1 Оценка сверху для АСТ КФ в случае знакопостоянного веса

Далее действуем в предположении, что вес $\rho(x)$ знакопостоянен на (a, b), не умаляя общности можно считать его неотрицательным.

Определение

Назовем узел x_k *внутренним*, если $x_k \in (a, b)$ и *внешним* в противном случае.

Пусть *весовая функция* $\rho(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.
Пусть у КФ n внутренних узлов и m внешних узлов (полное число узлов $N = n + m$).

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \, \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j f(y_j), \quad x_k \in (a, b) \ \ y_j \notin (a, b) \,. \tag{1}$$

Теорема
АСТ КФ (1) удовлетворяет неравенству $d_N \leq 2n + m - 1 = (2N - 1) - m$.

Доказательство:
Предположим противное. Пусть АСТ $\geq (2n + m)$. Тогда предъявим многочлен степени $2n + m$, для которого эта КФ будет не точна. Рассмотрим

$$Q_{2n+m}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^2 \prod_{j=1}^{m} (x - y_j) \,.$$

По определению многочлен $Q_{2n+m} \not\equiv 0$. На (a, b) $Q_{2n+m}(x)$ знак не меняет, так как все его корни лежащие внутри (a, b) имеют кратность 2. Значит

$$\int_a^b \rho(x) Q_{2n+m}(x) \, \mathrm{d}x \neq 0$$

потому что $\rho(x)$ и $Q_{2n+m}(x)$ не эквивалентны нулю и знакопостоянны.
С другой стороны тот же интеграл равен нулю, так как для $Q_{2n+m}(x)$ формула (1) должна быть точна и так как x_k, y_j — корни $Q_{2n+m}(x)$.

$$\int_a^b \rho(x) Q_{2n+m}(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k Q_{2n+m}(x_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j Q_{2n+m}(y_j) = 0$$

ПРОТИВОРЕЧИЕ! нашему предположению, что $d_N \geq (2n + m)$. Следовательно, $d_N \leq (2n + m - 1)$.
Теорема доказана.

Замечание
Таким образом, в случае знакопостоянного веса АСТ ИКФ с N узлами удовлетворяет двусторонней оценке:

$$N - 1 \leq d_N \leq (2N - 1) - m \leq 2N - 1.$$

При этом оценка снизу достигается специальным выбором коэффициентов A_k в случае когда узлы выбраны произвольными попарно различными. Отметим, что ограничения знакопостоянства веса здесь нет. В случае же если вес знакопостоянен, можно повысить АСТ ИКФ за счет специального выбора узлов, по которым далее построить ИКФ. Наивысшая АСТ КФ с N узлами равна $2N - 1$. И больше быть не может, так как общее число параметров КФ с N узлами равно $2N$ (N узлов и N коэффициентов).

КФ, имеющие наивысшую АСТ будут рассмотрены несколько позже. Сейчас рассмотрим вопрос сходимости последовательности ИКФ к интегралу.

2 Оценки погрешности КФ и сходимость КФ

Пусть $[a, b]$ – конечен. Рассмотрим КФ следующего вида

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k). \qquad (2)$$

Пусть узлы $x_k \in [a, b]$ и, кроме того, АСТ КФ (2) $= d \geq 0$. Известно, что $\forall f \in C\,[a, b]\ \ \exists! P_d^* :$ $\|f - P_d^*\|_{C[a,b]} = E_d(f)$.

Хотим получить оценку для погрешности КФ (2). Погрешность КФ (2)

$$\begin{aligned} R_N(f) &= \int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k) \\ &= \int_a^b \rho(x)\left(f(x) - P_d^*(x)\right)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x) P_d^*(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{N} A_k P_d^*(x_k) - \sum_{k=1}^{N} A_k P_d^*(x_k) \\ &= \int_a^b \rho(x)\left(f(x) - P_d^*(x)\right)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{N} A_k\left(P_d^*(x_k) - f(x_k)\right). \end{aligned}$$

Причем очевидно, так как все узлы $x_k \in [a, b]$, то $|P_d^*(x_k) - f(x_k)| \leq E_d(f) \quad \forall k = 1, 2, \ldots, N$ и

$$\int_a^b \rho(x) P_d^*(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{N} A_k P_d^*(x_k) = 0,$$

так как по предположению АСТ $= d$, значит для P_d^* интеграл совпадет с квадратурной суммой. Теперь легко получается оценка по абсолютной величине

$$|R_N(f)| \leq E_d(f) \int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + E_d(f) \sum_{k=1}^{N} |A_k| = E_d(f) \left(\int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{N} |A_k| \right). \qquad (3)$$

Замечание
Здесь важна конечность $[a, b]$. Иначе $E_d(f) = \|f - P_d^*\|_{C[a,b]} = +\infty$ и оценка (3) перестает быть содержательной.

