

## POMIARY W FIZYCE

Pomiar jest podstawowym źródłem informacji w fizyce. **Pomiarem** nazywa się czynności doświadczalne mające na celu wyznaczenie wartości badanej wielkości fizycznej. Istotą każdego pomiaru jest porównanie wartości mierzonej z wzorcem miary tej wielkości przyjętym za jednostkę (np. pomiar długości w m, km itp.). Wynik pomiaru musi zatem składać się z dwóch części: **wartości liczbowej**, określającej ile razy mierzona wielkość jest większa lub mniejsza od przyjętego wzorca oraz **rodzaju jednostki**.

**Umiejętność właściwego opracowania wyników pomiaru jest niezbędna w wielu dziedzinach nauki, techniki oraz gospodarki. W wielu przypadkach surowy wynik pomiaru, bez jego właściwego opracowania, jest uważany za bezużyteczny.**

Pomiary wielkości fizycznych dzielimy na **bezpośrednie** i **pośrednie**. **Pomiary bezpośrednie** polegają wprost na porównaniu danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową, wynik pomiaru otrzymuje się bezpośrednio bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń.

W **pomiarach pośrednich** wartość badanej wielkości jest wyznaczana na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych, które są z nią powiązane znanym prawem fizycznym, czyli występuje konieczność wyliczenia wartości wielkości mierzonej  $y$  na podstawie bezpośrednich pomiarów innych wielkości  $x_1, x_2, \dots, x_n$  związanych z nią znaną zależnością funkcyjną  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Przykładem pomiaru pośredniego jest pomiar przyspieszenia ziemskiego metodą wahadła matematycznego. Trzeba najpierw wyznaczyć długość wahadła, następnie zmierzyć okres jego drgań a dopiero na końcu ze wzoru wyznaczania się wartość przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi.

### Błąd pomiaru

Najczęściej surowy wynik pomiaru  $x$  jest jedynie przybliżeniem wartości rzeczywistej (prawdziwej)  $x_{rz}$  wielkości mierzonej  $x$ . Różnica pomiędzy wynikiem pomiaru  $x$  a wartością rzeczywistą nazywana jest **rzeczywistym błędem bezwzględnym**

$$\Delta x_{rz} = x - x_{rz}$$

W praktyce, w zależności od wymaganej dokładności pomiaru, doświadczenie pomiarowe modyfikuje się tak, aby otrzymać wartość najbliższą  $x_{rz}$ . Wartość tę nazywa się **wartością poprawną**  $x_{popr}$ . Wtedy wyrażenie na błąd bezwzględny przyjmuje postać

$$\Delta x = x - x_{popr}$$

**Błąd względny**  $\delta x$  jest to stosunek błędu bezwzględnego do wartości poprawnej

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{popr}}$$

Błąd względny jest często wyrażany w procentach ( $1\% = 10^{-2}$ ) lub promilach ( $1\text{‰} = 10^{-3}$ ).

Błąd może być spowodowany różnymi czynnikami. Z tego powodu do słowa „błąd” dodaje się określenie wskazujące na jego przyczynę lub charakter. Na przykład błąd rozdzielczości jest błędem spowodowanym ograniczoną rozdzielczością, błąd przypadkowy - błędem wynikającym z losowej zmienności wyników powtarzanego doświadczenia pomiarowego itp.

## Klasyfikacja błędów

Ogólnie błędy dzieli się na:

- 1) systematyczne,
- 2) przypadkowe,
- 3) nadmierne (grube).

Ad1. Pomiary są obarczone **błędami systematycznymi**, gdy przy powtarzaniu pomiarów dla serii pomiarowej występuje różnica między wartościami zmierzonymi a wartością rzeczywistą podlegającą pewnej prawidłowości, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki lub w ogóle nie występuje. Błędy systematyczne wynikają z:

- mało dokładnego ustawienia eksperymentu (np. nieuwzględnienie siły wyporu powietrza przy dokładnym ważeniu),
- wad urządzeń pomiarowych (np. waga dźwigniowa z przesuniętym punktem zawieszenia, czasomierz wskazówkowy ze środkiem skali nie pokrywającym się z osią wskazówek, źle wyskalowane przyrządy),
- ze stanu zewnętrznych warunków pomiaru (zbyt wysoka temperatura w pomieszczeniu),
- niedoskonałości eksperymentatora (błąd paralaksy w trakcie odczytu wskaźników analogowych).

Najczęściej **błędy systematyczne** wynikają z niedoskonałości przyrządów i metod pomiarowych. Można je redukować, stosując bardziej doskonałe i precyzyjne metody i przyrządy, jednak całkowite wyeliminowanie błędów systematycznych jest niemożliwe. Rozpoznane błędy systematyczne należy uwzględniać poprzez wprowadzenie odpowiednich poprawek do wyniku, np. kiedy ważymy na wadze, której wskazanie bez obciążenia wynosi  $m_0$  zamiast zero to  $m_0$  jest błędem systematycznym, który należy odjąć od wyniku ważenia. Innym typowym przykładem jest poprawka na opór wewnętrzny woltomierza przy pomiarze napięcia.

Ad2. Z **błędami przypadkowymi** mamy do czynienia zawsze. Wynikają one z różnych przypadkowych i niedających się uwzględnić czynników, (np. wahania temperatury, lub ruchu powietrza w pobliżu przyrządu pomiarowego). Inną przyczyną może być niezgodność przyjętego modelu z obiektem mierzonym, np. gdy mamy zmierzyć średnicę pręta, zakładamy, że jest on idealnym walcem, co nie jest prawdą.

