1 Простейшие квадратурные формулы

1.1 Формула прямоугольника

Определение

Пусть *вес* $\rho(x) \equiv 1$, тогда $(a,\, b)$ – конечен. ИКФ с одним узлом будем называть *КФ прямоугольника.*

Таким образом, общий вид *КФ прямоугольника*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 \cdot f(x_1). \qquad (1)$$

Так как мы имеем ИКФ с одним узлом, ее АСТ $d \geq 0$, и значит любая КФ прямоугольника будет точна для констант. Это даст возможность определить коэффициент A_1. Рассмотрим $f(x) \equiv 1$ и запишем условие точности для нее

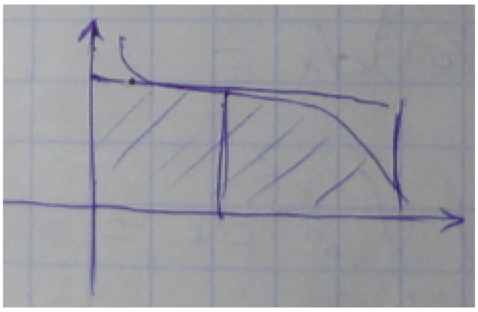
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = (b-a) = A_1 \cdot f(x_1) = A_1.$$

Имеем, при любом выборе узла x_1 *КФ прямоугольника* всегда имеет коэффициент равный $(b-a)$. Значит, если определить *КФ прямоугольника* через описание, получим такую КФ

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a) \cdot f(x_1). \qquad (2)$$

Замечание

1) Формула получила свое название из-за очевидной геометрической интерпретации: интеграл, как площадь криволинейной трапеции, заменяется на площадь прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $f(x_1)$.



2) Ясно, что *КФ прямоугольника* для фиксированного $[a,\, b]$ (как любая ИКФ) однозначно определяется выбором узла x_1.

3) Вообще говоря, узел x_1 не обязательно из $[a,\, b]$.

Получим три наиболее часто употребляемые *КФ прямоугольника.* При этом построение КФ и формулу для остатка мы будем получать для отрезка $[0,\, 1]$, а затем для произвольного $[a,\, b]$ строить подобную КФ и рассчитывать остаток по свойству 6, которым завершилась предыдущая Лекция №15.

При получении представления остатка (погрешности КФ) нам будет полезна

Теорема (о среднем значении)
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на конечном $[a,\, b]$, если при этом

1. $\forall x \in [a,\, b] \quad m \le f(x) \le M$ (f ограничена);
2. $g(x)$ не меняет знак на $[a,\, b]$.

Тогда $f(x)g(x)$ также интегрируемо на $[a,\, b]$ и

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $m \le \mu \le M$.

Если же $f \in C[a,\, b]$, то $\exists \eta \in [a,\, b] \ : \ \mu = f(\eta)$. Значит,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.1.1 Квадратурная формула левого прямоугольника

Рассмотрим *вес* $\rho(x) \equiv 1$, $[a,\, b] = [0,\, 1]$. Пусть узел $x_1 = 0$ – левый конец отрезка. Тогда имеем *КФ левого прямоугольника*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(0) \qquad (3)$$

Погрешность формулы (3)

$$\begin{aligned} R_\Lambda(f) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) = \int_0^1 \left(f(x) - f(0)\right)\,\mathrm{d}x \\ \text{по теореме Лагранжа, в предположении что } f &\in C^1[0,\, 1] \\ &= \int_0^1 \underbrace{x}_{\text{знакопост.}} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\text{огранич.}}\,\mathrm{d}x = f'(\eta) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \cdot f'(\eta). \end{aligned}$$

Получили представление остатка в форме Лагранжа: $m = 1, C_1 = 1/2$:

$$R_\Lambda(f) = \frac{1}{2} \cdot f'(\eta), \quad \text{где } \eta \in [0,\, 1].$$

Тогда общем случае на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f(a) \qquad (4)$$

В нашем случае $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $[c,\, d] = [a,\, b]$, $q = (b-a)$. По упомянутому ранее свойству погрешностей подобных КФ, находим

