

Приближённое решение нелинейных уравнений

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет

2021

- 1 Отделение корней
- 2 Уточнение корней
 - Метод Ньютона (метод касательных)
 - Метод секущих
 - Метод хорд
 - Метод простой итерации (метод последовательных приближений)
- 3 Задание 1
- 4 Задание 2

Приближённое решение нелинейных уравнений I

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Всякое значение x^* такое, что $f(x^*) = 0$, называется корнем уравнения (1) или нулем функции $f(x)$.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения складывается из двух этапов

- 1 Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1).

Использование этих промежутков для определения начальных приближений к корням.

- 2 Уточнение приближенных корней.

Отделение корней

Для отделения корней следует построить таблицу значений функции или график функции, найти промежутки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки.

Тогда внутри этих промежутков содержится по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$.

Нужно тем или иным образом убедиться, что данный корень является единственным.

Для уменьшения длин промежутков может быть использован метод половинного деления (бисекции).

Метод бисекции

Полагаем $[a_0, b_0] = [a, b]$.

Пусть $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Далее строим последовательность промежутков

$\{[a_k, b_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{если } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{если } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге длина промежутка уменьшается вдвое, так что

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

Уточнение корней I

Для уточнения корней используются итерационные методы.

При решении задачи итерационными методами важно следующее:

- расчетная формула;
- условие сходимости;
- порядок сходимости (скорость сходимости):
число $\alpha \geq 1$ называют порядком сходимости последовательности $\{x_k\}$ к x^* , если $x_k \rightarrow x^*$ и существует постоянная C , такая что при всех k

$$|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x^*|^\alpha; \quad (2)$$

Уточнение корней II

- получение решения с заданной точностью ε , т. е. критерий окончания.

Здесь имеется в виду нахождение x_k такого, что выполняется условие $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Оценки погрешности

Существуют априорные и апостериорные оценки для фактической погрешности $|x_k - x^*|$.

Априорные оценки часто бывают сильно завышены.

Легко показать, что для оценки точности приближения x_k любого итерационного метода в предположении, что $f'(x) \neq 0$, можно воспользоваться неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \quad (3)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

Метод Ньютона (метод касательных)

Дано уравнение (1).

Пусть функция $f(x)$ — вещественная и находим вещественный корень x^* .

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$ таком, что $f(a)f(b) < 0$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $f'(x)$, $f''(x)$ — знакопостоянны.

Выбираем $x_0 \in [a, b]$. Заменим уравнение в окрестности x_0 приближённым уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

левая часть которого есть линейная часть разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 .

Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Действуя аналогично, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл: x_k есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции $f(x)$, построенной в точке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс. Это иллюстрируется на рис. 1.

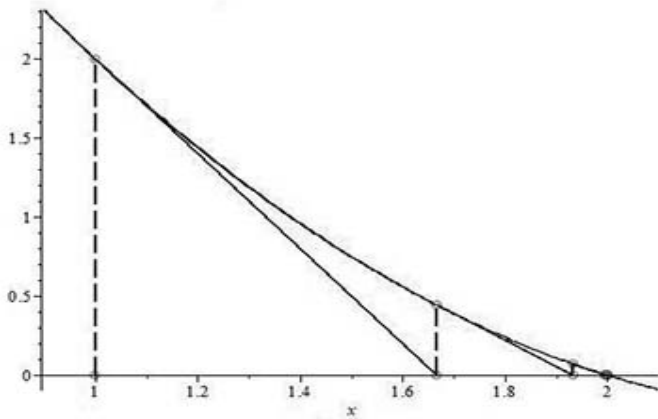


Рис. 1. Метод Ньютона

Теорема 1 (о сходимости)

Если

- ❶ $f(a)f(b) < 0$,
- ❷ $f'(x)$, $f''(x)$ сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$,
- ❸ $f(x_0)f''(x_0) > 0$, $x_0 \in [a, b]$,

то $x_k \rightarrow x^*$, причем скорость сходимости определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^2. \quad (5)$$

Здесь

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (6)$$

Если $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то можно не прийти к $x = x^*$, если x_0 не очень хорошее. Иллюстрация этого случая приведена на рис. 2.