Утверждение 1
Пусть $[a, b]$ конечен. Пусть $f \in C[a, b]$, а узлы КФ вида (2) $x_k \in [a, b]$. Пусть выполнены два условия:
1) $\sum_{k=1}^{N} |A_k| \leq M$,
2) $d_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.
Тогда $\forall f \in C[a, b] \qquad R_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Доказательство:
Известно, что наилучшее равномерное приближение $E_{d_N}(f) \xrightarrow[d_N\to+\infty]{} 0$ для конечного $[a, b]$. Так как выполнено условие 1), то $\int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{N} |A_k|$ ограничена. И, следовательно, так как верна оценка (3) для $|R_N(f)|$, то $R_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. *Утверждение 1 доказано.*

Определение
Говорят, что остаточный член квадратурной формулы (2) допускает представление в форме Лагранжа, если $\exists Const,\ \exists m \in N : \forall f \in C^m\,[a, b]\ \ \exists \xi \in [a, b]$ такая, что

$$R_N(f) = Const \cdot f^{(m)}(\xi) \qquad (4)$$

Замечание
КФ может не иметь остатка в форме Лагранжа.

Утверждение 2
Если КФ имеет представление остатка в форме Лагранжа, то $m = d_N + 1$.
Доказательство: без доказательства.

Утверждение 3
Пусть вес $\rho(x)$ КФ (2) знакопостоянен (например, $\rho(x) \geq 0$). Пусть КФ (2) имеет АСТ $= d$. Если все коэффициенты КФ (2) одного знака. Тогда

$$|R_N(f)| \leq 2|\mu_0| E_d(f). \qquad (5)$$

Доказательство:
Заметим, что знак коэффициентов КФ (если все они одного знака) связан со знаком весовой функции (если вес знакопостоянен). А именно: пусть, например, $\rho(x) \geq 0$, тогда если $\exists d \geq 0$ — АСТ КФ (2), то будет точность для констант. Рассмотрим $f(x) \equiv 1$, для нее

$$\mu_0 = \int_a^b \rho(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^N A_k \cdot f(x_k) = \sum_{k=1}^N A_k.$$

Значит, если $\rho(x) \geq 0$, то $\mu_0 > 0$ и все $A_k > 0$. Иначе, если $\rho(x) \leq 0$, то $\mu_0 < 0$ и все $A_k < 0$. Также, очевидно, $\int_a^b |\rho(x)| \,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \mu_0$. А если вес неотрицателен, то $\sum_{k=1}^N |A_k| = \sum_{k=1}^N A_k = \mu_0$. Тогда из оценки (3) немедленно следует, что $|R_N(f)| \leq 2\mu_0 E_d(f)$. *Утверждение 3 доказано.*

Замечание:
1) Пусть вес $\rho(x) \geq 0$ и пусть $\exists\ d \geq 0$ — АСТ КФ. Тогда, если среди коэффициентов A_k есть отрицательные, то оценка

$$|R_N(f)| \leq \left(\int_a^b |\rho(x)| \,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^N |A_k| \right) E_d(f)$$

будет хуже чем оценка (5) для положительных коэффициентов. Ведь в этом случае

$$\sum |A_k| \geq \left| \sum A_k \right| = \left| \int_a^b \rho(x) \,\mathrm{d}x \right| = \int_a^b \rho(x) \,\mathrm{d}x = \mu_0.$$

2) ВАЖНО! если вес $\rho(x) \geq 0$, желательно использовать КФ, все коэффициенты которой > 0, и наоборот, если вес $\rho(x) \leq 0$, лучше использовать КФ, все коэффициенты которой < 0.
3) Еще одно пояснение, почему лучше строить КФ с коэффициентами одного знака: сумма модулей коэффициентов КФ характеризует устойчивость вычислений. А именно: рассмотрим результат вычисления интеграла при помощи КФ "в машине". Мы имеем дело с приближенной суммой

$$\sum_{k=1}^N A_k \widetilde{f}(x_k) = \sum_{k=1}^N A_k \left(f(x_k) + \epsilon_k \right) = \sum_{k=1}^N A_k f(x_k) + \sum_{k=1}^N A_k \epsilon_k.$$

Вторая сумма представляет собой погрешность, вызванную погрешностями ошибок в вычислении значений функции. Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^N A_k \epsilon_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^N |A_k| \right) \cdot \max_k |\epsilon_k|.$$

При этом $\max_k |\epsilon_k|$ не улучшаема, а коэффициент усиления этой ошибки $\sum_{k=1}^N |A_k|$ минимален, если все A_k одного знака.