Występowanie **błędów przypadkowych** objawia się jako rozrzut wyników pomiaru wokół wartości rzeczywistej. Wynik każdego kolejnego pomiaru jest inny. O tym jaka jest szansa uzyskania wyników większych lub mniejszych od  $x_0$  decyduje rodzaj rozkładu statystycznego (np. Gaussa, prostokątny, jednostajny), któremu te wyniki podlegają. Błędy przypadkowe redukuje się poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru – zachodzi wówczas częściowa kompensacja przypadkowych odchylek zawyżających i zaniżających wynik pomiaru.

Ad3. **Błędy grube** powstają na skutek nieumiejętności użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczytywaniu i zapisie wyników, nagłej zmiany warunków pomiaru itp. Dla błędów grubych różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą jest na ogół bardzo duża. Dla serii pomiarów wyniki obarczone błędem grubym są łatwe do wykrycia i usunięcia. Na wykresach mierzonych lub wyznaczanych wielkości punkty pomiarowe nie obciążone błędami grubymi układają się zgodnie z prawidłowością występującą w teorii badanego

zjawiska, natomiast wyniki obarczone tym błędem odbiegają znacznie od pozostałych. Błędy grube eliminuje się poprzez:

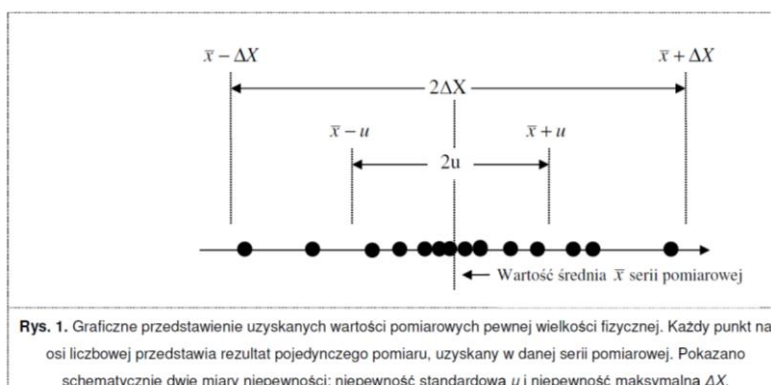
- wychwytywanie ich w czasie wykonywania doświadczeń i powtarzanie odpowiednich pomiarów (uwaga słuszna, gdy eksperymentator posiada doświadczenie w przeprowadzaniu pomiarów),
- wychwytywanie ich w czasie opracowywania wyników, pojedyncze podejrzone przypadki należy eliminować, w przypadku pewnej liczby błędnych danych w serii należy poszukać przyczyn natury systematycznej.

Ponieważ zwykle nie znamy rzeczywistej wartości wielkości mierzonej, więc posługiwanie się w praktyce pojęciem błędu pomiaru nie jest wygodne. Obecnie przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować się do zaleceń Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru. Norma ta, uzgodniona w 1995 r. i przyjęta ustawowo w Polsce w 1999 r. znajduje zastosowanie w różnych dziedzinach nauki i techniki.

## Niepewności pomiarowe

**Niepewność pomiarowa**, zdefiniowana jako parametr charakteryzujący wątpliwości dotyczące wartości wyniku pomiarowego. Nie należy mylić błędu i niepewności pomiaru. Może być tak, że błąd pomiaru jest niewielki (przypadkowo otrzymaliśmy w rezultacie pomiarów wartość bliską wartości prawdziwej), a mimo to niepewność tych samych pomiarów jest duża (bo np. używamy mało dokładnych przyrządów).

Formalnie niepewność pomiarowa jest określona jako parametr charakteryzujący rozrzut wyników uzyskanych w czasie pomiaru danej wielkości. Im pomiar jest bardziej dokładny, tym niepewność pomiarowa jest mniejsza. Mogą być różne miary niepewności pomiaru. Dwie najczęściej stosowane to niepewność standardowa i niepewność maksymalna. **Niepewność standardowa** (ang. Standard uncertainty) jest nowym terminem wprowadzonym przez Normę Międzynarodową i jest *odchyleniem standardowym średniej arytmetycznej*. Jest to miara niepewności najczęściej stosowana i uznana za podstawową.



Główną zaletą odchylenia standardowego są wygodne właściwości matematyczne tego parametru statystycznego: szacowanie za pomocą zamkniętych wzorów bez współczynników numerycznych i podleganie prawu przenoszenia niepewności. Symbolem niepewności standardowej jest  $u$  (od ang. uncertainty), który można zapisywać na trzy różne sposoby:

- $u$  – niepewność standardowa dowolnej wielkości
- $u(x)$  – niepewność standardowa wielkości  $x$  wyrażonej symbolem
- $u$  (długość wahadła) – niepewność wielkości wyrażonej słownie.

Należy jednak pamiętać, że  $u$  nie jest funkcją tylko jest liczbą.

Inną często stosowaną miarą niepewności jest niepewność maksymalna (rys.1.).

**Niepewność maksymalną**  $\Delta X$  szacujemy w ten sposób, że staramy się określić przedział o szerokości  $2\Delta X$ , w którym będą się mieścić wszystkie możliwe wyniki pomiarów. Będziemy twierdzili, że nieznaną wartość prawdziwą zawarta jest na pewno w tym przedziale. Niepewność maksymalna jest stosowana w wielu sytuacjach, np. jako miara dokładności elektrycznych przyrządów pomiarowych lub prostych przyrządów mechanicznych.

**Niepewność względna** jest definiowana jako stosunek niepewności standardowej do wielkości mierzonej:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Wymiar niepewności standardowej  $u(x)$  jest taki sam jak wymiar wielkości mierzonej, natomiast niepewność względna jest wielkością bezwymiarową, co umożliwia porównywanie za jej pomocą niepewności wielkości fizycznych posiadających różny wymiar.

