

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Matheus Haubert Yokomizo**

**Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos  
aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura**

**São Carlos**

**2023**



**Matheus Haubert Yokomizo**

**Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos  
aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura**

Texto apresentado para o exame de qualificação  
ao mestrado no Programa de Pós-Graduação de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de  
São Paulo, como parte dos requisitos para ob-  
tenção do título de Mestre em Engenharia de  
Estruturas

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche San-  
ches

**São Carlos**

**2023**



# Resumo

YOKOMIZO, M. H. **Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura**. 2023. 66p. Projeto de pesquisa de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O estudo de Interação Fluido-Estrutura está tendo um grau de importância cada vez maior, uma vez que as estruturas estão se tornando cada vez mais leves e esbeltas, devido aos constantes avanços nas diversas áreas da engenharia. Dentre essas interações, enfatiza-se aquelas em que o fluido se encontra em escoamento turbulento, o que ocorre, por exemplo, em edifícios sujeitos à ação de ventos. Sendo assim, se torna necessário o desenvolvimento de técnicas cada vez mais eficientes na determinação do comportamento tanto da estrutura, quanto do escoamento dos fluidos que interagem com a mesma. Nesse sentido, observa-se a existência de uma grande variedade técnicas para determinação do comportamento de estruturas flexíveis, sendo as mais notáveis aquelas baseadas no Método dos Elementos Finitos. Dentre esses métodos, um que está ganhando destaque é aquele que considera posições nodais como parâmetros de análise, denominado de Método dos Elementos Finitos Posicional. Da mesma forma, observa-se que análise de escoamentos também pode ser realizada de diversas maneiras, tais como: construção de amostras em escalas para ensaios práticos; e a modelagem de problemas via métodos matemáticos. Nesse contexto, verifica-se que a construção de amostras reais em escala é muito dispendiosa no ponto de vista de ser necessária uma grande infraestrutura para obtenção de dados válidos, assim como, em alguns casos, os dados obtidos serem dependentes da escala da amostra, não apontando resultados reais, por consequência. Sendo assim, os modelos matemáticos se tornam a melhor solução para se analisar esses problemas. Porém, a depender do grau de complexidade do problema e/ou do modelo empregado, essa análise leva a um custo computacional muito elevado, inviabilizando sua resolução. Dessa forma, o presente trabalho busca realizar um estudo comparativo entre algumas das técnicas mais comuns de análise de Interação Fluido-Estrutura, considerando escoamentos turbulentos em estruturas flexíveis, empregando o Método dos Elementos Finitos Posicional para essa avaliação.

**Palavras-chave:** Interação Fluido-Estrutura. Escoamento Turbulento. Método dos Elementos Finitos Posicional. *Large Eddy Simulation*. *Variational Multi-Scale Methods*. *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*.



# Abstract

YOKOMIZO, M. H. **Comparative study between turbulent flow models applied to Fluid-Structure Interaction problems.** 2023. 66f. Projeto de pesquisa de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The study of Fluid-Structure Interaction is having an increasing degree of importance, since the structures are becoming increasingly lighter and slender, due to the constant advances in the different areas of engineering. Among these interactions, emphasizes those in which the fluid is in turbulent flow, which occurs, for example, in buildings subject to the winds actions. Therefore, it is necessary to develop increasingly efficient techniques to determine the behavior of both the structure and the flow of fluids that interact with it. In this sense, there is a great variety of techniques for determining the behavior of flexible structures, the most notable being those based on the Finite Element Method. Among these methods, one that is gaining prominence is the one that considers nodal positions as parameters of analysis, called Positional Finite Element Method. Likewise, it is observed that flow analysis can also be performed in different ways, such as: construction of scaled samples for practical tests; and problem modeling via mathematical methods. In this context, it appears that the construction of real samples in scale is very expensive in view of the need for a large infrastructure to obtain valid data, as well as, in some cases, the data obtained are dependent on the scale of the sample, not pointing to real results, therefore. Thus, mathematical models become the best solution to analyze these problems. However, depending on the degree of complexity of the problem and/or the model used, this analysis leads to a very high computational cost, making its resolution unfeasible. Thus, the present work seeks to carry out a comparative study between some of the most common techniques of Fluid-Structure Interaction analysis, considering turbulent flows in flexible structures, using the Positional Finite Element Method for this evaluation.

**Keywords:** Fluid-Structure Interaction. Turbulent Flow. Positional Finite Element Method. Large Eddy Simulation. Variational Multi-Scale Methods. Reynolds-Averaged Navier-Stokes.





# Lista de figuras

Figura 1 – Esquema de escoamentos. . . . .	26
Figura 2 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável. . . . .	28
Figura 3 – Taxa de fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável. . . . .	29
Figura 4 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção $\hat{e}_1$ . . .	30
Figura 5 – Domínio de análise e fronteiras consideradas para problemas de mecânica dos fluidos. . . . .	31
Figura 6 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária. . . . .	32
Figura 7 – Elementos Taylor-Hood. . . . .	36
Figura 8 – Desenho esquemático de uma barra submetida a tração. . . . .	37
Figura 9 – Esquema de diagrama de tensão $\times$ deformação. . . . .	38
Figura 10 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável. . . . .	39
Figura 11 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal. . . . .	40
Figura 12 – Mudança de configuração em um cilindro infinitesimal. . . . .	40
Figura 13 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção $\hat{e}_1$ . . . . .	41
Figura 14 – Mudança de configuração. . . . .	43
Figura 15 – Desenho esquemático do filtro considerado. . . . .	54
Figura 16 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidades $\mathbf{u}$ . . . . .	54



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Cronograma de atividades . . . . .	62
---	----



# Lista de abreviaturas e siglas

ALE	Lagrangiana-Euleriana Arbitrária - <i>Arbitrary Lagrangian-Eulerian</i>
LBB	Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional - <i>Computational Fluid Dynamics</i>
CSD	Dinâmica dos Sólidos Computacional - <i>Computational Solid Dynamics</i>
GLS	Galerkin Least-Squares
IFE	Interação Fluido-Estrutura
LES	Simulação de Grandes Vórtices - <i>Large Eddy Simulation</i>
LSIC	<i>Least-Squares on Incompressibility Constraint</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
PSPG	<i>Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin</i>
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>
SGS	Subgrid-Scales
SUPG	<i>Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin</i>
VMS	Métodos Variacionais Multiescala - <i>Variational Multi-Scale</i>



# Lista de símbolos

## Operadores

$\text{dev}(\cdot)$	Parte desviadora do tensor
$H^1$	Espaço de Sobolev de ordem 1
$L^2$	Espaço das funções de quadrado integrável
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de um tensor
$\nabla(\cdot)$	Gradiente
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergente
$\nabla^2(\cdot)$	Laplaciano
$\cdot$	Produto interno
$:$	Contração dupla
$\times$	Produto vetorial
$\otimes$	Produto tensorial
$\sum$	Somatório
$\prod$	Produtório

## Parâmetros Gerais

$\hat{\mathbf{e}}_i$	Vetor versor na direção $i$
$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$m$	Massa
$n_{sd}$	Número de dimensões espaciais do problema

$Re$	Número de Reynolds
$t$	Tempo
$V$	Volume
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\Delta t$	Intervalo discreto de tempo
$\rho$	Massa específica
$\sigma$	Tensor de tensões de Cauchy
$\phi$	Propriedade qualquer

#### Configurações do Contínuo

$\mathbf{x}$	Posição inicial (ou posição material)
$\hat{\mathbf{x}}$	Posição de referência
$\mathbf{y}$	Posição atual (ou posição espacial)
$\Gamma_D$	Fronteira de Dirichlet
$\Gamma_N$	Fronteira de Neumann
$\Omega$	Domínio de análise na configuração atual
$\Omega_0$	Domínio de análise na configuração inicial
$\hat{\Omega}$	Domínio de análise na configuração de referência

#### Dinâmica dos Sólidos Computacional

$\mathbb{A}$	Medida de deformação de Almansi
$\mathbf{A}$	Gradiente da função de mudança de configuração
$\mathbb{E}$	Medida de deformação de Green-Lagrange
$\mathbf{f}$	Função de mudança de configuração
$\mathbb{H}$	Medida de deformação de Hencky
$J$	Jacobiano da mudança de configuração
$\mathbb{K}$	Energia cinética
$n$	Vetor normal à superfície na configuração atual



$N$	Vetor normal à superfície na configuração inicial
$\mathbb{P}$	Energia das Forças Externas
$\mathbf{P}$	Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie
$u_e$	Energia específica de deformação
$\mathbb{U}$	Energia de deformação
$\varepsilon$	Tensor de deformação linear
$\varepsilon_V$	Deformação volumétrica
$\Pi$	Energia total

#### Dinâmica dos Fluidos Computacional

$\mathbf{A}$	Gradiente da função de mudança de configuração
$\mathbf{c}$	Força de corpo
$\mathcal{D}$	Tensor constitutivo de quarta ordem
$\mathbf{f}$	Força por unidade de massa
$f$	Função mudança de configuração
$\mathbf{F}$	Resultante das forças externas
$\mathbf{g}$	Velocidades prescritas na fronteira de Dirichlet
$\mathbf{h}$	Forças de superfícies prescritas na fronteira de Neumann
$n$	Vetor normal à superfície
$p$	Campo de pressões
$\mathbf{q}$	Resultante das forças externas por unidade de volume
$\mathcal{S}_u$	Espaço de funções tentativas para o campo de velocidades
$\mathcal{S}_p$	Espaço de funções tentativas para o campo de pressões
$\mathbf{u}$	Campo de velocidades
$\mathcal{V}_u$	Espaço de funções teste para o campo de velocidades
$\mathcal{V}_p$	Espaço de funções teste para o campo de pressões
$\hat{\mathbf{u}}$	Campo de velocidades da malha

$\dot{\varepsilon}$	Tensor de taxa de deformação
$\mu$	Viscosidade cinemática
$\nu$	Viscosidade dinâmica
$\tau$	Tensor desviador

### *Large Eddy Simulation*

$\mathbf{C}$	Tensor de termos cruzados
$C_S$	Constante de Smagorinsky
$D_\Delta(\mathbf{y})$	Domínio de abrangência do filtro
$g$	Filtro
$\mathbf{L}$	Tensor de Leonard
$\mathbf{R}$	Tensor SGS de Reynolds
$\mathbf{T}$	Tensor SGS
$\mathbf{T}_S$	Tensor SGS de Smagorinsky
$\mathbf{y}_\Delta$	Ponto na vizinhança de $\mathbf{y}$ interno à $D_\Delta(\mathbf{y})$
$\Delta$	Tamanho da malha
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	Taxa de deformação em grandes escalas
$\nu_T$	Viscosidade de vórtice
$\overline{\phi}$	Propriedade filtrada
$\phi'$	Propriedade não filtrada

### *Variational Multi-Scale*

### *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos	20
1.2	Justificativa	21
<b>2</b>	<b>Estado Da Arte</b>	<b>23</b>
2.1	Dinâmica Das Estruturas Computacional	23
2.2	Dinâmica Dos Fluidos Computacional	24
2.3	Interação Fluido-Estrutura	25
2.4	Modelo De Turbulência	25
<b>3</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>27</b>
3.1	Equações Governantes da Dinâmica dos Fluidos	27
3.1.1	Descrição Euleriana	27
3.1.2	Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária	31
3.1.3	Modelo Constitutivo	33
3.1.4	Formulação Semi-Discreta	34
3.2	Equações Governantes da Dinâmica dos Sólidos	36
3.2.1	Cinemática dos Corpos Deformáveis	38
3.2.2	Método dos Elementos Finitos Posicional Aplicado a Elementos de Casca	42
3.2.2.1	Procedimento Computacional	46
3.2.2.2	Exemplos de Validação	46
3.3	Acoplamento Fluido-Estrutura	46
3.4	Modelos de Turbulência	47
3.4.1	<i>Variational Multi-Scale</i>	47
3.4.1.1	Integração temporal	51
3.4.1.2	Procedimento iterativo	52
3.4.2	<i>Large Eddy Simulation</i>	53
3.4.3	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>	57
<b>4</b>	<b>Metodologia e cronograma</b>	<b>61</b>
	<b>Referências</b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Visto o constante avanço da engenharia em poder se dimensionar estruturas cada vez mais leves e esbeltas, observa-se a necessidade de uma determinação cada vez mais precisa de todos os parâmetros que podem influenciar na resistência e estabilidade da estrutura. Nesse contexto torna-se de grande importância a verificação dos efeitos da interação entre os fluidos e a estrutura, uma vez que esses fenômenos podem comprometer a segurança estrutural. Exemplos de problemas envolvendo Interação Fluido-Estrutura (IFE) podem ser notados em ações do vento sobre estruturas de grandes altitudes, ação de marés sobre estruturas de barragens e estruturas *offshore*, dentre outros. Além disso, também percebe-se a aplicação desse tipo de análise em demais áreas, como, por exemplo, no estudo de escoamento do sangue em vasos sanguíneos, ou em problemas envolvendo aerodinâmica ([SANCHES; CODA, 2014](#); [FERNANDES, 2020](#)).

Desse modo, é possível realizar a análise de IFE de duas formas principais: a construção de amostras em escala; ou a modelagem matemática do problema em questão. No primeiro caso há a verificação real do comportamento da estrutura e do fluido à um determinado problema. No entanto, dependendo da natureza do problema, esse comportamento pode variar de acordo com a escala, o que pode não apresentar resultados representativos. Também ressalta-se o fato de a construção das amostras demandar uma infraestrutura robusta para se analisar apenas alguns problemas específicos ([FERNANDES, 2020](#)).

Já a modelagem matemática de problemas se mostra como uma opção mais viável para análise de problemas de IFE, uma vez que dispensa grandes investimentos e possui grande flexibilidade de aplicações, podendo ser utilizado em diversos tipos de análises. Porém, em muitos casos, o estudo matemático de IFE leva a modelagem de problemas muito complexos, com alto custo computacional, exigindo, assim, formulações mais robustas para sua aplicação.

Para se realizar o estudo, tanto da mecânica dos elementos sólidos, quanto para a mecânica dos fluidos, é necessário o estabelecimento de algumas simplificações. Uma das principais simplificações utilizada para esses problemas é a que considera os objetos de análise como meios contínuos, desprezando-se, dessa forma, os efeitos advindos da microestrutura da

matéria (LAI et al., 2009; MASE; SMELSER; MASE, 2009).

Sabe-se que toda a matéria é composta por átomos e partículas subatômicas, no entanto a mecânica do contínuo desconsidera os efeitos dessas partículas e aponta que todo material pode ser subdividido em elementos cada vez menores sem que haja mudanças em suas propriedades físicas, independentemente do quão pequena seja essa divisão. Assim, faz-se possível a modelagem de elementos com volume infinitesimal, permitindo a utilização de artifícios matemáticos, como o cálculo diferencial e integral. Dessa forma, teorias baseadas na elasticidade e plasticidade podem ser empregadas utilizando funções contínuas, facilitando a determinação de parâmetros de interesse da análise (IRGENS, 2008; LAI et al., 2009; MALVERN, 1969).

