. Og svo framvegis
- Þetta gefur gagntækt fall frá $\mathbb{Z}^+$ til S

Rauntölurnar eru ekki teljanlegar

- Dæmi: Hvernig sýnum við að $\mathbb{R}$ er ekki teljanlegt?
- Svar: Notum óbeina sönnun. Gerum ráð fyrir að $\mathbb{R}$ sé teljanlegt. Þá er mengi rauntalna milli 0 og 1 einnig teljanlegt. Þar eð það er teljanlegt er hægt að telja upp allar tölurnar í bilinu í runu í tugakerfi:

$$\begin{array}{l}
0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}\ldots \\
0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}d_{25}d_{26}d_{27}\ldots \\
0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}d_{35}d_{36}d_{37}\ldots \\
0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}d_{45}d_{46}d_{47}\ldots \\
0.d_{51}d_{52}d_{53}d_{54}d_{55}d_{56}d_{57}\ldots \\
0.d_{61}d_{62}d_{63}d_{64}d_{65}d_{66}d_{67}\ldots \\
. \\
. \\
.
\end{array}$$

Búum síðan til töluna $r = 0.r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7\ldots$

þar sem $r_i = 3$ ef $d_{ii} \neq 3$ og $r_i = 4$ ef $d_{ii} = 3$

Þá er r ójafnt öllum tölunum í rununni, sem er mótsögn við forsenduna að hægt sé að telja upp allar tölurnar í runu

Reknanleg föll

- Skilgreining: Fall $f: A \rightarrow B$ er reiknanlegt ef hægt er að skrifa forrit sem reiknar $f(a)$ fyrir hvaða gildi $a \in A$ sem er (á endanlegum tíma)
- Ef fall er ekki reiknanlegt þá segjum við að það sé óreiknanlegt.
- Til eru óreiknanleg föll. Til dæmis er ekki hægt að reikna út, fyrir hvaða Java forrit sem er, hvort keyrsla þess endar
  - Ef það væri hægt þá gætum við skrifað fall sem endar þþaa það endi ekki

Fylki (matrices) - yfirlit

- Skilgreining
- Fylkjareikningur (matrix arithmetic)
- Bylting (transpose)
- Veldi fylkja (powers)
- Núll-eitt fylki

Fylki eru til ýmissa hluta nytsamleg

- Notuð til að lýsa línulegum föllum
- Notuð til að lýsa netum (kafli 10)
- Sérhæfðari dæmi:
  - Lýsa vegakerfum
  - Lýsa samskiptakerfum
- Munum seinna sjá reiknirit sem nota fylki
- Munum hér sjá grunnatriði fylkja sem notuð verða seinna

Fylki

- Skilgreining: Fylki (a matrix) er rétthyrnd tafla (array) talna. Fylki með m röðum og n dálkum er kallað $m \times n$ fylki.
  - Fylki sem hefur sama fjölda raða og dálka er kallað ferningsfylki (square matrix)
  - Tvö fylki teljast ***jöfn*** ef þau hafa sama fjölda raða og dálka og gildi í samsvarandi röð og dálki eru jöfn

$$3 \times 2 \; fylki \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ritháttur

- Látum m og n vera jákvæðar heiltölur og látum

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- i-ta röð $\boldsymbol{A}$ er $1 \times m$ fylkið $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$
- j-ta súla $\boldsymbol{A}$ er $n \times 1$ fylkið $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$
- Stak (i, j) í $\boldsymbol{A}$ er a_{ij}
- Við skrifum stundum $\left[a_{ij}\right]$ til að tákna fylkið þar sem stak (i, j) er a_{ij}

Fylkjareikningur: Samlagning

- Skilgreining: Látum $\boldsymbol{A} = [a_{1j}]$ og $\boldsymbol{B} = [b_{1j}]$ vera $m \times n$ fylki. Summa $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$, táknað $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, er $m \times n$ fylkið sem hefur $a_{ij} + b_{ij}$ sem sitt stak (i, j). Með öðrum orðum þá er
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$$
- Dæmi:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
- Ekki er hægt að leggja saman fylki af mismunandi stærðum

Fylkjareikningur: Margföldun

- Skilgreining: Látum $\boldsymbol{A}$ vera $m \times k$ fylki og látum $\boldsymbol{B}$ vera $k \times n$ fylki. Margfeldi $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$, táknað $\boldsymbol{AB}$, er $m \times n$ fylkið $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ sem hefur

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

- Dæmi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

- Fylkjamargfeldið er ekki skilgreint ef fjöldi súlna í fyrra fylkinu er ekki sá sami og fjöldi dálka í því seinna

Fylkjamargföldun

- Margfeldi $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ og $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{a_{ik}} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & \color{red}{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \color{red}{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ . & . & & . & & \\ . & . & & . & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & \color{red}{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \color{red}{c_{ij}} & . \\ . & . & & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\color{red}{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}}$$

Fylkjamargföldun er **ekki víxlin**

- Dæmi: Látum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Er $AB = BA$?
- Svar:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Einingarfylkið og veldi fylkja (identity matrix, powers)

- Skilgreining: Einingarfylkið af gráðu n er $n \times n$ fylkið $I_n = [\delta_{ij}]$ þar sem $\delta_{ij} = 1$ ef $i = j$ og $\delta_{ij} = 0$ ef $i \neq j$
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad AI_n = I_m A$$
$$= A, þegar\ A\ er\ m \times n\ fylki$$
- Skilgreina má veldi af ferningsfylkjum. Þegar A er $n \times n$ fylki þá skilgreinum við
$$A^0 = I_n$$
$$A^{r+1} = A^r A, fyrir\ heiltölu\ r > 0$$

Bylting fylkja (transpose)

- Skilgreining: Ef $A = [a_{ij}]$ er $m \times n$ fylki þá skilgreinum við bylta fylkið A^t (lesið A bylt) sem fylkið sem fæst með því að víxla á röðum og dálkum (súlum) í A, með nokkurs konar speglun
- Ef $A^t = [b_{ij}]$ þá er $b_{ij} = a_{ji}$ fyrir $i = 1,2,\dots,n$ og $j = 1,2,\dots,m$
- Dæmi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Samhverf fylki

- Skilgreining: Ferningsfylki A er sagt vera ***samhverft*** ef $A = A^t$. Sem sagt er $A = [a_{ij}]$ samhverft ef $a_{ij} = a_{ji}$ fyrir öll i, j þannig að $1 \leq i, j \leq n$

$$\text{Fylkið} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} er\ samhverft$$

$$\text{Fylkið} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} er\ ekki\ samhverft$$