## Wyznaczanie niepewności pomiarów.

### 1. Pomiar bezpośredni.

Miarą niepewności pomiarowej jest niepewność standardowa, która może być szacowana na dwa sposoby:

- ocena typu A – wynika ze statystycznej analizy serii  $n$  równoważnych i nieskorelowanych obserwacji wielkości  $x$  podlegającej błędowi przypadkowemu, **do niepewności typu A** zalicza się niepewności, których rozkłady są znane lub mogą być oszacowane na podstawie powtarzalnych pomiarów, wykonanych w nominalnie takich samych warunkach. **Ocena niepewności typu A wykorzystuje ustalony algorytm: wyznacza się wartość średnią, niepewność pojedynczego wyniku oraz niepewność wartości średniej.**
- ocena typu B – wynika z naukowego osądu eksperymentatora, biorącego pod uwagę wszystkie posiadane informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności. Stosowana jest w przypadku niemożności przeprowadzenia statystycznej analizy serii pomiarów np. dla błędu systematycznego, jeśli niepewność szacowana jest nie na podstawie powtarzalnych pomiarów, ale innych danych, to nazywa się ją niepewnością typu B. Do **niepewności typu B** zaliczyć można **niepewności przyrządów podane w ich dokumentacji lub najmniejszą podziałkę przyrządu pomiarowego**, świadectwach kalibracji, wartości współczynników podane w normach i tablicach. Jeśli niepewność wyniku nie jest określona i nie ma możliwości jej oceny, to **przedział niepewności określa się na podstawie liczby cyfr znaczących wyniku.**

#### TYP A

Przypuśćmy, że wykonaliśmy serię  $N$  jednakowo dokładnych pomiarów bezpośrednich wielkości fizycznej  $x$ , otrzymując wyniki  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Jeśli wyniki pomiarów nie są takie same, wówczas za najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej przyjmujemy średnią arytmetyczną ze wszystkich wyników pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

niepewność pojedynczych wyników obliczamy ze wzoru:

$$\Delta x_n = \bar{x} - x_n$$

odchylenie standardowe średniej arytmetycznej wyznaczamy ze wzoru:

$$S_x = \frac{S_x}{\sqrt{N}},$$

gdzie:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

jest odchyleniem standardowym pojedynczego wyniku.

Standardowa niepewność typu A  $u_A(x)$  jest równa:

$$u_A(x) = S_x$$

*Dygresja:*

·w przedziale  $\langle x - S_x, x + S_x \rangle$  mieści się 68,27% wyników z serii,

·w przedziale  $\langle x - 2S_x, x + 2S_x \rangle$  mieści się 95,45% wyników z serii,

·w przedziale  $\langle x - 3S_x, x + 3S_x \rangle$  mieści się 99,73% wyników z serii.

*Prawdopodobieństwo, z jakim w zadanym przedziale znajdzie się dowolny pomiar z serii nosi nazwę poziomu ufności, a przedział przedziału ufności.*

**Dla mniejszej liczby pomiarów niż 10!**

**Dla krótkiej serii wyników pomiaru** o błędach przypadkowych będących zmienną losową o rozkładzie normalnym obliczone wartości  $x$  i  $S_x$  mogą się znacznie różnić od parametrów tego rozkładu. W celu zwiększenia wiarygodności wyników używa się wtedy tzw. rozkładu t-Studenta (gdy liczba wyników pomiaru  $N$  wzrasta, to rozkład Studenta staje się bliski rozkładowi normalnemu, dla  $N \geq 10$  można w większości przypadków korzystać z rozkładu normalnego).

Standardową niepewność typu A wyznacza się następująco:

- przyjmuje się poziom ufności na poziomie  $\alpha = 0,6827$  (68,27% wyników pomiarów mieści się w przedziale:  $\bar{x} - u_A(x) < \bar{x} < \bar{x} + u_A(x)$ ), wyznacza się wtedy pewien współczynnik  $t_{N,\alpha}$  (zwany kwantylem) o który wymnaża się odchylenie standardowe średniej arytmetycznej;
- oblicza się standardową niepewność typu A ze wzoru:

$$u_A(x) = t_{N,\alpha} \cdot S_x$$

- zależność współczynnika  $t_{N,\alpha}$  od liczby pomiarów:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	50	100
$t_{N,\alpha}$	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,01	1,005

## TYP B

W niektórych przypadkach rozrzut wyników jest bardzo mały (lub nie ma go wcale czy też mamy pojedynczy pomiar) i dominującą niepewnością jest niepewność związana z niedoskonałością aparatury lub przyjętej metody pomiarowej, zwana niepewnością typu B. Ocena niepewności typu B polega na oszacowaniu **niepewności maksymalnej**, oznaczanej symbolem  $\Delta$  (duża delta), czyli największej jaka może wystąpić w danym pomiarze. Nie można jej scharakteryzować metodami statystycznymi, jak w przypadku niepewności typu A, ponieważ nie dysponuje się serią wyników.

Najczęściej ocena typu B dotyczy określenia niepewności wynikających ze skończonej dokładności przyrządów. Aktualnie prawie wszystkie używane przyrządy pomiarowe to proste przyrządy mechaniczne lub elektroniczne mierniki cyfrowe. Dla prostych przyrządów mechanicznych, do których można zaliczyć linijkę, termometr, śrubę mikrometryczną, jako niepewność maksymalną przyjmuje się działkę elementarną przyrządu, np. oszacowana niepewność maksymalna pomiaru temperatury przy pomocy typowego termometru wynosi  $\Delta t = 1^\circ \text{C}$ .