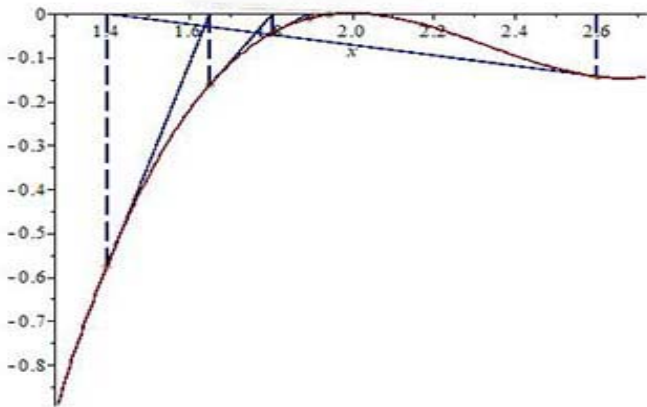


Рис. 2. Метод Ньютона, $f(x_0)f''(x_0) < 0$

Так как метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, то можно пользоваться следующим критерием оценки погрешности: если

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon,$$

то

$$|x_k - x^*| < \varepsilon.$$

Замечание 1

Если $f'(x^*) = 0$, то квадратичной сходимости может и не быть.

Например, пусть $f(x) = x^2$, корень $x^* = 0$ — корень второй кратности, расчетная формула имеет вид:

$x_{k+1} = x_k/2$ и сходимость линейная (если $x_0 \neq 0$).

Второго порядка сходимости для корня кратности p можно достичь, применяя расчетную формулу вида

$$x_k = x_{k-1} - p \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Например, в случае уравнения

$$(x - 2)^2 (x - 5) = 0 \quad (8)$$

кратный корень $x = 2$ находится с точностью $\varepsilon = 0.00001$ методом Ньютона без учета кратности по формуле 4 за 10 итераций, а с учетом кратности $p = 2$ по формуле 7 за 4 итерации.

Замечание 2

Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона с расчетной формулой

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Скорость сходимости модифицированного метода значительно меньше.

Замечание 3

Приведем расчетную формулу метода третьего порядка сходимости:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1}) f''(x_{k-1})}{2 (f'(x_{k-1}))^3}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Метод секущих I

Заменяя производную в расчетной формуле метода Ньютона её приближенным значением по формулам численного дифференцирования, получаем расчетную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Порядок сходимости метода секущих определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{k-1} - x^*)^\alpha, \quad (12)$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618$, а m_1 и M_2 имеют определенный в (6) смысл.

Метод секущих II

В методе секущих можно пользоваться критерием:

если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация метода секущих приведена на рис. 3.

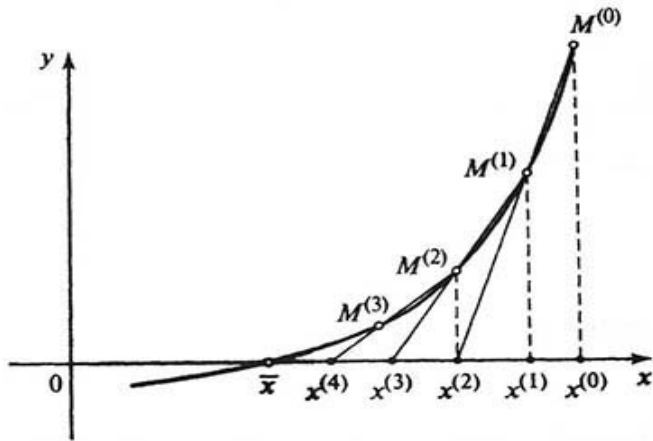


Рис. 3. Метод секущих

Метод хорд I

Пусть известен промежуток $[a, b]$, такой что $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f''(x) > 0$. Рассмотрим два возможных случая.

- 1 $f(a) < 0$, соответственно $f(b) > 0$. В этом случае конец b неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

образуют монотонно возрастающую последовательность, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x^* < b.$$

- ② $f(a) > 0$, соответственно $f(b) < 0$. В этом случае конец a неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

образуют монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0 = b.$$

Метод хорд |||

Пределы этих последовательностей x^* существуют, так как они ограничены и монотонны.