Núll-eitt (boolsk) fylki (zero-one, boolean)

- Skilgreining: Fylki þar sem öll sæti innihalda annaðhvort 0 eða 1 eru kölluð núll-eitt fylki eða boolsk fylki (Þau eru notuð í köflum 9 og 10)
- Reiknirit (algrím, algóriþmar) sem vinna með stakræn gögn (discrete structures, ekki discreet!) vinna oft með boolskar reikniaðgerðir skilgreindar með

$$x \wedge y = \begin{cases} 1 & ef\ x = y = 1 \\ 0 & annars \end{cases}$$

$$x \vee y = \begin{cases} 0 & ef\ x = y = 0 \\ 1 & annars \end{cases}$$

Núll-eitt fylki

- Skilgreining: Ef $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ eru tvö $m \times n$ núll-eitt (boolskt) fylki þá skilgreinum við eð-un fylkjanna (the join of A and B), táknað með $A \vee B$ sem fylkið þar sem stak (i, j) er $a_{ij} \vee b_{ij}$
- og við skilgreinum og-un fylkjanna (the meet of A and B), táknað með $A \wedge B$ sem fylkið þar sem stak (i, j) er $a_{ij} \wedge b_{ij}$

Eð-un og og-un boolskra fylkja

- Dæmi: Reiknum eð-un og og-un boolsku fylkjanna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Svar:
  - Eð-un A og B er

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Og-un A og B er

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Boolskt margfeldi fylkja

- Skilgreining: Látum $A = [a_{ij}]$ vera $m \times k$ boolskt fylki og látum $B = [b\_ij]$ vera $k \times n$ boolskt fylki. Þá skilgreinum við boolskt margfeldi A og B, skrifað $A \odot B$, sem boolska $m \times n$ fylkið þar sem sæti (i, j) inniheldur
$$c_{ij} = \left(a_{i1} \wedge b_{1j}\right) \vee \left(a_{i2} \wedge b_{2j}\right) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$
- Dæmi um boolskt margfeldi:

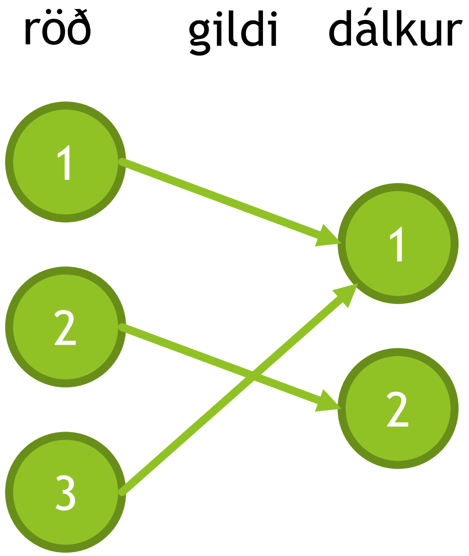
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ein myndræn túlkun boolskra fylkja

- Boolska fylkið

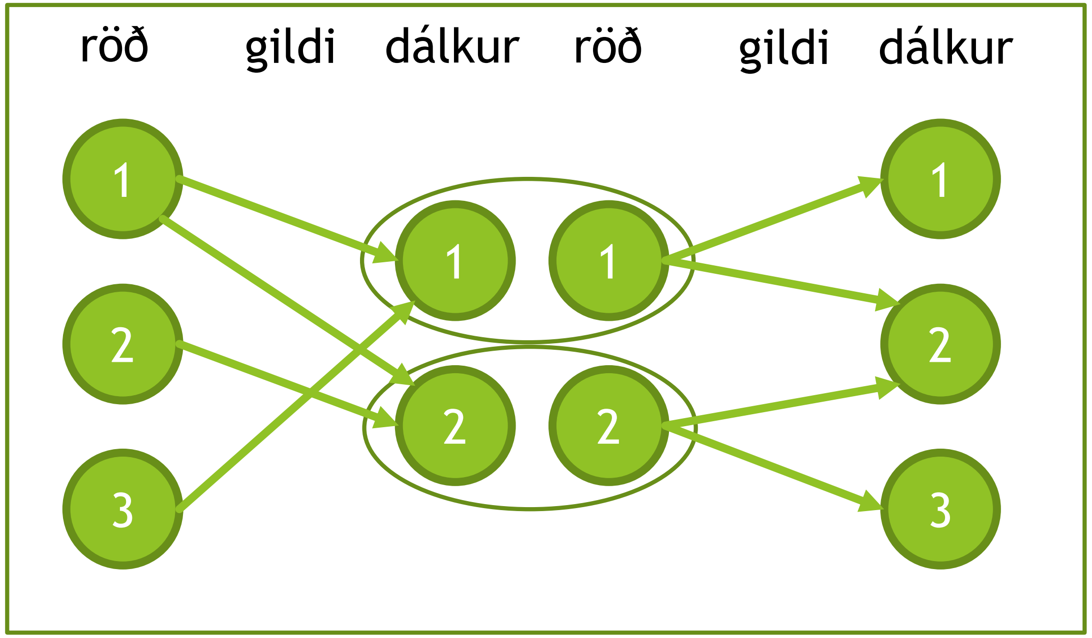
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

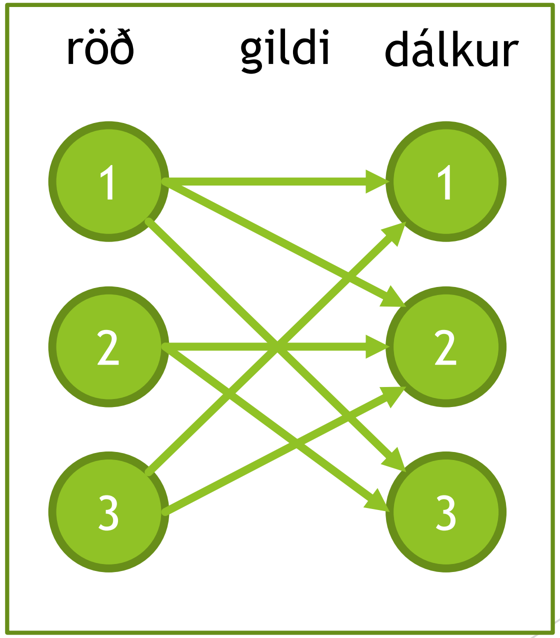
- má túlka sem leiðarkerfi



Ein túlkun boolsks margfeldis

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$





Kemst ekki frá 2 í 1 eða frá 3 í 3

Boolsk veldi fylkja

- Skilgreining: Látum A vera $n \times n$ boolskt ferningsfylki, þá skilgreinum við r-ta boolska veldið af A, fyrir ekki-neikvæðar heiltölur r með

$$\mathrm{A}^{[r]} = \begin{cases} I_n & ef\ r = 0 \\ A \odot A^{[r-1]} & ef\ r > 0 \end{cases}$$

- Athugið að boolskt margfeldi fylkja er ***tengin aðgerð*** (associative, tengiregla) þannig að það skiptir ekki máli í hvaða röð margfeldið er framkvæmt, þ.e. vinstri til hægri, hægri til vinstri, eða frá miðju og út, o.s.frv.