W elektronicznych przyrządach cyfrowych wartość odpowiadająca zmianie ostatniej cyfry, zwana działką elementarną, określa rozdzielczość przyrządu. Niepewność maksymalna zazwyczaj jest kilkakrotnie większa od działki elementarnej. Podawana jest przez producenta przyrządu i najczęściej zależy od wielkości mierzonej  $x$  oraz zakresu  $z$ , na którym dokonuje się pomiaru i wyznaczana jest z zależności:

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z;$$

$x$  – wielkość mierzona,  $z$  – zakres pomiarowy,  $c_1$ ,  $c_2$  – parametry podane przez producenta.

Przykład: jeśli za pomocą woltomierza, dla którego podane przez producenta wartości  $c_1$  i  $c_2$  wynoszą odpowiednio:  $c_1=0,2\%$  i  $c_2=0,1\%$  zmierzono napięcie o wartości  $U = 98,25 \text{ V}$  na zakresie  $z = 150 \text{ V}$ , to niepewność maksymalna tego pomiaru jest równa  $0,35 \text{ V}$ , ponieważ:

$$\Delta x = 0,002 \cdot 98,25 + 0,001 \cdot 150 = 0,3465$$

Jeśli producent nie podał sposobu obliczania niepewności, to dla przyrządów z odczytem cyfrowym, wykorzystujących wbudowany mikroprocesor do przeliczania wyniku przyjmuje się, iż maksymalny błąd rozdzielczości jest równy wartości odpowiadającej  $\pm 0,5$  najmniej znaczącej cyfry wyświetlacza. Wynika to z założenia, że wynik pomiaru jest przed wyświetleniem prawidłowo zaokrąglony. W przypadku tanich multimetrów wyposażonych w przetwornik analogowo-cyfrowy o podwójnym całkowaniu przyjmuje się, iż maksymalny błąd rozdzielczości jest równy wartości odpowiadającej  $\pm 1$  najmniej znaczącej cyfry wyświetlacza.

Na końcowy wynik oszacowania niepewności oprócz dokładności przyrządów składa się również dokładność samego eksperymentatora. Własną niepewność odczytu, czy niedoskonałość zmysłów, szczególnie trudno jest ocenić. Np. podczas pomiaru czasu przy pomocy stopera należy uwzględnić szybkość reakcji fizjologicznej podczas jego włączania i wyłączania, która może być rzędu  $0,2 \text{ s}$  lub mniejsza. Można ją oszacować próbując kilkakrotnie zatrzymać stoper na określonej pozycji. Łączna niepewność pomiaru czasu jest dwukrotnie większa, ponieważ niedokładności włączania i wyłączania stopera sumują się. W wyniku takiej analizy może się okazać, że w celu zwiększenia dokładności pomiaru użycie precyzyjniejszego stopera jest bezcelowe.

Jak wynika z określenia niepewności maksymalnej, jeśli nie występują żadne dodatkowe informacje, wynik pomiaru powinien wystąpić z jednakowym prawdopodobieństwem w przedziale  $\pm\Delta x$ . Dla rozkładu jednostajnego, który występuje w tym przypadku jako odchylenie standardowe przyjmuje się połowę szerokości rozkładu podzieloną przez  $\sqrt{3}$ .

Niepewność standardową typu B wyrażamy poprzez niepewność maksymalną za pomocą wzoru:

$$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Jeżeli mamy kilka czynników, które mają wpływ na niepewność typu B (np. podziałka przyrządu i niedoskonałość mierzącego) to całkowitą niepewność typu B obliczamy ze wzoru (prawo przenoszenia niepewności standardowych):

$$u_B(x) = \sqrt{[u_{B1}(x)]^2 + [u_{B2}(x)]^2 + \dots}$$

## TYP A + B

Obliczanie standardowej **niepewności całkowitej (złożonej)** często występuje w praktyce. Gdy występują oba typy niepewności: zarówno statystyczny rozrzut wynikający z błędów przypadkowych (typ A) jak i niepewność wynikająca z dokładności przyrządów (typ B) i obie są tego samego rzędu, to żadna z nich nie może być pominięta. W tym przypadku całkowita niepewność standardową wyraża się wzorem:

$$u(x) = \sqrt{[u_A(x)]^2 + [u_B(x)]^2}$$

Końcowy wynik podaje się w następującej postaci:

$$x = \bar{x} \pm u(x)$$

z dodanym następującym komentarzem: „gdzie liczba zapisana za symbolem  $\pm$  jest wartością złożonej niepewności standardowej  $u$ , a nie jest przedziałem ufności”.

## 2. Pomiar pośredni.

Wiele wielkości fizycznych nie można wyznaczyć jako wynik pomiaru bezpośredniego. Załóżmy, że mierzymy wielkości  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a wartość wielkości  $z$  obliczamy ze wzoru

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Dla każdej wielkości  $x_n$  dokonuje się serii pomiarów, a następnie oblicza się średnią arytmetyczną  $\bar{x}_i$  oraz standardową niepewność złożoną  $u(x_i)$  (czyli połączoną niepewność typu A oraz B).

Teraz oblicza się:

- wartość średnią wielkości  $z$ , czyli  $\bar{z}$ :

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n);$$

- niepewność złożoną standardową dla średniej  $\bar{z}$  :

$$u_C(z) = \sqrt{c_1^2 \cdot u(x_1)^2 + c_2^2 \cdot u(x_2)^2 + \dots + c_n^2 \cdot u(x_n)^2}$$

gdzie:

$$c_i = \frac{\delta z}{\delta x_i}$$

jest pochodną cząstkową funkcji w punkcie, którą uzyskujemy różniczkując funkcję  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  po zmiennej  $x_i$  traktując pozostałe zmienne jako stałe,  $c_i$  to tzw. **współczynniki wrażliwości**. Symbol  $u_C(z)$  oznacza niepewność złożoną pomiaru pośredniego.