Vale ressaltar que a consideração dos meios contínuos apresenta resultados muito satisfatórios nos estudos de engenharia, uma vez que os objetos de estudo possuem dimensões muito maiores que as distâncias moleculares do mesmo (MALVERN, 1969; MASE; SMELSER; MASE, 2009).

Ainda existem diferentes formas de descrever matematicamente um problema mecânico, em termos da referência adotada para os cálculos. São estas: a descrição Lagrangiana (ou material) e a descrição Euleriana (ou espacial).

Na descrição Lagrangiana a referência adotada é a configuração inicial do contínuo (denotada por  $x$ ). Essa descrição apresenta boa representatividade quando aplicada em modelos sólidos, uma vez que a configuração inicial dos elementos é bem definida, tendo como variáveis principais os deslocamentos do elemento (SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Já a descrição Euleriana toma como referência a configuração atual do contínuo (denotada por  $y$ ), sendo bem utilizada para a descrição de fluidos newtonianos, pois estes não apresentam resistência à esforços de cisalhamento, distorcendo-se indefinidamente quando submetidos à tais esforços. Nesse tipo de descrição é comum a utilização para determinação de velocidades, diferentemente dos deslocamentos (SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho visa o estudo e implementação na linguagem de programação C++ de modelos de turbulência para análise de problemas de interação fluido-estrutura com elevados números de Reynolds. Com isso, traça-se os seguintes objetivos específicos:

- Estudo e implementação de técnicas de *Large Eddy Simulation*;
- Estudo e implementação de técnicas de *Variational Multi-Scale*;

- Estudo e implementação de técnicas de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*;
- Estudo comparativo das características numéricas dos métodos *Large Eddy Simulation*, *Variational Multi-Scale* e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* em problemas de interação fluido-estrutura.

## 1.2 Justificativa

Observa-se os efeitos da interação fluido-estrutura em diversas estruturas, em especial os efeitos devido à escoamentos turbulentos em estruturas flexíveis, por exemplo, a atuação de ventos em edifícios. Nesse sentido, se faz necessário o estudo de técnicas eficazes para determinação dos impactos desses escoamentos sobre as mais diversas estruturas.

Duas formas possíveis de se obter esses resultados são: pela construção de modelos reais em escala, observando-se na prática o comportamento estrutural e do escoamento; ou pela modelagem matemática do problema. O primeiro cenário apresenta algumas desvantagens, pois os parâmetros que são obtidos nesse tipo de análise podem ser dependentes da escala da amostra, impactando diretamente na qualidade dos resultados, além de demandar uma infraestrutura muito robusta para se obter valores coerentes. Assim, o modelo matemático se mostra como uma solução mais eficiente, uma vez que não demanda um grande investimento em infraestrutura.

No entanto muitos tipos de análise envolvendo escoamentos turbulentos recaem em problema com um alto grau de complexidade, ocasionando, consequentemente, um custo computacional muito alto. Dessa maneira, o presente trabalho busca analisar entre as técnicas matemáticas qual se mostra mais eficiente para essas análises, dando continuidade aos trabalhos que já foram realizados pelo grupo de pesquisa.

Além dos métodos para determinação de parâmetros referentes ao escoamento, também é necessário se obter aqueles referentes à resposta da estrutura frente à esse escoamento. Assim, nota-se a presença de diversos métodos para a determinação de parâmetros relativos à estruturas flexíveis, em que se percebe o Método dos Elementos Finitos Posicional como uma alternativa interessante para tal análise. Esse método se destaca pela consideração das posições nodais como parâmetros de análise, evitando problemas devido à falta de comutatividade de rotações, que é observado, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos Corrotacional, que, além de deslocamentos, também considera rotações nodais como parâmetros de análise. Além disso, também vale destacar que a matriz de massa em problemas dinâmicos permanece constante ao longo do tempo, possibilitando a implementação facilitada de métodos de integração temporal.





# Capítulo 2

## Estado Da Arte

No presente capítulo serão abordados os principais temas relacionados à problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE), tendo como ênfase os modos de turbulência. Serão destacados os principais métodos de cálculos envolvendo a dinâmica das estruturas computacional (2.1), a dinâmica dos fluidos computacional (2.2) e alguns modelos de turbulências (2.4).

### 2.1 Dinâmica Das Estruturas Computacional

A mecânica dos sólidos visa a determinação de parâmetros referentes à elementos estruturais sujeitos a solicitações externas, tais como tensões e deformações, ou forças e deslocamentos de determinados pontos dos mesmos. Para isso são desenvolvidos diversos métodos com a finalidade de melhor descrever o comportamento das estruturas, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), que se apresenta como a ferramenta computacional mais amplamente utilizada para esse fim.

Nesse sentido vale ressaltar os trabalhos de [Hughes e Liu \(1981\)](#), [Argyris \(1982\)](#), [Ibrahim-begovic e Taylor \(2002\)](#), [Pimenta, Campello e Wriggers \(2004\)](#), [Battini e Pacoste \(2006\)](#) e [Pimenta, Campello e Wriggers \(2008\)](#), que realizaram análises através do MEF Corrotacional, que se trata de uma formulação onde os deslocamentos e rotações dos elementos são os parâmetros principais da análise.

No entanto a utilização de uma análise que considera tais parâmetros nodais só se mostra eficiente ao se estudar estruturas que desenvolvem pequenos deslocamentos e deformações. Isso deve-se ao fato de essa abordagem utilizar rotações finitas como parâmetros nodais, o que pode gerar controversas em problemas envolvendo grandes rotações, uma vez que não há comutatividade entre essas grandezas. Ainda observa-se que a avaliação dinâmica de estruturas reticuladas se torna problemática, do ponto de vista da conservação de energia, além da matriz de massa ser variável, tornando o processo de integração temporal muito complexo ([SANCHES;](#)

CODA, 2013).

Com isso, vale ressaltar os trabalhos de Coda e Greco (2004), Coda e Paccola (2007), Coda e Paccola (2010), Coda (2009), Coda e Paccola (2009) e Carrazedo e Coda (2010) que utilizam de forma bem-sucedida o MEF Posicional para análise de estruturas reticuladas e de cascas aplicadas à grandes deslocamentos. Este método se diferencia dos demais ao considerar as posições nodais, obtidas a partir de vetores indeformados, como parâmetros de análise, facilitando o cálculo de efeitos de não-linearidade geométrica.

Sanches e Coda (2013) apresentaram uma aplicação do método dos elementos finitos posicional em elementos de cascas e constataram a presença de uma matriz de massa constante, o que possibilita a utilização de métodos de integração temporal, como o método de Newmark  $\beta$ , conservando, assim, o momento linear e angular em análises dinâmicas. Além disso, esse trabalho também analisou problemas envolvendo IFE, obtendo resultados favoráveis, indicando a boa aplicação desse método em problemas dessa natureza.

No âmbito da IFE, destaca-se a necessidade dessa consideração, uma vez que são observadas aplicações como, por exemplo, grandes amplitudes de deslocamentos, como *flutter*, aplicações biomecânicas, estruturas infláveis (KARAGIOZIS et al., 2011), simulações de turbinas (BAZILEVS et al., 2011), dentre outras.

## 2.2 Dinâmica Dos Fluidos Computacional

Ao contrário de problemas envolvendo elementos sólidos, que possuem um estado inicial bem definido, os fluidos, em especial os Newtonianos, não o possuem, uma vez que não incapazes de resistir à tensões desviadoras, deformando-se, assim, indefinidamente quando sujeitos à essas tensões. Dessa forma, torna-se apropriada a utilização de uma descrição Euleriana para descrever os fluidos, em que os parâmetros nodais são principalmente as velocidades do mesmo (FERNANDES, 2020).

Em geral, problemas envolvendo Dinâmica dos Sólidos (*Computational Solid Dynamics* - CSD) partem do princípio da estacionariedade de energias, buscando a determinação do ponto em que a energia do sistema seja mínima. Esses métodos apresentam a particularidade de surgir um sistema de equações com uma matriz simétrica e, em alguns casos, de vetores cujas componentes possuem significado físico. Porém, em problemas que envolvem a Dinâmica dos Fluidos (*Computational Fluid Dynamics* - CFD), o sistema de equações possui uma matriz, na maioria dos casos, assimétrica, devido à presença de termos convectivos nas equações governantes (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; BROOKS; HUGHES, 1982).

Nesse sentido, são desenvolvidos novos métodos, em busca de uma solução mais representativa com uma malha menos refinada. Dentre os principais desenvolvidos, vale mencionar o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-*

*Squares* (GLS) (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989; TEZDUYAR, 1991), *Subgrid Scales* (SGS) e (HUGHES, 1995).

Um campo que vale destacar na CFD é o que estuda os fenômenos de turbulência, uma vez que esses fenômenos podem se apresentar nas mais variadas escalas, sendo necessário a geração de uma malha muito refinada para detectar a formação dos vórtices, o que ocasiona um aumento radical no custo computacional da análise. Assim, são desenvolvidas novas técnicas afim de se obter melhores resultados, sem que haja um grande aumento no volume de cálculos. Dentre esses métodos destacam-se os métodos multiescala (*Variational Multi-Scale* - VMS), as simulações de grandes vórtices (*Large Eddy Simulation* - LES) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998; HUGHES; OBERAI, 2002; BAZILEVS; AKKERMAN, 2010; ŠEKUTKOVSKI et al., 2021), aproximações de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (ALFONSI, 2009) e os métodos de atualização de malha (SAMPAIO et al., 1993). O capítulo 3 descreve de forma mais detalhada cada um desses métodos.

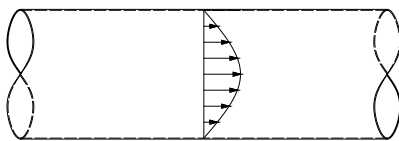
## 2.3 Interação Fluido-Estrutura

### TEXTO

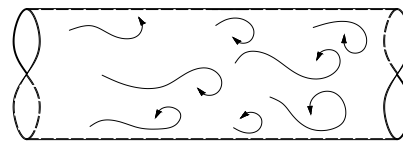
## 2.4 Modelo De Turbulência

Um fluido pode apresentar um escoamento de duas formas distintas, a depender do número de Reynolds que este apresenta (conforme ilustrado na Figura 1). Em casos cujo número de Reynolds é baixo, o escoamento é considerado laminar, ou seja, o escoamento se dá de forma semelhante ao movimento de lâminas independentes, não havendo mistura macroscópica entre as mesmas. Esse tipo de escoamento possui soluções muito mais simples de se obter, no entanto representam uma ocorrência baixa na maioria dos problemas observados na natureza. Já em casos cujo número de Reynolds é muito elevado, o escoamento é considerado turbulento. Nesse cenário há a formação de vórtices sobre o escoamento, que podem ocorrer de forma instável, desordenada e em várias escalas diferentes (POPIOLEK, 2005; SHAUGHNESSY; KATZ; SCHAFFER, 2005). Esse fenômeno pode ser descrito de acordo com as equações de Navier-Stokes, no entanto sua resolução se apresenta com um alto grau de complexidade, uma vez que possui termos não lineares em sua composição. Assim são necessárias técnicas de solução, para que se possa obter uma solução de forma aproximada à essas equações.

Figura 1 – Esquema de escoamentos.



(a) Escoamento laminar.



(b) Escoamento turbulento.

Fonte: Autoria Própria (2023).

## Capítulo 3

# Fundamentação Teórica

O presente capítulo apresenta inicialmente as equações governantes que descrevem a dinâmica dos fluidos, em especial aquelas voltadas para escoamentos incompressíveis levando em consideração os princípios da conservação de massa e da quantidade de movimento, culminando na obtenção das equações de Navier-Stokes para esse tipo de escoamento em descrição Euleriana e Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) (Seção 3.1). Na sequência apresenta-se as equações governantes da dinâmica dos sólidos, onde se observa desde os conceitos fundamentais, como a cinemática dos corpos deformáveis, até uma descrição em Elementos Finitos baseado em Posições (Seção 3.2), onde é detalhado o elemento finito de casca. Com isso se faz a formulação de métodos de acoplamento Fluido-Estrutura, tendo em vista métodos de acoplamento particionado (fraco e forte), assim como o método de acoplamento monolítico. Por fim detalha-se o equacionamento dos modelos de turbulência baseados em: *Large Eddy Simulation* (Seção 3.4.2); *Variational Multi-Scale* (Seção 3.4.1); e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (Seção 3.4.3), tendo como foco métodos de solução computacional.

### 3.1 Equações Governantes da Dinâmica dos Fluidos

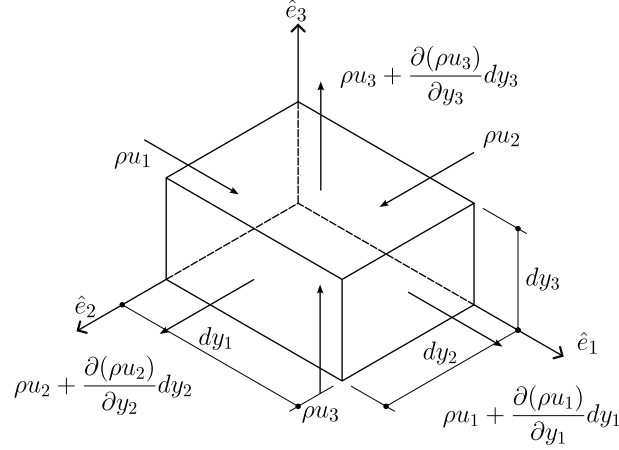
Para a devida representação de escoamentos a temperatura constante é necessária a consideração dos princípios da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento de um fluido. Estas podem ser realizadas a partir de uma descrição Euleriana, sendo sua formulação apresentada na subseção 3.1.1, ou a partir de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária, em que sua formulação é devidamente apresentada na subseção 3.1.2.

#### 3.1.1 Descrição Euleriana

Em uma descrição Euleriana é possível se obter uma expressão que defina a conservação de massa (também denominada como Equação da Continuidade) do fluido, considerando um elemento

infinitesimal permeável, que definirá o volume de controle, conforme ilustrado na Figura 2, em que  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidades do fluido na posição atual ( $\mathbf{y}$ ) do elemento e  $\rho$  é a massa específica do fluido nesse ponto.