Dæmi um boolsk veldi

- Reiknum $A^{[r]}$ þar sem $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ fyrir öll $r > 0$
- Svar:

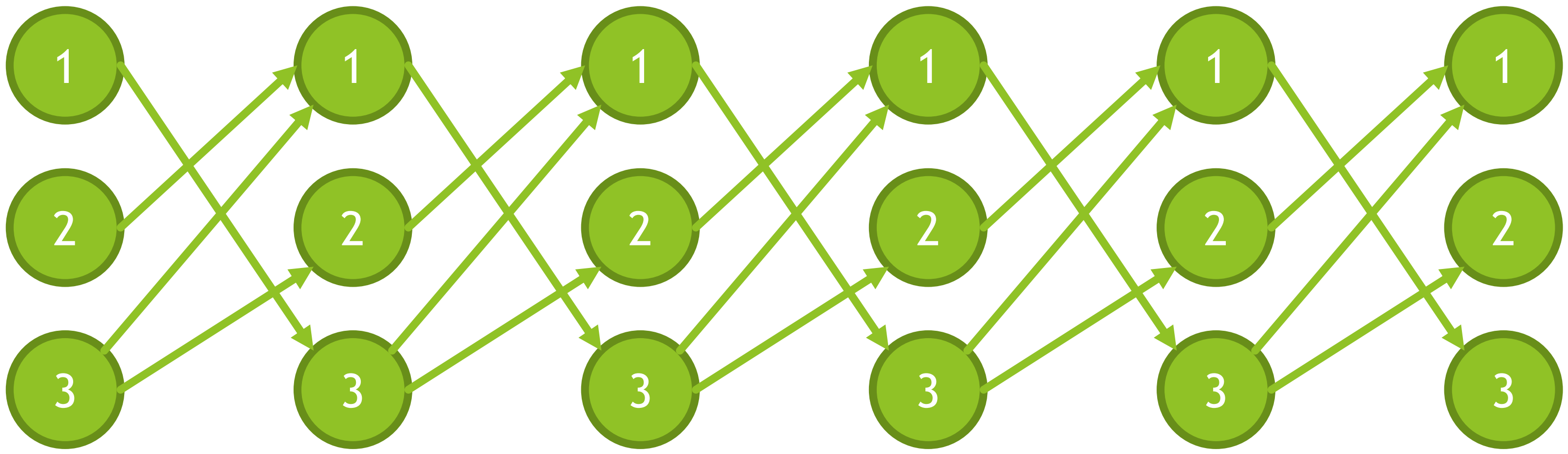
$$A^{[2]} = A \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^{[3]} = A^{[2]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{[4]} = A^{[3]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^{[5]} = A^{[4]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{[n]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, fyrir\ öll\ n \geq 5$$

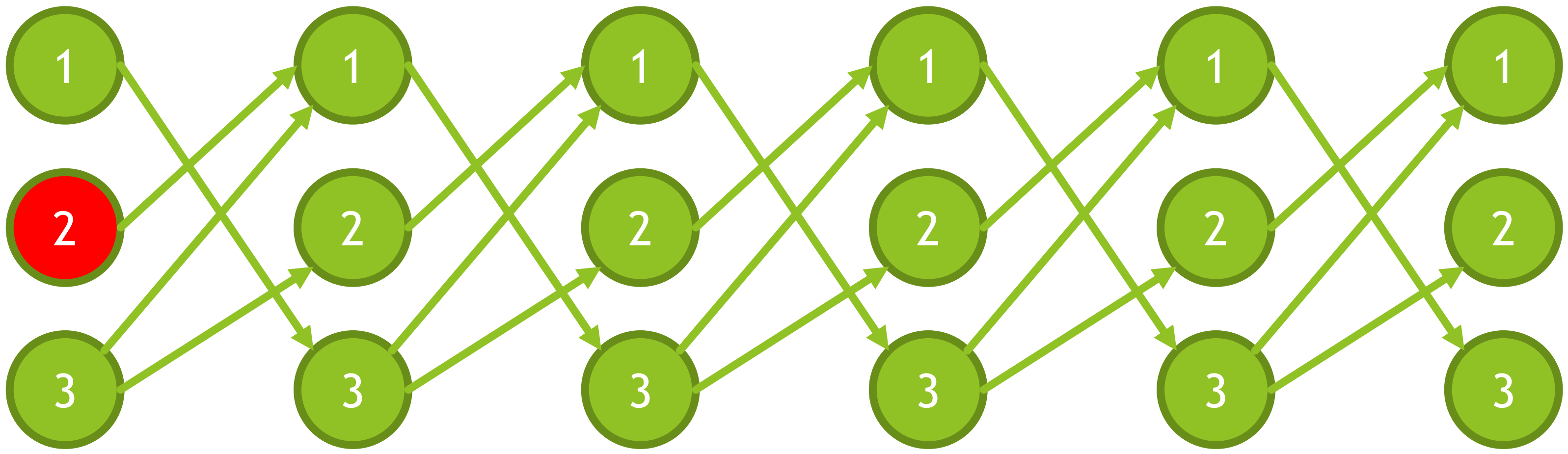
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

