TÖL104G
Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði
Verkefnablað 8 — Lausn

16. október 2015

1. **(20%)** Sannið með rökstuddri forritun að fyrir heiltölur $n \geq 1$ gildi summuformúlan

   $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

   Þið þurfið að gera eftirfarandi:

   - Skrifa rökstuddan forritskafla með lykkju sem hefur viðeigandi forskilyrði, eftirskilyrði og fastayrðingu lykkju.
   - Sanna að fastayrðingunni sé viðhaldið, þ.e. að reglan um **meðan** lykkjur, $\{I \wedge C\}\mathrm{S}\{I\}$, gildi um lykkjuna.
   - Sanna að framkvæmd lykkjunnar taki enda, til dæmis með því að benda á eitthvert heiltölugildi sem reikna mætti í hverri umferð umferð, sem er síminnkandi en getur ekki orðið neikvætt.

   Lausn:

   - Hér er rökstuddi forritskaflinn.

   ```
   { n er heiltala, n>=1 }
   s := 1
   k := 1
   meðan k!=n
        { 1<=k<=n              }
        { s=1+3+5+...+(2k-1)  }
        { s=k^2                }
        k := k+1
   ```

```
    s := s+(2k-1)
{ s=1+3+5+...+(2n-1) }
{ s=n^2              }
```

Það er einnig í lagi að nota eftirfarandi, sem leyfir að summan hafi núll liði. Í báðum forritsköflunum er `k` fjöldi liða sem búið er að leggja saman (og summan er í `s`).

```
{ n er heiltala, n>=0 }
s := 0
k := 0
meðan k!=n
    { 0<=k<=n            }
    { s=1+3+5+...+(2k-1) }
    { s=k^2              }
    k := k+1
    s := s+(2k-1)
{ s=1+3+5+...+(2n-1) }
{ s=n^2              }
```

Við munum miða við seinni útgáfuna í umfjölluninni að neðan, en munurinn er smávægilegur.

- Augljóst er að fastayrðingin er sönn rétt áður en komið er í lykkjuna vegna þess hvernig s og k eru frumstillt. Einnig er augljóst að eftir að lykkjunni lýkur þá er eftirskilyrðið satt þar eð þá er k=n. Til að sanna að sérhver umferð lykkjunnar viðhaldi fastayrðingunni þurfum við að sýna að sérhver þriggja fullyrðinganna í fastayrðingunni sé sönn eftir sérhverja umferð, að því tilskildu að þær séu sannar fyrir umferðina og að skilyrði lykkjunnar sé satt fyrir umferðina. Látum k tákna gildi breytunnar `k` fyrir umferðina og látum k' tákna gildi breytunnar `k` eftir umferðina. Látum s tákna gildi breytunnar `s` fyrir umferðina og látum s' tákna gildi hennar eftir umferðina.

  Tökum fullyrðingar þrjár í fastayrðingunni fyrir í röð, en fyrst skulum við taka eftir því að augljóslega er $k' = k + 1$.

  a) Þar eð fyrir umferðina er $0 \leq k \leq n$ og $k \neq n$ drögum við þá ályktun að $0 \leq k \leq n - 1$. Þar með fæst $1 \leq k + 1 \leq n$, og þá gildir $0 \leq k' \leq n$, sem er það sem þarf að sanna fyrir fyrstu línuna í fastayrðingunni.

  b) Við höfum að $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + k$ og við sjáum að $s' = s + (2k' - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k' - 1)$, sem er það sem þarf að sanna fyrir línu 2 í fastayrðingunni.

  c) Við höfum að $s = k^2$ og við sjáum að $s' = s + (2k' - 1) = k^2 + (2k' - 1) = (k' - 1)^2 + (2k' - 1) = k'^2 - 2k' + 1 + 2k' - 1 = k'^2$, sem er það sem þarf að sanna fyrir línu 3 í fastayrðingunni.

- Ljóst er að lykkjunni lýkur vegna þess að heiltölugildið n-k er í upphafi stærra en eða jafnt núlli, minnkar um einn í hverri umferð og getur ekki orðið minna en núll. Gildi þessi eru síminnkandi runa í velröðuðu mengi og sú runa hlýtur því að vera endanleg.

> **Í eftirfarandi þrepasönnunum er skylda að setja sönnunina skipulega upp og skrifa fyrst málsgrein „Setning: …“ þar sem skilgreind er umsögn $P(n)$ sem sanna skal og hvert umdæmi umsagnarinnar er, síðan skal skrifa fyrirsögn „Þrepasönnun:“ og undir henni málsgrein „Grunnur: …“ og síðan málsgrein með fyrirsögn „Þrepunarforsenda: …“ þar sem skilgreint er hver er forsenda hvers skrefs í þrepun. Loks skal skrifa málsgrein „Þrepunarskref: …“ þar sem sannað er að þrepunarforsendan leiðir til viðeigandi afleiðingar. Þið verðið að tiltaka hvenær þið notið þrepunarforsenduna í þrepunarskrefinu.**
>
> Sem sagt, ykkar þrepunarsönnun skal líta svona út:
>
> **Setning:** …
> **Þrepasönnun:**
> **Grunnur:** …
> **Þrepunarforsenda:** …
> **Þrepunarskref:** …
>
> **Ef ykkar þrepunarsönnun uppfyllir ekki þessi skilyrði fáið þið núll fyrir dæmið.**

2. **(40%)** Til eru ræðar tölur a, b og c þannig að fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ gildir $\sum_{i=1}^{n} [5i + 1] = an^2 + bn + c$.

   - **(20%)** Finnið a, b og c með því að leysa línulega jöfnuhneppið sem er fengið úr fyrstu þremur hlutsummunum.

