

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Matheus Haubert Yokomizo

**Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos
aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura**

São Carlos

2023

Matheus Haubert Yokomizo

**Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos
aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura**

Texto apresentado ao programa de pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, para exame de qualificação ao Mestrado.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanchez

São Carlos

2023

Resumo

YOKOMIZO, M. H. **Estudo comparativo entre modelos de escoamentos turbulentos aplicados à problemas de Interação Fluidos-Estrutura.** 2023. 66p. Projeto de pesquisa de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O estudo de Interação Fluido-Estrutura está tendo um grau de importância cada vez maior, uma vez que as estruturas estão se tornando cada vez mais leves e esbeltas, devido aos constantes avanços nas diversas áreas da engenharia. Dentre essas interações, enfatiza-se aquelas em que o fluido se encontra em escoamento turbulento, o que ocorre, por exemplo, em edifícios sujeitos à ação de ventos. Sendo assim, se torna necessário o desenvolvimento de técnicas cada vez mais eficientes na determinação do comportamento tanto da estrutura, quanto do escoamento dos fluidos que interagem com a mesma. Nesse sentido, observa-se a existência de uma grande variedade técnicas para determinação do comportamento de estruturas flexíveis, sendo as mais notáveis aquelas baseadas no Método dos Elementos Finitos. Dentre esses métodos, um que está ganhando destaque é aquele que considera posições nodais como parâmetros de análise, denominado de Método dos Elementos Finitos Posicional. Da mesma forma, observa-se que análise de escoamentos também pode ser realizada de diversas maneiras, tais como: construção de amostras em escalas para ensaios práticos; e a modelagem de problemas via métodos matemáticos. Nesse contexto, verifica-se que a construção de amostras reais em escala é muito dispendiosa no ponto de vista de ser necessária uma grande infraestrutura para obtenção de dados válidos, assim como, em alguns casos, os dados obtidos serem dependentes da escala da amostra, não apontando resultados reais, por consequência. Sendo assim, os modelos matemáticos se tornam a melhor solução para se analisar esses problemas. Porém, a depender do grau de complexidade do problema e/ou do modelo empregado, essa análise leva a um custo computacional muito elevado, inviabilizando sua resolução. Dessa forma, o presente trabalho busca realizar um estudo comparativo entre algumas das técnicas mais comuns de análise de Interação Fluido-Estrutura, considerando escoamentos turbulentos em estruturas flexíveis, empregando o Método dos Elementos Finitos Posicional para essa avaliação.

Palavras-chave: Interação Fluido-Estrutura. Escoamento Turbulento. Método dos Elementos Finitos Posicional. *Large Eddy Simulation*. *Variational Multiscale Methods*. *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*.

Abstract

YOKOMIZO, M. H. **Comparative study between turbulent flow models applied to Fluid-Structure Interaction problems.** 2023. 66f. Projeto de pesquisa de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The study of Fluid-Structure Interaction is having an increasing degree of importance, since the structures are becoming increasingly lighter and slender, due to the constant advances in the different areas of engineering. Among these interactions, emphasizes those in which the fluid is in turbulent flow, which occurs, for example, in buildings subject to the winds actions. Therefore, it is necessary to develop increasingly efficient techniques to determine the behavior of both the structure and the flow of fluids that interact with it. In this sense, there is a great variety of techniques for determining the behavior of flexible structures, the most notable being those based on the Finite Element Method. Among these methods, one that is gaining prominence is the one that considers nodal positions as parameters of analysis, called Positional Finite Element Method. Likewise, it is observed that flow analysis can also be performed in different ways, such as: construction of scaled samples for practical tests; and problem modeling via mathematical methods. In this context, it appears that the construction of real samples in scale is very expensive in view of the need for a large infrastructure to obtain valid data, as well as, in some cases, the data obtained are dependent on the scale of the sample, not pointing to real results, therefore. Thus, mathematical models become the best solution to analyze these problems. However, depending on the degree of complexity of the problem and/or the model used, this analysis leads to a very high computational cost, making its resolution unfeasible. Thus, the present work seeks to carry out a comparative study between some of the most common techniques of Fluid-Structure Interaction analysis, considering turbulent flows in flexible structures, using the Positional Finite Element Method for this evaluation.

Keywords: Fluid-Structure Interaction. Turbulent Flow. Positional Finite Element Method. Large Eddy Simulation. Variational Multiscale Methods. Reynolds-Averaged Navier-Stokes.

Lista de figuras

Figura 1 – Esquema de escoamentos.	25
Figura 2 – Interpretação gráfica das diferenças finitas:	29
Figura 3 – Esquema de uma propriedade $\phi_{n+\alpha}$	29
Figura 4 – Mudança de espaço paramétrico para um plano x_1x_2	32
Figura 5 – Desenho esquemático de uma barra submetida a tração.	35
Figura 6 – Esquema de diagrama de tensão \times deformação.	36
Figura 7 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável.	37
Figura 8 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal.	38
Figura 9 – Mudança de configuração em um cilindro infinitesimal.	39
Figura 10 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção \hat{e}_1	39
Figura 11 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável.	41
Figura 12 – Taxa de fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável.	43
Figura 13 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção \hat{e}_1	44
Figura 14 – Domínio de análise e fronteiras consideradas para problemas de mecânica dos fluidos.	45
Figura 15 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.	46
Figura 16 – Desenho esquemático do filtro considerado.	50
Figura 17 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidades \mathbf{u}	50

Lista de tabelas

Tabela 1 – Pontos da quadratura de Gauss e seus respectivos pesos.	33
Tabela 2 – Pontos da quadratura de Hammer e seus respectivos pesos para aproximação de 1 a 7 pontos.	34
Tabela 3 – Cronograma de atividades	62

Lista de abreviaturas e siglas

ALE	Lagrangiana-Euleriana Arbitrária - <i>Arbitrary Lagrangian-Eulerian</i>
LBB	Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional - <i>Computational Fluid Dynamics</i>
CSD	Dinâmica dos Sólidos Computacional - <i>Computational Solid Dynamics</i>
GLS	Galerkin Least-Squares
IFE	Interação Fluido-Estrutura
LES	Simulação de Grandes Vórtices - <i>Large Eddy Simulation</i>
LSIC	<i>Least-Squares on Incompressibility Constraint</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
PSPG	<i>Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin</i>
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>
SGS	Subgrid-Scales
SUPG	<i>Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin</i>
VMS	Métodos Variacionais Multiescala - <i>Variational Multiscale Methods</i>

Lista de símbolos

Operadores

$\text{dev}(\cdot)$	Parte desviadora do tensor
H^1	Espaço de Sobolev de ordem 1
L^2	Espaço das funções de quadrado integrável
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de um tensor
$\nabla(\cdot)$	Gradiente
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergente
$\nabla^2(\cdot)$	Laplaciano
\cdot	Produto interno
$:$	Contração dupla
\times	Produto vetorial
\otimes	Produto tensorial
\sum	Somatório
\prod	Produtório

Parâmetros Gerais

$\hat{\mathbf{e}}_i$	Vetor versor na direção i
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
m	Massa
n_{sd}	Número de dimensões espaciais do problema

Re	Número de Reynolds
t	Tempo
V	Volume
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Δt	Intervalo discreto de tempo
ρ	Massa específica
σ	Tensor de tensões de Cauchy
ϕ	Propriedade qualquer

Configurações do Contínuo

\mathbf{x}	Posição inicial (ou posição material)
$\hat{\mathbf{x}}$	Posição de referência
\mathbf{y}	Posição atual (ou posição espacial)
Γ_D	Fronteira de Dirichlet
Γ_N	Fronteira de Neumann
Ω	Domínio de análise na configuração atual
Ω_0	Domínio de análise na configuração inicial
$\hat{\Omega}$	Domínio de análise na configuração de referência

Dinâmica dos Sólidos Computacional

\mathbb{A}	Medida de deformação de Almansi
\mathbf{A}	Gradiente da função de mudança de configuração
\mathbb{E}	Medida de deformação de Green-Lagrange
\mathbf{f}	Função de mudança de configuração
\mathbb{H}	Medida de deformação de Hencky
J	Jacobiano da mudança de configuração
\mathbb{K}	Energia cinética
n	Vetor normal à superfície na configuração atual

N	Vetor normal à superfície na configuração inicial
\mathbb{P}	Energia das Forças Externas
\mathbf{P}	Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie
u_e	Energia específica de deformação
\mathbb{U}	Energia de deformação
ε	Tensor de deformação linear
ε_V	Deformação volumétrica
Π	Energia total

Dinâmica dos Fluidos Computacional

\mathbf{A}	Gradiente da função de mudança de configuração
\mathbf{c}	Força de corpo
\mathcal{D}	Tensor constitutivo de quarta ordem
\mathbf{f}	Força por unidade de massa
f	Função mudança de configuração
\mathbf{F}	Resultante das forças externas
\mathbf{g}	Velocidades prescritas na fronteira de Dirichlet
\mathbf{h}	Forças de superfícies prescritas na fronteira de Neumann
n	Vetor normal à superfície
p	Campo de pressões
\mathbf{q}	Resultante das forças externas por unidade de volume
\mathcal{S}_u	Espaço de funções tentativas para o campo de velocidades
\mathcal{S}_p	Espaço de funções tentativas para o campo de pressões
\mathbf{u}	Campo de velocidades
\mathcal{V}_u	Espaço de funções teste para o campo de velocidades
\mathcal{V}_p	Espaço de funções teste para o campo de pressões
$\hat{\mathbf{u}}$	Campo de velocidades da malha

$\dot{\varepsilon}$	Tensor de taxa de deformação
μ	Viscosidade cinemática
ν	Viscosidade dinâmica
τ	Tensor desviador

Large Eddy Simulation

\mathbf{C}	Tensor de termos cruzados
C_S	Constante de Smagorinsky
$D_\Delta(\mathbf{y})$	Domínio de abrangência do filtro
g	Filtro
\mathbf{L}	Tensor de Leonard
\mathbf{R}	Tensor SGS de Reynolds
\mathbf{T}	Tensor SGS
\mathbf{T}_S	Tensor SGS de Smagorinsky
\mathbf{y}_Δ	Ponto na vizinhança de \mathbf{y} interno à $D_\Delta(\mathbf{y})$
Δ	Tamanho da malha
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	Taxa de deformação em grandes escalas
ν_T	Viscosidade de vórtice
$\overline{\phi}$	Propriedade filtrada
ϕ'	Propriedade não filtrada