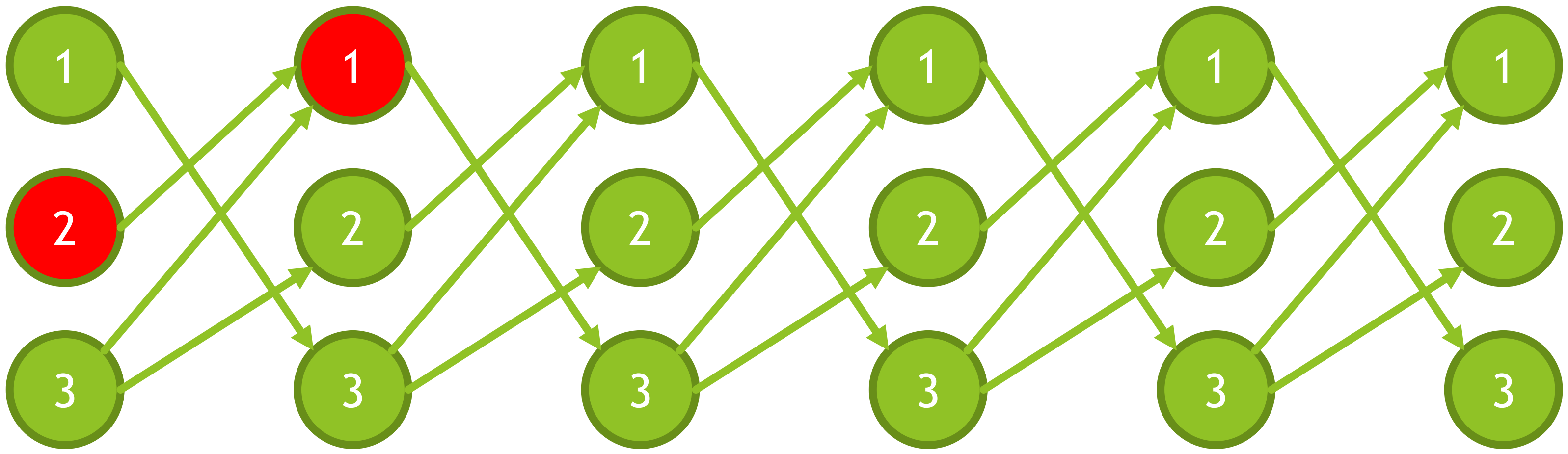
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

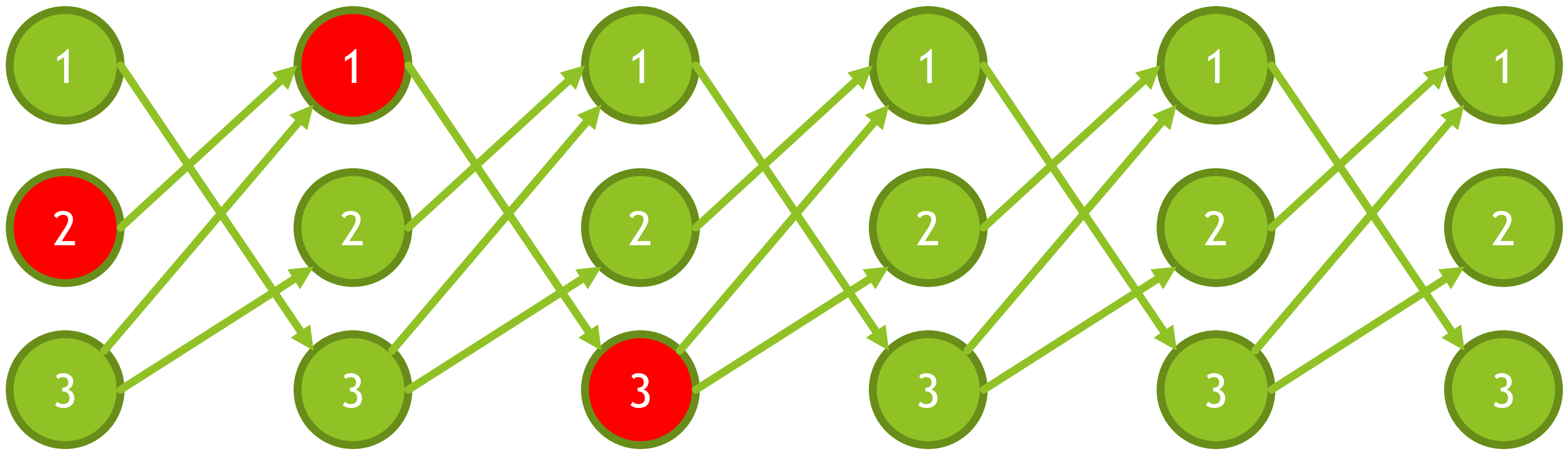
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

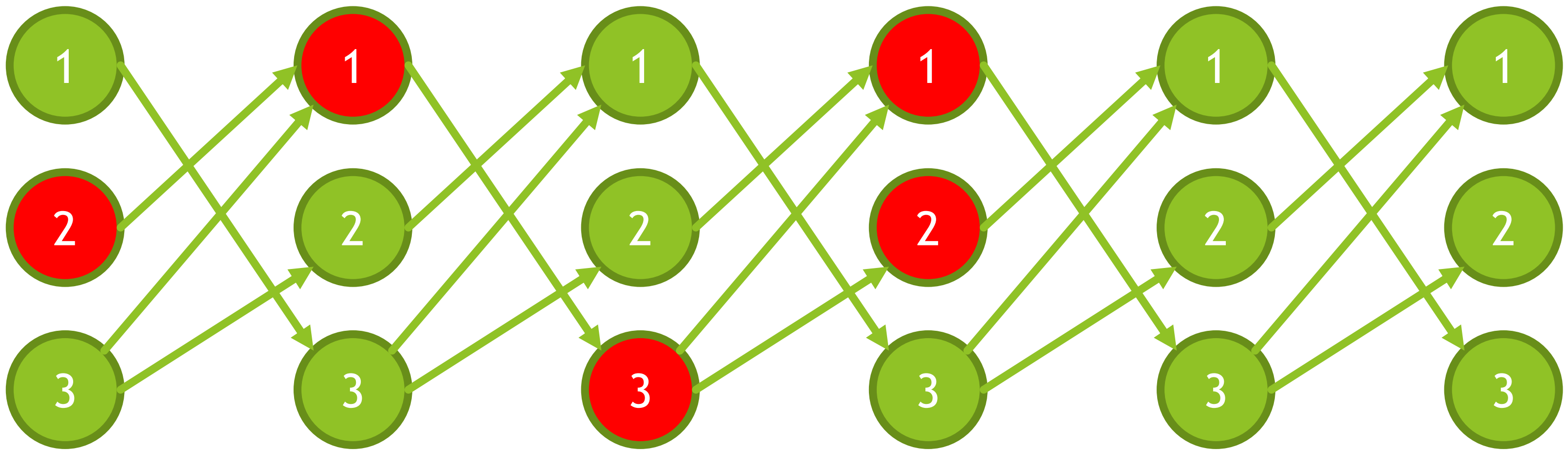
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