Для оценки точности можно воспользоваться уже известным неравенством (3)

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

и

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_k - x_{k-1}|, \quad (15)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$, $M_1 = \max |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

Геометрически метод эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $k=0, 1, \dots$

Метод хорд IV

Порядок метода — первый и нельзя пользоваться в качестве критерия модулем разности двух соседних приближений.

Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменяем уравнение (1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x), \quad (16)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна.

Расчетная формула метода

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Если эта последовательность сходящаяся, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

Геометрический смысл демонстрируется на рис. 4.

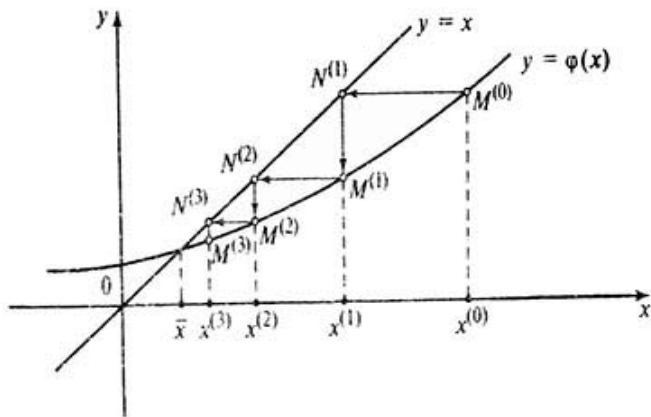


Рис. 4. Метод итераций

Условие сходимости

Кратко сформулируем условие сходимости.

Пусть в некоторой окрестности (a, b) корня x^* уравнения (16) производная $\varphi'(x)$ сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (18)$$

Тогда, если производная $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения (17) ($x_0 \in (a, b)$) сходятся к корню x^* монотонно, если производная $\varphi'(x)$ отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня x^* . Геометрические интерпретации метода итераций в зависимости от функции $\varphi(x)$ и от начального приближения x_0 можно посмотреть на рис. 5.

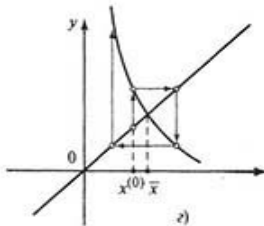
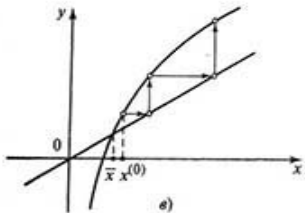
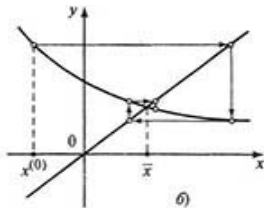
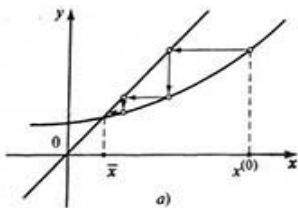


Рис. 5. Метод итераций

Априорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (19)$$

Апостериорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|. \quad (20)$$

Замечание 4

Как показывает оценка (20), ошибочно было бы пользоваться в качестве критерия получения решения с заданной точностью ε совпадения x_k и x_{k-1} с точностью ε .

Замечание 5

Напомним, что приводить уравнение вида (1) к виду (16) следует так чтобы $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, причем, чем меньше число q , тем быстрее, вообще говоря, последовательные приближения сходятся к корню x^* .

Укажем один достаточно общий прием приведения. Пусть искомый корень x^* уравнения лежит на отрезке $[a, b]$, причем

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

при $a \leq x \leq b$. Заменяем уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0).$$

Из условия сходимости получаем, что можно взять $\lambda = \frac{1}{M_1}$ и тогда

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1.$$

Замечание 6

Формулу (4) метода Ньютона можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения $x = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Легко проверить, что $\varphi'(x^*) = 0$.

Поэтому следует ожидать квадратичную сходимость метода.

Задание 1 |

Дано уравнение $f(x) = 0$.

Требуется

- 1 Отделить все корни или корни на указанном интервале.
- 2 Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3 Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”, ранее и далее в таблице они обозначены x^* .