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \left(\frac{d-c}{b-a}\right)^{m+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{1-0}\right)^2 \\ R_\Lambda(f) &= C_2 f'(\chi) = \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\chi), \quad \chi \in [a,\, b]. \end{aligned}$$

1.1.2 Квадратурная формула правого прямоугольника

Рассмотрим *вес* $\rho(x) \equiv 1$, $[a,\, b] = [0,\, 1]$. Пусть узел $x_1 = 1$ – правый конец отрезка. Тогда имеем *КФ правого прямоугольника*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(1). \qquad (5)$$

Получим погрешность формулы (5)

$$\begin{aligned}
R_{\Pi}(f) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(1) = \int_0^1 (f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x \\
\text{по теореме Лагранжа, в предположении что } f &\in C^1[0,\,1] \\
&= \int_0^1 (\underbrace{x-1}_{\text{знакопост.}})\cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\text{огранич.}}\,\mathrm{d}x = f'(\eta)\cdot(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x}) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot f'(\eta).
\end{aligned}$$

Снова получили представление остатка в форме Лагранжа: $m = 1, C_1 = -1/2$:

$$R_{\Pi}(f) = -\frac{1}{2}f'(\eta), \quad \eta \in [0,\,1].$$

Тогда общем случае на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f(b). \qquad (6)$$

Аналогично, получаем представление остатка в форме Лагранжа формулы (6)

$$R_{\Pi}(f) = -\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\chi), \quad \chi \in [a,\,b].$$

Замечание
Из представления погрешностей $R_{\Lambda}(f)$ и $R_{\Pi}(f)$ очевидно, что АСТ КФ *левого прямоугольника* и АСТ КФ *правого прямоугольника* равны 0.

1.1.3 Квадратурная формула среднего прямоугольника

Рассмотрим *вес* $\rho(x) \equiv 1$, $[a,\,b] = [-1,\,1]$. Пусть узел $x_1 = 0$ – середина отрезка. Тогда имеем *КФ среднего прямоугольника*

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2f(0) \qquad (7)$$

Получим погрешность формулы (7) в предположении, что $f \in C^2[-1,\,1]$

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{mid}}(f) &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2f(0) = \int_{-1}^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(\xi(x))\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + f''(\eta)\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\eta)}{3}.
\end{aligned}$$

Итак, имеем представление остатка в форме Лагранжа $m = 2, C = 1/3$:

$$R_{\mathrm{mid}}(f) = \frac{1}{3}f''(\eta), \quad \eta \in [-1,\,1].$$

Для произвольного $[a,\,b]$ *КФ среднего прямоугольника*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad (8)$$

а представление погрешности (так как коэффициент подобия q в этом случае равен $\frac{b-a}{2}$)

$$R_{\mathrm{mid}}(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 f''(\chi) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\chi), \quad \chi \in [a,\, b].$$

Замечание
Из представления погрешности $R_{\mathrm{mid}}(f)$ ясно, что АСТ КФ *среднего прямоугольника* равна 1. Это значение $d = 1$ является наивысшим значением АСТ для КФ с одним узлом.
Замечание
Для всех остальных вариантов выбора узла x_1 нет представление остатка в форме Лагранжа.
Пример

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(0) + A_2 f(1).$$

$$\begin{aligned} f = 1 \quad &: \quad 2 = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 \\ f = x \quad &: \quad 2 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 \end{aligned}$$

поэтому

$$A_1 = 0, A_2 = 2.$$

2 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Рассмотрим *вес* $\rho(x) \equiv 1$, $[a,\, b]$ конечный. Рассмотрим $n \in N$, разобьем $[a,\, b]$ на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Точки деления обозначим $x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n$.
Определение
КФ Ньютона-Котеса — это ИКФ для веса $\rho(x) \equiv 1$ по конечному $[a,\, b]$, узлы которой — точки $x_k^{(n)}$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \tag{9}$$

Замечание
Таким образом, рассматривая $n = 1, 2, \ldots$ мы, на самом деле, имеем последовательность КФ. Общее число узлов *КФ Ньютона-Котеса*, соответствующей параметру n, равно $N = n + 1$.