Figura 2 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Realizando-se o balanço de massa nesse elemento tem-se:

$$dm = dm_0 + \left. \frac{\partial dm}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} dt, \quad (3.1)$$

que pode ser expandida como:

$$\begin{aligned} \rho dV + \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} dV dt = & \rho dV + \rho u_1 dy_2 dy_3 dt + \rho u_2 dy_1 dy_3 dt + \rho u_3 dy_1 dy_2 dt - \\ & \left( \rho u_1 + \left. \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial y_1} \right|_{\mathbf{y}} dy_1 \right) dy_2 dy_3 dt - \left( \rho u_2 + \left. \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y_2} \right|_{\mathbf{y}} dy_2 \right) dy_1 dy_3 dt - \\ & \left( \rho u_3 + \left. \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial y_3} \right|_{\mathbf{y}} dy_3 \right) dy_1 dy_2 dt. \end{aligned}$$

Simplificando essa expressão, chega-se a seguinte relação em forma expandida:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} = - \left( \left. \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial y_1} \right|_{\mathbf{y}} + \left. \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y_2} \right|_{\mathbf{y}} + \left. \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial y_3} \right|_{\mathbf{y}} \right), \quad (3.2)$$

a qual pode ser reescrita em notação simbólica de acordo com a Equação 3.3a, ou em notação indicial de acordo com a Equação 3.3b, que representam a conservação de massa em um elemento infinitesimal.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.3a)$$

$$\dot{\rho} + (\rho u_i)_{,i} = 0, \quad (3.3b)$$

sendo  $D\rho/Dt$  a representação de derivada material, definida para uma propriedade  $\phi$  qualquer como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\phi, \quad (3.4)$$

tal que  $\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$  é o operador nabla, definido para uma função escalar  $g$  qualquer de acordo com a Equação 3.5a e para uma função vetorial  $\mathbf{g}$  qualquer de acordo com a Equação 3.5b:

$$\nabla_{\mathbf{y}}g = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g}{\partial y_i} = g_{,i}, \quad (3.5a)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = g_{i,j}, \quad (3.5b)$$

e  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\cdot)$  é o divergente, que para uma função vetorial  $\mathbf{g}$  qualquer, é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{g} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial y_i} = g_{i,i}, \quad (3.6)$$

sendo a vírgula presente no subíndice a representação de derivada para a respectiva componente.

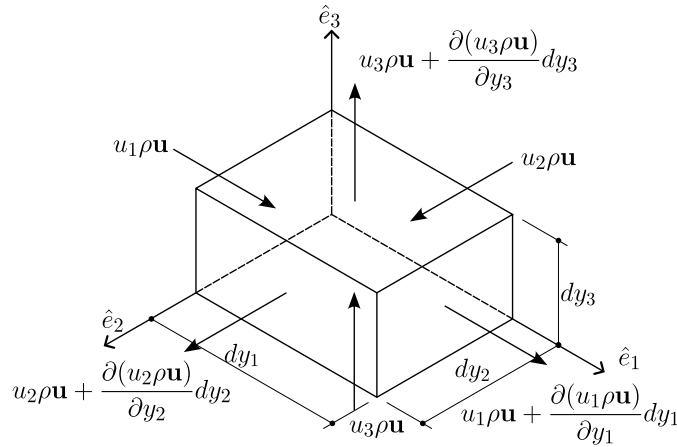
Para escoamentos incompressíveis a equação da continuidade pode ser reduzida a:

$$u_{i,i} = 0, \quad (3.7)$$

denominada como condição de incompressibilidade.

Já a equação que expressa a Conservação da Quantidade de Movimento (ou de Momento Linear) pode ser obtida ao se considerar a taxa de fluxo de quantidade de movimento no elemento infinitesimal permeável, ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Taxa de fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Assim, procede-se com o balanço da taxa de quantidade de movimento, no qual  $d\mathbf{F}$  representa a resultante das forças externas atuante no elemento.

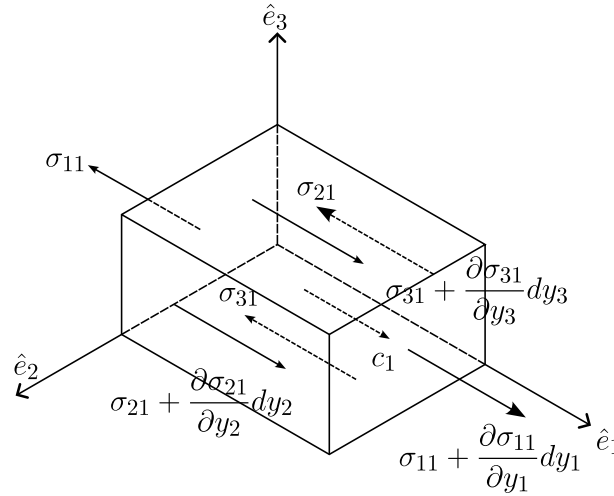
$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{y}} dV = & u_1\rho\mathbf{u}dy_2dy_3 + u_2\rho\mathbf{u}dy_1dy_3 + u_3\rho\mathbf{u}dy_1dy_2 - \left(u_1\rho\mathbf{u} + \frac{\partial u_1\rho\mathbf{u}}{\partial y_1}\bigg|_{\mathbf{y}} dy_1\right) dy_2dy_3 - \\ & \left(u_2\rho\mathbf{u} + \frac{\partial u_2\rho\mathbf{u}}{\partial y_2}\bigg|_{\mathbf{y}} dy_2\right) dy_1dy_3 - \left(u_3\rho\mathbf{u} + \frac{\partial u_3\rho\mathbf{u}}{\partial y_3}\bigg|_{\mathbf{y}} dy_3\right) dy_1dy_2 + d\mathbf{F} \end{aligned}$$

Fazendo as devidas simplificações obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\left. \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + (\rho u_j u_i)_{,j} - q_i = 0, \quad (3.8)$$

em que  $q_i$  representa a força resultante por unidade de volume, ou seja,  $q_i = dF_i/dV$ . Entretanto, não é de interesse escrever a equação 3.8 em termos desse vetor  $q_i$ , mas em termos do tensor de tensões de Cauchy ( $\sigma_{ij}$ ). Para isso, considere o diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal, onde se é representado apenas as componentes na direção  $\hat{e}_1$  de tensões e de forças de corpo ( $c_i$ ).

Figura 4 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção  $\hat{e}_1$ .



Fonte: Autoria Própria (2023).

Fazendo o equilíbrio de forças nessa direção, obtém-se que:

$$\begin{aligned} & -\sigma_{11} dy_2 dy_3 - \sigma_{21} dy_1 dy_3 - \sigma_{31} dy_1 dy_2 + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 \\ & + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + c_1 dy_1 dy_2 dy_3 = dF_1 \end{aligned}$$

Após feitas as devidas simplificações, pode-se estabelecer uma relação entre  $q_i$  e  $\sigma_{ij}$ :

$$q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1, \quad (3.9)$$

a qual pode ser estendida analogamente para as demais direções como:

$$q_i = \sigma_{ji,j} + c_i. \quad (3.10)$$

Substituindo 3.10 em 3.8 e aplicando a condição de incompressibilidade obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento escrita em termos de tensões:

$$\rho (\dot{u}_i + u_j u_{i,j} - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0, \quad (3.11)$$

em que  $c_i = \rho f_i$ , tal que  $f_i$  é uma força por unidade de massa. Além disso, também é possível escrever a equação 3.11 utilizando a notação de derivada material como:

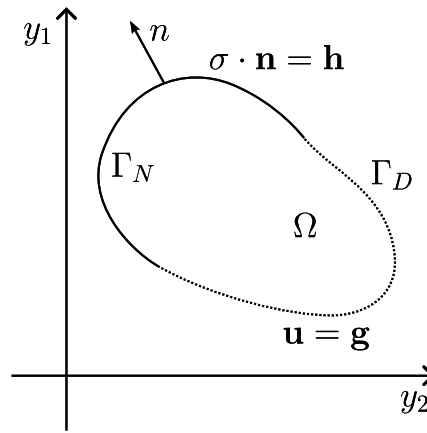
$$\rho \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0}, \quad (3.12a)$$



$$\rho \left( \frac{Du_i}{Dt} - f_i \right) - \sigma_{ji,j} = 0. \quad (3.12b)$$

Já o domínio em que essas equações são válidas pode ser definido como  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ , sendo  $n_{sd} = 2$  ou  $3$  a dimensão do problema em análise, tal que  $\Omega$  possui uma fronteira  $\Gamma = \partial\Omega$ , em que a parte dessa fronteira onde se impõem condições cinemáticas é denominada como fronteira de Dirichlet ( $\Gamma_D$ ) e a parte onde há prescrição de forças de superfície é denotado como fronteira de Neumann ( $\Gamma_N$ ), conforme pode ser visualizado na Figura 5.

Figura 5 – Domínio de análise e fronteiras consideradas para problemas de mecânica dos fluidos.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Dessa forma, o problema a ser resolvido pode ser escrito a partir das equações:

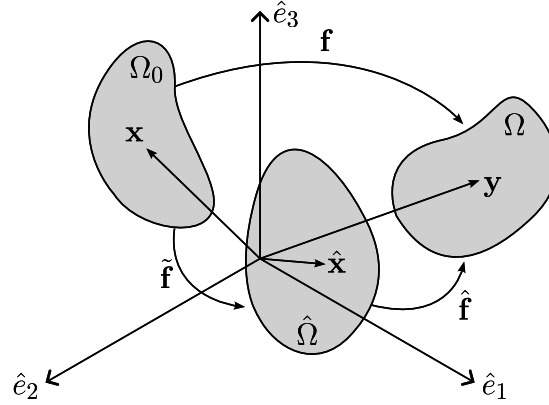
$$\begin{cases} \rho (\dot{u}_i + u_j u_{i,j} - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_{i,i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \sigma_{ij} n_i = h_j & \text{em } \Gamma_N, \\ u_j = g_j & \text{em } \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.13)$$

as quais são chamadas de equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em descrição Euleriana (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; BAZILEVS; AKKERMANN, 2010; BAZILEVS et al., 2007; HUGHES; OBERAI, 2002; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000).

### 3.1.2 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária

A descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian* - ALE) originou-se do trabalho de Donea, Giuliani e Halleux (1982), os quais consideraram três subconjuntos  $\Omega_0$ ,  $\Omega$  e  $\hat{\Omega}$ , que representam os domínios do contínuo em sua configuração inicial e atual e o domínio da malha, respectivamente. A Figura 6 ilustra esquematicamente um problema em descrição ALE.

Figura 6 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.



Fonte: Autoria Própria (2023).

As coordenadas  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\hat{\mathbf{x}}$  representam as coordenadas de um ponto nos domínios  $\Omega_0$ ,  $\Omega$  e  $\hat{\Omega}$ , respectivamente. Já as funções  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  são funções de mudança de configuração.

Com isso, pode-se obter o gradiente das funções de mudança de configuração:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (3.14b)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\partial(\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14c)$$

nos quais  $\mathbf{u} = \partial \mathbf{y} / \partial t|_{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{w} = \partial \hat{\mathbf{x}} / \partial t|_{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{u}} = \partial \hat{\mathbf{f}} / \partial t|_{\hat{\mathbf{x}}}$ . Além disso, vale ressaltar que  $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{f}}, t)$ , portanto  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

que possui, como uma de suas consequências, que:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} + \hat{\mathbf{u}}, \text{ ou} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}). \quad (3.17)$$

Assim é possível definir a derivada material em uma descrição ALE. Para isso considere uma propriedade  $\phi(\mathbf{y}, t)$  escrita em termos da configuração atual,  $\phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)$  escrita em termos da configuração de referência e  $\phi^{**}(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)$  escrita em termos da configuração inicial. Logo:

$$\frac{\partial \phi^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \text{ ou} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} + \frac{\partial \phi^*}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Substituindo 3.17 em 3.20, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{y}} \end{aligned}$$

Dessa maneira, remove-se os sobrescritos \* e \*\* e define-se a derivada material na descrição ALE como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi. \quad (3.21)$$

Com isso, substitui-se  $\phi$  por  $\rho$  e aplica-se a Equação 3.21 em 3.3 para se obter a Equação da Continuidade na descrição ALE:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.22)$$

Já a Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na descrição ALE pode ser obtida substituindo-se a Equação 3.21 em 3.12, em que  $\phi = \mathbf{u}$ , obtendo-se:

$$\rho \left( \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Assim, pode-se escrever o problema a ser resolvido a partir das equações:

$$\begin{cases} \rho (\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_{i,i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \sigma_{ij} n_i = h_j & \text{em } \Gamma_N, \\ u_j = g_j & \text{em } \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.24)$$

que são denominadas como as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em descrição ALE (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013).

### 3.1.3 Modelo Constitutivo

O modelo constitutivo que relaciona o tensor de tensões de Cauchy com os campos de velocidade e de pressão é dado por:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij}, \quad (3.25)$$

no qual  $\tau_{ij}$  é o tensor de tensões viscosas (ou tensor desviador), que para fluidos Newtonianos é dado por:

$$\tau_{ij} = \mathcal{D}_{ij\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (3.26)$$

em que  $\mathcal{D}_{ij\alpha\beta}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem, dado por:

$$\mathcal{D}_{ij\alpha\beta} = 2\mu\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \lambda\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é o tensor de taxa de deformação, definido como:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}. \quad (3.28)$$

Assim, o tensor desviador pode ser escrito como:

$$\tau_{ij} = (2\mu\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \lambda\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta})\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = 2\mu\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{\beta\beta}\delta_{ij}$$

ou em notação simbólica como:

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{\beta\beta}\delta_{ij}. \quad (3.29)$$

Já para o caso de escoamentos incompressíveis, observa-se que  $\dot{\epsilon}_{\beta\beta} = 0$ , fazendo com que 3.25 possa ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - p\delta_{ij}. \quad (3.30)$$

### 3.1.4 Formulação Semi-Discreta

Para a obtenção de uma formulação na forma fraca (ou integral) das equações de Navier-Stokes considere os conjuntos  $\mathcal{S}_u$  e  $\mathcal{S}_p$  de dimensões infinitas que definem os espaços de funções tentativas para os campos de velocidades e pressões, respectivamente, tais que (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; FERNANDES, 2020):

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u}(\cdot, t) \in H^1(\Omega), u_i = g_i \text{ em } \Gamma_D \right\} \text{ e} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p | p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_D \right\}, \quad (3.32)$$

em que  $H^1(\Omega)$  representa o espaço de valor vetorial com derivadas de quadrado integrável em  $\Omega$  e  $L^2(\Omega)$  representa o espaço de valor escalar de quadrado integrável em  $\Omega$ , ou seja:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ com } i = 1, \dots, n_{sd} \right\} \text{ e} \quad (3.33)$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u | \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (3.34)$$

Também define-se os conjuntos de funções testes para a conservação de massa e conservação da quantidade de movimento como  $\mathcal{V}_u$  e  $\mathcal{V}_p$ , respectivamente, tais que:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} | \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, w_i = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \text{ e} \quad (3.35)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (3.36)$$