Задание 1 II

- 4 Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5 Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку (15). Сравнить с фактической погрешностью.
- 6 Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 7 Сравнить результаты, количество итераций.

Для численной реализации методов должны быть созданы подпрограммы с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню (в методе Ньютона и в методе итераций);
- ε — заданная точность;
- k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения закливания).

Подпрограмма должна возвращать либо x_k , такое что $|x_k - x^*| < \varepsilon$, либо $x_{k_{\max}}$.

Результаты методов уточнения оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		—		
1				
...

Задание 2

Дано уравнение $P_n(x) = 0$, где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (21)$$

— многочлен Лежандра, корни которого являются узлами квадратурной формулы Гаусса.

Требуется, используя метод Ньютона, вычислить указанный по номеру (по возрастанию) корень многочлена Лежандра с заданной точностью ε .

Для реализации метода Ньютона должна быть создана подпрограмма с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню;
- ε — заданная точность;
- k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения заикливания);
- x^* — “точное” значение корня¹.

Подпрограмма должна возвращать либо x_k такое, что $|x_k - x^*| < \varepsilon$, либо $x_{k_{\max}}$ и количество итераций.

¹“Точное” значение корня можно найти или встроенной функцией или методом Ньютона с $\varepsilon = 10^{-15}$.

Результаты оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$P_n(x_k)$
0		—		
1				
...

Замечание 7

Нулевое приближение к корню удобно вычислять по формуле

$$x_0(i) = -\cos\left(\frac{i - 1/4}{n + 1/2} \pi\right). \quad (22)$$

Здесь i — номер корня, n — степень многочлена Лежандра.

Свойства многочлена Лежандра I

Многочлен Лежандра (21) является частным случаем многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha = \beta = 0$. Приведем необходимые сведения об этих многочленах.

Нам потребуется частный случай многочленов, когда $\alpha = \beta = k$ — целое число.

❶ $P_0^{(k, k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k, k)}(x) = (k + 1)x.$

❷ Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой:
$$P_{n+2}^{(k, k)}(x) = \frac{(n + k + 2)(2n + 2k + 3)x \cdot P_{n+1}^{(k, k)}(x) - (n + k + 2)(n + k + 1)P_n^{(k, k)}(x)}{(n + 2k + 2)(n + 2)},$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

❸ Правила дифференцирования многочленов Якоби:

$$\left[P_n^{(k, k)}(x) \right]' = \frac{n + 2k + 1}{2} P_{n-1}^{(k+1, k+1)}(x), \quad n \geq 1.$$

Для вычисления значения многочлена и его производной в точке предпочтительнее использовать вышеприведенную рекуррентную формулу, так как счет многочлена через его коэффициенты неустойчив при больших значениях n . Как видно, в данном случае понадобится вычислять не только $P_n^{(0,0)}(x)$, но и $P_{n-1}^{(1,1)}(x)$.

В связи с этим для реализации метода потребуется создать подпрограмму с параметрами:

- n — степень многочлена;
- k — верхний индекс у многочлена Якоби;
- x — точка, в которой вычисляется значение многочлена.

Эта программа на языке MATLAB может иметь, например, следующее содержание:

```

function tmp=Precx(n,k,x)
tmp0=1;
tmp1=(k+1)*x;
tmp=tmp1;
    for i=1:n-1
        tmp=((i+k+2)*(2*i+2*k+3)*x*tmp1-
            (i+k+2)*(i+k+1)*tmp0)/((i+2*k+2)*(i+2));
        tmp0=tmp1;
        tmp1=tmp;
    end
end

```

%Использование встроенных функций MATLAB

```
syms x;
```

```
n=3
```

```
num=3
```

%Используется встроенная функция для построения
%полинома Лежандра

```
P=vpa(collect(legendreP(n,x)))
```

%Используется встроенная функция для построения
%полинома Якоби

```
Pj=vpa(collect(jacobiP(n,k1,k2,x)
```

```
dP = diff(P) %дифференцирование полинома Лежандра
```

%Вычисление и сортировка по возрастанию

%всех корней полинома

```
Xsolve=sort(vpa(solve(P,x)))
```

%Извлечение корня по заданному порядковому номеру

```
hexact=Xsolve(num)
```