Определим АСТ *КФ Ньютона-Котеса*. Так как она — ИКФ с $(n+1)$ узлом, $d \geq n$, (с ростом n d не убывает). Можно показать, что d – нечетно, и вот из каких соображений:
1) узлы $x_k^{(n)}$ расположены симметрично относительно середины $[a, b]$;
2) $\rho(x) \equiv 1$, очевидно, ведет себя четным образом относительно $\frac{a+b}{2}$.
Тогда, по доказанному ранее свойству, симметричным узлам отвечают одинаковые коэффициенты, то есть $A_k^{(n)} = A_{n+1-k}^{(n)}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n$. Подставим в формулу (9) нечетную функцию

$$f(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2j+1}, \quad \forall j = 0, 1, \ldots.$$

Значит, *КФ Ньютона-Котеса* $\forall n$ точно интегрирует все нечетные степени.
Утверждение(без доказательства)

АСТ *КФ Ньютона-Котеса* (9) задается равенствами:

$$d_n = n, \quad n = 2\ell + 1; \qquad d_n = (n+1), \quad n = 2\ell.$$

Рассмотрим первые три КФ в последовательности.

2.1 Квадратурная формула трапеции

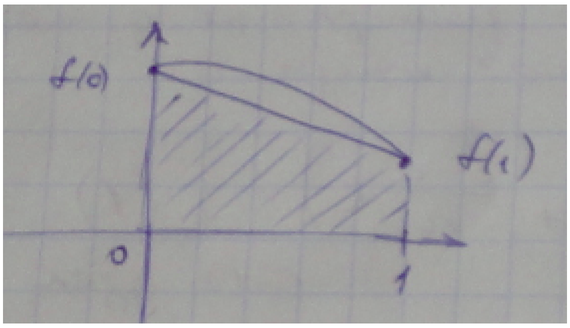
Пусть $n = 1$, $N = n+1 = 2$. Имеем два узла $x_0^{(1)} = a,\ x_1^{(1)} = b$. Искомые коэффициенты равны между собой: $A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = A$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx Af(a) + Af(b),$$

АСТ формулы $\geq (2-1) = 1$, т.е. для $f(x) \equiv 1$ формула должна быть точна. Откуда получаем $(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A\cdot 1 + A \cdot 1 = 2A \implies A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right). \qquad (10)$$

Из-за четкой геометрической интерпретации КФ (10) получила название *КФ трапеции*.



Снова сначала получим представление погрешности для $[0,\,1]$, а затем применим известное свойство для остатков подобных формул. Наша КФ — ИКФ по узлам 0 и 1 (если интегрируем по $[0,\,1]$), то $f(x) = P_1(x) + r(x)$. Причем погрешность интерполирования

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\omega(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x(x-1), \quad \text{значит погрешность КФ}\\
R_{\mathrm{tr}}(f) &= \int_0^1 \rho(x)r(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f''(\xi(x))}{2}x(x-1)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}f''(\eta)\int_0^1 x(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f''(\eta)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}f''(\eta), \quad \eta \in [0,\,1].
\end{aligned}$$

Это представление остатка в форме Лагранжа, $m = 2,\ C_1 = -\frac{1}{12}$.
Теперь получим представление остатка для произвольного $[a,\,b] \neq [0,\,1]$.

$$R_{\mathrm{tr}}(f) = -\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{1}\right)^3 f''(\chi) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\chi), \quad \chi \in [a,\,b].$$

Замечание
Из представления погрешности *КФ трапеции* ясно, что ее АСТ = 1.

2.2 Квадратурная формула Симпсона (параболы)

Пусть $n = 2$, общее число узлов $N = n+1 = 3$. Построим ИКФ для $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1).$$

Определим коэффициенты. Точность для констант приводит к равенству $A_1 + A_2 + A_3 = 2$. Кроме того, узлы расположены симметрично, значит отвечающие им коэффициенты равны: $A_1 = A_3$. Возьмем

$$f(x) = x^2$$

для нее формула должна быть точна, так как АСТ ИКФ с тремя узлами ≥ 2. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3} = A_1 + A_3 \implies A_1 = A_3 = \frac{1}{3}\\ A_2 &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Получили формулу для $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right).$$

Получим представление погрешности этой КФ.