3 Подобные квадратурные формулы

Пусть вес $\rho(x) \equiv 1$. Тогда, чтобы $\exists \mu_0 = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$, требуется конечность $[a, b]$. Рассмотрим КФ вида

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k), \qquad (6)$$

узлы которой $x_k \in [a, b]$.
Предположим, мы хотим вычислить интеграл следующего вида

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y,$$

при этом конечный $[c, d] \neq [a, b]$.

Выполним линейную замену переменной интегрирования, переводящую $[a, b]$ в $[c, d]$:

$$y = c + \frac{d-c}{b-a}(x - a),$$

при этом $\mathrm{d}y = q\,\mathrm{d}x$, где $q = \frac{d-c}{b-a}$ — коэффициент подобия. Имеем

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(c + q(x-a))q\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot q \cdot g(c + q(x_k - a)) = \sum_{k=1}^{N} B_k \cdot g(y_k),$$

где

$$\begin{aligned} B_k &= A_k \cdot q \\ y_k &= c + q(x_k - a), \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (7) \end{aligned}$$

Определение
Формулы

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k), \qquad \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \approx \sum_{k=1}^{N} B_k g(y_k)$$

называются *подобными квадратурными формулами*, если для их коэффициентов и узлов выполнены равенства (7).

4 Свойства КФ

Пусть вес $\rho(x) \equiv 1$, и, следовательно, $[a, b]$ конечен.

1. Если КФ (6) точна для констант (АСТ КФ ≥ 0), то $\sum_{k=1}^{N} A_k = b - a$.

2. АСТ подобных формул совпадают.

3. Если одна из подобных КФ интерполяционная (ИКФ), то другая тоже ИКФ.

4. Пусть

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k)$$

интерполяционная, вес $\rho(-x) = \rho(x)$ (четен на $[-a, a]$), а узлы $x_k = -x_{N+1-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N$ (симметричны). Тогда

$$A_k = A_{N+1-k}$$

— коэффициенты, отвечающие симметричным узлам равны.

Доказательство:
Так как по условию КФ — ИКФ, то по определению ИКФ

$$A_k = \int_{-a}^{a} \rho(x)\ell_{kN}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из-за симметрии узлов при четном N многочлен $\omega_N(x) = \prod_{k=1}^{N/2}(x-x_k)(x+x_k) = \prod_{k=1}^{N/2}(x^2 - {x_k}^2)$ – четная функция. Тогда многочлены влияния (лагранжевы коэффициенты) будут связаны равенствами

$$\begin{aligned}
\ell_{kN}(x) &= \frac{\omega_N(x)}{(x-x_k)\omega_N'(x_k)} = \frac{\omega_N(-x)}{(-x+x_k)\left(-\omega_N'(x_k)\right)} = \frac{\omega_N(-x)}{(-x+x_k)(\omega_N'(x_{N+1-k}))} \\
&= \frac{\omega_N(-x)}{(-x-x_{N+1-k})\omega_N'(x_{N+1-k})} = \ell_{N+1-k,N}(-x).
\end{aligned}$$

Теперь получим равенство коэффициентов:

$$A_{N+1-k} = \int_{-a}^{a} \rho(x)\ell_{N+1-k,N}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \rho(x)\ell_{kN}(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \rho(-x)\ell_{kN}(-x)\,\mathrm{d}x = A_k.$$

Свойство доказано.

5. Можно сдвинуть $[-a, a]$, но если при этом вес будет четен относительно середины отрезка, то есть $\rho(a+b-x) = \rho(x), \quad x \in [a, b]$, а узлы КФ расположены симметрично (если x_k – узел, то и $a+b-x_k$ – узел). А также КФ — ИКФ, то снова $A_k = A_{N+1-k}$.

6. Пусть формулы $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k)$ и $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \approx \sum_{k=1}^{N} B_k g(y_k)$ подобны. Пусть первая КФ имеет представление остатка в форме Лагранжа: $R_N(f) = C_1 f^{(m)}(\xi)$; тогда вторая также имеет представление остатка в форме Лагранжа $R_N(g) = C_2 g^{(m)}(\eta)$, где

$$C_2 = C_1 \left(\frac{d-c}{b-a}\right)^{m+1}.$$

Доказательство:
Рассмотрим $f(x) = g(c + q(x-a))$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y &= q \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = q\left(\sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k) + R_N(f)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} qA_k g(c + q(x_k - a)) + qC_1 f^{(m)}(\xi) \\
&= \sum_{k=1}^{N} B_k g(y_k) + qC_1 q^m g^{(m)}(\eta) \\
&= \sum_{k=1}^{N} B_k g(y_k) + R_N(g),
\end{aligned}$$

где $\eta = c + q(\xi - a)$. Следовательно, $R_N(g) = C_1 q^{m+1} g^{(m)}(\eta)$. *Свойство доказано.*