Variational Multiscale Methods

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Objetivos	20
1.2	Justificativa	21
2	Estado Da Arte	23
2.1	Dinâmica Das Estruturas Computacional	23
2.2	Dinâmica Dos Fluidos Computacional	24
2.3	Modelo De Turbulência	25
3	Fundamentação Teórica	27
3.1	Conceitos Iniciais	27
3.1.1	Integração Temporal	27
3.1.2	Funções de Forma	31
3.1.3	Integração numérica	32
3.2	Equações Governantes da Dinâmica dos Sólidos	34
3.2.1	Cinemática dos Corpos Deformáveis	37
3.2.2	Método dos Elementos Finitos Posicional	40
3.2.2.1	Elemento de Pórtico	40
3.2.2.2	Elemento de Sólido Bidimensional	41
3.2.2.3	Exemplos de Validação	41
3.3	Equações Governantes da Dinâmica dos Fluidos	41
3.3.1	Descrição Euleriana	41
3.3.2	Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária	45
3.3.3	Modelo Constitutivo	47
3.3.4	Formulação Semi-Discreta	48
3.4	Modelos de Turbulência	49
3.4.1	<i>Large Eddy Simulation</i>	49
3.4.2	<i>Variational Multiscale Methods</i>	53
3.4.3	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i>	58
4	Metodologia e cronograma	61
	Referências	63

Capítulo 1

Introdução

Visto o constante avanço da engenharia em poder se dimensionar estruturas cada vez mais leves e esbeltas, observa-se a necessidade de uma determinação cada vez mais precisa de todos os parâmetros que podem influenciar na resistência e estabilidade da estrutura. Nesse contexto torna-se de grande importância a verificação dos efeitos da interação entre os fluidos e a estrutura, uma vez que esses fenômenos podem comprometer a segurança estrutural. Exemplos de problemas envolvendo Interação Fluido-Estrutura (IFE) podem ser notados em ações do vento sobre estruturas de grandes altitudes, ação de marés sobre estruturas de barragens e estruturas *offshore*, dentre outros. Além disso, também percebe-se a aplicação desse tipo de análise em demais áreas, como, por exemplo, no estudo de escoamento do sangue em vasos sanguíneos, ou em problemas envolvendo aerodinâmica ([SANCHES; CODA, 2014](#); [FERNANDES, 2020](#)).

Desse modo, é possível realizar a análise de IFE de duas formas principais: a construção de amostras em escala; ou a modelagem matemática do problema em questão. No primeiro caso há a verificação real do comportamento da estrutura e do fluido à um determinado problema. No entanto, dependendo da natureza do problema, esse comportamento pode variar de acordo com a escala, o que pode não apresentar resultados representativos. Também ressalta-se o fato de a construção das amostras demandar uma infraestrutura robusta para se analisar apenas alguns problemas específicos ([FERNANDES, 2020](#)).

Já a modelagem matemática de problemas se mostra como uma opção mais viável para análise de problemas de IFE, uma vez que dispensa grandes investimentos e possui grande flexibilidade de aplicações, podendo ser utilizado em diversos tipos de análises. Porém, em muitos casos, o estudo matemático de IFE leva a modelagem de problemas muito complexos, com alto custo computacional, exigindo, assim, formulações mais robustas para sua aplicação.

Para se realizar o estudo, tanto da mecânica dos elementos sólidos, quanto para a mecânica dos fluidos, é necessário o estabelecimento de algumas simplificações. Uma das principais simplificações utilizada para esses problemas é a que considera os objetos de análise como meios contínuos, desprezando-se, dessa forma, os efeitos advindos da microestrutura da

matéria (LAI et al., 2009; MASE; SMELSER; MASE, 2009).

Sabe-se que toda a matéria é composta por átomos e partículas subatômicas, no entanto a mecânica do contínuo desconsidera os efeitos dessas partículas e aponta que todo material pode ser subdividido em elementos cada vez menores sem que haja mudanças em suas propriedades físicas, independentemente do quão pequena seja essa divisão. Assim, faz-se possível a modelagem de elementos com volume infinitesimal, permitindo a utilização de artifícios matemáticos, como o cálculo diferencial e integral. Dessa forma, teorias baseadas na elasticidade e plasticidade podem ser empregadas utilizando funções contínuas, facilitando a determinação de parâmetros de interesse da análise (IRGENS, 2008; LAI et al., 2009; MALVERN, 1969).

Vale ressaltar que a consideração dos meios contínuos apresenta resultados muito satisfatórios nos estudos de engenharia, uma vez que os objetos de estudo possuem dimensões muito maiores que as distâncias moleculares do mesmo (MALVERN, 1969; MASE; SMELSER; MASE, 2009).

Ainda existem diferentes formas de descrever matematicamente um problema mecânico, em termos da referência adotada para os cálculos. São estas: a descrição Lagrangiana (ou material) e a descrição Euleriana (ou espacial).

Na descrição Lagrangiana a referência adotada é a configuração inicial do contínuo (denotada por x). Essa descrição apresenta boa representatividade quando aplicada em modelos sólidos, uma vez que a configuração inicial dos elementos é bem definida, tendo como variáveis principais os deslocamentos do elemento (SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Já a descrição Euleriana toma como referência a configuração atual do contínuo (denotada por y), sendo bem utilizada para a descrição de fluidos newtonianos, pois estes não apresentam resistência à esforços de cisalhamento, distorcendo-se indefinidamente quando submetidos à tais esforços. Nesse tipo de descrição é comum a utilização para determinação de velocidades, diferentemente dos deslocamentos (SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

1.1 Objetivos

O presente trabalho visa o estudo e implementação na linguagem de programação C++ de modelos de turbulência para análise de problemas de interação fluido-estrutura com elevados números de Reynolds. Com isso, traça-se os seguintes objetivos específicos:

- Estudo e implementação de técnicas de *Large Eddy Simulation*;
- Estudo e implementação de técnicas de *Variational Multiscale Methods*;

- Estudo e implementação de técnicas de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*;
- Estudo comparativo das características numéricas dos métodos *Large Eddy Simulation*, *Variational Multiscale Methods* e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* em problemas de interação fluido-estrutura.

1.2 Justificativa

Observa-se os efeitos da interação fluido-estrutura em diversas estruturas, em especial os efeitos devido à escoamentos turbulentos em estruturas flexíveis, por exemplo, a atuação de ventos em edifícios. Nesse sentido, se faz necessário o estudo de técnicas eficazes para determinação dos impactos desses escoamentos sobre as mais diversas estruturas.

Duas formas possíveis de se obter esses resultados são: pela construção de modelos reais em escala, observando-se na prática o comportamento estrutural e do escoamento; ou pela modelagem matemática do problema. O primeiro cenário apresenta algumas desvantagens, pois os parâmetros que são obtidos nesse tipo de análise podem ser dependentes da escala da amostra, impactando diretamente na qualidade dos resultados, além de demandar uma infraestrutura muito robusta para se obter valores coerentes. Assim, o modelo matemático se mostra como uma solução mais eficiente, uma vez que não demanda um grande investimento em infraestrutura.

No entanto muitos tipos de análise envolvendo escoamentos turbulentos recaem em problema com um alto grau de complexidade, ocasionando, consequentemente, um custo computacional muito alto. Dessa maneira, o presente trabalho busca analisar entre as técnicas matemáticas qual se mostra mais eficiente para essas análises, dando continuidade aos trabalhos que já foram realizados pelo grupo de pesquisa.

Além dos métodos para determinação de parâmetros referentes ao escoamento, também é necessário se obter aqueles referentes à resposta da estrutura frente à esse escoamento. Assim, nota-se a presença de diversos métodos para a determinação de parâmetros relativos à estruturas flexíveis, em que se percebe o Método dos Elementos Finitos Posicional como uma alternativa interessante para tal análise. Esse método se destaca pela consideração das posições nodais como parâmetros de análise, evitando problemas devido à falta de comutatividade de rotações, que é observado, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos Corrotacional, que, além de deslocamentos, também considera rotações nodais como parâmetros de análise. Além disso, também vale destacar que a matriz de massa em problemas dinâmicos permanece constante ao longo do tempo, possibilitando a implementação facilitada de métodos de integração temporal.

Capítulo 2

Estado Da Arte

No presente capítulo serão abordados os principais temas relacionados à problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE), tendo como ênfase os modos de turbulência. Serão destacados os principais métodos de cálculos envolvendo a dinâmica das estruturas computacional (2.1), a dinâmica dos fluidos computacional (2.2) e alguns modelos de turbulências (2.3).

2.1 Dinâmica Das Estruturas Computacional

A mecânica dos sólidos visa a determinação de parâmetros referentes à elementos estruturais sujeitos a solicitações externas, tais como tensões e deformações, ou forças e deslocamentos de determinados pontos dos mesmos. Para isso são desenvolvidos diversos métodos com a finalidade de melhor descrever o comportamento das estruturas, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), que se apresenta como a ferramenta computacional mais amplamente utilizada para esse fim.

Nesse sentido vale ressaltar os trabalhos de [Hughes e Liu \(1981\)](#), [Argyris \(1982\)](#), [Ibrahim-begovic e Taylor \(2002\)](#), [Pimenta, Campello e Wriggers \(2004\)](#), [Battini e Pacoste \(2006\)](#) e [Pimenta, Campello e Wriggers \(2008\)](#), que realizaram análises através do MEF Corrotacional, que se trata de uma formulação onde os deslocamentos e rotações dos elementos são os parâmetros principais da análise.

No entanto a utilização de uma análise que considera tais parâmetros nodais só se mostra eficiente ao se estudar estruturas que desenvolvem pequenos deslocamentos e deformações. Isso deve-se ao fato de essa abordagem utilizar rotações finitas como parâmetros nodais, o que pode gerar controversas em problemas envolvendo grandes rotações, uma vez que não há comutatividade entre essas grandezas. Ainda observa-se que a avaliação dinâmica de estruturas reticuladas se torna problemática, do ponto de vista da conservação de energia, além da matriz de massa ser variável, tornando o processo de integração temporal muito complexo ([SANCHES;](#)

CODA, 2013).

Com isso, vale ressaltar os trabalhos de Coda e Greco (2004), Coda e Paccola (2007), Coda e Paccola (2010), Coda (2009), Coda e Paccola (2009) e Carrazedo e Coda (2010) que utilizam de forma bem-sucedida o MEF Posicional para análise de estruturas reticuladas e de cascas aplicadas à grandes deslocamentos. Este método se diferencia dos demais ao considerar as posições nodais, obtidas a partir de vetores indeformados, como parâmetros de análise, facilitando o cálculo de efeitos de não-linearidade geométrica.

Sanches e Coda (2013) apresentaram uma aplicação do método dos elementos finitos posicional em elementos de cascas e constataram a presença de uma matriz de massa constante, o que possibilita a utilização de métodos de integração temporal, como o método de Newmark β , conservando, assim, o momento linear e angular em análises dinâmicas. Além disso, esse trabalho também analisou problemas envolvendo IFE, obtendo resultados favoráveis, indicando a boa aplicação desse método em problemas dessa natureza.

No âmbito da IFE, destaca-se a necessidade dessa consideração, uma vez que são observadas aplicações como, por exemplo, grandes amplitudes de deslocamentos, como *flutter*, aplicações biomecânicas, estruturas infláveis (KARAGIOZIS et al., 2011), simulações de turbinas (BAZILEVS et al., 2011), dentre outras.

