TÖL 104G

Stærðfræðimynstur í tölvunarfræði

Einstaklingsverkefni viku: 5

Nemandi:

Rakel María Brynjólfsdóttir

Póstfang:

rmb3@hi.is

Dæmi 1

Sýnið segð á lokuðu énidi fyrir eftirfarandi summur og einfaldið segðina

a) $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$

b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

c) $\sum_{i=1}^{10000} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{10000 \cdot 10001}{2} = 50005000$

d) $\sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338\,350$

e) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$

Dæmi 2

Finnið segð á lokuðu énidi fyrir a_n þar sem $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$, fyrir $n > 0$, $a_0 = 1$. Sannið með þrepun að þessi segð sé lausn.

$a_1 = \frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{1/3}{3} = 1/9$

$a_3 = {}^{1/9}/_{3} = 1/27$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

$\frac{1}{3^0}, \frac{1}{3^1}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3} \ldots$

$a_n = \frac{1}{3^n}, \; n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Þrepun

- Grunnur, gildir fyrir $n = 0$? $a_0 = \frac{1}{3^0} = 1$ ✓
- Þrepun: – Þrepunarforsenda: G.r.f. $a_k = \frac{1}{3^k}$ gildi fyrir öll $k < n$
  – Þrepunarskref: Skv. rakningarvenslum er $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$ sem er skv. þrepunarforsendu jafnt:

$$\frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{3} = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{n-1} \cdot 3} = \frac{1}{3^n}$$

Tmb3@hi.is

Dæmi 3

Látum $\{a_n\}$ vera runu sem uppfyllir $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, ~~fyrir $n>0$,~~
~~ásamt $a_0=1$~~ Hvað eru a_2 og a_3 ef

a) $a_0=1$ og $a_1=1$ $\quad a_2 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$a_3 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

b) $a_0=0$ og $a_1=0$ $\quad a_2 = 2\cdot 0 - 0 = 0$

$a_3 = 2\,0 - 0 = 0$

c) $a_0=1$ og $a_1=0$ $\quad a_2 = 2\,0 - 1 = -1$

$a_3 = 2\cdot(-1) - 0 = -2$

d) $a_0=0$ og $a_1=1$ $\quad a_2 = 2\cdot 1 - 0 = 2$

$a_3 = 2\cdot 2 - 1 = 3$

e) $a_0=1$ og $a_1=2$ $\quad a_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2\cdot 3 - 2 = 4$

Dæmi 4

Látum algebrulegar tölur vera allar rauntölur sem eru lausnir á margliðujöfnu á sniðinu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$, þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru heiltölur, ekki allar núll. Sérhver slík jafna hefur í mesta lagi n rauntölulausnir.

a) Sannið að mengi algebrulegra talna sé óendanlegt.

n er heiltala og heiltölur eru óendanlega margar og því getur n verið óendanlega stór. Gefið er að sérhver margliðu-jafna hefur í mesta lagi n rauntölulausnir, þ.a. ef n er óendanleg þá eru óendanlega margar lausnir. Skv. skilgreiningu á algebrulegum tölum þýðir þetta að mengi algebrulegra talna sé óendanlegt.

b) Sannið að meng algebrulegra talna sé ~~óendanlegt~~ teljanlegt.
Fyrir hverja margliðujöfnu eru teljanlega margar lausnir, og það eru teljanlega margar margliðujöfnur.
Við erum því með teljanlega mörg teljanleg lausnamengi.
Sammengi teljanlegra margra teljanlegra mengja er teljanlegt.
Þar sem algebrulegar tölur eru sammengi lausnamengja allra margliða getum við ályktað að þær séu teljanlegar.

c) Sannið að ræðu tölurnar séu hlutmengi í mengi algebrulegra talna.
Ef $x = a/b$, þar sem a og b eru heilar tölur, þá er x ræð tala. Við sjáum þá að $bx + (-a) = 0$ þannig x er lausn á margliðunni $bx - a$.

d) Sannið að mengi algebrulegra talna sé ekki hlutmengi í mengi ræðra talna.
Óbein sönnun $\sqrt{2}$ er lausn á margliðunni $x^2 - 2 = 0$ en $\sqrt{2}$ er ekki ræð tala. $\sqrt{2}$ er í mengi algebrulegra talna en ekki í mengi ræðra talna og því er mengi algebrulegra talna ekki hlutmengi í meng ræðra talna.

b|s 3/3