Prościej można to wyrazić za pomocą tzw. **metody różniczki zupełnej**:

$$u_C(z) = \left| \frac{\delta z}{\delta x_1} \right| \cdot u(x_1) + \left| \frac{\delta z}{\delta x_2} \right| \cdot u(x_2) + \dots + \left| \frac{\delta z}{\delta x_n} \right| \cdot u(x_n)$$

W przypadku, kiedy zależność funkcyjna ma postać iloczynowo/ilorazową możemy skorzystać z **metody różniczki logarytmicznej**. (na przykład, z postacią taką mielibyśmy do czynienia przy wyznaczaniu objętości walca.) Mówimy wtedy, że wielkość mierzona opisana jest funkcją w postaci jednomianu (tzn. mówiąc w uproszczeniu – nie występują w niej działania dodawania i odejmowania, np.  $z = a \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2}$ , gdzie  $a$  jest pewną stałą) można uprościć żmudne obliczanie pochodnych tych funkcji. Wtedy niepewność złożoną względną można wyrazić jako sumę geometryczną niepewności względnych wielkości mierzonych bezpośrednio pomnożonych przez bezwymiarowe wagi  $k_i$ :

$$\left| \frac{u_C(z)}{z} \right| = \left| k_1 \cdot \frac{u(x_1)}{x_1} \right| + \left| k_2 \cdot \frac{u(x_2)}{x_2} \right| + \dots + \left| k_n \cdot \frac{u(x_n)}{x_n} \right|$$

gdzie  $k_i$  są wykładnikami potęg wielkości mierzonych  $x_i$ .

Aby nie trzeba było pamiętać rachunku różniczkowego poniżej przedstawione są niepewności standardowe złożone bezwzględne i względne (z pominięciem %) pomiarów pośrednich dla typowych zależności funkcyjnych:

Funkcja	Niepewność standardowa złożona	Niepewność standardowa złożona względna
$z = f(x, y) = x + y$	$u_C(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$	$u_r(z) = \frac{u_C(z)}{z} = \frac{\sqrt{u^2(x) + u^2(y)}}{x + y}$
$z = f(x, y) = x \cdot y$	$u_C(z) = x \cdot y \cdot \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	$u_r(z) = \frac{u_C(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$



$z = f(x, y) = \frac{x}{y}$	$u_c(z) = \frac{x}{y} \cdot \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$
$z = f(x) = \frac{1}{x}$	$u_c(z) = \left \frac{1}{x^2}\right  \cdot u(x)$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} = \left \frac{1}{x}\right  \cdot u(x)$
$z = f(x) = x^n$	$u_c(z) = n \cdot x^{n-1} \cdot u(x)$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} = n \cdot u(x)$
$z = f(x, y) = ax^n y^m$	$u_c(z) = z \cdot \sqrt{\left(\frac{n \cdot u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot u(y)}{y}\right)^2}$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{n \cdot u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot u(y)}{y}\right)^2}$
$z = f(x) = a \cdot e^{bx}$	$u_c(z) = a \cdot b \cdot e^{bx} \cdot u(x)$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} =  b  \cdot u(x)$
$z = f(x) = a \cdot \ln(x)$	$u_c(z) = a \cdot u(x)$	$u_r(z) = \frac{u_c(z)}{z} = \frac{u(x)}{ \ln(x) }$

## Niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa całkowicie i jednoznacznie określa wartość wyniku, jednak do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z innymi rezultatami (np. z wartością tabelaryczną) oraz dla celów komercyjnych i do ustalania norm przemysłowych, zdrowia, bezpieczeństwa itp., Międzynarodowa Norma wprowadza pojęcie **niepewności rozszerzonej** (ang. expanded uncertainty) oznaczanej symbolem  $U$  (dla pomiarów bezpośrednich), lub  $U_c$  (dla pomiarów pośrednich). Wartość niepewności rozszerzonej oblicza się ze wzoru:

$$U(x) = k \cdot u(x) \quad \text{lub} \quad U_c(x) = k \cdot u_c(x)$$

Liczba  $k$ , zwana **współczynnikiem rozszerzenia** (ang. coverage factor), jest umownie przyjętą liczbą wybraną tak, aby w przedziale  $X \pm U(X)$  znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna dla danych zastosowań. Wartość współczynnika rozszerzenia mieści się najczęściej w przedziale 2÷3. W większości zastosowań zaleca się przyjmowanie umownej wartości  $k = 2$ .

Dla  $k=1$  mamy 68,27% prawdopodobieństwa, że wartość prawdziwa jest w przedziale o szerokości  $2U$ . Z kolei można stwierdzić, że wartość prawdziwa znajduje się z 95 % prawdopodobieństwem w przedziale o szerokości  $2U$  ( $k=2$ ) wokół wartości średniej i z 99 % prawdopodobieństwem w szerszym przedziale  $2U$  ( $k=3$ ). Te prawdopodobieństwa (wyrażone w skali 0÷1, a nie w %) noszą nazwę **poziomu ufności**.

Wartości współczynników rozszerzenia  $k$  dla dwu różnych poziomów ufności i różnej ilości pomiarów  $N$  przedstawia tabela poniżej.