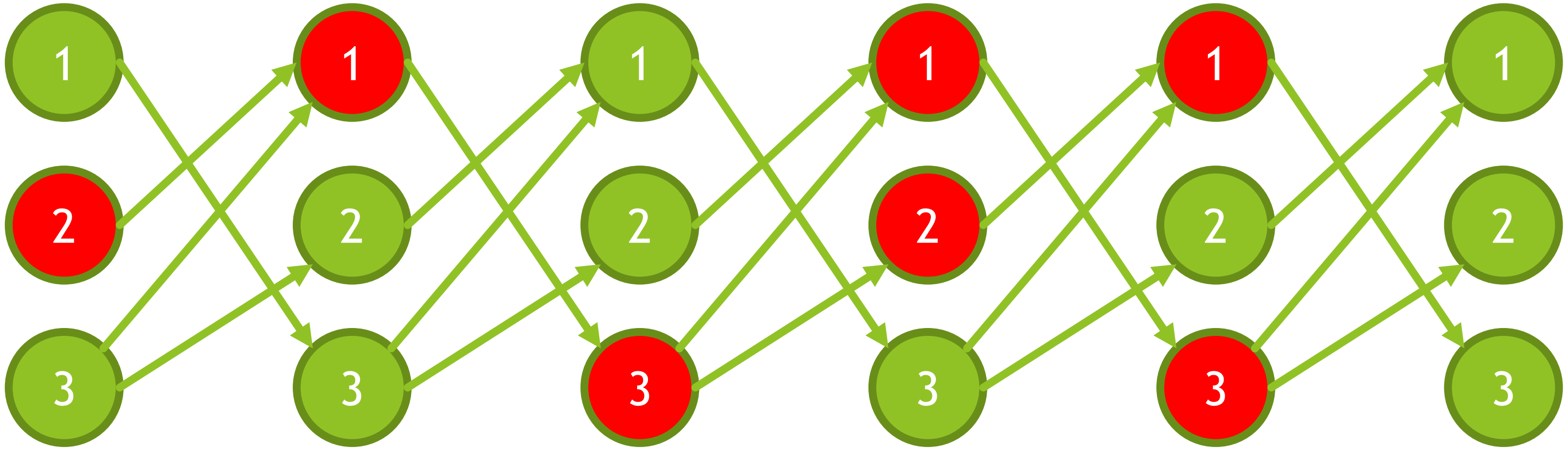
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

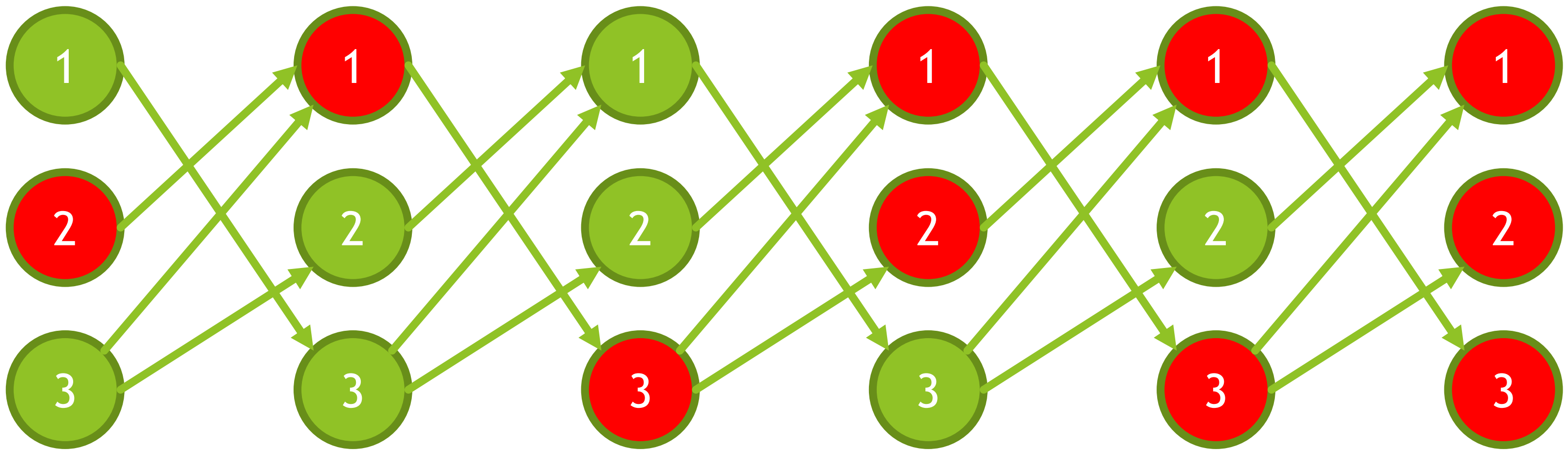
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hvert komumst við frá 2?

Algrím (algorithms, reiknirit, algóriþmar) --- Kaflayfirlit

- Algrím
  - Dæmi
  - Rökstuðningur
  - Hugsunarháttur
- Vöxtur falla
  - Stórt-O og fleiri rithættir
- Flækjustig algríma

Undirkaflayfirlit

- Rökstuðningur algríma
- Algrím fyrir leit
- Algrím fyrir röðun
- Gráðug algrím
- Stöðvunarvandamálið

Vandamál og algrím

- Höfum oft vandamál eða verkefni þar sem við viljum svara (úttak, output) tilteknum spurningum um ýmsar útgáfur (inntak, input) af tiltekinni gerð gagna
- Fyrsta skref er að skilgreina vandamálið nákvæmlega með því að segja til um hvernig gögnin (inntakið) lítur út og hver merking þeirra er og með því að segja til um hvernig svarið (úttakið) á að líta út og hver merking þess er
- Við leysum síðan verkefnið með því að tiltaka skref í aðferð sem les gild gögn (inntak) og framleiðir það úttak sem óskað er eftir
- Þessi aðferð er kölluð ***algrím*** (algorithm)

Algrím

[Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī]

[Sjá einnig Hauksbók]

- Skilgreining: Algrím er endanlegt safn af nákvæmum skipunum til að framkvæma reikniskref til að leysa vandamál
- Dæmi: Lýsið algrími til að finna stærsta gildi í endanlegri runu heiltalna
- Svar: Framkvæmið eftirfarandi skref:
  1. Látið tímabundna hágildið vera fyrsta heiltalan í rununni
  2. Berið næstu heiltölu í rununni saman við tímabundna hágildið
     - Ef hún er hærri en tímabundna hágildið, látið þá tímabundna hágildið verða jafnt þessari heiltölu
  3. Endurtakið skrefin á undan ef einhverjar heiltölur eru eftir í rununni, hættið annars
  4. Þegar inningu (keyrslu, framkvæmd) lýkur, þá er tímabundna hágildið jafnt stærstu heiltölunni í rununni