2.2 Dinâmica Dos Fluidos Computacional

Ao contrário de problemas envolvendo elementos sólidos, que possuem um estado inicial bem definido, os fluidos, em especial os Newtonianos, não o possuem, uma vez que não incapazes de resistir à tensões desviadoras, deformando-se, assim, indefinidamente quando sujeitos à essas tensões. Dessa forma, torna-se apropriada a utilização de uma descrição Euleriana para descrever os fluidos, em que os parâmetros nodais são principalmente as velocidades do mesmo (FERNANDES, 2020).

Em geral, problemas envolvendo Dinâmica dos Sólidos (*Computational Solid Dynamics* - CSD) partem do princípio da estacionariedade de energias, buscando a determinação do ponto em que a energia do sistema seja mínima. Esses métodos apresentam a particularidade de surgir um sistema de equações com uma matriz simétrica e, em alguns casos, de vetores cujas componentes possuem significado físico. Porém, em problemas que envolvem a Dinâmica dos Fluidos (*Computational Fluid Dynamics* - CFD), o sistema de equações possui uma matriz, na maioria dos casos, assimétrica, devido à presença de termos convectivos nas equações governantes (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; BROOKS; HUGHES, 1982).

Nesse sentido, são desenvolvidos novos métodos, em busca de uma solução mais representativa com uma malha menos refinada. Dentre os principais desenvolvidos, vale mencionar o *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-*

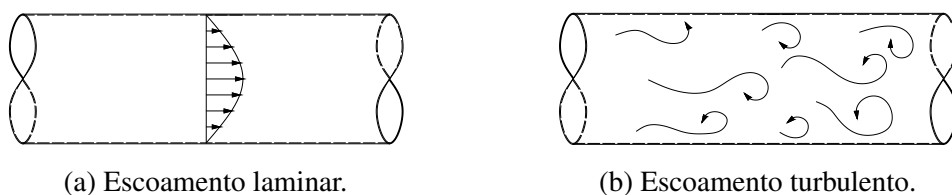
Squares (GLS) (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989; TEZDUYAR, 1991), *Subgrid Scales* (SGS) e (HUGHES, 1995).

Um campo que vale destacar na CFD é o que estuda os fenômenos de turbulência, uma vez que esses fenômenos podem se apresentar nas mais variadas escalas, sendo necessário a geração de uma malha muito refinada para detectar a formação dos vórtices, o que ocasiona um aumento radical no custo computacional da análise. Assim, são desenvolvidas novas técnicas afim de se obter melhores resultados, sem que haja um grande aumento no volume de cálculos. Dentre esses métodos destacam-se os métodos multiescala (*Variational Multiscale Methods* - VMS), as simulações de grandes vórtices (*Large Eddy Simulation* - LES) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998; HUGHES; OBERAI, 2002; BAZILEVS; AKKERMAN, 2010; ŠEKUTKOVSKI et al., 2021), aproximações de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (ALFONSI, 2009) e os métodos de atualização de malha (SAMPAIO et al., 1993). O capítulo 3 descreve de forma mais detalhada cada um desses métodos.

2.3 Modelo De Turbulência

Um fluido pode apresentar um escoamento de duas formas distintas, a depender do número de Reynolds que este apresenta (conforme ilustrado na Figura 1). Em casos cujo número de Reynolds é baixo, o escoamento é considerado laminar, ou seja, o escoamento se dá de forma semelhante ao movimento de lâminas independentes, não havendo mistura macroscópica entre as mesmas. Esse tipo de escoamento possui soluções muito mais simples de se obter, no entanto representam uma ocorrência baixa na maioria dos problemas observados na natureza. Já em casos cujo número de Reynolds é muito elevado, o escoamento é considerado turbulento. Nesse cenário há a formação de vórtices sobre o escoamento, que podem ocorrer de forma instável, desordenada e em várias escalas diferentes (POPIOLEK, 2005; SHAUGHNESSY; KATZ; SCHAFFER, 2005). Esse fenômeno pode ser descrito de acordo com as equações de Navier-Stokes, no entanto sua resolução se apresenta com um alto grau de complexidade, uma vez que possui termos não lineares em sua composição. Assim são necessárias técnicas de solução, para que se possa obter uma solução de forma aproximada à essas equações.

Figura 1 – Esquema de escoamentos.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

O presente capítulo apresentará inicialmente as equações governantes que descrevem o comportamento dos sólidos, focando em um método de solução baseado no Métodos dos Elementos Finitos Posicional (Seção 3.2), seguido da apresentação das equações governantes da dinâmica dos fluidos, tendo como foco aqueles que se encontram em escoamento incompressível (Seção 3.3), na sequência serão apresentados alguns modelos que buscam descrever os escoamentos turbulentos, sendo eles o *Large Eddy Simulation* (Seção 3.4.1), o *Variational Multiscale Method* (Seção 3.4.2) e o *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (Seção 3.4.3).

3.1 Conceitos Iniciais

Comentar brevemente alguns conceitos que irão ser utilizados: notação simbólica, indicial, delta de Kronecker, permutação de Levi-Cevita, integração por partes com o Teorema da divergência

3.1.1 Integração Temporal

Como observado no equacionamento apresentado, há o surgimento de equações diferenciais com variações temporais. No entanto a determinação de uma expressão analítica que descreva o desenvolvimento dos parâmetros ao longo do tempo é de grande dificuldade, sendo necessário o desenvolvimento de métodos numéricos que representem adequadamente aos valores que a solução possui no tempo. Nesse cenário serão apresentados na presente seção alguns métodos de integração temporal baseados em diferenças finitas, sendo eles, o método por diferenças finitas adiantado (ou explícito), atrasado (ou implícito), central (ou semi-implícito), α -generalizado e o método de Newmark.

Para se obter a taxa de variação temporal de uma propriedade qualquer ϕ ($\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$) a partir de uma abordagem de diferenças finitas adiantadas faz-se inicialmente uma expansão em séries de Taylor da mesma:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_n \Delta t^2 + \dots, \quad (3.1)$$

que, truncando a série no termo de primeira ordem, obtém-se:

$$\dot{\phi}_n = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n \approx \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Logo:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \dot{\phi}_n \Delta t. \quad (3.3)$$

Percebe-se que para se obter o valor posterior de uma propriedade segundo essa abordagem, é necessário conhecer somente valores presentes da mesma. Portanto o resultado desse integrador é obtido explicitamente. Além disso, como a série de Taylor foi truncada no termo de primeira ordem, então a ordem de precisão alcançada por esse integrador é $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Já nas diferenças atrasadas procede-se de forma semelhante, no entanto utilizando um intervalo de tempo $-\Delta t$, resultando em uma expansão em série de Taylor na forma:

$$\phi_{n-1} = \phi_n - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_n \Delta t^2 - \dots, \quad (3.4)$$

que, ao truncar no termo de primeira ordem, obtém-se:

$$\dot{\phi}_n = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t} \therefore \phi_n = \phi_{n-1} + \dot{\phi}_n \Delta t. \quad (3.5)$$

Ajustando os índices para um passo de tempo posterior, obtém-se:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \dot{\phi}_{n+1} \Delta t. \quad (3.6)$$

Portanto, pode-se observar que a determinação do valor posterior da propriedade depende de sua taxa de variação temporal nesse mesmo passo de tempo, sendo, assim, um procedimento implícito. E, da mesma forma que foi constatado no integrador explícito, esse possui uma ordem de precisão de $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Na sequência pode-se obter uma expressão que obtenha o valor da propriedade segundo uma abordagem de diferenças finitas centrais. Para isso subtrai-se 3.4 de 3.1, obtendo-se:

$$\phi_{n+1} - \phi_{n-1} = 2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n \Delta t + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right|_n \Delta t^3 + \dots, \quad (3.7)$$

Como o termo de segunda ordem foi anulado, então pode-se realizar o truncamento no termo de primeira ordem sem perder a precisão obtida na segunda ordem. Assim, obtém-se que:

$$\dot{\phi}_n = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n \approx \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.8)$$

Logo:

$$\phi_{n+1} = \phi_{n-1} + 2\dot{\phi}_n \Delta t, \quad (3.9)$$

Também pode-se somar as equações 3.1 e 3.4 e fazer o truncamento no termo de primeira ordem, onde obtém-se que:

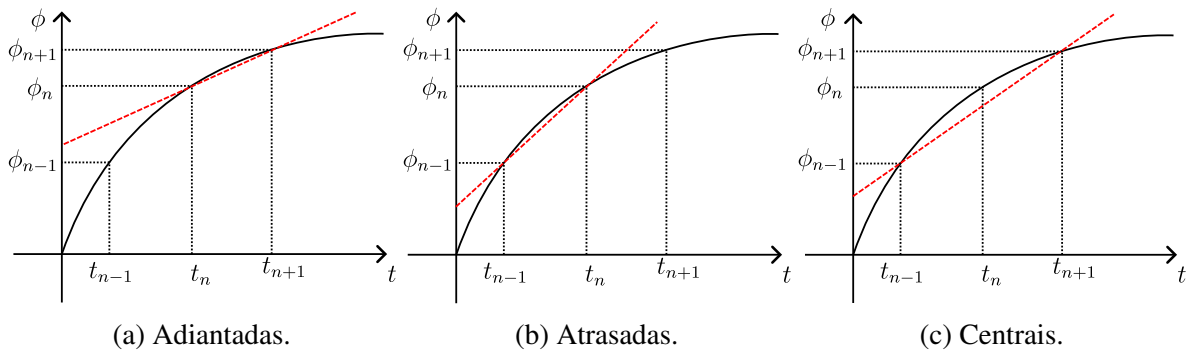
$$\phi_n = \frac{\phi_{n+1} + \phi_{n-1}}{2}. \quad (3.10)$$

Assim, trocando-se os índices $n-1 \rightarrow n$ e $n \rightarrow n+1/2$ e tomando $\Delta t \rightarrow \Delta t/2$, tem-se que:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\dot{\phi}_{n+1} + \dot{\phi}_n}{2} \Delta t, \quad (3.11)$$

Essa solução pode ser entendida como a média entre as soluções das diferenças adiantadas com as diferenças atrasadas, possuindo uma precisão na ordem de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. A Figura 2 apresenta graficamente a interpretação das diferenças finitas adiantadas, atrasadas e centrais.

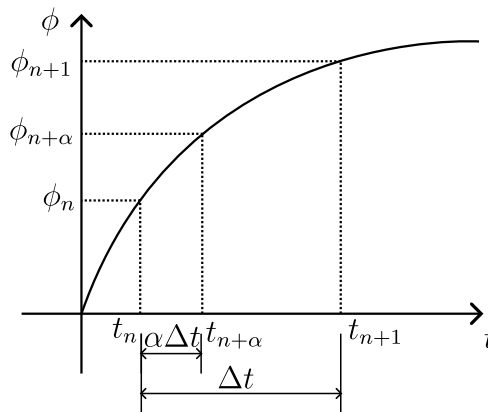
Figura 2 – Interpretação gráfica das diferenças finitas:



Fonte: Autoria Própria (2023).