Liczba pomiarów	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poziom ufności 0,95	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262
Poziom ufności 0,99	63,625	9,925	5,841	4,604	4,032	3,707	3,499	3,355	3,250

### 3. Reguły zaokrąglania wyniku pomiaru i niepewności

Końcowy wynik pomiaru powinien składać się z dwóch liczb przybliżonych, z których pierwsza wyraża poprawną wartość wielkości mierzonej, a druga określa jej niepewność. Ogólnie więc zapis końcowego wyniku pomiaru powinien mieć postać następującą:

$$x = \bar{x} \pm U(x) \quad (\text{informacja o poziomie ufności, u nas najczęściej } 0,6827, \text{ dla}$$

niepewności rozszerzonej jest to 0,95 lub nawet 0,99, w poniższe sposób )

lub

$$x = \bar{x} \pm u(x)$$

Wtedy dodajemy następujący komentarz: „gdzie liczba zapisana za symbolem  $\pm$  jest wartością złożonej niepewności standardowej  $u$ , a nie jest przedziałem ufności”.

Istotny jest sposób zaokrąglania tych liczb. Obowiązują następujące zasady:

1. Liczbę wyrażającą niepewność zaokrągla się najczęściej w górę, do liczby o jednej cyfrze znaczącej. Wynika to z faktu, że wartość niepewności nie jest dokładnie określona. W szczególnych przypadkach pozostawia się dwie cyfry znaczące. Czyni się tak gdy:
  - liczba będzie używana do dalszych obliczeń;
  - w przypadku podawania niepewności stałych fizycznych;
  - w przypadku pomiarów dokładnych;
  - jeśli po zaokrągleniu do 1 cyfry znaczącej błąd zaokrąglenia byłby większy od 20%. Na przykład 0,1111 można zaokrąglić do 0,11 a nie do 0,2. W tym przypadku nie zaokrągla się tej liczby w górę, lecz zgodnie z ogólnymi regułami zaokrąglania.
2. Wynik pomiaru obliczamy o jedno miejsce dziesiętne dalej, na którym zaokrąglono niepewność, po czym zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono niepewność.

### 4. Opracowanie wyników pomiaru prezentowanych w postaci wykresów

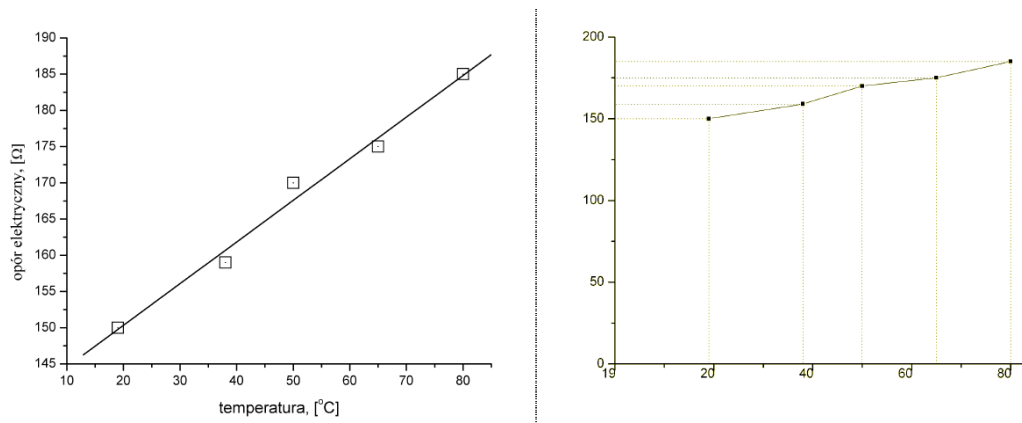
Jeżeli w doświadczeniu badamy zależność jednej wielkości fizycznej od drugiej, to poza ujęciem wyników w tabelkę, należy również sporządzić wykres tej zależności. Graficzna analiza danych pomiarowych powinna jednak charakteryzować się względną prostotą i poglądowością.

Podczas sporządzania wykresu należy kierować się następującymi regułami:

1. Wykres wykonuje się na papierze milimetrowym lub na papierze z naniesioną specjalną siatką linii. Rozmiar wykresu określa zakres mierzonych wielkości i wybrana skala na osiach (a nie odwrotnie!). Można także używać komputera i specjalnych programów graficznych do sporządzania wykresów.
2. Na osi  $y$  odkładamy wartości funkcji, na osi  $x$  - wartości argumentów. Na przykład, aby wykreślić temperaturową zależność oporu metalu na osi  $x$  odkładamy temperaturę, na osi  $y$  - opór elektryczny.
3. Na każdej z osi odkładamy tylko taki zakres zmian mierzonej wielkości fizycznej w którym zostały wykonane pomiary. Nie ma zatem obowiązku odkładania na osiach np. punktów zerowych, gdy nie było w ich okolicy wykonanych pomiarowych.

