Интерполирование по значениям функции

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет

2021

Содержание I

1. Постановка задачи интерполирования
2. Теорема о погрешности
3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона
4. Минимизация погрешности в точке интерполирования
5. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Обратное интерполирование
   - Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа
   - Постановка задачи обратного интерполирования
   - Задание 1
   - Задание 2
   - Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование

Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\dots$	$\dots$
x_n	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными:

$$x_i \neq x_j, \;\; i \neq j.$$

Требуется найти значение функции в точке $x = \overline{x}$, не совпадающей с узлами.

Приближенное значение функции $f(\overline{x})$ может быть найдено как значение интерполяционного многочлена:

$$f(\overline{x}) \approx P_n(\overline{x}),$$

где $P_n(x)$ строится единственным образом из условий

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Погрешность интерполирования находится из теоремы

Теорема о погрешности

Теорема 1

Пусть функция $f(x)$ *имеет конечную непрерывную производную* $f^{(n+1)}(x)$ *на наименьшем отрезке* $[c, d]$, *содержащем узлы интерполирования* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *и точку интерполирования* $\overline{x}$, *так что*
$c = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}\}, \quad d = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}\}.$
Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\overline{x}), \quad c < \xi < d$, *что*

$$R_n(f, \overline{x}) \quad = \quad f(\overline{x}) \; - \; P_n(\overline{x}) \quad = \quad \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\overline{x}), \qquad (1)$$

$$\text{где} \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \qquad (2)$$

Оценка погрешности

Оценка погрешности вычисляется следующим образом:

$$|R_n(\overline{x})| \leqslant M_{n+1} \cdot \frac{|(\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1) \cdots (\overline{x} - x_n)|}{(n+1)!}, \qquad (3)$$

где

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|, \;\; x \in [c, d].$$

Минимизация погрешности в точке интерполирования

Часто практически строится многочлен $P_m(x)$, где $m < n$, по $m+1$ узлу.
Очевидно, что из $n+1$ узла следует выбрать такие $m+1$, которые обеспечивают наименьшую погрешность, т. е. узлы, ближайшие к точке интерполирования $\overline{x}$.

Построение интерполяционного многочлена

При построении интерполяционного многочлена в виде

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

коэффициенты a_i являются решением системы

$$P_n(x_i) = f(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Определитель этой системы — определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, так как узлы попарно различны. Удобнее строить многочлен в форме Ньютона или в форме Лагранжа.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \quad (4)$$

Преимуществом этой формы является простота нахождения коэффициентов:
$A_0 = f(x_0)$, $A_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ и т. д., а также тот факт, что

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + A_k(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1}).$$

Минимизация погрешности в точке интерполирования

Если узлы интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ выбраны в порядке близости к точке интерполирования $\overline{x}$, то можно утверждать, что многочлен любой степени

$$P_0(x),\ P_1(x), \ldots, P_n(x)$$

обеспечивает минимум погрешности

$$|f(\overline{x}) - P_i(\overline{x})|$$

среди всех многочленов данной степени, построенных по данной таблице узлов.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа I

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq k} (x_k - x_i)} f(x_k), \tag{5}$$

где

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{6}$$

Постановка задачи обратного интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\dots$	$\dots$
x_n	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j.$$

Требуется приближенно найти такое $\overline{x}$, что $f(\overline{x}) \approx \overline{y}$.

Задание 1 I

1. Дана функция $y = f(x)$, узлы, значение функции $\overline{y}$. Получить таблицу значений функции в узлах. Требуется приближенно найти такое $\overline{x}$, что $f(\overline{x}) \approx \overline{y}$ тремя способами:

а) "точно", используя аналитическое выражение обратной функции. Обозначим x^*.

б) аппроксимацией функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ в форме Лагранжа и приближенным решением уравнения $P_n(x) = \overline{y}$ методом итераций или методом секущих. Обозначим решение уравнения $P_n(x) = \overline{y}$ через x_n. Результаты привести в таблице вида

n	0	1	2	3	4	5
x_n						
$x_n - x^*$						

в) если существует однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$, то поменять ролями узлы и значения функции и приближенно заменить обратную функцию интерполяционным многочленом $Q_m(y)$ $(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ в форме Лагранжа и вычислить $x_m = Q_m(\overline{y})$.

Результаты привести в таблице вида

m	0	1	2	3	4	5
x_m						
$x_m - x^*$						

Следует также привести таблицу используемых узлов для построения интерполяционных многочленов. Напомним, что в целях минимизации погрешности узлы следует выбирать ближайшими к точке интерполирования.

Задание 2 I

2* Дана функция $y = f(x), [a, b] = [-1, 1]$.
Требуется построить при различных n интерполяционные многочлены $P_n(x)$ в форме Лагранжа по равноотстоящим узлам и по узлам многочлена Чебышева. Сравнить на графике с функцией в одних осях координат.

Указание

Составить подпрограмму с параметрами:

- интерполируемая функция;
- степень многочлена;
- массив узлов.

Задание 2 II

Подпрограмма должна возвращать аналитическое выражение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа заданной степени по заданной таблице узлов для заданной функции.

Рассмотреть функции: а) $\sin(x)$; б) $|x|$; в) $\dfrac{1}{1+25\,x^2}$.

Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование

Номер варианта	Функция	Узлы	Точка интер-полирования	Значение функции
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.4	-0.56
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	-0.4	0.8
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	4	1.3
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.3	-0.8
8	e^x	-0.3. -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.2	0.8
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	4	2
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	7	2.5
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3. -0.2, 0, 0.2	0.6	0.8
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.4	0.56
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6