Com isso, foi proposto um integrador temporal por (CHUNG; HULBERT, 1993), denominado de α -generalizado. Nesse integrador, considere uma propriedade $\phi_{n+\alpha}$ de um ponto distante $\alpha\Delta t$ de ϕ_n , sendo $0 \leq \alpha \leq 1$, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Esquema de uma propriedade $\phi_{n+\alpha}$.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Assim, pode-se realizar uma expansão em séries de Taylor:

$$\phi_{n+\alpha} = \phi_n + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_n (\alpha \Delta t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_n (\alpha \Delta t)^2 + \dots, \quad (3.12)$$

que, ao truncar no termo de primeira ordem pode-se obter que:

$$\dot{\phi}_n = \frac{\phi_{n+\alpha} - \phi_n}{\alpha \Delta t}. \quad (3.13)$$

Além disso, é possível somar à Equação 3.12 a Equação 3.1 e truncar no termo de primeira ordem, resultando em:

$$\phi_{n+\alpha} + \phi_{n+1} = 2\phi_n + (\alpha + 1)\dot{\phi}_n\Delta t, \quad (3.14)$$

que, ao substituir 3.13 tem-se:

$$\phi_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\phi_n + \alpha\phi_{n+1}, \quad (3.15)$$

a qual representa uma aproximação de primeira ordem de um parâmetro $\phi_{n+\alpha}$. Em caso de uma aproximação de segunda ordem pode-se partir do truncamento a esse nível nas equações 3.1 e 3.12 e seguir o procedimento análogo ao apresentado anteriormente, obtendo-se a seguinte aproximação:

$$\phi_{n+\alpha} = (1 - \alpha^2)\phi_n + \alpha^2\phi_{n+1} + \alpha(1 - \alpha)\dot{\phi}_n\Delta t. \quad (3.16)$$

A partir de ambas as aproximações, é possível apresentar a aproximação de Newmark, a qual aproxima valores do campo de posições (\mathbf{y}), por uma aproximação de segunda ordem, e de velocidades ($\dot{\mathbf{y}}$), por aproximações de primeira ordem. Para isso também descreve-se esses campos como:

$$\mathbf{y}_{n+\alpha_1} = \mathbf{y}_n + \alpha_1\dot{\mathbf{y}}_n\Delta t + \frac{\alpha_1^2\ddot{\mathbf{y}}_{n+2\beta}\Delta t^2}{2} \mathbf{e} \quad (3.17a)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{n+\alpha_2} = \dot{\mathbf{y}}_n + \alpha_2\ddot{\mathbf{y}}_{n+\gamma}\Delta t, \quad (3.17b)$$

nas quais γ e β são parâmetros livres que podem ser calibrados em função do problema estudado e sendo a aproximação do campo de acelerações ($\ddot{\mathbf{y}}_{n+\gamma}$) dado por:

$$\ddot{\mathbf{y}}_{n+\gamma} = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{y}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{y}}_{n+1}. \quad (3.18)$$

Assim, realizando a simplificação do campo de velocidades tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}}_{n+\alpha_2} = \dot{\mathbf{y}}_n + \alpha_2\ddot{\mathbf{y}}_{n+\gamma}\Delta t = \alpha_2\dot{\mathbf{y}}_{n+1} + (1 - \alpha_2)\dot{\mathbf{y}}_n,$$

que resulta em:

$$\dot{\mathbf{y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{y}}_n + ((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{y}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{y}}_{n+1}) \Delta t. \quad (3.19)$$

De forma análoga tem-se, a partir da Equação 3.17a e da aproximação de segunda ordem, para o campo de posições:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n\Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{y}}_n + \beta\ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \right) \Delta t^2. \quad (3.20)$$

Verifica-se que caso $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ a aproximação de Newmark recai em um caso específico igual ao das diferenças centrais.

Segundo Fernandes (2020), o método do α -generalizado apresenta uma boa representatividade em problemas de escoamentos incompressíveis, podendo-se introduzir uma difusão numérica à marcha no tempo. Contudo, deve-se atentar-se quanto à estabilidade do integrador ao utilizá-lo em problemas dessa natureza. Para isso, considere, portanto, uma aproximação do tipo:

$$\dot{\phi}_{n+\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\dot{\phi}_n + \alpha_m\dot{\phi}_{n+1}, \quad (3.21a)$$

$$\phi_{n+\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\phi_n + \alpha_f\phi_{n+1} \text{ e} \quad (3.21b)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t \left((1 - \gamma)\dot{\phi}_n + \gamma\dot{\phi}_{n+1} \right), \quad (3.21c)$$

sendo α_m , α_f e γ valores reais arbitrários. De acordo com [Chung e Hulbert \(1993\)](#), [Jansen, Whiting e Hulbert \(2000\)](#), [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#), a precisão de segunda ordem dessa aproximação pode ser atingida uma vez que:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f, \quad (3.22)$$

assim como a estabilidade incondicional pode ser obtida uma vez que:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Ainda é possível escrever, a partir da Equação 3.24, α_m e α_f em termos de um parâmetro arbitrário único ($0 \leq \rho_\infty \leq 1$), que representa o raio espectral de amplificação da matriz para $\Delta t \rightarrow \infty$, o qual é utilizado para controlar as dissipações de alta-frequência.

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \text{ e} \quad (3.24a)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (3.24b)$$

Para o caso de $\rho_\infty = 1$ não ocorre a introdução de difusão numérica, enquanto para $\rho_\infty = 0$ se tem a máxima dissipação de altas frequências ([FERNANDES, 2020](#)).

Comentar sobre a estabilidade das diferenças finitas adiantadas, atrasadas e centrais

3.1.2 Funções de Forma

Uma estratégia comumente utilizada para se resolver problemas onde não se conhece uma expressão para descrever o comportamento de uma função é aproximá-la por meio da combinação linear de outras funções conhecidas, denominadas como funções de forma $N_a(\xi)$, onde $a = 1, \dots, n_{en}$, n_{en} é o número de nós do elemento e $\xi \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ são as variáveis independentes da função avaliada, denominadas nesse contexto como coordenadas paramétricas do elemento e no espaço paramétrico $\hat{\Omega}^e$. Para se entender melhor essa aproximação, considere uma propriedade ϕ que varia em função de ξ , ou seja, $\phi = \phi(\xi)$, portanto, pode-se dizer que:

$$\phi(\xi) = \sum_{a=1}^{n_{en}} \phi_a N_a(\xi), \quad (3.25)$$

sendo $\phi_a = \phi(\xi_a)$. Algumas propriedades interessantes das funções de forma é a propriedade de interpolação, dada por $N_a(\xi_b) = \delta_{ab}$, em que δ_{ab} é o delta de Kronecker, dado por:

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}, \quad (3.26)$$

e a partição da unidade, dada por:

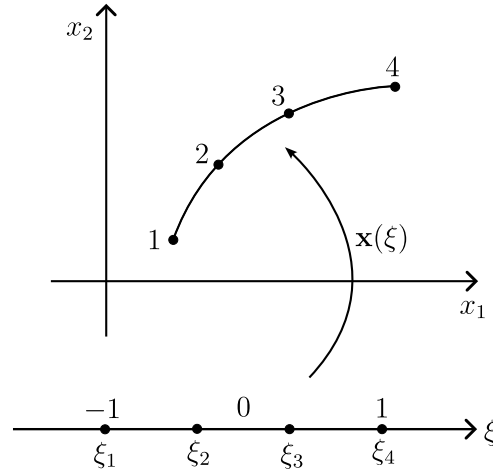
$$\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi) = 1 \forall \xi \in \hat{\Omega}^e. \quad (3.27)$$

Em geral opta-se por funções de forma do tipo polinomiais, uma vez que se adéquam mais facilmente às mais variadas funções, além de ser uma classe de função simples de ser trabalhada. Nesse sentido destacam-se os polinômios de Lagrange, que para um polinômio de grau p em caso unidimensional pode ser escrito como (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$l_i^p(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p+1. \quad (3.28)$$

A Figura 4 apresenta graficamente a mudança de coordenada de um espaço paramétrico para um plano x_1x_2 , de forma que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$.

Figura 4 – Mudança de espaço paramétrico para um plano x_1x_2 .



Fonte: Autoria Própria (2023).

3.1.3 Integração numérica

Em diversos casos pode ocorrer do surgimento de integrais cuja determinação da primitiva é inviável, ou impossível. Para isso recorre-se para métodos de aproximação numérica, que sejam capazes de estimar com boa precisão os valores das mesmas. Uma boa alternativa é a aproximação por quadratura de Gauss ou a de Hammer.

A quadratura de Gauss mais comum busca aproximar uma função $f(x)$ em um intervalo $[-1, 1]$ por meio da multiplicação de f em pontos estratégicos (x_i) com um peso associado w_i , ou seja:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (3.29)$$

na qual n é o número de pontos da quadratura.

De forma simplista, pode-se realizar uma aproximação da função $f(x)$ por meio de um

polinômio $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, no qual a_k são coeficientes constantes a cada x^k . Assim tem-se que:

$$\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^m a_k x^k dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \sum_{k=0}^m a_k x_i^k, \quad (3.30)$$

o que leva a:

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \approx \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=1}^n w_i x_i^k. \quad (3.31)$$

Assim, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^k = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}, \quad (3.32)$$

que, ao ser resolvida, retorna os pontos de quadratura e os pesos. A Tabela 1 apresenta os pontos de quadratura e seus respectivos pesos para polinômios de até quarto grau.

Tabela 1 – Pontos da quadratura de Gauss e seus respectivos pesos.

n	x_i	w_i
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Fonte: Autoria Própria (2023).

De forma similar, a quadratura de Hammer mais comum busca aproximar a integral dentro de um domínio triangular, compreendido pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k, y_k). \quad (3.33)$$

Fazendo uma aproximação por polinômio tem-se:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} a_{ij} x^i y^j dy dx \approx \sum_{k=1}^n w_k \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} a_{ij} x_k^i y_k^j, \quad (3.34)$$

o que leva ao seguinte sistema de equações:

$$\sum_{k=1}^n w_k x_k^i y_k^j = \frac{i!j!}{(i+j+2)!}. \quad (3.35)$$

A Tabela 2 apresenta os pontos da quadratura de Hammer para aproximação de 1 a 7 pontos.