Dessa forma, multiplica-se as equações de conservação da massa e de quantidade de movimento pelas suas respectivas funções testes e integra-se dentro do domínio  $\Omega$ , obtendo-se:

$$\int_{\Omega} w_i (\rho (\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j)u_{i,j} - f_i) - \sigma_{ji,j}) d\Omega + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0. \quad (3.37)$$

Separando-se a parcela que contém o tensor de tensões de Cauchy da primeira integral,

tem-se que:

$$\int_{\Omega} w_i \rho (\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} - f_i) d\Omega - \int_{\Omega} w_i \sigma_{ji,j} d\Omega + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0. \quad (3.38)$$

Fazendo a integração por partes da parcela que foi separada e considerando o Teorema da Divergência, chega-se à forma fraca do problema, expressa como a Equação 3.39, onde define-se o problema como: determinar  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $q \in \mathcal{V}_p$  arbitrários em um intervalo  $t \in (0, T)$ , sendo  $T$  o tempo analisado, dados  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$ , em que  $\mathbf{h} = \sigma^T \cdot \mathbf{n}$  é o valor prescrito de força de superfície em  $\Gamma_N$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_i \rho (\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} - f_i) d\Omega - \int_{\Gamma_N} w_i h_i d\Gamma_N + \\ \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

A solução desse problema, entretanto, pode levar à resultados com variações espúrias, como mencionado em (FERNANDES, 2020; DONEA; HUERTA, 2003; BROOKS; HUGHES, 1982), principalmente em problemas de convecção dominante devido à grande não-linearidade e assimetria do sistema de equações resultante desse método. Além disso, vale observar que a adoção do grau de aproximação dos campos de velocidades e de pressões não pode ser feita de maneira descuidada, uma vez essa escolha possui restrições quanto à sua escolha. Essas restrições são denominadas de condições de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB), que, como uma condição necessária, porém não suficiente, aponta a impossibilidade de se aproximar o campo de velocidades e de pressões no mesmo espaço, uma vez que (DONEA; HUERTA, 2003):

$$\dim \mathcal{V}_p^h \leq \dim \mathcal{V}_u^h. \quad (3.40)$$

Assim, para se garantir a unicidade da solução, a escolha dos espaços de aproximação da velocidade e da pressão depende da seguinte condição suficiente:

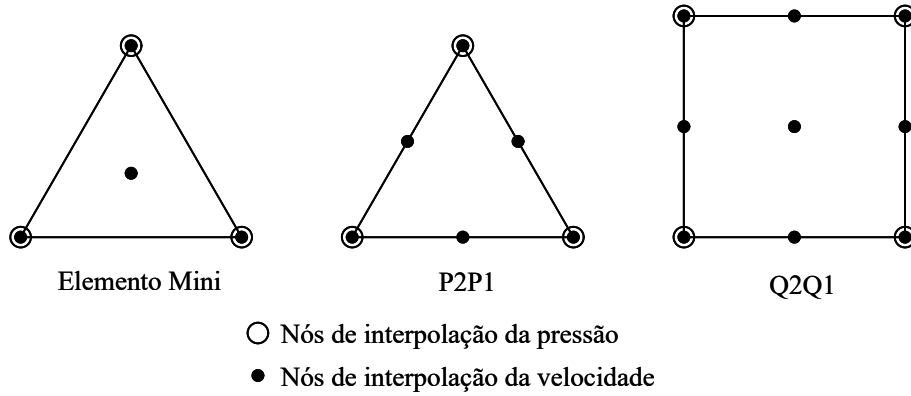
$$\inf_{q^h \in \mathcal{V}_p^h} \sup_{\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{w}^h)}{\|q\|_0 \|\mathbf{w}^h\|_1} \geq \beta > 0, \quad (3.41)$$

em que  $\beta$  é uma constante independente do tamanho da malha.

Como pode-se observar, a escolha dos espaços de aproximações que atendam às condições LBB não é trivial. Sendo assim, Donea e Huerta (2003) apresenta alguns elementos possíveis de se utilizar atendendo às condições LBB (denominados de Elementos Taylor-Hood). A Figura 7 ilustra alguns elementos Taylor-Hood.

Outros trabalhos foram desenvolvidos a fim de se obter formulações estabilizadas que permitam a utilização dos mesmos espaços de aproximação para ambos os espaços almejados, como a formulação SUPG/PSPG, reduzindo também problemas relacionados à convecção dominante. Essa formulação será devidamente tratada nas subseções seguintes (3.4.1).

Figura 7 – Elementos Taylor-Hood.



Fonte: [Fernandes \(2020\)](#) - Adaptado.

## 3.2 Equações Governantes da Dinâmica dos Sólidos

O estudo dos elementos sólidos baseia-se na determinação de parâmetros referentes à elementos estruturais, tais como esforços internos e deslocamentos, ou tensões e deformações. Em alguns casos particulares isso pode ser obtido através da simples consideração das relações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas. Entretanto, em vários outros casos, pode ser necessário o uso de algumas técnicas, como o uso dos princípios variacionais, que serão devidamente descritos na presente seção.

Para se utilizar desses princípios, deve-se primeiramente definir o conceito de energia total ( $\Pi$ ) de um sistema, que pode ser entendido como a soma de todas as parcelas relevantes ao problema. Em casos mais comuns de problemas envolvendo elementos sólidos, tem-se a consideração de uma parcela de energia devida às forças externas atuantes no corpo ( $\mathbb{P}$ ), energia de deformação ( $\mathbb{U}$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ). Dessa forma:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}. \quad (3.42)$$

Nesse sentido, busca-se encontrar uma configuração que esteja em equilíbrio estável. Dessa forma postula-se o primeiro teorema variacional, que aponta que, para se obter o equilíbrio em um sólido sujeito a forças externas conservativas, a primeira variação da energia total deve ser nula para qualquer variação admissível, ou seja:

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \forall \delta \mathbf{u} | \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D, \quad (3.43)$$

em que  $\Gamma_D$  é a parcela da fronteira onde os deslocamentos são prescritos. Já o segundo teorema trata-se da estabilidade desse equilíbrio, onde para se atingir o equilíbrio estável a segunda variação da energia total deve ser positiva para qualquer variação admissível, ou seja:

$$\delta^{(2)}\Pi > 0 \forall \delta \mathbf{u} | \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D. \quad (3.44)$$

Sendo assim, primeiramente procura-se anular a primeira variação da energia total:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0, \quad (3.45)$$

o que leva à necessidade de se determinar a primeira variação de  $\mathbb{U}$ . Para isso, é necessária a consideração de um modelo constitutivo que descreva a evolução da energia de deformação em função da medida de deformação.

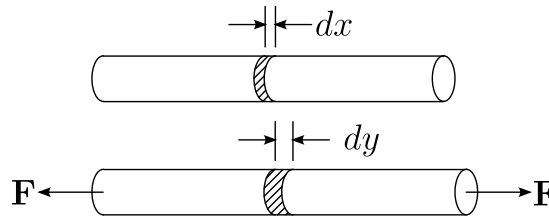
Na sequência serão apresentadas algumas medidas de deformação uniaxiais para fins de exemplificação, sendo as medidas de deformação multiaxiais apresentadas posteriormente na seção 3.2.1.

A primeira medida de deformação que pode ser observada é a denominada medida de deformação linear (ou de engenharia), que se trata de uma medida Lagrangiana, pois toma como referência a configuração inicial (ou indeformada) do elemento, e é definida como:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx}, \quad (3.46)$$

em que  $dx$  e  $dy$  são os comprimentos de um trecho infinitesimal de uma barra em sua configuração inicial e atual, respectivamente (Figura 8).

Figura 8 – Desenho esquemático de uma barra submetida a tração.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Outra medida de deformação Lagrangiana interessante é a medida de deformação quadrática (ou de Green-Lagrange), definida como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2}. \quad (3.47)$$

Vale ressaltar que, em comparação com a medida de deformação linear, a deformação quadrática pode ser utilizada para problemas com uma deformação maior, descrevendo uma variedade maior de problemas.

Já outras medidas de deformação Eulerianas (que tomam como referência a configuração atual do elemento) tem-se a medida de deformação de Almansi:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dy^2}, \quad (3.48)$$

e a medida de deformação de Hencky:

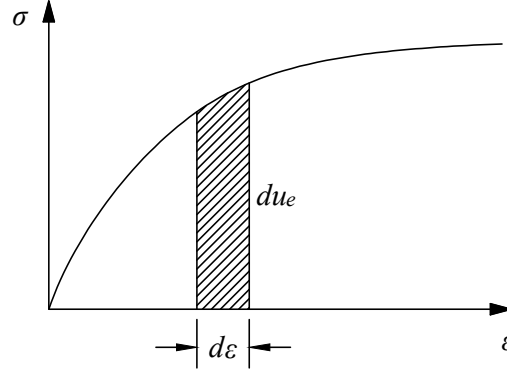
$$\mathbb{H} = -\ln \left( \frac{dx}{dy} \right). \quad (3.49)$$

Assim, pode-se definir alguns modelos constitutivos que relacionarão a medida de tensão com a de deformação, ou de forma mais prática, a medida de energia específica de deformação ( $u_e$ ) com alguma dessas duas medidas, sendo  $u_e$  a energia de deformação por unidade de volume,

matematicamente interpretado como a área sob a curva de tensão  $\times$  deformação (Figura 9), ou seja:

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon. \quad (3.50)$$

Figura 9 – Esquema de diagrama de tensão  $\times$  deformação.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Assim, destacam-se os modelos constitutivos de Hooke (Equação 3.51a), de Saint-Venant-Kirchhoff (Equação 3.51b) e de Almasi (Equação 3.51c):

$$u_e^H = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \quad (3.51a)$$

$$u_e^{SVK} = \frac{K\varepsilon^2}{2}, \quad (3.51b)$$

$$u_e^{Al} = \frac{Z\varepsilon^2}{2}, \quad (3.51c)$$

em que  $E$ ,  $K$  e  $Z$  representam o módulo de elasticidade longitudinal do material em seus respectivos modelos constitutivos.

Uma propriedade notável aponta a tensão como a conjugada energética da deformação, que, matematicamente, significa que a primeira derivada da energia específica de deformação em relação à medida de deformação é igual à tensão, ou seja:

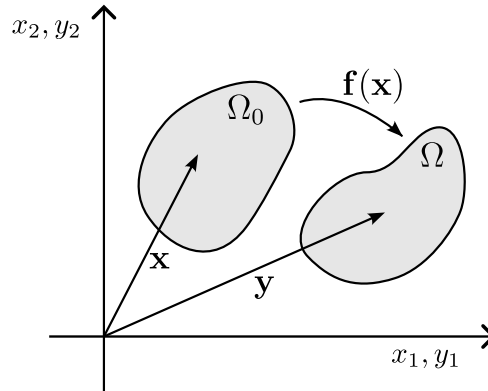
$$\frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} = \sigma = E\varepsilon. \quad (3.52)$$

### 3.2.1 Cinemática dos Corpos Deformáveis

Inicialmente considere um corpo deformável, idealizado como um meio contínuo que, em sua configuração inicial é denotado por  $\Omega_0$  e em sua configuração atual é denotado por  $\Omega$ , conforme ilustrado na Figura 10. Para se mapear os pontos que compõem o corpo em relação a uma origem preestabelecida utiliza-se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  para denotar as coordenadas de  $\Omega_0$  e  $\Omega$ , respectivamente. Já para se mapear  $\mathbf{y}$  em função de  $\mathbf{x}$  existe uma função  $\mathbf{f}$  tal que  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , denominada como função de mudança de configuração.



Figura 10 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Para um ponto  $\mathbf{x}$  na vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ , pode-se dizer que:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.53)$$

em que  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$  é o gradiente de mudança de configuração. Assim, pode-se obter uma expressão que transforme um vetor  $d\mathbf{x}$  na configuração inicial em um vetor  $d\mathbf{y}$  na atual:

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.54)$$

o que permite escrever o quadrado da norma de  $d\mathbf{y}$  como:

$$\|d\mathbf{y}\|^2 = dy^2 = d\mathbf{y}^T \cdot d\mathbf{y} = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

Subtraindo-se  $dx^2 = \|d\mathbf{x}\|^2$  de ambos os lados da igualdade obtém-se:

$$dy^2 - dx^2 = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.55)$$

em que  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem e  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Dessa maneira, pode-se substituir  $\mathbf{C}$  em 3.55 e dividir por  $2dx^2$ , obtendo-se:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}}{dx^2}.$$

Tomando um versor na direção de  $d\mathbf{x}$  ( $\mathbf{u} = d\mathbf{x} / \|d\mathbf{x}\|$ ), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \mathbf{u}^T \cdot \left( \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.56)$$

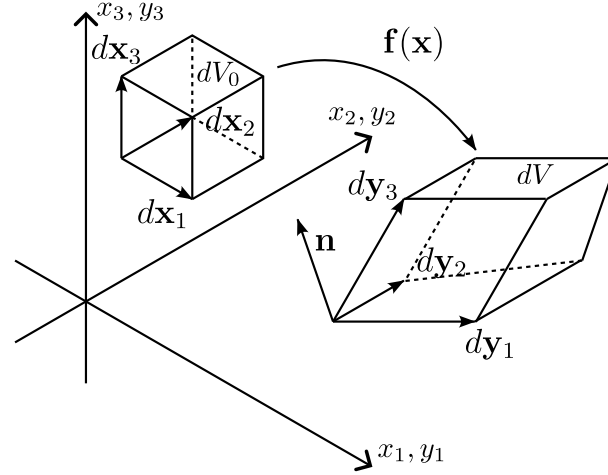
Assim, define-se o tensor de deformações de Green-Lagrange como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (3.57)$$

que se trata de uma medida de deformação objetiva, ou seja, não registra deformações em movimento de corpo rígido.

Outra medida de deformação interessante é a medida de deformação volumétrica ( $\varepsilon_V$ ). Para isso considere o elemento infinitesimal em suas configurações inicial e atual ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Logo o valor de  $\varepsilon_V$  pode ser obtido através da relação entre o volume inicial e atual desse elemento como:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \quad (3.58)$$

O volume do elemento em ambas as configurações pode ser obtido por meio do produto misto dos vetores que formam o mesmo, ou seja:

$$dV_0 = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3), \quad (3.59a)$$

$$dV = d\mathbf{y}_1 \cdot (d\mathbf{y}_2 \times d\mathbf{y}_3), \quad (3.59b)$$

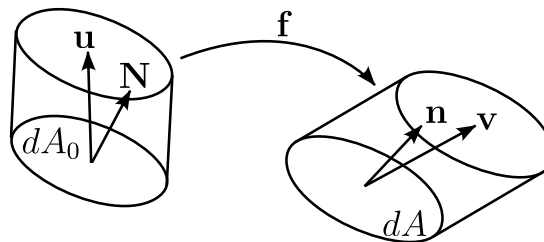
Conhecendo a transformação expressa em 3.54 e fazendo as devidas simplificações pode-se obter que:

$$dV = \det(\mathbf{A})dV_0 = JdV_0, \quad (3.60)$$

em que  $J = \det(\mathbf{A})$  é o Jacobiano da mudança de configuração.