Lýsing algríma

- Algrím má lýsa á ýmsa vegu
- Lýsa má algríminu á íslensku eða öðru tungumáli eða á hátt sem oft er kallaður ***sauðakóði*** (pseudocode)
- Sauðakóði er óformlegt millistig milli lýsingar á mannlegu tungumáli og raunverulegs forrits eða forritshluta í forritunarmáli
- Forritarar byrja oft sauðakóða og smíða síðan forrit byggt á sauðakóða í raunverulegu forritunarmáli
- Hægt er að gera ýmsa greiningu á sauðakóðanum, svo sem greiningu á tímanum sem keyrslan krefst og minninu sem keyrslan krefst, óháð forritunarmálinu sem notað er til að útfæra algrímið

Sauðakóði

```
procedure max(a_1, a_2, ..., a_n: integers )
    max := a_1
    for i := 2 to n
        if max < a_i then max := a_i
    return max {max is biggest}
```

```
stef max(a_1, a_2, ..., a_n: heiltölur )
    max := a_1
    fyrir i := 2 til n
        ef max < a_i þá max := a_i
    skila max {max er stærst}
```

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

Rökstudd forritun

$\boxed{\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 0\ \}}$

Stöðulýsing:
Fullyrðing um ástandið í keyrslu forrits á vel skilgreindum tímapunkti eða tímapunktum

Rökstudd forritun

$\boxed{\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 0\ \}}$

$x := x + 1$

Stöðulýsing:
Fullyrðing um ástandið í keyrslu forrits á vel skilgreindum tímapunkti eða tímapunktum

Rökstudd forritun

$$\boxed{\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 0\ \}}$$

$$\boxed{x := x + 1}$$

Stöðulýsing:
Fullyrðing um ástandið í keyrslu forrits á vel skilgreindum tímapunkti eða tímapunktum

Forritskafli:
Forritstexti sem er hluti keyranlegs forrits

Rökstudd forritun

$\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 1\ \}$

Stöðulýsing:
Fullyrðing um ástandið í keyrslu forrits á vel skilgreindum tímapunkti eða tímapunktum

Forritskafli:
Forritstexti sem er hluti keyranlegs forrits

Stöðulýsing:
Fullyrðing um ástandið í keyrslu forrits á vel skilgreindum tímapunkti eða tímapunktum

Rökstudd forritun

$\{ \; x \text{ er heiltala, } x \geq 0 \; \}$

$x := x + 1$

$\{ \; x \text{ er heiltala, } x \geq 1 \; \}$

Forskilyrði (precondition) forritskaflans

Forritskaflinn

Eftirskilyrði (postcondition) forritskaflans

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 1\ \}$

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 1\ \}$

Ef x er heiltala, $x \geq 0$ og við síðan stækkum x um 1 þá verður x heiltala, $x \geq 1$

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 1\ \}$

Sönn fullyrðing

Ef x er heiltala, $x \geq 0$ og við síðan stækkum x um 1 þá verður x heiltala, $x \geq 1$

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 2\ \}$

Ósönn fullyrðing

Ef x er heiltala, $x \geq 0$ og við síðan stækkum x um 1 þá verður x heiltala, $x \geq 2$

Rökstudd forritun

$\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 1\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x \text{ er heiltala, } x \geq 2\ \}$

Sönn fullyrðing

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 1\ \}$

og

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 1\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 2\ \}$

Sönn fullyrðing

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

Sönn fullyrðing

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

$x := x + 1$

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 2\ \}$

Ósönn fullyrðing

Rökstudd forritun

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$

Sönn fullyrðing

og

$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 0\ \}$
$x := x + 1$
$\{\ x$ er heiltala, $x \geq 2\ \}$

Ósönn fullyrðing

Rökstuddur sauðakóði

{

Notkun: $x \coloneqq max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa heiltalna, $n > 0$
Eftir: x er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n$

}

stef $max(a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    $max \coloneqq a_1$
    $i \coloneqq 1$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, i = 1 \leq n\}$
    meðan $i \neq n$
        $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
        $i \coloneqq i + 1$
        ef $max < a_i$ þá $max \coloneqq a_i$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
    skila max

Rökstuddur sauðakóði

{

Notkun: $\boxed{x \coloneqq max(a_1, a_2, \dots, a_n)}$

Fyrir: $\boxed{a_1, a_2, \dots, a_n \text{ er runa heiltalna, } n > 0}$

Eftir: $\boxed{x \text{ er stærst af } a_1, a_2, \dots, a_n}$

}

Forskilyrðið

Forritskaflinn

Eftirskilyrðið

stef $max(a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)

    $max \coloneqq a_1$
    $i \coloneqq 1$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, i = 1 \leq n\}$
    meðan $i \neq n$
        $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
        $i \coloneqq i + 1$
        ef $max < a_i$ þá $max \coloneqq a_i$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_n\}$
    skila max

Rökstuddur sauðakóði

{

Notkun: $x \coloneqq max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Fyrir: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er runa heiltalna, $n > 0$
Eftir: x er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n$

}

stef $max(a_1, a_2, \ldots, a_n$: heiltölur)
    $max \coloneqq a_1$
    $i \coloneqq 1$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, i = 1 \leq n\}$
    meðan $i \neq n$
        $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
        $i \coloneqq i + 1$
        ef $max < a_i$ þá $max \coloneqq a_i$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
    skila max

Fastayrðing lykkju (loop invariant)

Rökstuddur sauðakóði

{

Notkun: $x := max(a_1, a_2, \dots, a_n)$
Fyrir: $a_1, a_2, \dots, a_n$ er runa heiltalna, $n > 0$
Eftir: x er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_n$

}

stef $max(a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    $max := a_1$
    $i := 1$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, i = 1 \leq n\}$
    meðan $i \neq n$
        $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
        $i := i + 1$
        ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_n\}$
    skila max