Tabela 2 – Pontos da quadratura de Hammer e seus respectivos pesos para aproximação de 1 a 7 pontos.

n	x_k	y_k	w_k
1	0,33333333333333	0,33333333333333	0,50000000000000
	0,16666666666667	0,16666666666667	0,16666666666667
3	0,16666666666667	0,66666666666667	0,16666666666667
	0,66666666666667	0,16666666666667	0,16666666666667
4	0,33333333333333	0,33333333333333	-0,28125000000000
	0,20000000000000	0,20000000000000	0,26041666666667
	0,20000000000000	0,60000000000000	0,26041666666667
	0,60000000000000	0,20000000000000	0,26041666666667
6	0,44594849091597	0,44594849091597	0,11169079483901
	0,44594849091597	0,10810301816807	0,11169079483901
	0,10810301816807	0,44594849091597	0,11169079483901
	0,09157621350977	0,09157621350977	0,05497587182766
	0,09157621350977	0,81684757298046	0,05497587182766
	0,81684757298046	0,09157621350977	0,05497587182766
	0,33333333333333	0,33333333333333	0,11250000000000
	0,47014206410511	0,47014206410511	0,06619707639426
7	0,47014206410511	0,05971587178977	0,06619707639426
	0,05971587178977	0,47014206410511	0,06619707639426
	0,10128650732346	0,10128650732346	0,06296959027242
	0,10128650732346	0,79742698535309	0,06296959027242
	0,79742698535309	0,10128650732346	0,06296959027242

Fonte: Autoria Própria (2023).

3.2 Equações Governantes da Dinâmica dos Sólidos

O estudo dos elementos sólidos baseia-se na determinação de parâmetros referentes à elementos estruturais, tais como esforços internos e deslocamentos, ou tensões e deformações. Em alguns casos particulares isso pode ser obtido através da simples consideração das relações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas. Entretanto, em vários outros casos, pode ser necessário o uso de algumas técnicas, como o uso dos princípios variacionais, que serão devidamente descritos na presente seção.

Para se utilizar desses princípios, deve-se primeiramente definir o conceito de energia total (Π) de um sistema, que pode ser entendido como a soma de todas as parcelas relevantes ao problema. Em casos mais comuns de problemas envolvendo elementos sólidos, tem-se a consideração de uma parcela de energia devida às forças externas atuantes no corpo (\mathbb{P}), energia de deformação (\mathbb{U}) e energia cinética (\mathbb{K}). Dessa forma:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}. \quad (3.36)$$

Nesse sentido, busca-se encontrar uma configuração que esteja em equilíbrio estável. Dessa forma postula-se o primeiro teorema variacional, que aponta que, para se obter o equilíbrio

em um sólido sujeito a forças externas conservativas, a primeira variação da energia total deve ser nula para qualquer variação admissível, ou seja:

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \forall \delta \mathbf{u} | \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D, \quad (3.37)$$

em que Γ_D é a parcela da fronteira onde os deslocamentos são prescritos. Já o segundo teorema trata-se da estabilidade desse equilíbrio, onde para se atingir o equilíbrio estável a segunda variação da energia total deve ser positiva para qualquer variação admissível, ou seja:

$$\delta^{(2)}\Pi > 0 \forall \delta \mathbf{u} | \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D. \quad (3.38)$$

Sendo assim, primeiramente procura-se anular a primeira variação da energia total:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0, \quad (3.39)$$

o que leva à necessidade de se determinar a primeira variação de \mathbb{U} . Para isso, é necessária a consideração de um modelo constitutivo que descreva a evolução da energia de deformação em função da medida de deformação.

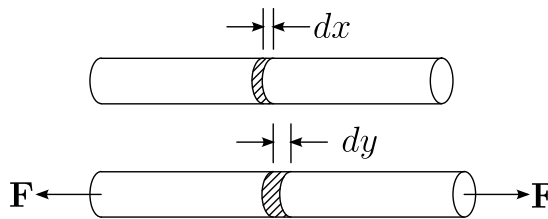
Na sequência serão apresentadas algumas medidas de deformação uniaxiais para fins de exemplificação, sendo as medidas de deformação multiaxiais apresentadas posteriormente na seção 3.2.1.

A primeira medida de deformação que pode ser observada é a denominada medida de deformação linear (ou de engenharia), que se trata de uma medida Lagrangiana, pois toma como referência a configuração inicial (ou indeformada) do elemento, e é definida como:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx}, \quad (3.40)$$

em que dx e dy são os comprimentos de um trecho infinitesimal de uma barra em sua configuração inicial e atual, respectivamente (Figura 5).

Figura 5 – Desenho esquemático de uma barra submetida a tração.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Outra medida de deformação Lagrangiana interessante é a medida de deformação quadrática (ou de Green-Lagrange), definida como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2}. \quad (3.41)$$

Vale ressaltar que, em comparação com a medida de deformação linear, a deformação quadrática pode ser utilizada para problemas com uma deformação maior, descrevendo uma gama maior de problemas.

Já outras medidas de deformação Eulerianas (que tomam como referência a configuração atual do elemento) tem-se a medida de deformação de Almansi:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dy^2}, \quad (3.42)$$

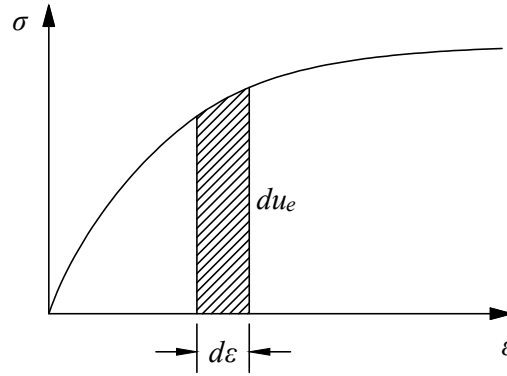
e a medida de deformação de Hencky:

$$\mathbb{H} = -\ln \left(\frac{dx}{dy} \right). \quad (3.43)$$

Assim, pode-se definir alguns modelos constitutivos que relacionarão a medida de tensão com a de deformação, ou de forma mais prática, a medida de energia específica de deformação (u_e) com alguma dessas duas medidas, sendo u_e a energia de deformação por unidade de volume, matematicamente interpretado como a área sob a curva de tensão \times deformação (Figura 6), ou seja:

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon. \quad (3.44)$$

Figura 6 – Esquema de diagrama de tensão \times deformação.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Assim, destacam-se os modelos constitutivos de Hooke (Equação 3.45a), de Saint-Venant-Kirchhoff (Equação 3.45b) e de Almansi (Equação 3.45c):

$$u_e^H = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \quad (3.45a)$$

$$u_e^{SVK} = \frac{K\mathbb{E}^2}{2}, \quad (3.45b)$$

$$u_e^{Al} = \frac{Z\mathbb{A}^2}{2}, \quad (3.45c)$$

em que E , K e Z representam o módulo de elasticidade longitudinal do material em seus respectivos modelos constitutivos.

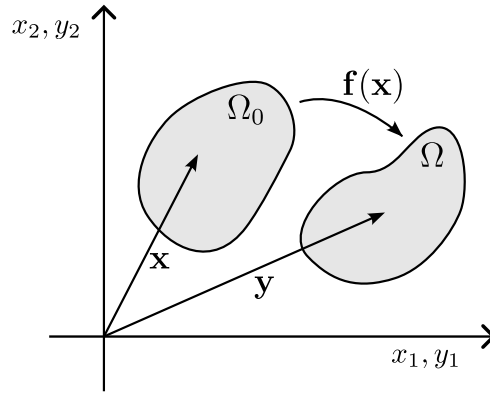
Uma propriedade notável aponta a tensão como a conjugada energética da deformação, que, matematicamente, significa que a primeira derivada da energia específica de deformação em relação à medida de deformação é igual à tensão, ou seja:

$$\frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} = \sigma = E\varepsilon. \quad (3.46)$$

3.2.1 Cinemática dos Corpos Deformáveis

Inicialmente considere um corpo deformável, idealizado como um meio contínuo que, em sua configuração inicial é denotado por Ω_0 e em sua configuração atual é denotado por Ω , conforme ilustrado na Figura 7. Para se mapear os pontos que compõem o corpo em relação a uma origem preestabelecida utiliza-se \mathbf{x} e \mathbf{y} para denotar as coordenadas de Ω_0 e Ω , respectivamente. Já para se mapear \mathbf{y} em função de \mathbf{x} existe uma função \mathbf{f} tal que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, denominada como função de mudança de configuração.

Figura 7 – Configurações inicial e atual de um corpo deformável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Para um ponto \mathbf{x} na vizinhança de \mathbf{x}_0 , pode-se dizer que:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.47)$$

em que $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ é o gradiente de mudança de configuração. Assim, pode-se obter uma expressão que transforme um vetor $d\mathbf{x}$ na configuração inicial em um vetor $d\mathbf{y}$ na atual:

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.48)$$

o que permite escrever o quadrado da norma de $d\mathbf{y}$ como:

$$\|d\mathbf{y}\|^2 = dy^2 = d\mathbf{y}^T \cdot d\mathbf{y} = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

Subtraindo-se $dx^2 = \|d\mathbf{x}\|^2$ de ambos os lados da igualdade obtém-se:

$$dy^2 - dx^2 = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.49)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Dessa maneira, pode-se substituir \mathbf{C} em 3.49 e dividir por $2dx^2$, obtendo-se:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}}{dx^2}.$$

Tomando um vetor versor na direção de $d\mathbf{x}$ ($\mathbf{u} = d\mathbf{x} / \|d\mathbf{x}\|$), tem-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \mathbf{u}^T \cdot \left(\frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

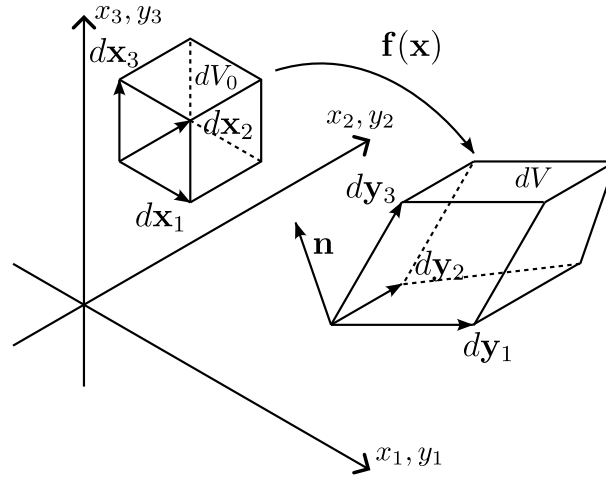
Assim, define-se o tensor de deformações de Green-Lagrange como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (3.51)$$

que se trata de uma medida de deformação objetiva, ou seja, não registra deformações em movimento de corpo rígido.