Na sequência procura-se obter uma expressão que indique a mudança de área nas diferentes configurações. Assim, considere um cilindro infinitesimal ilustrado na figura 12.

Figura 12 – Mudança de configuração em um cilindro infinitesimal.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Nesse contexto, a área vetorial pode ser entendida como seu valor absoluto na direção de sua normal ( $d\mathbf{A}_0 = dA_0\mathbf{N}$  e  $d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}$ ). Logo o volume do cilindro é dado pelo produto

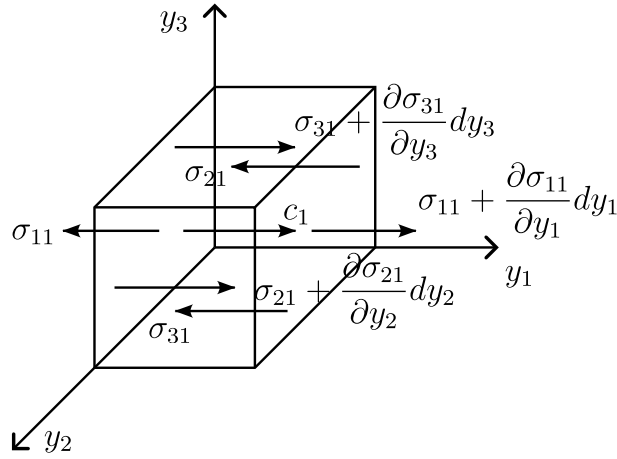
escalar da área vetorial com o vetor que define a altura do cilindro ( $dV_0 = d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}$  e  $dV = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ ). Conhecendo as relações 3.54 e 3.60, pode obter que:

$$\mathbf{n}dA = J\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA_0, \quad (3.61)$$

que é conhecida como a Equação de Nanson.

Com esse embasamento é possível apresentar os conceitos de energia nas descrições Euleriana e Lagrangiana Total. Assim, para se obter a equação do equilíbrio local de um elemento na descrição Euleriana, considere um elemento infinitesimal sujeito à ação de uma força de corpo (ou de volume)  $\mathbf{c}$ , conforme ilustrado no diagrama de corpo livre da Figura 13, que apresenta somente as forças atuantes na direção  $\hat{\mathbf{e}}_1$ .

Figura 13 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção  $\hat{\mathbf{e}}_1$ .



Fonte: Autoria Própria (2023).

Fazendo o equilíbrio das forças nessa direção tem-se:

$$-\sigma_{11}dy_2dy_3 - \sigma_{21}dy_1dy_3 - \sigma_{31}dy_1dy_2 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1\right)dy_2dy_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_2}dy_2\right)dy_1dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_3}dy_3\right)dy_1dy_2 + c_1dV = \rho\ddot{y}_1dV$$

Fazendo as devidas simplificações obtém-se:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1 = \rho\ddot{y}_1,$$

que, expandindo analogamente para as demais direções, pode escrever nas notações simbólica (Equação 3.62a) e indicial (Equação 3.62b) como:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{c} = \rho\ddot{\mathbf{y}}, \quad (3.62a)$$

$$\sigma_{ij,i} + c_j = \rho\ddot{y}_j, \quad (3.62b)$$

as quais representam as equações do equilíbrio local na descrição Euleriana e sendo a vírgula presente no subíndice a representação de derivada na direção  $i$ , ou seja:

$$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i}. \quad (3.63)$$

Integrando a equação 3.62 em  $\Omega$  e aplicando o teorema da divergência obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \sigma^T \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{c} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega, \quad (3.64)$$

onde  $\Gamma = \partial\Omega$  é a fronteira do domínio de análise. Essa equação representa o equilíbrio global na descrição Euleriana.

Já em uma descrição Lagrangiana Total, será necessário transformar os termos dependentes da configuração atual para outros dependentes da configuração inicial. Assim, pode-se reescrever a Equação 3.64 levando em consideração as Equações 3.60 e 3.61:

$$\int_{\Gamma_0} J \sigma^T \cdot \mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} J \mathbf{c} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0. \quad (3.65)$$

Sendo  $\mathbf{c}^0 = J\mathbf{c}$  as forças de corpo na configuração inicial,  $\rho_0 = J\rho$  a densidade inicial e  $\mathbf{P} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \sigma$  o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, tem-se que:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{c}^0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0, \quad (3.66)$$

que representa a equação do equilíbrio global na descrição Lagrangiana Total.

Retornando a integral sob a fronteira  $\Gamma$  para  $\Omega$  por meio do Teorema da Divergência e tomando um elemento infinitesimal de volume, pode-se obter a equação do equilíbrio local na descrição Lagrangiana Total:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{c} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \text{ ou} \quad (3.67a)$$

$$P_{ij,i} + c_j = \rho \ddot{y}_j. \quad (3.67b)$$

### 3.2.2 Método dos Elementos Finitos Posicional Aplicado a Elementos de Casca

Será exposta na presente seção a formulação para elementos de Casca baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional, a qual seguirá uma descrição Lagrangiana Total, adotando o tensor de deformações de Green-Lagrange ( $\mathbb{E}$ ). Para isso, será considerado inicialmente o princípio da conservação da energia, onde as parcelas envolvidas serão aquelas devidas às forças externas ( $\mathbb{P}$ ), de deformação ( $\mathbb{U}$ ), cinética ( $\mathbb{K}$ ) e a dissipação da energia total ( $\mathbb{Q}$ ):

$$\Pi = \mathbb{U} + \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{Q}, \quad (3.68)$$

sendo:

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} S_{ij} \mathbb{E}_{ij} d\Omega_0, \quad (3.69a)$$

$$\mathbb{P} = -F_i^a Y_i^a - \int_{\Gamma_0} t_i y_i d\Gamma_0 \text{ e} \quad (3.69b)$$

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{y}_i \dot{y}_i d\Omega_0, \quad (3.69c)$$

em que  $\Omega_0$  é o domínio de análise em sua configuração inicial, cuja fronteira é  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ ,  $F_i^a$  é uma força concentrada aplicada sobre um ponto  $a$  na direção  $i$ , cuja posição atual é  $Y_i^a$ ,  $t_i$  é uma força distribuída sobre uma superfície média da casca ( $y_i$ ),  $\rho_0$  é a massa específica inicial do contínuo e  $S_{ij}$  é o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, escrito como:

$$S_{ij} = C_{ijkl} \mathbb{E}_{kl}, \quad (3.70)$$

sendo  $C_{ijkl}$  o tensor constitutivo de quarta ordem:

$$C_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.71)$$

no qual  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal, dado em função do módulo de elasticidade longitudinal (ou Módulo de Young)  $E$  como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.72)$$

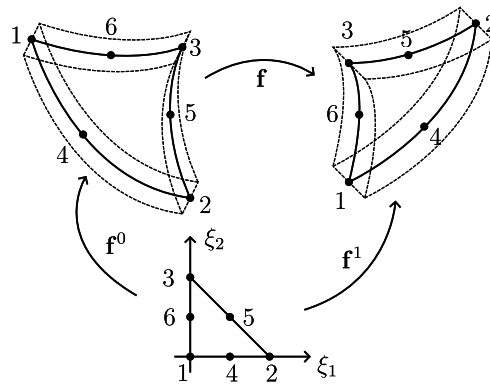
Já a energia dissipada é escrita em sua forma diferencial:

$$\frac{\partial Q}{\partial y_i} = \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 \dot{y}_i d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} q_i d\Gamma_0, \quad (3.73)$$

na qual  $\lambda_m$  é uma constante de amortecimento e  $q_i$  é uma força não-conservativa distribuída na superfície média.

Para se realizar o cálculo dessas propriedades, será considerada uma aproximação dos parâmetros por meio de polinômios aproximadores (funções de forma), na qual será utilizado um espaço intermediário de coordenadas paramétricas ( $\xi$ ) no procedimento. A Figura 14 apresenta esquematicamente o mapeamento das coordenadas da superfície média em seus respectivos espaços.

Figura 14 – Mudança de configuração.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Sendo assim, os parâmetros dependentes do espaço podem ser aproximados como:

$$f_i^{m0} = x_i^m = X_i^a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.74a)$$

$$f_i^{m1} = y_i^m = Y_i^a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.74b)$$

$$f_i^0 = x_i^m + v_i^0, \quad (3.74c)$$

$$f_i^1 = y_i^m + v_i^1, \quad (3.74d)$$

$$v_i^0 = \frac{h_0}{2} N_a(\xi_1, \xi_2) (V^0)_i^a \xi_3, \quad (3.74e)$$

$$v_i^1 = \frac{h_0}{2} N_a(\xi_1, \xi_2) (V^0)_i^a [\xi_3 + \alpha(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2], \quad (3.74f)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2) = A^a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.74g)$$

$$t_i = T_i^a N_a(\xi_1, \xi_2) \text{ e} \quad (3.74h)$$

$$q_i = Q_i^a N_a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.74i)$$

em que  $X_i^a$  representa a posição inicial de um nó  $a$ ,  $f_i^{m0}$  e  $f_i^{m1}$  são as funções de mudança de configuração da superfície média  $\Omega_\xi \rightarrow \Omega_0$  e  $\Omega_\xi \rightarrow \Omega$ , respectivamente, onde  $\Omega_\xi$  é o espaço paramétrico e  $\Omega$  é a configuração atual do contínuo,  $v_i^0$  é o vetor unitário normal à superfície média,  $v_i^1$  é o vetor generalizado na configuração atual,  $h_0$  é a espessura inicial da casca,  $N_a$  é a função de forma,  $T_i^a$  é o valor de  $t_i$  sobre o nó  $a$ ,  $Q_i^a$  é o valor de  $q_i$  sobre o nó  $a$  e  $\alpha$  é uma variável inserida no problema, denominada como taxa de variação da espessura, cujo valor sobre o nó  $a$  é  $A^a$  (SANCHES; CODA, 2013).

Note que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^1((\mathbf{f}^0)^{-1}, t)$ , portanto é possível se obter o gradiente da função de mudança de configuração ( $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ ) como  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}$ , em que os valores de  $\mathbf{A}^1$  são:

$$A_{i1}^1 = f_{i,1}^1 = Y_i^a N_{a,1} + \frac{h_0}{2} \left( (V^1)_i^a N_a A^b N_{b,1} \xi_3^2 + (V^1)_i^a N_{a,1} (\xi_3 + A^b N_b \xi_3^2) \right), \quad (3.75a)$$

$$A_{i2}^1 = f_{i,2}^1 = Y_i^a N_{a,2} + \frac{h_0}{2} \left( (V^1)_i^a N_a A^b N_{b,2} \xi_3^2 + (V^1)_i^a N_{a,2} (\xi_3 + A^b N_b \xi_3^2) \right) \text{ e} \quad (3.75b)$$

$$A_{i3}^1 = f_{i,3}^1 = \frac{h_0}{2} (V^1)_i^a N_a (1 + 2A^b N_b \xi_3) \quad (3.75c)$$

e os valores de  $\mathbf{A}^0$  são:

$$A_{i1}^0 = f_{i,1}^0 = X_i^a N_{a,1} + \frac{h_0}{2} (V^0)_i^a N_{a,1} \xi_3, \quad (3.76a)$$

$$A_{i2}^0 = f_{i,2}^0 = X_i^a N_{a,2} + \frac{h_0}{2} (V^0)_i^a N_{a,2} \xi_3 \text{ e} \quad (3.76b)$$

$$A_{i3}^0 = f_{i,3}^0 = \frac{h_0}{2} (V^0)_i^a N_a. \quad (3.76c)$$

Assim, é possível calcular a derivada da energia total em termos das posições nodais como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial Y_i^a} = & \frac{\partial U}{\partial Y_i^a} + \int_{\Omega_0} \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \ddot{Y}_i^b + \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \dot{Y}_i^b - F_i^a - \\ & \int_{\Gamma_0} N_a N_b d\Gamma_0 T_i^b - \int_{\Gamma_0} N_a N_b d\Gamma_0 Q_i^b = 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

sendo possível definir um valor  $\mathbf{g}$ , denominado como vetor de desbalanceamento mecânico, como:

$$g_i^a(\mathbf{Y}) = (F^{\text{int}})_i^a + (F^{\text{inerc}})_i^a + (F^{\text{amort}})_i^a - (F^{\text{c}})_i^a - (F^{\text{nc}})_i^a = 0, \quad (3.78)$$

sendo  $\mathbf{Y}$  o vetor de posições nodais e:

$$(F^{\text{int}})_i^a = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^a} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} S_{kl} \frac{\partial \mathbb{E}_{kl}}{\partial Y_i^a} d\Omega_0, \quad \text{Forças internas} \quad (3.79a)$$

$$(F^{\text{inerc}})_i^a = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \ddot{Y}_i^b, \quad \text{Forças inerciais} \quad (3.79b)$$

$$(F^{\text{amort}})_i^a = \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \dot{Y}_i^b, \quad \text{Forças de amortecimento} \quad (3.79c)$$

$$(F^{\text{c}})_i^a = F_i^a + \int_{\Gamma_0} N_a N_b d\Gamma_0 T_i^a \mathbf{e} \quad \text{Forças conservativas} \quad (3.79d)$$

$$(F^{\text{nc}})_i^a = \int_{\Gamma_0} N_a N_b d\Gamma_0 Q_i^b. \quad \text{Forças não-conservativas} \quad (3.79e)$$

Portanto o problema ser resolvido é descrito como: determinar  $\mathbf{Y}$  tal que  $\mathbf{g}(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$ .

Como é possível verificar, o cálculo de  $\mathbf{g}$  é dependente não somente das posições nodais, mas também da velocidade e acelerações nodais. Sendo assim, se faz necessária a consideração de um integrador temporal, o qual será utilizado o integrado temporal de Newmark, devido à capacidade de respeitar a conservação de momento linear para  $\gamma = 1/2$  e apresentando bons resultados para modelagem de elementos de casca, conforme apresentado por [Sanches e Coda \(2013\)](#).

A aproximação realizada pelo integrador de Newmark é dada por:

$$Y_i^{n+1} = Y_i^n + \dot{Y}_i^n \Delta t + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{Y}_i^n + \beta \ddot{Y}_i^{n+1} \right) \mathbf{e} \quad (3.80a)$$

$$\dot{Y}_i^{n+1} = \dot{Y}_i^n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{Y}_i^n + \gamma \ddot{Y}_i^{n+1} \Delta t, \quad (3.80b)$$

sendo o superíndice  $n$  e  $n + 1$  a indicação do passo de tempo analisado ( $t_n$  e  $t_{n+1}$ ),  $\Delta t$  o intervalo de tempo discretizado e  $\beta$  e  $\gamma$  parâmetros livres, que devem ser escolhidos de forma a garantir a convergência do método, sendo arbitrados valores de  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$ , garantindo a estabilidade incondicional do método ([LINDFIELD; PENNY, 2019](#)).