Sönn fullyrðing

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

Sauðakóði

meðan C
    S

Pseudocode

while C
    S

Java

```
while( C )
{
    S
}
```

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\boxed{\{\ F\ \}}$

meðan C

$\boxed{\{\ I\ \}}$

S

$\boxed{\{\ E\ \}}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\{\ F\ \}$

meðan C

$\{\ I\ \}$

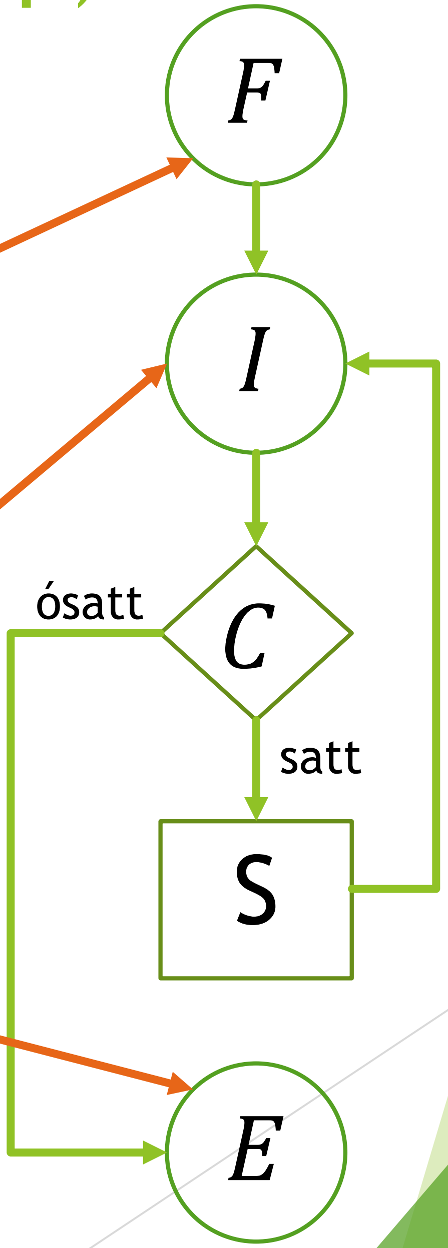
S

$\{\ E\ \}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur



Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\{ F \}$

meðan C

$\{ I \}$

S

$\{ E \}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

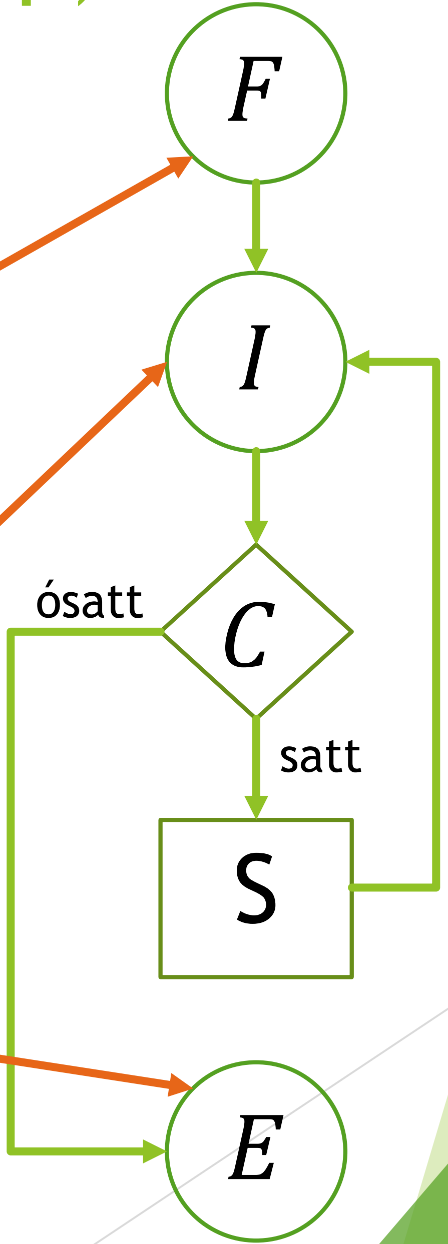
Regla 1: $F \rightarrow I$

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Regla 2: $\{I \wedge C\}\mathbf{S}\{I\}$

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur

Regla 3: $I \wedge \neg C \rightarrow E$



Rökstuddur sauðakóði

{

Notkun: $x := max(a_1, a_2, \dots, a_n)$
Fyrir: $a_1, a_2, \dots, a_n$ er runa heiltalna, $n > 0$
Eftir: x er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_n$

}

stef $max(a_1, a_2, \dots, a_n$: heiltölur)
    $max := a_1$
    $i := 1$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, 1 = i \leq n\}$
    meðan $i \neq n$
        $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
        $i := i + 1$
        ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \dots, a_n\}$
    skila max

Sönn fullyrðing

Rökstuddur sauðakóði

$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 = i \leq n\}$
meðan $i \neq n$
    $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
    $i := i + 1$
    ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Sönn fullyrðing

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\{\ F\ \}$

meðan C

$\{\ I\ \}$

S

$\{\ E\ \}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

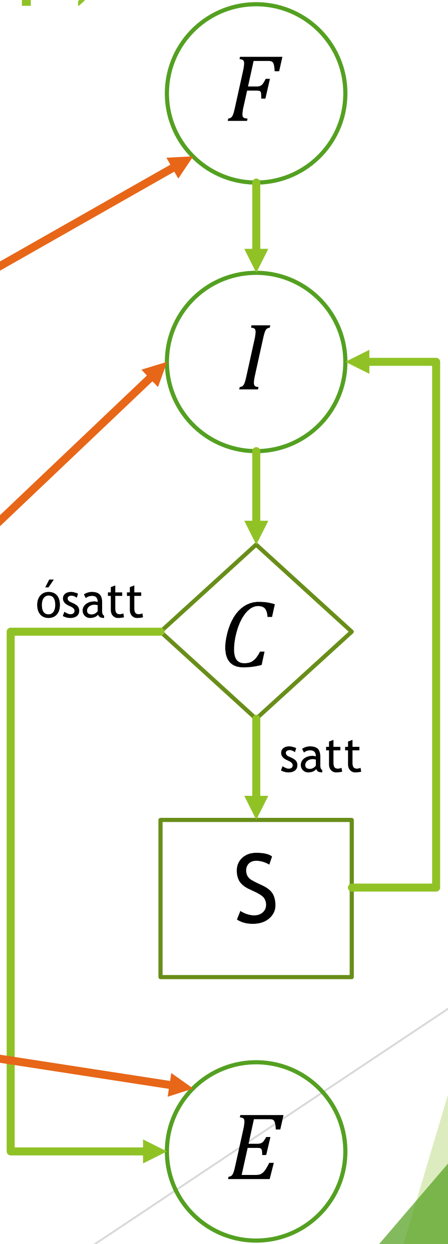
Regla 1: $F \rightarrow I$

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Regla 2: $\{I \wedge C\}\mathbf{S}\{I\}$

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur

Regla 3: $I \wedge \neg C \rightarrow E$



Rökstuddur sauðakóði

Regla 1: $F \rightarrow I$

$(max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i$ og $1 = i \leq n) \rightarrow$

