Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет

2021

Содержание I

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса) I

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx,$$

где подынтегральная функция может не быть достаточно гладкой на промежутке интегрирования, но представима в виде

$$\varphi(x) = \rho(x) f(x).$$

Здесь $\rho(x)$ содержит особенности функции $\varphi(x)$, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией.

Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{1}$$

где

x_k — узлы квадратурной формулы,

A_k — коэффициенты,

$\rho(x)$ — весовая функция и должна удовлетворять следующему условию:

существуют моменты весовой функции, т. е.

$$|\mu_k| = \left| \int_a^b \rho(x) x^k dx \right| < \infty, \;\; k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)}\, dx, \;\; \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i). \tag{2}$$

Теорема 1

Для того чтобы квадратурная формула (1) была точна для любого многочлена степени не выше $2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы:

- *узлы $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ являлись корнями ортогонального относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a,b]$ многочлена $\omega_n(x)$;*
- *формула (1) была интерполяционной.*

Теорема 2 (О погрешности)

Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $2n$, то существует точка $\eta \in [a, b]$, такая что погрешность квадратурной формулы (1) *гауссова типа имеет представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int\limits_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx. \tag{3}$$

Построение квадратурной формулы типа Гаусса I

Узлы находим из первого условия теоремы

$$\int\limits_a^b \rho(x)\omega_n(x)\omega_i(x)dx = 0, \; i = 0, \; 1, \ldots, n-1. \qquad (4)$$

Очевидно, что достаточно потребовать ортогональности многочлена $\omega_n(x)$ относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ одночленам x^i, $i = 0, \; 1, \ldots, n-1$. Таким образом, коэффициенты искомого многочлена $\omega_n(x)$ являются решением системы

$$\int\limits_a^b \rho(x)(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)x^i \, dx = 0, \; i = 0, \; 1, \; \ldots, n-1. \qquad (5)$$

Построение квадратурной формулы типа Гаусса II

Учитывая обозначения

$$\mu_k = \int\limits_a^b \rho(x) x^k \, dx,$$

получим следующую систему линейных уравнений относительно $a_1, \ a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_1 \, \mu_{n-1} & +a_2 \, \mu_{n-2} + & \cdots + a_n \, \mu_0 & = -\, \mu_n, \\ a_1 \, \mu_n & +a_2 \, \mu_{n-1} + & \cdots + a_n \, \mu_1 & = -\, \mu_{n+1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 \, \mu_{2n-2} & +a_2 \, \mu_{2n-3} + & \cdots + a_n \, \mu_{n-1} & = -\, \mu_{2n-1}. \end{cases} \qquad (6)$$

Система имеет единственное решение.

Построение квадратурной формулы типа Гаусса III

Узлы — решения уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{7}$$

вещественны, различны и лежат внутри отрезка $[a, b]$. Коэффициенты A_k находятся по формуле (2). Известно, что $A_k > 0, \;\; k = 1, \dots, n$.

Алгебраическая степень точности формулы $d = 2\,n - 1$, формула точно интегрирует многочлены нулевой степени, следовательно $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = \int\limits_a^b \rho(x) dx = \mu_0$.

Алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$ I

Приведем алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$.

1. Вычислить моменты $\mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \; \mu_3$.
2. Построить систему

$$\begin{cases} a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_0 = -\mu_2, \\ a_1\,\mu_2 + a_2\,\mu_1 = -\mu_3. \end{cases}$$

3. Вычислить a_1, a_2, например, по правилу Крамера

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_2 & \mu_0 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_0\mu_3 - \mu_2\mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2\mu_0},$$

Алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$ II

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3\mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2\mu_0}.$$

4. Решить уравнение $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$.
   Узлы должны быть вещественны, различны и должны принадлежать (a, b).
5. Вычислить коэффициенты квадратурной формулы:

$$A_1 = \int\limits_a^b \rho(x) \frac{x - x_2}{(x_1 - x_2)}\, dx = \frac{1}{x_1 - x_2}(\mu_1 - x_2\mu_0),$$

Алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$ III

$$A_2 = \int\limits_a^b \rho(x) \frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)}\, dx = \frac{1}{x_2 - x_1}(\mu_1 - x_1\mu_0).$$

Коэффициенты должны быть положительны и
$A_1 + A_2 = \mu_0$.
Таким образом, построена формула

$$\int\limits_a^b \rho(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{2} A_k f(x_k),$$

которая должна быть точна для $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$.

Формула Гаусса I

$\rho(x) \equiv 1,\ \ [a,b] = [-1,1].$
Узлы — корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \tag{8}$$

а коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[P_n'(x_k)]^2} = \frac{2\,(1-x_k^2)}{n^2\,[P_{n-1}(x_k)]^2}. \tag{9}$$

Формулы Гаусса для $n = 1,\ 2,\ 3$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2f(0), \tag{10}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \tag{11}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \tag{12}$$

Замечание 1

Узлы формулы типа Гаусса в случае, если весовая функция $\rho(x)$ — четная, располагаются симметрично относительно середины промежутка интегрирования и симметричным узлам соответствуют одинаковые коэффициенты. Подтверждение этому и наблюдается в выше приведенных формулах.

Оценка погрешности формулы Гаусса

Погрешность формулы Гаусса имеет оценку

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} = C_n M_{2n}, \tag{13}$$

где $M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|$, $\xi \in [-1, 1]$.

Отметим, что коэффициенты C_n быстро убывают

$$C_1 = \frac{1}{3},\ C_2 = \frac{1}{135},\ C_3 = \frac{1}{15750},\ C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

Замечание 2

При вычислении интеграла по промежутку $[a, b]$ следует выполнить замену переменной

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}, \; dx = \frac{(b-a)}{2}\,dt,$$

так что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2}\right). \qquad (14)$$

Здесь t_k, A_k — соответственно узлы и коэффициенты формулы Гаусса для $[-1, 1]$.

Замечание 3

Для погрешности формулы Гаусса на промежутке $[a, b]$ имеем оценку

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)}{2} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \left(\frac{(b-a)}{2}\right)^{2n} M_{2n} =$$

$$= C_n^{[a,b]} M_{2n}, \text{ где } C_n^{[a,b]} = C_n \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1},$$

$$M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|, \ \xi \in [a, b]. \quad (15)$$

Замечание 4

Для составной формулы Гаусса с m разбиениями погрешность

$$|R_{nm}(f)| \leqslant C_n^{[a,b]}(b-a)\left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n} M_{2n}, \tag{16}$$

т. е. при уменьшении длины частичного промежутка вдвое погрешность уменьшается в 2^{2n} раз.

Формула Мелера

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ [a,b] = [-1,1].$$

Узлы — корни многочлена Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\ dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right). \qquad (17)$$

Представление результатов

Результаты представить в виде таблицы

Метод	Количество узлов	Погрешность

Вариант 1

Требуется вычислить $\int\limits_0^1 \cos(x)\sqrt{x}\,dx$ следующими способами:

1. "Точно".
2. По формуле Симпсона с тремя узлами .
3. Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{x}$ по узлам $x_1{=}0$, $x_2{=}1/2$, $x_3{=}1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4. По формуле Гаусса с двумя узлами.
5. Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 2

Требуется вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ следующими способами:

1. "Точно".
2. По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
3. Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{x}$ по узлам $x_1 = 1/4, x_2 = 3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4. По формуле Гаусса с двумя узлами.
5. Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.