Já para procurar valores de  $\mathbf{Y}$  que anulem  $\mathbf{g}$ , utiliza-se o Método de Newton-Raphson, o qual exige o cálculo de uma matriz Hessiana ( $H_{ij}^{ab}$ ):

$$H_{ij}^{ab} = \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial Y_j^b \partial Y_i^a} = \frac{\partial g_i^a}{\partial Y_j^b}. \quad (3.81)$$

Isolando-se os termos incógnitos da aproximação de Newmark, substituindo-os em  $\mathbf{g}$  e realizando as devidas simplificações, obtém-se:

$$H_{ij}^{ab} = (H^{\text{est}})_{ij}^{ab} + \frac{M_{ij}^{ab}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C_{ij}^{ab}}{\beta \Delta t}, \quad (3.82)$$

sendo  $(H^{\text{est}})_{ij}^{ab}$  a matriz hessiana estática elementar,  $M_{ij}^{ab}$  a matriz de massa e  $C_{ij}^{ab}$  a matriz de amortecimento, dadas por:

$$(H^{\text{est}})_{ij}^{ab} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_j^b \partial Y_i^a} = \int_{\Omega_0} \left( \frac{\partial S_{kl}}{\partial Y_j^b} \frac{\partial \mathbb{E}_{kl}}{\partial Y_i^a} + S_{kl} \frac{\partial^2 \mathbb{E}_{kl}}{\partial Y_i^a \partial Y_j^b} \right) d\Omega_0 \quad (3.83a)$$

$$M_{ij}^{ab} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \delta_{ij} \mathbf{e} \quad (3.83b)$$

$$C_{ij}^{ab} = \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 N_a N_b d\Omega_0 \delta_{ij}. \quad (3.83c)$$

Fazendo as derivadas tem-se:

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial Y_i^a} = (A_{lk}^0)^{-1} N_{a,l} \delta_{ij} \quad (3.84a)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}_{kl}}{\partial Y_i^a \partial Y_j^b} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_{ml}}{\partial Y_i^a} \frac{\partial A_{mk}}{\partial Y_j^b} + \frac{\partial A_{mk}}{\partial Y_i^a} \frac{\partial A_{ml}}{\partial Y_j^b} \right) \quad (3.84b)$$

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial Y_j^b} = C_{klmn} \frac{\partial \mathbb{E}_{mn}}{\partial Y_j^b} \quad (3.84c)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}_{kl}}{\partial Y_i^a} = \frac{1}{2} \left( A_{mk} \frac{\partial A_{ml}}{\partial Y_i^a} + A_{ml} \frac{\partial A_{mk}}{\partial Y_i^a} \right). \quad (3.84d)$$

Com isso, encontra-se um vetor de correções nas posições nodais ( $\Delta \mathbf{Y}$ ) como a solução do sistema:

$$H_{ij} \Delta Y_j = -g_i, \quad (3.85)$$

tendo como critérios de parada a medida dos erros:

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\mathbf{F}^{\text{ext}}\|} \leq \text{tol e} \quad (3.86a)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{T}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \text{tol}, \quad (3.86b)$$

em que  $\mathbf{X}$  o vetor de posições nodais iniciais e tol uma tolerância admitida.

### 3.2.2.1 Procedimento Computacional

**DIZER QUE ESTÁ UTILIZANDO A QUADRATURA DE HAMMER.**

O algoritmo ?? apresentado na forma de pseudocódigo exemplifica o código implementado.

### 3.2.2.2 Exemplos de Validação

Apresentar exemplos

## 3.3 Acoplamento Fluido-Estrutura

TEXTO



## 3.4 Modelos de Turbulência

A presente seção apresentará a fundamentação teórica dos modelos de turbulência baseado em grandes vórtices (LES) no item 3.4.2, métodos variacionais multiescala (VMS) no item 3.4.1 e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) no item 3.4.3.

### 3.4.1 Variational Multi-Scale

O Método Variacional Multiescala foi introduzido por Hughes (1995), Hughes et al. (1998), Hughes, Mazzei e Jansen (2000), o qual faz a separação dos espaços de tentativas e de testes em subespaços que representem as escalas grosseiras, que se tratam de subespaços de dimensões finitas e denotadas por uma barra, e as escalas finas, que são subespaços de infinitas dimensões e denotadas por ', ou seja:

$$\mathcal{S}_u = \bar{\mathcal{S}}_u \oplus \mathcal{S}'_u, \quad (3.87a)$$

$$\mathcal{S}_p = \bar{\mathcal{S}}_p \oplus \mathcal{S}'_p, \quad (3.87b)$$

$$\mathcal{V}_u = \bar{\mathcal{V}}_u \oplus \mathcal{V}'_u \text{ e} \quad (3.87c)$$

$$\mathcal{V}_p = \bar{\mathcal{V}}_p \oplus \mathcal{V}'_p. \quad (3.87d)$$

Inicialmente será abordado uma técnica baseada em uma descrição Euleriana com domínio fixo, para maior familiarização com o método, e na sequência será apresentada uma formulação em descrição ALE utilizando domínio móvel.

O sistema a ser resolvido parte do apresentado em 3.13, que em sua forma fraca se encontra em 3.39. Primeiramente realiza-se a separação dos membros em:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (3.88a)$$

$$p = \bar{p} + p', \quad (3.88b)$$

$$w_i = \bar{w}_i + w'_i \text{ e} \quad (3.88c)$$

$$q = \bar{q} + q', \quad (3.88d)$$

em que se adota  $w_i = \bar{w}_i$  e  $q = \bar{q}$  e as escalas finas  $u'_i$  e  $p'$  podem ser modeladas como:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \text{ e} \quad (3.89a)$$

$$p' = -\rho \nu_{\text{LSIC}} r_C(\bar{\mathbf{u}}), \quad (3.89b)$$

nas quais  $\tau_{\text{SUPS}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  são termos estabilizadores, dados por (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZ-DUYAR, 2013):

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left( \frac{4}{\Delta t^2} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}} + C_I \nu^2 \mathbf{G} : \mathbf{G} \right)^{-1/2} \text{ e} \quad (3.90a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = (\text{tr } \mathbf{G} \tau_{\text{SUPS}})^{-1}, \quad (3.90b)$$

onde  $C_I$  é uma constante e:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \xi^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.91)$$

Já os termos  $(r_M)_i$  e  $r_C$  são os resíduos associados à equação de conservação da quantidade de movimento e da continuidade, respectivamente:

$$(r_M)_i = \rho \left( \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i \right) - \sigma_{ji,j} \mathbf{e} \quad (3.92a)$$

$$r_C = \bar{u}_{i,i}. \quad (3.92b)$$

Outra forma de se modelar os parâmetros estabilizadores pode ser dado por (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left( \frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-1/2} \mathbf{e} \quad (3.93a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \tau_{\text{SUPS}} \|\bar{\mathbf{u}}\|^2, \quad (3.93b)$$

tal que:

$$\tau_{\text{SUGN1}} = \left( \sum_{a=1}^{n_{en}} |\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1}, \quad (3.94a)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (3.94b)$$

$$\tau_{\text{SUGN3}} = \frac{h_{\text{RGN}}^2}{4\nu}, \quad (3.94c)$$

$$h_{\text{RGN}} = 2 \left( \sum_{a=1}^{n_{en}} |\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1} \mathbf{e} \quad (3.94d)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \|\bar{\mathbf{u}}\|}{\|\nabla_{\mathbf{y}} \|\bar{\mathbf{u}}\|\|}. \quad (3.94e)$$

Assim, obtém-se o problema do Método Variacional Multiescala Baseado em Resíduos (*Residual-Based Variational Multi-Scale* - RBVMS) que busca determinar  $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{S}}_u$  e  $\bar{p} \in \bar{\mathcal{S}}_p$ , tais que para todo  $\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_u$  e  $\bar{q} \in \bar{\mathcal{V}}_p$  (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{w}_i \rho \left( \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{w}_{i,j} \bar{\sigma}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{w}_i \bar{h}_i d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \bar{u}_{i,i} d\Omega - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \left( \bar{u}_j \bar{w}_{i,j} + \frac{\bar{q}_{,i}}{\rho} \right) u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \bar{w}_{i,i} p' d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \bar{w}_i u'_j \bar{u}_{i,j} d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \bar{w}_{i,j} u'_i u'_j d\Omega^e = 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Para a discretização do problema pode-se realizar a separação da dependência espacial e temporal para os espaços tentativas e testes como:

$$\bar{u}_i(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} U_i^a(t) N_a(\mathbf{y}), \quad (3.96a)$$

$$\bar{p}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} P^a(t) N_a(\mathbf{y}), \quad (3.96b)$$

$$\bar{w}_i(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} W_i^a N_a(\mathbf{y}) \text{ e} \quad (3.96c)$$

$$\bar{q}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} Q^a N_a(\mathbf{y}). \quad (3.96d)$$

Substituindo 3.96c e 3.96d em 3.95, tais que  $W^a$  e  $Q^a$  são valores arbitrários, obtém-se dois vetores ( $\mathbf{N}_M = [(N_M)_i^a]$  e  $\mathbf{N}_C = [(N_C)^a]$ ) que representam resíduos a serem minimizados:

$$\begin{aligned} (N_M)_i^a = & \int_{\Omega} N_a \rho (\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i) d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,j} \bar{\sigma}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} N_a \bar{h}_i d\Gamma_N - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_{a,j} \bar{u}_j u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} N_{a,i} p' d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_a \bar{u}_{i,j} u'_j d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_{a,j} u'_i u'_j d\Omega^e, \end{aligned} \quad (3.97a)$$

$$(N_C)^a = \int_{\Omega} N_a \bar{u}_{i,i} d\Omega - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} N_{a,i} u'_i d\Omega^e \quad (3.97b)$$

Sendo os vetores  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_B]$ ,  $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{\mathbf{u}}_B]$  e  $\mathbf{P} = [p_B]$ , que representam, respectivamente, os graus de liberdade em velocidades, primeira derivada temporal das velocidades e pressões nodais, então o problema a ser resolvido será dado por: encontrar  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  e  $\mathbf{P}$ , tais que:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \text{ e} \quad (3.98a)$$

$$\mathbf{N}_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (3.98b)$$

Uma formulação alternativa à apresentada é apresentada por Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), denominada como SUPG/PSPG, onde se omite os dois últimos termos da equação 3.95 e se utiliza de valores diferentes de  $\tau$  para as equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade, resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{w}_i \rho (\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{w}_{i,j} \bar{\sigma}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{w}_i \bar{h}_i d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \bar{u}_{i,i} d\Omega - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \bar{w}_{i,j} \rho \bar{u}_j u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} q_{,i} u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \bar{w}_{i,i} p' d\Omega^e = 0, \end{aligned} \quad (3.99)$$

na qual, segundo os autores, adota-se  $\tau_{\text{PSPG}} = \tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{SUPS}}$  para uma boa variedade de problemas.

Por sua vez, a formulação baseada em uma descrição ALE parte das equações apresentadas em 3.24, cujo problema semi-discreto pode ser dado por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \rho (\dot{u}_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} - f_j) d\Omega + \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_N} w_i h_i d\Gamma_N + \int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Portanto o problema semi-discreto em formulação RBVMS de escoamentos incompres-

síveis segundo uma descrição ALE será: encontrar  $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{S}}_u$  e  $\bar{p} \in \bar{\mathcal{S}}_p$ , tais que para todo  $\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_u$  e  $\bar{q} \in \bar{\mathcal{V}}_p$  (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{w}_i \rho \left( \dot{\bar{u}}_i + (\bar{u}_j - \hat{u}_j) \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \bar{w}_{i,j} \bar{\sigma}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{w}_i \bar{h}_i d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \bar{u}_{i,i} d\Omega - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left( \rho (\bar{u}_j - \hat{u}_j) \bar{w}_{i,j} + \bar{q}_{,i} \right) u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \bar{w}_{i,i} p' d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \bar{w}_i \bar{u}_{i,j} u'_j d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \bar{w}_{i,j} u'_i u'_j d\Omega^e = 0, \end{aligned} \quad (3.101)$$

em que os termos estabilizadores  $\tau_{\text{SUPS}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  são alterados das equações 3.90, onde se considera, ao invés da velocidade do fluido  $\bar{u}_i$ , a velocidade relativa à malha  $(\bar{u}_i - \hat{u}_i)$ , ou seja,  $\bar{u}_i \leftarrow \bar{u}_i - \hat{u}_i$ .

Para o problema discretizado utiliza-se as seguintes expressões de aproximação dos espaços tentativas e testes:

$$\bar{u}_i(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} U_i^a(t) N_a(\mathbf{y}, t), \quad (3.102a)$$

$$\bar{p}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} P^a(t) N_a(\mathbf{y}, t), \quad (3.102b)$$

$$\bar{w}_i(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} W_i^a N_a(\mathbf{y}, t) \quad (3.102c)$$

$$\bar{q}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} Q^a N_a(\mathbf{y}, t), \quad (3.102d)$$

onde as funções de forma  $N_a(\mathbf{y}, t)$  são definidas como:

$$N_a(\mathbf{y}, t) = \hat{N}_a(\hat{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{y}, t)), \quad (3.103)$$

em que  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t)$  é a função de mudança de configuração de  $\hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ , conforme apresentado no item 3.1.2, dada em sua forma discreta por:

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \sum_{a \in \eta^s} (\hat{\mathbf{x}}_a + \Delta \hat{\mathbf{x}}_a(t)) \hat{N}_a(\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.104)$$

sendo  $\hat{\mathbf{x}}_a$  as posições nodais em  $\hat{\Omega}$ ,  $\Delta \hat{\mathbf{x}}(t)$  o deslocamento nodal e  $\hat{N}_a$  é a função de forma fixa da discretização de  $\hat{\Omega}$ . Nota-se, portanto, que as funções  $N_a(\mathbf{y}, t)$  possuem dependência temporal devido à movimentação da malha.