Узлы КФ (и, что то же самое, узлы интерполяции) это $-1,\ 0,\ 1$, значит многочлен

$$\omega(x) = (x+1)x(x-1).$$

Очевидно, $\omega(x)$ меняет знак на $[-1, 1]$, значит действовать как в случае КФ прямоугольников или КФ трапеции нельзя. Поэтому простой интерполяцией здесь не обойтись.
По табличке

x	f	f'
-1	$f(-1)$	
0	$f(0)$	$f'(0)$
1	$f(1)$	

построим $H_3(x)$ — многочлен Эрмита. Посмотрим на погрешность интерполирования Эрмита

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot \Omega(x), \quad \Omega(x) = (x+1)x^2(x-1) = x^2(x^2-1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}R_{\text{Simpson}}(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right)\\ &= \int_{-1}^{1} \left(f(x) - H_3(x)\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(\xi(x))\Omega(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(\xi(x))x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\cdot 2\\ &= -\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta).\end{aligned}$$

Таким образом, есть представление остатка в форме Лагранжа ($m = 4,\quad C_1 = -1/90$):

$$R_{\text{Simpson}}(f) = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta), \qquad \eta \in (-1, 1).$$

Для интегрирования по произвольному конечному $[a,\ b]$ формула выглядит так

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \qquad (11)$$

ее остаток также имеет представление в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} R_{\text{Simpson}}(f) &= -\frac{1}{90} f^{(4)}(\chi) \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \\ &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\chi), \qquad \chi \in (a,\, b). \end{aligned}$$

2.3 Формула 3/8

Пусть $n = 3$, общее число узлов $N = n + 1 = 4$. Справочно приведем *формулу трех восьмых* для $[-1,\, 1]$ и произвольного $[a,\, b]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f(-1) + \frac{3}{8} \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8} \cdot f(1)\right) \\ \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx (b-a) \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot f(a) + \frac{3}{8} \cdot f\left(a+h\right) + \frac{3}{8} \cdot f\left(a+2h\right) + \frac{1}{8} \cdot f(b)\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $h = (b-a)/3$.

2.4 Поведение коэффициентов КФ Ньютона–Котеса

Вспомним оценку (3) из Лекции №15:

$$|R_N(f)| \le \left(\int_a^b |\rho(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_1^N |A_k|\right) E_d(f).$$

Из нее легко получалось *Утверждение 1* о сходимости квадратурных сумм к точному значению интеграла (или, что то же самое, о сходимости к нулю $R_N(f)$. Однако это было верно в предположении, что $d \to +\infty$ и ограниченности сумм модулей коэффициентов КФ.

Для последовательности КФ Ньютона–Котеса имеет место неограниченный рост АСТ, что хорошо, но сумма модулей коэффициентов неограниченно растет с ростом $N = n + 1$, это было показано Р.О.Кузьминым, который установил асимптотические формулы для коэффициентов, откуда вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \text{при том, что} \sum_{k=0}^{n} A_k = b - a. \tag{13}$$

Замечание:

1) Первую таблицу коэффициентов для $n = 1, 2, \ldots, 10$ получил Котес. Оказалось, что при $n = 8$ и $n = 10$ среди коэффициентов встречаются отрицательные. При том, что вес неотрицателен.

2) В последующем были вычислены коэффициенты для $n > 10$. Оказалось, что среди них есть как положительные, так и отрицательные числа.

3) Из (13) можно сделать заключение, что при больших n среди коэффициентов есть как положительные, так и отрицательные. Более того, есть доказательство того, что это утверждение верно $\forall n \geq 10$.

4) Применять КФ Ньютона–Котеса при больших n нецелесообразно. Лучше добиваться повышения точности вычисления интеграла путем разбиения отрезка интегрирования на множество частичных отрезков, на каждом из которых применять КФ Ньютона–Котеса с небольшим n.

Такой путь приводит к составным КФ, которые мы рассмотрим на следующей лекции.