4. Rozmiar wykresu nie jest dowolny i nie powinien wynikać z tego, że dysponujemy takim a nie innym kawałkiem papieru. Rozmiar powinien być określony przez niepewności pomiarowe tych wielkości, które odkłada się na osiach. Niepewności te powinny w wybranej skali być odcinkami o łatwo zauważalnej, znaczącej długości. Na przykład, wykonując pomiar oporu elektrycznego w funkcji temperatury mamy:  $u(T) = 1^{\circ}\text{C}$ ,  $u(R) = 1\Omega$ . Wtedy przyrostowi  $\Delta T = 1^{\circ}\text{C}$  powinien odpowiadać na rysunku odcinek o długości np. 2 mm. Podobnie z oporem.
5. Skale na każdej z osi wybiera się niezależnie, tak że mogą one być różne. Dążymy do tego, aby uzyskana krzywa lub jej główna część był pod kątem około  $45^{\circ}$  do osi układu współrzędnych.
6. Skalę na osiach układamy zazwyczaj w postaci równooddalonych, pełnych liczb. Ich wybór i gęstość na osi musi zapewniać jak największą prostotę i wygodę korzystania z nich.
7. Punkty na wykresie nanosimy tak, by były wyraźnie widoczne. Gdy na jednym rysunku ma być kilka krzywych, punkty na każdej z nich zaznacza się inaczej: kółkami, trójkątami, kwadracikami itp.
8. Po naniesieniu punktów pomiarów rysujemy ciągłą krzywą, bez nagłych zagięć i załamań. Powinna ona leżeć tak, aby ilość punktów po obu jej stronach była mniej więcej taka sama. Nie należy dążyć do tego, aby krzywa przechodziła przez wszystkie punkty, ponieważ każdy z nich obciążony jest niepewnością pomiaru. Łączenie punktów pomiarowych krzywą łamaną jest niedopuszczalne!
9. Pod osiami wykresu muszą być podane odkładane wielkości fizyczne i ich jednostki.
10. Aby wykres jak najbardziej odzwierciedlał zależność funkcyjną dwu wielkości, np. oporu metalu  $R$  i temperatury  $T$ , czasami na osiach odkłada się nie same wielkości, ale ich funkcje. Rodzaj takiej funkcji zależy od konkretnej sytuacji fizycznej. Na przykład, badając temperaturową zależność oporu elektrycznego półprzewodnika oczekuje się następującej zależności:  $R(T) = R_0 \cdot \exp(\alpha / T)$ . Gdybyśmy odkładali uzyskane wartości pomiarowe w takim układzie współrzędnych, że na osi  $x$  jest temperatura, a na osi  $y$  opór, to trudno byłoby stwierdzić, czy punkty pomiarowe układają się właśnie wzdłuż żądanej krzywej wykładniczej. Natomiast, gdy odłożymy punkty pomiarowe w układzie współrzędnych  $(1/T, \ln R)$  i znajdują się one na prostej, to potwierdzimy tym samym oczekiwaną zależność.
11. Na rysunku należy zaznaczyć niepewności pomiarowe w postaci prostokątów lub odcinków. Środek prostokąta leży w punkcie pomiarowym, a jego boki są równe podwojonej wartości niepewności pomiaru. W przypadku dużej liczby punktów pomiarowych wystarczy nanieść niepewności pomiarowe dla kilku punktów odłożonych równomiernie na wykresie.
12. Każdy rysunek powinien być podpisany. Podpis mówi, co rysunek zawiera, wyjaśnia co reprezentują zaznaczone krzywe.

Poniżej przedstawiono dwa rysunki, sporządzone na podstawie tych samych pomiarów. Ten po lewej stronie jest prawidłowo zrobiony, zgodnie z wyżej przedstawionymi wskazówkami. Rysunek po prawej stronie sporządzono nie kierując się tymi regułami.



## DODATEK

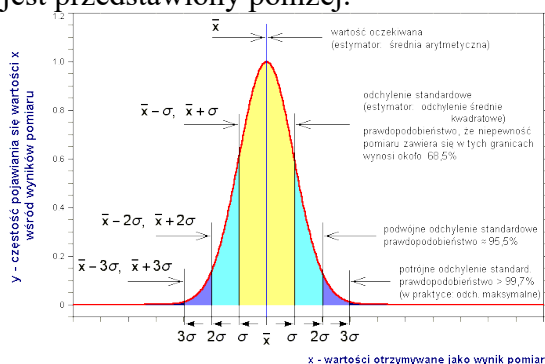
### 1. Sigma: $\sigma$ .

Wiemy, że **odchylenie standardowe pojedynczego wyniku** ma symbol  $S_x$ .

Najczęściej jednak w Polsce używa się symbolu  $\sigma$ . Mówi się często potocznie np.  $3\sigma$ , czyli mamy wtedy na myśli, że 99,73% pomiarów mieści się w granicach  $<x - 3\sigma, x + 3\sigma>$ . Symbol ten znajduje się też najczęściej na kalkulatorach z funkcjami statystycznymi ( $\sigma$ ,  $\sigma_x$ ).

### 2. Funkcja rozkładu normalnego (rozkład Gaussa).

Gdybyśmy wykonali bardzo wiele pomiarów (a błędy pomiaru byłyby rzeczywiście przypadkowe), okazałoby się, że ich rozkład ma formę podobną do dzwonu. Przykładowy wykres jest przedstawiony poniżej.

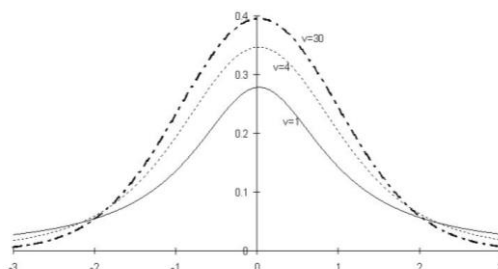


Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (wykres nazywany jest krzywą Gaussa). Wartości średnich arytmetycznych otrzymane w różnych seriach pomiarowych gromadzą się wokół wartości średniej (przy nieskończonej liczbie pomiarów jest to wartość prawdziwa), a miarą ich rozrzutu jest niepewność standardowa  $u_A$ . W obszarze o szerokości  $2u_A$  (żółty kolor) wokół wartości prawdziwej znajduje się około 68 % pola powierzchni pod krzywą Gaussa. Oznacza to także, że 68 % wszystkich pomiarów znajduje się w tym przedziale. Podobnie z innymi przedziałami. Proszę zwrócić uwagę, że na rysunku używany jest symbol  $\sigma$  zamiast  $S_x$  czy  $u_A$ .