Com isso, define-se os vetores de resíduos da conservação de quantidade de movimento e da continuidade como:

$$\mathbf{N}_M = [(N_M)_i^a], \quad (3.105a)$$

$$\mathbf{N}_C = [(N_C)^a], \quad (3.105b)$$

$$\begin{aligned} (N_M)_i^a &= \int_{\Omega} N_a \rho \left( \dot{\bar{u}}_i + (\bar{u}_j - \hat{u}_j) \bar{u}_{i,j} - \bar{f}_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,j} \bar{\sigma}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_N} N_a \bar{h}_i d\Gamma_N - \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_{a,j} (\bar{u}_j - \hat{u}_j) u'_i d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} N_{a,i} p' d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_a \bar{u}_{i,j} u'_j d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho N_{a,j} u'_i u'_j d\Omega^e, \end{aligned} \quad (3.105c)$$

$$(N_C)^a = \int_{\Omega} N_a \bar{u}_{i,i} d\Omega - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} N_{a,i} u'_i d\Omega^e \quad (3.105d)$$

Assim, pretende-se determinar os vetores  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  e  $\mathbf{P}$ , tais que:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \text{ e} \quad (3.106a)$$

$$\mathbf{N}_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (3.106b)$$

### 3.4.1.1 Integração temporal

Como pôde-se verificar, em ambas as descrições, Euleriana e ALE, chega-se a um problema discreto no espaço, porém contínuo no tempo (Equações 3.97 e 3.105). Dessa forma torna-se necessária a devida discretização temporal dos parâmetros, que pode ocorrer de diferentes formas, como apontado por Reddy e Gartling (2010), tem-se, por exemplo, o surgimento de integradores explícitos, como o integrador baseado em diferenças adiantadas, implícitos, como em diferenças finitas atrasadas, e o denominado semi-implícito (ou da regra de trapézios). Segundo o autor os integradores implícitos possuem vantagens sobre os explícitos, uma vez que: se observa a implicidade natural da pressão em escoamentos incompressíveis; deve-se ter um cuidado extra para garantir a estabilidade do integrador; apresentar problemas para a diagonalização de matrizes de massa; e perda de precisão na diagonalização.

O integrador temporal utilizado no presente trabalho é o denominado integrador  $\alpha$ -generalizado, desenvolvido por Chung e Hulbert (1993), que possui a capacidade de representar adequadamente problema de escoamentos incompressíveis, além de permitir a introdução de difusão numérica ao processo (FERNANDES, 2020).

Esse integrador parte da consideração de valores intermediários de aceleração e velocidade em um intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  no  $n$ -ésimo passo de tempo, representados respectivamente por  $\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}^{n+\alpha_f}$ :

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}^n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}^n) \text{ e} \quad (3.107a)$$

$$\mathbf{U}^{n+\alpha_f} = \mathbf{U}^n + \alpha_f (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n). \quad (3.107b)$$

Já para se relacionar a velocidade à aceleração, pode-se proceder com a aproximação de Newmark (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t_n \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}^n + \gamma \dot{\mathbf{U}}^{n+1} \right), \quad (3.108)$$

sendo  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$  e  $\gamma$  valores escolhidos arbitrariamente observando as necessidades de estabilidade e precisão do método.

De acordo com Chung e Hulbert (1993), Jansen, Whiting e Hulbert (2000), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), a precisão de segunda ordem dessa aproximação pode ser atingida uma vez que:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f, \quad (3.109)$$

enquanto a estabilidade incondicional pode ser obtida caso:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2}. \quad (3.110)$$

Ainda é possível escrever, a partir da Equação 3.111,  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  em termos de um parâmetro arbitrário único ( $0 \leq \rho_\infty \leq 1$ ), que representa o raio espectral de amplificação da matriz para  $\Delta t \rightarrow \infty$ , o qual é utilizado para controlar as dissipações de alta-frequência.

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \text{ e} \quad (3.111a)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (3.111b)$$

Para o caso de  $\rho_\infty = 1$  não ocorre a introdução de difusão numérica, enquanto para  $\rho_\infty = 0$  se tem a máxima dissipação de altas frequências (FERNANDES, 2020).

Sendo assim, os resíduos obtidos anteriormente podem ser escritos em termos dos valores intermediários como:

$$\mathbf{N}_M(\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}, \mathbf{U}^{n+\alpha_f}, \mathbf{P}^{n+1}) = 0 \quad (3.112a)$$

$$\mathbf{N}_C(\dot{\mathbf{U}}^{n+\alpha_m}, \mathbf{U}^{n+\alpha_f}, \mathbf{P}^{n+1}) = 0 \quad (3.112b)$$

### 3.4.1.2 Procedimento iterativo

O procedimento para minimizar os vetores resíduo obtido parte do método de Newton-Raphson, no qual os parâmetros a serem corrigidos são os vetores de acelerações nodais ( $\dot{\mathbf{U}}$ ) e de pressões nodais ( $\mathbf{P}$ ). Dessa forma, o problema a ser resolvido para a correção desses parâmetros é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(N_M)_i^a}{\partial \dot{U}_j^{b,n+1}} & \frac{\partial(N_M)_i^a}{\partial P^{b,n+1}} \\ \frac{\partial(N_C)_i^a}{\partial \dot{U}_j^{b,n+1}} & \frac{\partial(N_C)_i^a}{\partial P^{b,n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{U}_j^{b,n+1} \\ \Delta P^{b,n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (N_M)_i^a \\ (N_C)_i^a \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

em que, para uma descrição ALE:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N_M)_i^a}{\partial \dot{U}_j^{b,n+1}} = & \alpha_m \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho N_a N_b d\Omega \delta_{ij} + \alpha_m \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_{a,k} N_b (\bar{u}_k - \hat{u}_k) d\Omega \delta_{ij} + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho N_a N_{b,k} (\bar{u}_k - \hat{u}_k) d\Omega \delta_{ij} + \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \mu N_{a,k} N_{b,k} d\Omega \delta_{ij} + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \mu N_{a,j} N_{b,i} d\Omega + \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \nu_{\text{LSIC}} N_{a,i} N_{b,j} d\Omega + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_{a,k} N_{b,m} (\bar{u}_k - \hat{u}_k) (\bar{u}_m - \hat{u}_m) d\Omega \delta_{ij} + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho N_a N_b \bar{u}_{i,j} d\Omega + \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_{a,k} N_b (\bar{u}_k - \hat{u}_k) \bar{u}_{i,j} d\Omega - \\
& \alpha_m \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_a N_b \bar{u}_{i,j} d\Omega - \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_a N_{b,m} (\bar{u}_m - \hat{u}_m) \bar{u}_{i,j} d\Omega - \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \rho \tau_{\text{SUPS}} N_a N_b \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{k,j} d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.114a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N_M)_i^a}{\partial P^{b,n+1}} = & - \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} N_{a,i} N_b d\Omega + \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \tau_{\text{SUPS}} N_{a,j} N_{b,i} (\bar{u}_j - \hat{u}_j) d\Omega - \\
& \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \tau_{\text{SUPS}} N_a N_{b,j} \bar{u}_{i,j} d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.114b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N_C)_i^a}{\partial \dot{U}_j^{b,n+1}} = & \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} N_a N_{b,j} d\Omega + \alpha_m \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \tau_{\text{SUPS}} N_{a,j} N_b d\Omega + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \tau_{\text{SUPS}} N_{a,j} N_{b,m} (\bar{u}_m - \hat{u}_m) d\Omega + \\
& \beta_f \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \tau_{\text{SUPS}} N_{a,i} N_b \bar{u}_{i,j} d\Omega \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{3.114c}$$

$$\frac{\partial(N_C)_i^a}{\partial P^{b,n+1}} = \int_{\Omega^{n+\alpha_f}} \frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} N_{a,i} N_{b,i} d\Omega, \tag{3.114d}$$

em que  $\beta_f = \alpha_f \gamma \Delta t \mathbf{e}$ :

$$\Omega^{n+\alpha_f} = \left\{ \bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^{n+\alpha_f}) = \alpha_f \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^{n+1}) + (1 - \alpha_f) \bar{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, t^n) \right\}. \tag{3.115}$$

Para uma descrição Euleriana, considera-se a velocidade da malha como nula na formulação apresentada.

### 3.4.2 Large Eddy Simulation

A simulação de grandes vórtices se baseia na observação de que vórtices formados em pequenas escalas possuem comportamento isotrópico, o que permite uma modelagem dessas escalas, enquanto as grandes escalas podem ser computadas diretamente. Assim, realiza-se uma separação de escalas por meio de um filtro, que irá reescrever as equações de Navier-Stokes em termos de parcelas filtradas (ou de grandes escalas), denotadas para uma propriedade qualquer como  $\bar{\phi}$ , e uma parcela não filtrada (ou de escalas finas ou flutuações), denotada como  $\phi'$  (GERMANO et al., 1991; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000). Para isso, considera-se uma filtragem dada por:

$$\bar{\phi} = \int_{D_\Delta(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\Delta) \phi(\mathbf{y}_\Delta, t) d\mathbf{y}_\Delta, \tag{3.116}$$

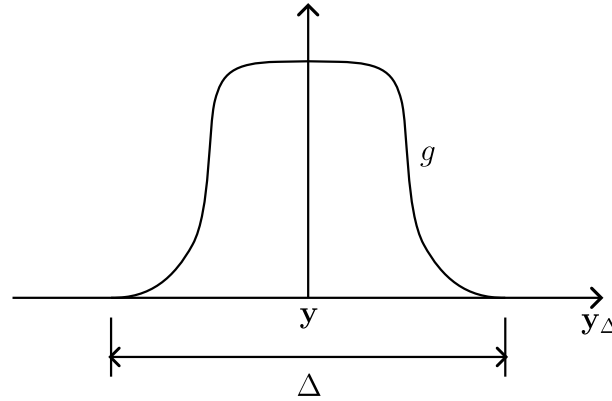
em que  $D_\Delta(\mathbf{y})$  é um subconjunto de  $\Omega$  que determina a abrangência do filtro,  $\mathbf{y}_\Delta$  é um ponto na vizinhança de  $\mathbf{y}$  e  $g$  é o filtro, que deve possuir a propriedade de homogeneidade,  $g(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\Delta) = g(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\Delta)$ .

Hughes, Mazzei e Jansen (2000) apresentam ainda uma possibilidade de abrangência de filtro dada por:

$$D_\Delta(\mathbf{y}) = \{\mathbf{y}_\Delta \in \mathbb{R}^{n_{sd}} | \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}_\Delta) < \Delta/2\}, \quad (3.117)$$

na qual  $\Delta/2$  é o raio de abrangência do filtro centrado em  $\mathbf{y}$  e  $\rho$  é a distância Euclidiana de  $\mathbf{y}_\Delta$  à  $\mathbf{y}$ . A Figura 15 apresenta esquematicamente o filtro considerado, assim como seu domínio de abrangência.

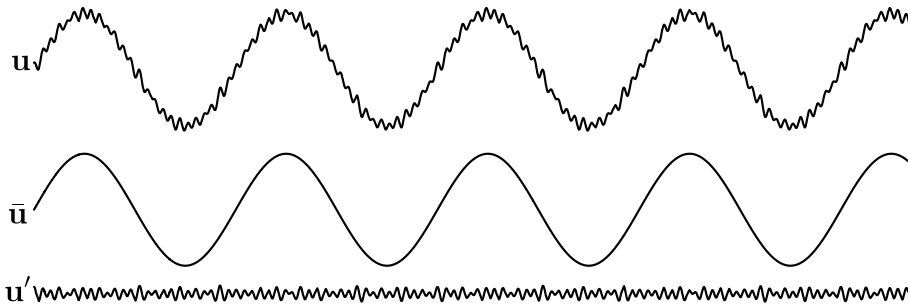
Figura 15 – Desenho esquemático do filtro considerado.



Fonte: Hughes, Mazzei e Jansen (2000) - Adaptado.

Dessa maneira, é possível separar os efeitos das grandes escalas e das pequenas escalas, o que pode ser observado esquematicamente na Figura 16, a qual apresenta o efeito da filtragem sobre um campo de velocidades  $\mathbf{u}$ .

Figura 16 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidades  $\mathbf{u}$ .



Fonte: Hughes, Mazzei e Jansen (2000) - Adaptado.

### Depois pesquisar sobre o problema do domínio $\Omega/\Omega_\Delta$

Assim, em uma descrição Euleriana, pode-se obter as equações de Navier-Stokes filtradas:

$$\begin{cases} \rho \left( \dot{\bar{u}}_i + (\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,j} - \bar{f}_i \right) - \bar{\sigma}_{ji,j} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{i,i} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.118)$$



As condições de contorno são as mesmas, considerando c.c. filtradas?

Pode-se perceber que o termo convectivo impede a completa separação dos termos  $\bar{u}$  e  $u'$  devido à sua natureza altamente não-linear. Por conta disso a parcela não filtrada não pode ser ignorada nesse problema, sendo necessário realizar algumas manipulações algébricas. Logo, sabendo-se que  $u = \bar{u} + u'$ , pode-se reescrever a equação da conservação de movimento como:

$$\rho \left( \dot{\bar{u}}_i + (\overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)})_{,j} - \bar{f}_i \right) - \bar{\sigma}_{ji,j} = 0 \quad (3.119)$$

Nesse sentido, surgirão termos cruzados entre  $\bar{u}$  e  $u'$ , o que serão condensados em um tensor de subescala (*Subgrid-Scale* - SGS)  $T$  dado por (PIOMELLI, 1999; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000):

$$T_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j} = - (L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}), \quad (3.120)$$

no qual  $L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  é o tensor de Leonard, que representa as interações entre as grandes escalas, podendo ser determinado explicitamente utilizado para análise de erros,  $C_{ij} = \overline{u_i u'_j} + \overline{u'_i u_j}$  é o tensor de termos cruzados, representando a interação entre as grandes e pequenas escalas e  $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  é o tensor de tensões SGS de Reynolds, que rerepresenta a interação entre as pequenas escalas (PIOMELLI, 1999). Assim pode-se escrever que:

$$\rho \left( \dot{\bar{u}}_j + (\overline{u_i u_j})_{,i} - T_{ij,i} - \bar{f}_j \right) - \sigma_{ij,i} = 0. \quad (3.121)$$

Aplicando a incompressibilidade e substituindo-se  $\sigma_{ij}$  pelo modelo constitutivo 3.30, tem-se que:

$$\rho \left( \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} - T_{ji,i} - \bar{f}_i \right) - \mu (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})_{,j} + p_{,i} = 0, \quad (3.122)$$

Assim, dividindo-se a Equação 3.122 por  $\rho$  e fazendo algumas manipulações tem-se que:

$$\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \frac{p_{,i}}{\rho} = \nu \bar{u}_{i,jj} + T_{ji,i} + \bar{f}_i, \quad (3.123)$$

em que  $\nu$  é a viscosidade cinemática, dada por  $\nu = \mu/\rho$ .

