

Лабораторная работа 4.3

Приближённое вычисление интеграла по составным квадратурным формулам

Написать программу для вычисления определенного интеграла при помощи составных квадратурных формул (СКФ).

- 1) Параметры задачи: пределы интегрирования A, B , весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$, m – число промежутков деления $[A, B]$.
- 2) Для случая $\rho(x) \equiv 1$ и легко интегрируемой функции $f(x)$ вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x) \cdot f(x)$ по конечному $[A, B]$. (Обозначим это значение за J).
- 3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x) \cdot f(x)$ по $[A, B]$ при помощи СКФ
 - левых прямоугольников;
 - правых прямоугольников;
 - средних прямоугольников;
 - трапеций;
 - Симпсонас параметром m . Обозначим эти значения $J(h)$, здесь $h = (B-A)/m$.
- 4) Посчитать и вывести на печать $|J - J(h)|$ – абсолютную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
- 5) Посчитать и вывести на печать $|J - J(h)| : |J|$ – относительную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
- 6) Для фиксированного набора параметров для каждой составной КФ оценить погрешность вычислений (теоретически, смотри сводную оценку погрешности для СКФ).
- 7) Запустить программу с параметрами, для которых была рассчитана теоретическая погрешность. Выводить в этом случае на печать теоретическую оценку, сравнить ее с фактической погрешностью (устно).

При отладке программы обязательно протестировать все квадратурные формулы на многочленах степеней, соответствующих их (формул) алгебраической степени точности.

- 8) Знать/найти ответы на следующие вопросы:
 - Сколько (в терминах m) значений функции $f(x)$ участвует (в теории, а не при Вашей реализации программы) в вычислении интеграла по каждой СКФ?
 - Почему, несмотря на то, что АСТ КФ средних прямоугольников равна 1, а АСТ Симпсона равна 3, они обе точны для $f(x) = 1,27 \cdot x^5 + 2,04 \cdot x$ при интегрировании по $[a, b] = [-5, 5]$ и для $[a, b] = [-90, 90]$?
 - *Если ответ на предыдущий вопрос не находится, подумайте, почему для той же функции не будет точности, например, для $[a, b] = [-1, 5]$?

Лабораторная работа № 4.4

- 1) Увеличить m в l раз (здесь l – параметр, натуральное число; запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).
- 2) Вычислить приближённо и вывести на печать значения интеграла от $\rho(x) \cdot f(x)$ по $[A, B]$, посчитанные при помощи составных формул *левых, правых, средних прямоугольников, трапеций* и *Симпсона* с новым числом делений $[A, B] - m \cdot l$. (Обозначим это новое значение за $J(h/l)$).
- 3) Посчитать и вывести на печать абсолютную фактическую погрешность каждой формулы для случая нового числа промежутков разбиения $m \cdot l$.
- 4) Уточнить значения $J(h)$ и $J(h/l)$ по принципу Рунге для каждой СКФ.
- 5) Посчитать и вывести на печать абсолютные фактические и относительные фактические погрешности для уточнённых значений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ к ЛР 4.3

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:

- 1) пределы интегрирования A, B (запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры);
- 2) весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$ (описать в коде вес $\rho(x)$ положить $\equiv 1$ и несколько вариантов для функции $f(x)$, в частности, обязательно рассмотреть функции-многочлены: нулевой, первой и третьей степени);
- 3) m – число промежутков деления $[A, B]$ (запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры).

НА ЭКРАНЕ (в блоке по тестовой задаче) должна быть отражена следующая информация:

- 1) название задачи;
- 2) $A =$, $B =$, $m =$, значение $h = (B - A) / m$;
- 3) J – точное значение интеграла (находить вручную, точно (через первообразную) или с помощью какого-нибудь матпакета с большим числом знаков);
- 4) далее, для каждой составной квадратурной формулы (далее СКФ) выводить:
 - значение $J(h)$;
 - абсолютную фактическую погрешность $|J - J(h)|$;
 - относительную фактическую погрешность $|J - J(h)| : |J|$;
 - (для фиксированной функции и параметров) теоретическую погрешность $Const \cdot M_{d+1} \cdot (b-a) \cdot h^{d+1}$.

Здесь d – АСТ СКФ, $M_{d+1} = \max_{[a,b]} |f^{(d+1)}(x)|$, $Const = 1/2$ для СКФ *левых и правых*, $1/12$ для *трапеций*, $1/24$ для *средних* и $1/2880$ для СКФ *Симпсона*.

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ:

- 1) Все составные КФ должны быть точны (погрешность 0 или машинный 0) для $f(x)=const$, однако, наиболее важно проверить точность СКФ левых и правых прямоугольников при тестировании программы;
- 2) Оставшиеся составные КФ должны быть также точны для $f(x)$ – многочленов первой степени, а КФ Симпсона точна для произвольного многочлена второй и третьей степени.

«ПРОВЕРКА НА ПРОЧНОСТЬ»:

Протестировать программу для случая, когда искомое значение интеграла довольно велико (подобрать такие $f(x)$ и $[A, B]$). «Поиграть» числом разбиений m (от 10 000 до 1 000 000).

- Убедиться, что программа «не ломается».
- Убедиться, что СКФ Симпсона при умеренном числе разбиений (1000, 10000) дает результат, более точный чем при миллионе.
- Подумать, с чем может быть связана потеря точности «у Симпсона».