### 3. Funkcja rozkładu t-Studenta.

Jak było wspomniane wcześniej, dla małej serii wyników pomiaru o błędach przypadkowych będących zmienną losową o rozkładzie normalnym obliczone wartości  $x$  i  $S_x$  mogą się znacznie różnić od parametrów tego rozkładu. Używany jest

wtedy rozkład t-Studenta. Graficznie ma kształt podobny do rozkładu normalnego lecz ma dłuższe „ogony”. Ze wzrostem liczby pomiarów rozkład t-Studenta upodabnia się do rozkładu Gaussa. Poniżej przedstawiony jest rozkład t-Studenta dla różnej liczby pomiarów.



#### 4. Wykresy o skali logarytmicznej.

Najczęściej na wykresach używamy skali liniowej (punkt 6 dyskusji o wykresach), czyli każdemu przedziałowi na osi odpowiada taki sam przedział wartości fizycznej. Czasami jednak daje to nieczytelny obraz wykresu, np. gdybyśmy chcieli wyznaczyć poziom słyszalności ludzkiego ucha w zależności od częstotliwości docierającego dźwięku. W przykładzie tym skala liniowa uniemożliwia porównanie danych lub też osie musiałyby być tak długie, że wykres miałby długość wielu metrów.

Dlatego też wybór odpowiedniej skali do prezentowania danych na wykresie jest niezwykle ważny. Wtedy najlepszym rozwiązaniem będzie zastosowanie skali logarytmicznej.

Skala logarytmiczna jest rodzajem skali pomiarowej, w której mierzona wartość zostaje przekształcona za pomocą logarytmu. Wartości tej skali są bezwymiarowe, co oznacza że są podawane w odniesieniu do pewnej jednostki bądź są logarytmami wielkości niemianowanych. Skala powinna posiadać zdefiniowaną używaną podstawę logarytmu. Skala logarytmiczna jest używana tylko do odwzorowania wielkości dodatnich. Najczęściej używane są logarytmy dziesiętne, o podstawie równej 10, oraz logarytmy naturalne – podstawa równa  $e$ . A logarytm jest niczym innym niż stosunkiem (łac. logarithmus) i proporcją (gr. logos). Logarytm (dziesiętny) to wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę 10, aby otrzymać liczbę logarytmowaną.

Skala logarytmiczna powinna być stosowana w przypadku analizy wartości, między którymi są bardzo duże różnice. Korzystanie z omawianej skali umożliwia utworzenie podziałki o równomiernie rozłożonych liniach, ale rosnących albo malejących wartościach. Skala logarytmiczna umożliwia pokrywanie dużego zakresu wartości, ma dużą rozdzielczość. Są dwa główne powody, aby stosować skalę logarytmiczną na wykresie. Pierwszym z nich jest wspomniana już duża różnica pomiędzy analizowanymi wartościami. Drugim powodem jest pokazanie procentowej zmiany wielkości lub oddziaływania na siebie prezentowanych czynników. Dobrym przykładem do wytłumaczenia potrzeby używania skali logarytmicznej będzie analiza danych giełdowych, a dokładnie analiza cen akcji. Skala liniowa przedstawiałaby równą odległość pomiędzy równymi odstępami cen. Wzrost ceny z 20 do 30 złotych będzie prezentowany tak samo jak zmiana z 120 do 130 złotych. W pierwszym przypadku zmiana ta to 50%, a w drugim to tylko ok. 8%. Inwestor będzie na pewno bardziej zainteresowany dynamiką zmian. Chce, aby zysk, mierzony procentowo, był jak największy. Dlatego też na rynkach finansowych używa się skali logarytmicznej, która pokazuje w równych odległościach te same zmiany procentowe. Odległość pomiędzy 20 a 30 złotych będzie taka sama, jak między 200 a 300 złotych.

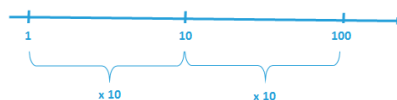
Wykres giełdowy w skali logarytmicznej:



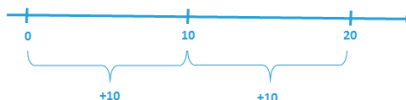
Wykres giełdowy w skali liniowej:



Skala logarytmiczna umożliwia analizowanie danych z rozległego przedziału. Poniższa oś rozpoczyna się zawsze od 1, następną wartością jest 10, a kolejną 100 (jest to skala logarytmiczna dla logarytmu o podstawie 10). Wygląda to tak, ponieważ wartości pomnażają się wzajemnie, a wynikiem jest kolejna wartość.



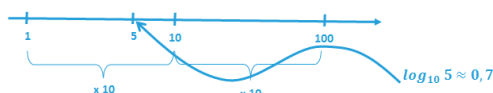
Tak zaś wygląda skala liniowa:



Plusy i minusy wykresu logarytmicznego.

Plusy to szersze zastosowanie w przypadku analiz średnio i długoterminowych oraz do wyznaczania linii trendu. Dodatkowo skala ta sprawdza się do prezentowania danych z rozległego przedziału liczbowego. Ponadto umożliwia poprawną analizę dynamiki zmian wartości.

Minusem może być nieumiejętność czytania danych z wykresu ze skalą logarytmiczną. Dodatkowo należy zwracać uwagę na nierówne odległości pomiędzy wartościami. Przykład: jeżeli chcemy na osi zaznaczyć wartość 5, nie możemy po prostu zaznaczyć odcinka gdzieś w połowie pomiędzy wartością 1 a 10. Logarytm dla 5 należy obliczyć.



W tekście wykorzystałem artykuły z różnych stron internetowych.