Outra medida de deformação interessante é a medida de deformação volumétrica (ε_V). Para isso considere o elemento infinitesimal em suas configurações inicial e atual ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Mudança de volume de um elemento infinitesimal.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Logo o valor de ε_V pode ser obtido através da relação entre o volume inicial e atual desse elemento como:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \quad (3.52)$$

O volume do elemento em ambas as configurações pode ser obtido por meio do produto misto dos vetores que formam o mesmo, ou seja:

$$dV_0 = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3), \quad (3.53a)$$

$$dV = d\mathbf{y}_1 \cdot (d\mathbf{y}_2 \times d\mathbf{y}_3), \quad (3.53b)$$

Conhecendo a transformação expressa em 3.48 e fazendo as devidas simplificações pode-se obter que:

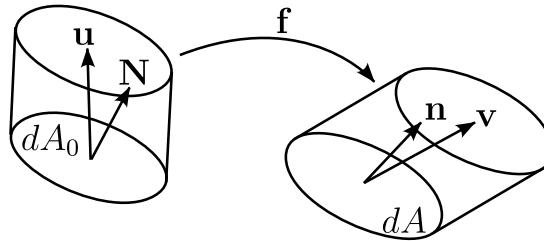
$$dV = \det(\mathbf{A})dV_0 = JdV_0, \quad (3.54)$$

em que $J = \det(\mathbf{A})$ é o Jacobiano da mudança de configuração.

Na sequência procura-se obter uma expressão que indique a mudança de área nas diferentes configurações. Assim, considere um cilindro infinitesimal ilustrado na figura 9.

Nesse contexto, a área vetorial pode ser entendida como seu valor absoluto na direção de sua normal ($d\mathbf{A}_0 = dA_0\mathbf{N}$ e $d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}$). Logo o volume do cilindro é dado pelo produto

Figura 9 – Mudança de configuração em um cilindro infinitesimal.



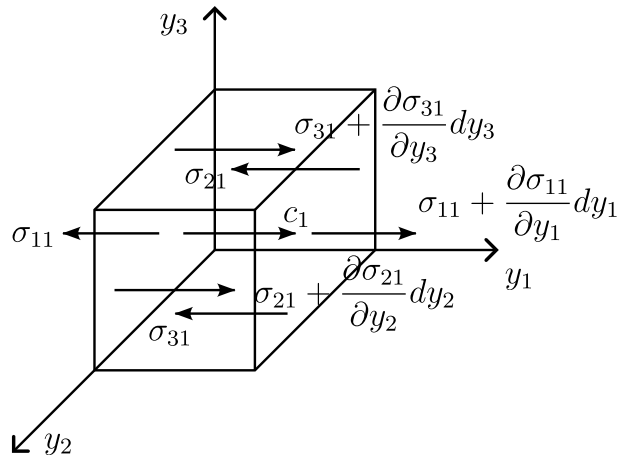
Fonte: Autoria Própria (2023).

escalar da área vetorial com o vetor que define a altura do cilindro ($dV_0 = d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{u}$ e $dV = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$). Conhecendo as relações 3.48 e 3.54, pode obter que:

$$\mathbf{n}dA = J\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA_0, \quad (3.55)$$

que é conhecida como a Equação de Nanson.

Com esse embasamento é possível apresentar os conceitos de energia nas descrições Euleriana e Lagrangiana Total. Assim, para se obter a equação do equilíbrio local de um elemento na descrição Euleriana, considere um elemento infinitesimal sujeito à ação de uma força de corpo (ou de volume) c , conforme ilustrado no diagrama de corpo livre da Figura 10, que apresenta somente as forças atuantes na direção $\hat{\mathbf{e}}_1$.

Figura 10 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal na direção $\hat{\mathbf{e}}_1$.

Fonte: Autoria Própria (2023).

Fazendo o equilíbrio das forças nessa direção tem-se:

$$-\sigma_{11}dy_2dy_3 - \sigma_{21}dy_1dy_3 - \sigma_{31}dy_1dy_2 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1}dy_1\right)dy_2dy_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_2}dy_2\right)dy_1dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_3}dy_3\right)dy_1dy_2 + c_1dV = \rho\ddot{y}_1dV$$

Fazendo as devidas simplificações obtém-se:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1 = \rho\ddot{y}_1,$$

que, expandindo analogamente para as demais direções, pode escrever nas notações simbólica (Equação 3.56a) e indicial (Equação 3.56b) como:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{c} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \quad (3.56a)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y}} + c_j = \rho \ddot{y}_j, \quad (3.56b)$$

as quais representam as equações do equilíbrio local na descrição Euleriana.

Integrando a equação 3.56 em Ω e aplicando o teorema da divergência obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{c} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega, \quad (3.57)$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$ é a fronteira do domínio de análise. Essa equação representa o equilíbrio global na descrição Euleriana.

Já em uma descrição Lagrangiana Total, será necessário transformar os termos dependentes da configuração atual para outros dependentes da configuração inicial. Assim, pode-se reescrever a Equação 3.57 levando em consideração as Equações 3.54 e 3.55:

$$\int_{\Gamma_0} J \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} J \mathbf{c} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} J \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0. \quad (3.58)$$

Sendo $\mathbf{c}^0 = J\mathbf{c}$ as forças de corpo na configuração inicial, $\rho_0 = J\rho$ a densidade inicial e $\mathbf{P} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, tem-se que:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{c}^0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0, \quad (3.59)$$

que representa a equação do equilíbrio global na descrição Lagrangiana Total.

Retornando a integral sob a fronteira Γ para Ω por meio do Teorema da Divergência e tomando um elemento infinitesimal de volume, pode-se obter a equação do equilíbrio local na descrição Lagrangiana Total:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{c} = \rho \ddot{\mathbf{y}}, \text{ ou} \quad (3.60a)$$

$$\left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}} + c_j = \rho \ddot{y}_j. \quad (3.60b)$$

3.2.2 Método dos Elementos Finitos Posicional

Explicar as vantagens do MEF Posicional frente ao Corrotacional, assim como a vantagem da descrição Lagrangiana Total frente à Euleriana

3.2.2.1 Elemento de Pórtico

Talvez alterar para elemento de treliça - Pode comentar sobre vibração livre

3.2.2.2 Elemento de Sólido Bidimensional

Comentar sobre polinômios aproximadores, coordenadas paramétricas, integração por quadratura de Gauss e Hammer, mudança de variáveis para espaço paramétrico, método de solução

3.2.2.3 Exemplos de Validação

Apresentar exemplos

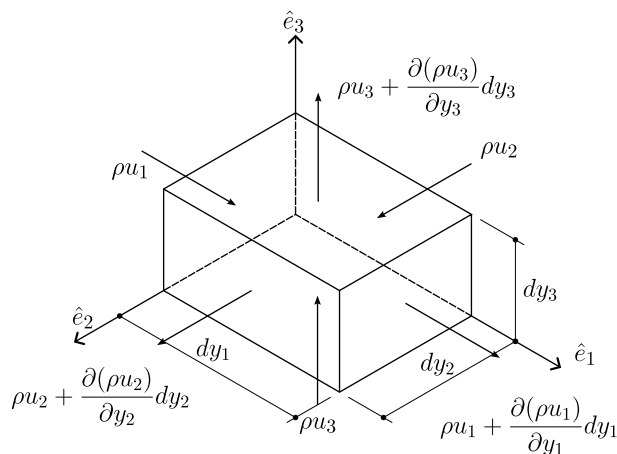
3.3 Equações Governantes da Dinâmica dos Fluidos

Para a devida representação de escoamentos é possível partir de uma descrição Euleriana, em que sua formulação é apresentada na subseção 3.3.1, ou a partir de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária, em que sua formulação é devidamente apresentada na subseção 3.3.2.

3.3.1 Descrição Euleriana

Em uma descrição euleriana é possível se obter uma expressão que defina a conservação de massa (ou equação da continuidade) do fluido. Para isso, considere um elemento infinitesimal permeável, conforme ilustrado na Figura 11, em que $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ é o campo de velocidades do fluido na posição atual \mathbf{y} do elemento, assim como ρ representa a massa específica do fluido nesse ponto.

Figura 11 – Taxa de fluxo de massa em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Assim, realiza-se o balanço de massa nesse elemento como:

$$dm = dm_0 + \left. \frac{\partial dm}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} dt, \quad (3.61)$$

que pode ainda ser reescrita em termos de sua massa específica como:

$$\begin{aligned} \rho dV + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} dV dt = & \rho dV + \rho u_1 dy_2 dy_3 dt + \rho u_2 dy_1 dy_3 dt + \rho u_3 dy_1 dy_2 dt - \\ & \left(\rho u_1 + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial y_1} \Big|_{\mathbf{y}} dy_1 \right) dy_2 dy_3 dt - \left(\rho u_2 + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y_2} \Big|_{\mathbf{y}} dy_2 \right) dy_1 dy_3 dt - \\ & \left(\rho u_3 + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial y_3} \Big|_{\mathbf{y}} dy_3 \right) dy_1 dy_2 dt, \end{aligned}$$

que pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} = - \left(\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial y_1} \Big|_{\mathbf{y}} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y_2} \Big|_{\mathbf{y}} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial y_3} \Big|_{\mathbf{y}} \right), \quad (3.62)$$

a qual pode ser reescrita em notação simbólica de acordo com a Equação 3.63a, ou em notação indicial de acordo com a Equação 3.63b, que representam a conservação de massa em um elemento infinitesimal.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.63a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}} = 0, \quad (3.63b)$$

em que $D\rho/Dt$ representa a derivada material, definida para uma propriedade ϕ qualquer como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi, \quad (3.64)$$

em que $\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$ é o operador nabla, definido para uma função escalar g qualquer de acordo com a Equação 3.65a e para uma função vetorial \mathbf{g} qualquer de acordo com a Equação 3.65b:

$$\nabla_{\mathbf{y}} g = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g}{\partial y_i} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (3.65a)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j, \quad (3.65b)$$

e $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\cdot)$ é o divergente, que para uma função vetorial \mathbf{g} qualquer, é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial y_i}. \quad (3.66)$$

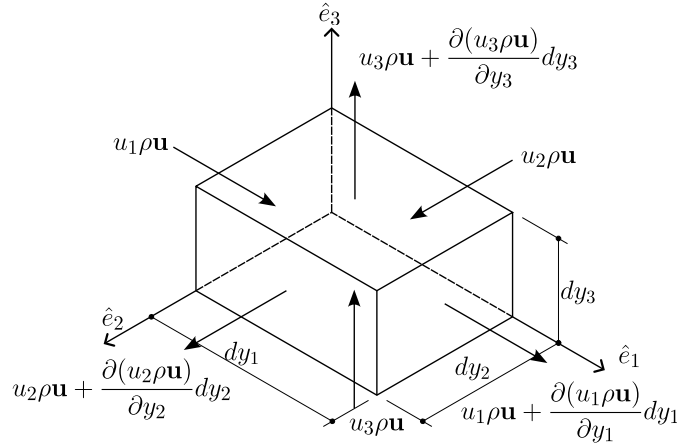
Para escoamentos incompressíveis a equação de conservação de massa pode ser reescrita como:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.67)$$

Já a equação que expressa a conservação da quantidade de movimento (ou de momento linear) pode ser obtida ao se considerar a taxa de fluxo de quantidade de movimento no elemento infinitesimal permeável, ilustrado na Figura 12.