     $0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$ ($n = 0$, summa núll liða)

     $1 \cdot a + 1 \cdot b + c = 6$ ($n = 1$, summa eins liðar)

     $4 \cdot a + 2 \cdot b + c = 17$ ($n = 2$, summa tveggja liða)

     Lausn: $a = \frac{5}{2} = 2.5, b = \frac{7}{2} = 3.5, c = 0.$

   - **(20%)** Sannið síðan með þrepun á n að fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ gildi $\sum_{i=1}^{n} [5i + 1] = an^2 + bn + c$.

     Lausn:

     Setning: Fyrir $n = 0, 1, 2, \ldots$ gildir $\sum_{i=1}^{n} [5i + 1] = \frac{5}{2} \cdot n^2 + \frac{7}{2} \cdot n$.

     Þrepasönnun:

Grunnur: Fyrir $n = 0$ gildir $\sum_{i=1}^{n}[5i+1] = \sum_{i=1}^{0}[5i+1] = 0 = \frac{5}{2}\cdot 0^2 + \frac{7}{2}\cdot 0 = \frac{5}{2}\cdot n^2 + \frac{7}{2}\cdot n$.

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að $\sum_{i=1}^{n}[5i+1] = \frac{5}{2}\cdot n^2 + \frac{7}{2}\cdot n$. Viljum sanna að $\sum_{i=1}^{n+1}[5i+1] = \frac{5}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{7}{2}\cdot(n+1)$.

Þrepunarskref:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}[5i+1] &= \text{(samkvæmt skilgreiningu á } \textstyle\sum\text{)} \\
&\quad \sum_{i=1}^{n}[5i+1] + [5(n+1)+1] \\
&= \text{(samkvæmt þrepunarforsendu)} \\
&\quad \frac{5}{2}\cdot n^2 + \frac{7}{2}\cdot n + [5(n+1)+1] \\
&= \frac{5n^2+7n}{2} + [5(n+1)+1] \\
&= \frac{5n^2+7n}{2} + 5n + 6 \\
&= \frac{5n^2+7n+10n+12}{2} \\
&= \frac{5n^2+17n+12}{2} \\
&= \frac{5(n^2+2n+1)+7(n+1)}{2} \\
&= \frac{5(n+1)^2+7(n+1)}{2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{7}{2}\cdot(n+1)
\end{aligned}$$

sem er það sem sanna þurfti.

3. **(40%)** Giskið á formúlu **(20%)** fyrir $\sum_{i=0}^{n}[3i+2]$ og sannið með þrepun **(20%)** að hún gildi fyrir $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

   Lausn: Við þurfum svo sem ekki mikið að giska því við vitum að fyrir $n = 1, 2, 4, \ldots$ gildir

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

og þess vegna hlýtur, fyrir $n = 1, 2, 3, \ldots$ að gilda

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} [3i+2] &= 3 \cdot 0 + 2 + \sum_{i=1}^{n} [3i+2] \\
&= 2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2 \\
&= 2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\
&= 2 + \frac{3n(n+1)}{2} + 2n \\
&= \frac{4 + 3n(n+1) + 4n}{2} \\
&= \frac{4 + 3n^2 + 3n + 4n}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}
\end{aligned}$$

Við viljum þá sanna þessa jöfnu með þrepun, eins og beðið var um.

Setning: Fyrir $n = -1, 0, 1, \ldots$ gildir[1]

$$\sum_{i=0}^{n} [3i+2] = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$$

Þrepasönnun:

Grunnur: Fyrir $n = -1$ fáum við annars vegar fyrir vinstri hlið jöfnunnar

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} [3i+2] &= \sum_{i=0}^{-1} [3i+2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

og hins vegar fáum við fyrir hægri hlið jöfnunnar

$$\begin{aligned}
\frac{3n^2 + 7n + 4}{2} &= \frac{3(-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 4}{2} \\
&= \frac{3 - 7 + 4}{2} \\
&= \frac{0}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

[1]Segðina má skrifa á ýmsa vegu, $\frac{3n^2+7n+4}{2} = \frac{(n+1)(3n+4)}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 2 = 1.5 \cdot n^2 + 3.5 \cdot n + 2$.

Jafnan gildir því fyrir $n = -1$, sem er það sem þurfti að sanna.

Þrepunarforsenda: Gerum ráð fyrir að jafnan

$$\sum_{i=0}^{n} [3i + 2] = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$$

sé sönn fyrir eitthvert $n \geq -1$. Við viljum þá sanna að jafnan gildi fyrir $n + 1$, þ.e. að jafnan

$$\sum_{i=0}^{n+1} [3i + 2] = \frac{3(n+1)^2 + 7(n+1) + 4}{2}$$

sé sönn.

Þrepunarskref: Við fáum

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} [3i + 2] &= \text{(samkvæmt skilgreiningu á summu)} \\
&\quad \sum_{i=0}^{n} [3i + 2] + 3(n + 1) + 2 \\
&= \text{(samkvæmt þrepunarforsendu)} \\
&\quad \frac{3n^2 + 7n + 4}{2} + 3(n + 1) + 2 \\
&= \frac{3n^2 + 7n + 4}{2} + 3n + 5 \\
&= \frac{3n^2 + 7n + 4 + 6n + 10}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 13n + 14}{2} \\
&= \frac{(3n^2 + 6n + 3) + (7n + 7) + 4}{2} \\
&= \frac{3(n^2 + 2n + 1) + 7(n + 1) + 4}{2} \\
&= \frac{3(n+1)^2 + 7(n+1) + 4}{2}
\end{aligned}$$

sem er það sem þurfti að sanna.