$(max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i$ og $1 \leq i \leq n)$

$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 = i \leq n\}$
meðan $i \neq n$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
$i \coloneqq i + 1$
ef $max < a_i$ þá $max \coloneqq a_i$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Sönn fullyrðing

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\{ F \}$

meðan C

$\{ I \}$

S

$\{ E \}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

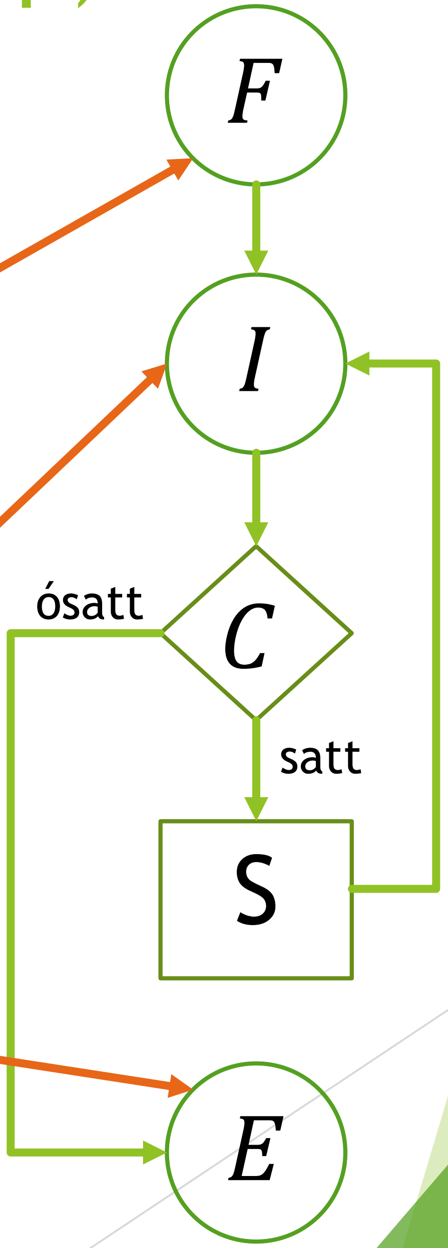
Regla 1: $F \rightarrow I$

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Regla 2: $\{I \wedge C\}\mathbf{S}\{I\}$

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur

Regla 3: $I \wedge \neg C \rightarrow E$



Rökstuddur sauðakóði

Regla 2: $\{I \wedge C\}\mathbf{S}\{I\}$

$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n$ og $i \neq n\}$
$i := i + 1$
ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$

$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 = i \leq n\}$
meðan $i \neq n$
 $\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
 $i := i + 1$
 ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Sönn fullyrðing

Almenn meðan-lykkja (while-loop)

$\{ F \}$

meðan C

$\{ I \}$

S

$\{ E \}$

Forskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt áður en lykkjan hefst

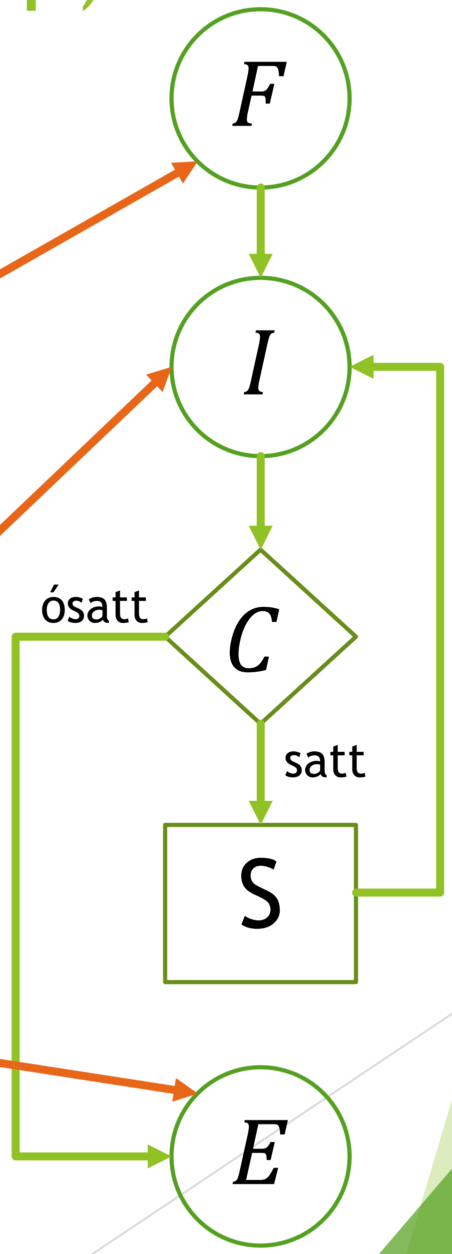
Regla 1: $F \rightarrow I$

Fastayrðing lykkjunnar gerir kleift að rökstyðja lykkjuna

Regla 2: $\{I \land C\}\mathbf{S}\{I\}$

Eftirskilyrði lykkjunnar lýsir ástandinu rétt eftir að lykkjunni lýkur

Regla 3: $I \land \neg C \rightarrow E$



Rökstuddur sauðakóði

Regla 3: $I \wedge \neg C \rightarrow E$

max er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n$ og $i = n \rightarrow$
max er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 = i \leq n\}$
meðan $i \neq n$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_i, 1 \leq i \leq n\}$
$i := i + 1$
ef $max < a_i$ þá $max := a_i$
$\{max$ er stærst af $a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Sönn fullyrðing

Margföldun með helmingun, tvöföldun og samlagningu

{
Notkun: z := margfalda(x, y)
Fyrir: $x \geq 0$
Eftir: z er xy þ.e. margfeldi x og y
}
stef margfalda(x, y: heiltölur)
    $p \coloneqq 0$; $q \coloneqq y$; $r \coloneqq x$
    meðan $r \neq 0$
        $\{ xy = p + qr \}$
        ef r er oddatala þá
            $p \coloneqq p + q$; $r \coloneqq r - 1$
        annars
            $r \coloneqq r/2$; $q \coloneqq q + q$
    skila p

Trúlega elsta algrím sem þekkt er

„Reiknað“ með vogarskálum á steinöld?

Var notað í gömlum örgjörvum

Algeng viðfangsefni

- Leitarvandamál
  - Finna staðsetningu tiltekins gildis í runu (sequence), lista eða fylki (list, array)
  - Línuleg leit og helmingunarleit
- Röðunarvandamál
  - Setja gildi í runu, lista eða fylki í tiltekna röð (vaxandi, minnkandi, ...)
  - Insertion sort