Portanto, o problema se ser resolvido será:

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \frac{p_{,i}}{\rho} = \nu \bar{u}_{i,jj} + T_{ji,i} + \bar{f}_i & \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{i,i} = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.124)$$

o que revela a necessidade de se determinar um tensor  $T$ , em especial o seu tensor desviador:

$$\text{dev } T_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}, \quad (3.125)$$

que descreva adequadamente as interações entre diferentes escalas. Isso pode se tornar problemático uma vez que não se possui solução para as pequenas escalas. Dessa forma, considera-se um modelo capaz de fazer essa descrição, sendo observado, por exemplo, o modelo de viscosidade de vórtice de Smagorinsky, desenvolvido por Smagorinsky (1963). Nesse cenário faz-se que:

$$(T_S)_{ij} = 2\nu_T \dot{\bar{e}}_{ij}, \quad (3.126)$$

sendo  $\nu_T$  a viscosidade de vórtice SGS, dada por (GERMANO et al., 1991; PIOMELLI, 1999; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000):

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \|\dot{\bar{\varepsilon}}\|, \quad (3.127)$$

em que  $C_S$  é a constante de Smagorinsky e  $\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|$  é a magnitude do tensor de taxa de deformação em grandes escalas, dada por:

$$\|\dot{\bar{\varepsilon}}\| = (2\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij})^{1/2}. \quad (3.128)$$

Note que o tensor  $\mathbf{T}_S$  é um tensor desviador, ou seja,  $\mathbf{T}_S = \text{dev } \mathbf{T}_S$ .

**REVER:**

Germano et al. (1991), Hughes, Mazzei e Jansen (2000) ainda fazem algumas constatações sobre o modelo de Smagorinsky, os quais destacam-se o fato de  $\mathbf{T}_S$  não possuir um comportamento assintótico próximo às paredes, o que se esperaria de  $\mathbf{T}$ , os valores de  $C_S$  na presença de cisalhamento médio causaram amortecimentos excessivos e o tensor  $\mathbf{T}_S$  impede a energia de fluir entre diferentes escalas, podendo ser significativo em alguns casos.

Como tentativa de se resolver esses problemas, Germano et al. (1991) propuseram assumir  $C_S$  como uma função  $C_S = C_S(\mathbf{y}, t)$ , permitindo, assim, que esse parâmetro se adapte para melhor modelar as pequenas escalas.

Com isso, e considerando que a dissipação de energia cinética é igual àquela produzida, pode-se obter a amplitude espectral da energia cinética ( $E(k)$ ) como (HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000):

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.129)$$

em que  $\alpha$  é a constante de Kolmogoroff,  $\varepsilon$  é a dissipação turbulenta.

descrever melhor o que é  $k$ , segundo Hughes, Mazzei e Jansen (2000):  $E(k)$  é a amplitude espectral da energia cinética, definida como a integral sobre a superfície de esferas parametrizadas com raio  $k$  (?)

Assim pode-se determinar o valor de  $\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|$  como:

$$\frac{1}{2} \|\dot{\bar{\varepsilon}}\| = \int_0^{\bar{k}} k^2 E(k) dk, \quad (3.130)$$

no qual  $\bar{k}$  é o limite de resolução.

Substituindo 3.129 em 3.130, resolvendo a integral e fazendo algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|^3 = \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^{3/2} \bar{k}^2 \varepsilon. \quad (3.131)$$

Dessa forma, realiza-se o balanço da energia cinética turbulenta dissipada com a produzida, obtendo-se:

$$\varepsilon = \mathbf{T}_S \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.132)$$

que, após seu desenvolvimento, tem-se uma expressão que relaciona os valores de  $C_S$ ,  $\Delta$  e  $\nu_T$  com  $\bar{k}$ :

$$C_S \Delta = \left( \frac{2}{3\alpha} \right)^{3/4} \bar{k}^{-1} \mathbf{e} \quad (3.133)$$

$$\nu_T = \left( \frac{2}{3\alpha} \right) \varepsilon^{1/3} \bar{k}^{-4/3}. \quad (3.134)$$

### 3.4.3 Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Na tentativa de se obter soluções aproximativas para as equações de Navier-Stokes, são desenvolvidas técnicas de aproximação, baseadas em equações diferenciais. Uma dessas aproximações, denominada de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) busca encontrar uma solução a partir da decomposição de Reynolds. Nesse contexto, observa-se que simulações feitas utilizando RANS são mais eficientes computacionalmente que aquelas feitas a partir de LES, além de possuírem uma implementação mais facilitada (ALFONSI, 2009; LING; TEMPLETON, 2015). Ainda segundo Alfonsi (2009), problemas envolvendo RANS podem ser classificados dependendo da quantidade de equações diferenciais resolvidas, em que cada equação adicionada refere-se ao transporte de uma propriedade relativa à turbulência.

Em uma descrição Euleriana, sua obtenção parte da equação 3.13 e considera-se que uma propriedade  $\phi$  pode ser decomposta em duas parcelas: uma referente à média temporal, denotada por uma barra ( $\bar{\phi}(\mathbf{y})$ ), dada por (TENNEKES et al., 1972; SPEZIALE, 1991):

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(\mathbf{y}, t) dt, \quad (3.135)$$

e uma referente às flutuações no espaço-tempo, denotada por  $\phi'(\mathbf{y}, t)$ , ou seja,  $\phi(\mathbf{y}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{y}) + \phi'(\mathbf{y}, t)$ .

Vale ressaltar algumas propriedades interessantes relacionadas à média de uma propriedade ( $\phi$ ,  $\phi_1$  ou  $\phi_2$  quaisquer), tais como:

- a.  $\bar{\phi}'(\mathbf{y}) = 0$ ;
- b.  $\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi}$ ;
- c.  $\overline{\phi_1 + \phi_2} = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2$ ;
- d.  $\overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2$ ;
- e.  $\overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \overline{\phi'_1 \phi'_2}$ ; e
- f.  $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y_i} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial y_i}}$ .

Assim, pode-se tomar a média das Equações de Navier-Stokes, obtendo-se:

$$\begin{cases} \rho \left( \bar{u}_i + \overline{(u_j u_i)_{,j}} - \bar{f}_i \right) - \overline{\sigma_{ji,j}} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u}_{i,i} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.136)$$

Note que, ao tomar a média temporal, o problema se torna independente do tempo. Portanto o termo referente à derivada temporal de  $\mathbf{u}$  desaparece. Assim, aplicando também o modelo constitutivo apresentado em 3.1.3, o problema se torna:

$$\begin{cases} \rho \left( (\overline{u_j u_i})_{,j} - \overline{f_i} \right) - \mu (\overline{u_{i,j} + u_{j,i}})_{,j} + \overline{p}_{,i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \overline{u_{i,i}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.137)$$

Realizando a separação dos parâmetros em suas respectivas parcelas na equação da conservação de movimento, tem-se que:

$$\rho \left( (\overline{u_j} + \overline{u'_j})(\overline{u_i} + \overline{u'_i})_{,j} - \overline{f_i} \right) - \mu (\overline{u_{i,j}} + \overline{u'_{i,j}} + \overline{u_{j,i}} + \overline{u'_{j,i}})_{,j} + \overline{p}_{,i} = 0, \quad (3.138)$$

que leva à seguinte expressão simplificada:

$$\rho \left( \overline{u_j} \overline{u_{i,j}} + (\overline{u'_i u'_j})_{,j} - \overline{f_i} \right) - \mu \overline{u_{i,jj}} + \overline{p}_{,i} = 0, \quad (3.139)$$

a qual representa a equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em regime estacionário em uma formulação RANS (CHOU, 1945; ALFONSI, 2009).

Além disso, é possível fazer a substituição de  $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$  e  $p = \overline{p} + p'$  na equação da quantidade de movimento, o que leva a:

$$\rho \left( \dot{u}'_i + \overline{u_j} \overline{u_{i,j}} + \overline{u_j} u'_{i,j} + u'_j \overline{u_{i,j}} + u'_j u'_{i,j} - \overline{f_i} \right) - \mu \overline{u_{i,jj}} - \mu u'_{i,jj} + \overline{p}_{,i} + p'_{,i} = 0. \quad (3.140)$$

Subtraindo 3.139 de 3.140 obtém-se:

$$\rho \left( \dot{u}'_i + \overline{u_j} u'_{i,j} + u'_j \overline{u_{i,j}} + u'_j u'_{i,j} - (\overline{u'_i u'_j})_{,j} \right) - \mu u'_{i,jj} + p'_{,i} = 0. \quad (3.141)$$

e de forma similar tem-se:

$$u'_{i,i} = 0. \quad (3.142)$$

Nesse contexto vale mencionar o tensor de tensões de Reynolds (dividido pela densidade), dado por  $\tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ , que traz a interferência que os efeitos turbulentos da parcela de flutuação causa no movimento médio (CHOU, 1945; ALFONSI, 2009). Porém, verifica-se que, ao assumir essa separação de variáveis, o problema conta com mais incógnitas que equações para determiná-las. Logo, uma forma de se obter equações adicionais que auxiliem na resolução do problema se encontra na modelagem do tensor de tensões de Reynolds de forma a relacionar as flutuações de velocidades com as velocidades médias.

Segundo Alfonsi (2009) o tensor de Reynolds pode ser subdividido em uma parte isotrópica ( $\tau_{ij}^I$ ) e outra desviadora ( $\tau_{ij}^D$ ):

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^I + \tau_{ij}^D, \quad (3.143)$$

em que:

$$\tau_{ij}^I = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} \text{ e} \quad (3.144a)$$

$$\tau_{ij}^D = 2\nu_T \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (3.144b)$$

sendo  $K$  a energia cinética média gerada pelo campo de flutuações de velocidade:

$$K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad (3.145)$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$  é a taxa de deformação do campo de velocidades média:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}}{2} \quad (3.146)$$

e  $\nu_T$  é a viscosidade de vórtice.



## Capítulo 4

# Metodologia e cronograma

O trabalho será conduzido inicialmente pelo estudo e formulação matemática dos diferentes métodos de modelagem de escoamentos turbulentos e de dinâmica das estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional, seguida pela discretização desses modelos e implementação computacional para obtenção de soluções numéricas. Esses resultados serão validados através da comparação com resultados consagrados na literatura, assim como aplicação em problemas relevantes na engenharia.

A linguagem de programação que será utilizada é a C++ orientada a objeto, em um sistema operacional Linux, uma vez que se é possível aproveitar diversas funções já desenvolvidas pelo grupo de pesquisa. Serão utilizadas as bibliotecas *Boost* e PETSc, que permite a utilização de processamento em paralelo MPI. As malhas serão geradas a partir do *software* Gmsh (GEUZAIN; REMACLE, 2009), e os resultados serão apresentados graficamente pela exportação para o *software* Paraview (AHRENS; GEVECI; LAW, 2005).

O cronograma apresentado na Tabela 1 é planejado tomando-se um período de Novembro de 2022 à Fevereiro de 2024, o qual considera as seguintes etapas para devida execução da pesquisa:

- a. Integralização dos créditos necessários das disciplinas do Mestrado;
- b. Revisão bibliográfica, a qual será realizada ao longo de todo o trabalho, para que o mesmo se mantenha atualizado durante toda sua execução;
- c. Formulação matemática das técnicas de análise de escoamentos turbulentos e de Interação Fluido-Estrutura;
- d. Redação do texto e qualificação de Mestrado;
- e. Implementação computacional das técnicas formuladas;

- Tabela 1 – Cronograma de atividades

Item	2022		2023												2024				
	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev			
a.																			
b.																			
c.																			
d.																			
e.																			
f.																			
g.																			
h.																			



# Referências

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. Paraview: An end-user tool for large data visualization. **The visualization handbook**, v. 717, n. 8, 2005.

ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 62, n. 4, 2009.

ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.

BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 9, p. 3402–3414, 2010.

BAZILEVS, Y. et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 197, n. 1-4, p. 173–201, 2007.

\_\_\_\_\_. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part i: Geometry modeling and aerodynamics. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 65, n. 1-3, p. 207–235, 2011.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational fluid-structure interaction: methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CHOU, P. Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. **Quarterly of applied mathematics**, v. 3, n. 1, p. 38–54, 1945.

CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. 1993.

CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional fem. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 3, p. 187–212, 2009.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, Springer, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

\_\_\_\_\_. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical problems in engineering**, Hindawi, v. 2009, 2009.

\_\_\_\_\_. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite element methods for flow problems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid-shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, American Institute of Physics, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

HUGHES, T. J. Multiscale phenomena: Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. et al. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 166, n. 1-2, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

- HUGHES, T. J.; MAZZEI, L.; JANSEN, K. E. Large eddy simulation and the variational multiscale method. **Computing and visualization in science**, Springer, v. 3, n. 1, p. 47–59, 2000.
- HUGHES, T. J.; OBERAI, A. A. The variational multiscale formulation of les with application to turbulent channel flows. In: **Geometry, mechanics, and dynamics**. [S.l.]: Springer, 2002. p. 223–239.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 191, n. 45, p. 5159–5176, 2002.
- IRGENS, F. **Continuum mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered navier–stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 305–319, 2000.
- KARAGIOZIS, K. et al. A computational study of supersonic disk-gap-band parachutes using large-eddy simulation coupled to a structural membrane. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 175–192, 2011.
- LAI, W. M. et al. **Introduction to continuum mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2009.
- LINDFIELD, G.; PENNY, J. Chapter 5 - solution of differential equations. In: LINDFIELD, G.; PENNY, J. (Ed.). **Numerical Methods (Fourth Edition)**. Fourth edition. Academic Press, 2019. p. 239–299. ISBN 978-0-12-812256-3. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128122563000142>.
- LING, J.; TEMPLETON, J. Evaluation of machine learning algorithms for prediction of regions of high reynolds averaged navier stokes uncertainty. **Physics of Fluids**, AIP Publishing LLC, v. 27, n. 8, p. 085103, 2015.
- MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. [S.l.: s.n.], 1969.
- MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; MASE, G. E. **Continuum mechanics for engineers**. [S.l.]: CRC press, 2009.
- PIMENTA, P.; CAMPELLO, E.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.
- PIMENTA, P. d. M.; CAMPELLO, E. d. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: Rods. **Computational Mechanics**, Springer, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. **Progress in aerospace sciences**, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999.
- POPIOLEK, T. L. Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas. 2005.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. [S.l.]: CRC press, 2010.

SAMPAIO, P. D. et al. Petrov-galerkin solutions of the incompressible navier-stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 106, n. 1-2, p. 143–178, 1993.

SANCHES, R. A.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.

ŠEKUTKOVSKI, B. et al. A partitioned solution approach for the fluid–structure interaction of thin-walled structures and high-reynolds number flows using rans and hybrid rans–les turbulence models. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 113, p. 106629, 2021.

SHAUGHNESSY, E. J.; KATZ, I. M.; SCHAFFER, J. P. **Introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: Oxford University Press New York, 2005. v. 8.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. **Monthly weather review**, American Meteorological Society, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963.

SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 107–157, 1991.

TENNEKES, H. et al. **A first course in turbulence**. [S.l.]: MIT press, 1972.

TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 28, p. 1–44, 1991.