Assim, procede-se com o balanço da taxa de quantidade de movimento, no qual $d\mathbf{F}$ representa a resultante das forças externas atuante no elemento.

Figura 12 – Taxa de fluxo de quantidade de movimento em um elemento infinitesimal permeável.



Fonte: Autoria Própria (2023).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} dV = & u_1 \rho \mathbf{u} dy_2 dy_3 + u_2 \rho \mathbf{u} dy_1 dy_3 + u_3 \rho \mathbf{u} dy_1 dy_2 - \left(u_1 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_1 \rho \mathbf{u}}{\partial y_1} \Big|_{\mathbf{y}} dy_1 \right) dy_2 dy_3 - \\ & \left(u_2 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_2 \rho \mathbf{u}}{\partial y_2} \Big|_{\mathbf{y}} dy_2 \right) dy_1 dy_3 - \left(u_3 \rho \mathbf{u} + \frac{\partial u_3 \rho \mathbf{u}}{\partial y_3} \Big|_{\mathbf{y}} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + d\mathbf{F} \end{aligned}$$

Fazendo as devidas simplificações obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento na sua forma simbólica (Equação 3.68a) e na sua forma indicial (Equação 3.68b):

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.68a)$$

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \frac{\partial u_i \rho u_j}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}} - q_j = 0, \quad (3.68b)$$

em que \mathbf{q} representa a força resultante por unidade de volume, ou seja, $\mathbf{q} = d\mathbf{F}/dV$. Entretanto, não é de interesse escrever a equação 3.68 em termos desse vetor \mathbf{q} , mas em termos do tensor de tensões de Cauchy (σ). Para isso, considere o diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal, onde se é representado apenas as componentes na direção \hat{e}_1 de tensões, de forças de corpo (c) e de pressões (p).

Fazendo o equilíbrio de forças nessa direção, obtém-se que:

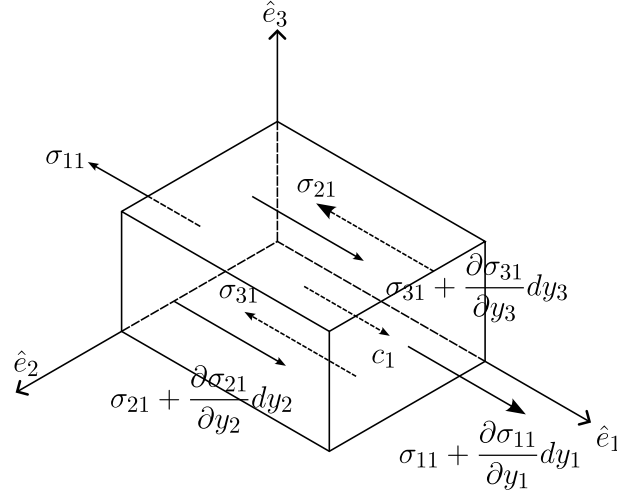
$$\begin{aligned} & -\sigma_{11} dy_2 dy_3 - \sigma_{21} dy_1 dy_3 - \sigma_{31} dy_1 dy_2 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 \\ & + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + c_1 dy_1 dy_2 dy_3 = dF_1 \end{aligned}$$

Após feitas as devidas simplificações, pode-se estabelecer uma relação entre \mathbf{q} e σ como:

$$q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + c_1, \quad (3.69)$$

a qual pode ser estendida analogamente para as demais direções e reescrita em suas formas simbólicas e indicial como:

Figura 13 – Componentes de forças atuantes no elemento infinitesimal na direção \hat{e}_1 .



Fonte: Autoria Própria (2023).

$$\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{c}, \quad (3.70a)$$

$$q_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} + c_j. \quad (3.70b)$$

Substituindo 3.70 em 3.68 e aplicando a incompressibilidade (apresentada na Equação 3.67) obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento escrita em termos de tensões:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0}, \quad (3.71a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}} - f_j \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}} = 0, \quad (3.71b)$$

em que $\mathbf{c} = \rho \mathbf{f}$, tal que \mathbf{f} é uma força por unidade de massa. Além disso, também é possível escrever a equação 3.71 utilizando a notação de derivada material como:

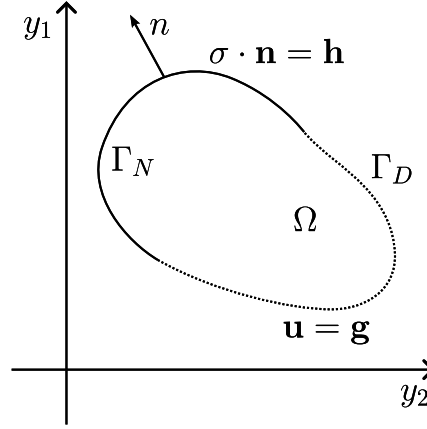
$$\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0}, \quad (3.72a)$$

$$\rho \left(\frac{Du_j}{Dt} - f_j \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}} = 0. \quad (3.72b)$$

Dessa forma, define-se o domínio em que essas equações são válidas como $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, sendo n_{sd} a dimensão do problema em análise, podendo ser $n_{sd} = 2$ ou 3 . Assim, Ω possui uma fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$, em que a parte dessa fronteira onde se impõem condições cinemáticas é denominada como fronteira de Dirichlet (Γ_D) e a parte onde há prescrição de forças de superfície é denotado como fronteira de Neumann (Γ_N), conforme pode ser visualizado na Figura 14.

Dessa forma, o problema a ser resolvido pode ser escrito a partir das equações:

Figura 14 – Domínio de análise e fronteiras consideradas para problemas de mecânica dos fluidos.



Fonte: Autoria Própria (2023).

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.73)$$

as quais são chamadas de equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em descrição Euleriana (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; BAZILEVS; AKKERMAN, 2010; BAZILEVS et al., 2007; HUGHES; OBERAI, 2002; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000).

3.3.2 Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária

Para definir a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian - ALE*), que foi inicialmente originado do trabalho de Donea, Giuliani e Halleux (1982), considere três subconjuntos Ω_0 , Ω e $\hat{\Omega}$, que representam os domínios do contínuo em sua configuração inicial e atual e o domínio da malha, respectivamente. A Figura 15 ilustra esquematicamente um problema em descrição ALE.

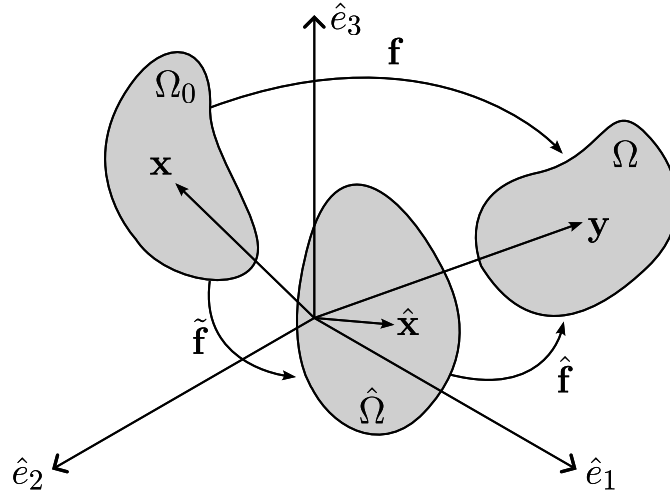
As coordenadas \mathbf{x} , \mathbf{y} e $\hat{\mathbf{x}}$ representam as coordenadas de um ponto nos domínios Ω_0 , Ω e $\hat{\Omega}$, respectivamente. Já as funções $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ são funções de mudança de configuração.

Com isso, pode-se obter o gradiente das funções de mudança de configuração:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.74a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \text{ e} \quad (3.74b)$$

Figura 15 – Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.



Fonte: Autoria Própria (2023).

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\partial(\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.74c)$$

nos quais $\mathbf{u} = \partial \mathbf{y} / \partial t|_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{w} = \partial \hat{\mathbf{x}} / \partial t|_{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \partial \hat{\mathbf{f}} / \partial t|_{\hat{\mathbf{x}}}$. Além disso, vale ressaltar que $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{f}}, t)$, portanto $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

que possui, como uma de suas consequências, que:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} + \hat{\mathbf{u}}, \text{ ou} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}). \quad (3.77)$$

Assim é possível definir a derivada material em uma descrição ALE. Para isso considere uma propriedade $\phi(\mathbf{y}, t)$ escrita em termos da configuração atual, $\phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)$ escrita em termos da configuração de referência e $\phi^{**}(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t), t)$ escrita em termos da configuração inicial. Logo:

$$\frac{\partial \phi^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \phi^*(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}, t)} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)}{\partial(\mathbf{x}, t)}, \text{ ou} \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^{**}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} & \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{w} + \frac{\partial \phi^*}{\partial t}. \quad (3.80)$$

Substituindo 3.77 em 3.80, obtém-se que:

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \phi^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{y}}$$

Dessa maneira, remove-se os sobrescritos * e ** e define-se a derivada material na descrição ALE como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \phi. \quad (3.81)$$

Com isso, substitui-se ϕ por ρ e aplica-se a Equação 3.81 em 3.63 para se obter a equação de conservação de massa na descrição ALE:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.82)$$

Já a equação da conservação da quantidade de movimento na descrição ALE pode ser obtida substituindo-se a Equação 3.81 em 3.72, em que $\phi = \mathbf{u}$, obtendo-se:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T = \mathbf{0}. \quad (3.83)$$

Assim, pode-se escrever o problema a ser resolvido a partir das equações:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{em } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_D, \end{cases} \quad (3.84)$$

que são denominadas como as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em descrição ALE.

3.3.3 Modelo Constitutivo

O modelo constitutivo que relaciona o tensor de tensões de Cauchy com os campos de velocidade e de pressão é dado por:

$$\sigma = \tau - p\mathbf{I}, \quad (3.85)$$

na qual \mathbf{I} representa o tensor identidade de segunda ordem, dado por:

$$\mathbf{I} \equiv \delta_{ij}, \quad (3.86)$$

tal que τ é o tensor de tensões viscosas (ou tensor desviador), que para fluidos Newtonianos é dado por:

$$\tau = \mathcal{D} : \dot{\epsilon}, \quad (3.87)$$

em que \mathcal{D} é o tensor constitutivo de quarta ordem, dado por:

$$\mathcal{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.88)$$

sendo μ a viscosidade cinemática do fluido e \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem, definido como:

$$\mathbb{I} \equiv \mathbf{i}_{ij\alpha\beta} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}, \quad (3.89)$$

e $\dot{\varepsilon}$ é o tensor de taxa de deformação, definido como:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}}^T \mathbf{u} \right). \quad (3.90)$$

Assim, o tensor desviador pode ser escrito como:

$$\tau_{ij} = (2\mu\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \lambda\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta})\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = 2\mu\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}$$

ou em notação simbólica como:

$$\tau = 2\mu\dot{\varepsilon} + \lambda\mathbf{I} \operatorname{tr}(\dot{\varepsilon}), \quad (3.91)$$

no qual $\operatorname{tr}(\cdot)$ é o traço de um tensor.

Já para o caso de escoamentos incompressíveis, observa-se que $\operatorname{tr}(\dot{\varepsilon}) = 0$, fazendo com que 3.85 possa ser escrita como:

$$\sigma = 2\mu\dot{\varepsilon} - p\mathbf{I}. \quad (3.92)$$

3.3.4 Formulação Semi-Discreta

Para a obtenção de uma formulação na forma fraca (ou integral) das equações de Navier-Stokes considere os conjuntos \mathcal{S}_u e \mathcal{S}_p de dimensões infinitas que definem os espaços de funções tentativas para os campos de velocidades e pressões, respectivamente, tais que (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013; FERNANDES, 2020):

$$\mathcal{S}_u = \left\{ \mathbf{u} | \mathbf{u}(\cdot, t) \in H^1(\Omega), u_i = g_i \text{ em } \Gamma_D \right\} \text{ e} \quad (3.93)$$

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p | p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_D \right\}, \quad (3.94)$$

em que H^1 representa o espaço de valor vetorial com derivadas de quadrado integrável em Ω e L^2 representa o espaço de valor escalar de quadrado integrável em Ω , ou seja:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ com } i = 1, \dots, n_{sd} \right\} \text{ e} \quad (3.95)$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u | \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (3.96)$$

Também define-se os conjuntos de funções testes para a conservação de massa e conservação da quantidade de movimento como \mathcal{V}_u e \mathcal{V}_p , respectivamente, tais que:

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \mathbf{w} | \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^{n_{sd}}, w_i = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \text{ e} \quad (3.97)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (3.98)$$

Dessa forma, multiplica-se as equações de conservação da massa e de quantidade de movimento pelas suas respectivas funções testes e integra-se dentro do domínio Ω , obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (3.99)$$

Separando-se a parcela que contém o tensor de tensões de Cauchy da primeira integral, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (3.100)$$

Para o desenvolvimento dessa integral que foi separada, vale ressaltar o desenvolvimento da seguinte derivada:

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} w_j)}{\partial y_i} = w_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial y_i} \therefore w_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} = \frac{\partial(\sigma_{ij} w_j)}{\partial y_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial y_i},$$

ou em notação simbólica:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma^T \cdot \mathbf{w}) - \sigma^T : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}. \quad (3.101)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T d\Omega = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma^T \cdot \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \sigma^T : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} d\Omega, \quad (3.102)$$

sendo possível reescrever, a partir do Teorema da Divergência:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T d\Omega = \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N - \int_{\Omega} \sigma^T : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} d\Omega, \quad (3.103)$$

em que $\mathbf{h} = \sigma^T \cdot \mathbf{n}$ é o valor prescrito de força de superfície em Γ_N .

Dessa maneira, pode-se substituir 3.103 em 3.100, obtendo-se a forma fraca, expressa como a Equação 3.104, onde procura-se determinar $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$ e $\forall q \in \mathcal{V}_p \forall t \in (0, T)$, sendo T o tempo analisado, dados \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{h} e $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N + \\ \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

(Escrever sobre condição de LBB e modelos estabilizados)

3.4 Modelos de Turbulência

A presente seção apresentará a fundamentação teórica dos modelos de turbulência baseado em grandes vórtices (LES) no item 3.4.1, métodos variacionais multiescala (VMS) no item 3.4.2 e *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) no item 3.4.3.

3.4.1 Large Eddy Simulation

A simulação de grandes vórtices se baseia na observação de que vórtices formados em pequenas escalas possuem comportamento isotrópico, o que permite uma modelagem dessas escalas, enquanto as grandes escalas podem ser computadas diretamente. Assim, realiza-se uma separação de escalas por meio de um filtro, que irá reescrever as equações de Navier-Stokes em termos de

parcelas filtradas (ou de grandes escalas), denotadas para uma propriedade qualquer como $\bar{\phi}$, e uma parcela não filtrada (ou de escalas finas ou flutuações), denotada como ϕ' (GERMANO et al., 1991; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000). Para isso, considera-se uma filtragem dada por:

$$\bar{\phi} = \int_{D_{\Delta}(\mathbf{y})} g(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\Delta}) \phi(\mathbf{y}_{\Delta}, t) d\mathbf{y}_{\Delta}, \quad (3.105)$$

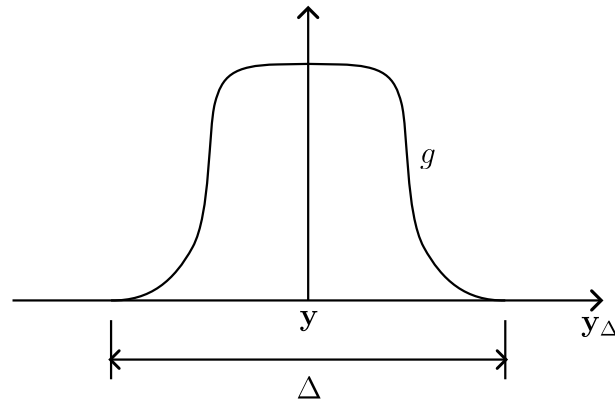
em que $D_{\Delta}(\mathbf{y})$ é um subconjunto de Ω que determina a abrangência do filtro, \mathbf{y}_{Δ} é um ponto na vizinhança de \mathbf{y} e g é o filtro, que deve possuir a propriedade de homogeneidade, $g(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\Delta}) = g(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\Delta})$.

Hughes, Mazzei e Jansen (2000) apresentam ainda uma possibilidade de abrangência de filtro dada por:

$$D_{\Delta}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{y}_{\Delta} \in \mathbb{R}^{n_{sd}} | \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{\Delta}) < \Delta/2\}, \quad (3.106)$$

na qual $\Delta/2$ é o raio de abrangência do filtro centrado em \mathbf{y} e ρ é a distância Euclidiana de \mathbf{y}_{Δ} à \mathbf{y} . A Figura 16 apresenta esquematicamente o filtro considerado, assim como seu domínio de abrangência.

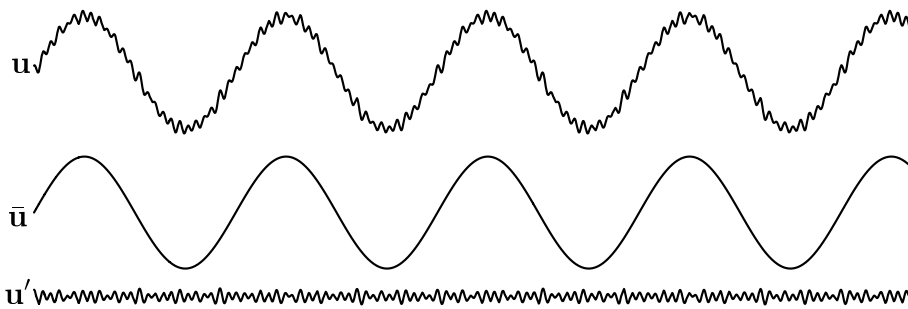
Figura 16 – Desenho esquemático do filtro considerado.



Fonte: Hughes, Mazzei e Jansen (2000) - Adaptado.

Dessa maneira, é possível separar os efeitos das grandes escalas e das pequenas escalas, o que pode ser observado esquematicamente na Figura 17, a qual apresenta o efeito da filtragem sobre um campo de velocidades \mathbf{u} .

Figura 17 – Efeito da filtragem sobre um campo de velocidades \mathbf{u} .



Fonte: Hughes, Mazzei e Jansen (2000) - Adaptado.

Depois pesquisar sobre o problema do domínio Ω/Ω_{Δ}

Assim, em uma descrição Euleriana, pode-se obter as equações de Navier-Stokes filtradas:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.107)$$

As condições de contorno são as mesmas, considerando c.c. filtradas?

Pode-se perceber que o termo convectivo impede a completa separação dos termos $\bar{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u}' devido à sua natureza altamente não-linear. Por conta disso a parcela não filtrada não pode ser ignorada nesse problema, sendo necessário realizar algumas manipulações algébricas. Logo, sabendo-se que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, pode-se reescrever a equação da conservação de movimento como:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \otimes (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = \mathbf{0} \quad (3.108)$$

Nesse sentido, surgirão termos cruzados entre $\bar{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u}' , o que serão condensados em um tensor de subescala (*Subgrid-Scale* - SGS) \mathbf{T} dado por (PIOMELLI, 1999; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000):

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} = -(\mathbf{L} + \mathbf{C} + \mathbf{R}), \quad (3.109)$$

no qual $L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ é o tensor de Leonard, que representa as interações entre as grandes escalas, podendo ser determinado explicitamente utilizado para análise de erros, $C_{ij} = \overline{u_i u_j'} + \overline{u_i' u_j}$ é o tensor de termos cruzados, representando a interação entre as grandes e pequenas escalas e $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$ é o tensor de tensões SGS de Reynolds, que rerepresenta a interação entre as pequenas escalas (PIOMELLI, 1999). Assim pode-se escrever que:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = \mathbf{0}. \quad (3.110)$$

Aplicando a incompressibilidade e substituindo-se σ pelo modelo constitutivo 3.92, sabendo que se trata de um tensor simétrico, tem-se que:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} - \bar{\mathbf{f}} \right) - 2\mu \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \nabla_{\mathbf{y}} \bar{p} = \mathbf{0}, \quad (3.111)$$

sendo $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{u}})/2$. Assim, dividindo-se a Equação 3.111 por ρ , substituindo $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ por 3.90 e fazendo algumas manipulações tem-se que:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{p}}{\rho} = \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} + \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.112)$$

em que $\nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}}$ é o Laplaciano de $\bar{\mathbf{u}}$ e ν é a viscosidade dinâmica, dada por $\nu = \mu/\rho$.

Portanto, o problema se ser resolvido será:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{p}}{\rho} = \nu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{T} + \bar{\mathbf{f}} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.113)$$

o que revela a necessidade de se determinar um tensor \mathbf{T} , em especial o seu tensor desviador:

$$\text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \text{tr } \mathbf{T}, \quad (3.114)$$

que descreva adequadamente as interações entre diferentes escalas. Isso pode se tornar problemático uma vez que não se possui solução para as pequenas escalas. Dessa forma, considera-se um modelo capaz de fazer essa descrição, sendo observado, por exemplo, o modelo de viscosidade de vórtice de Smagorinsky, desenvolvido por [Smagorinsky \(1963\)](#). Nesse cenário faz-se que:

$$\mathbf{T}_S = 2\nu_T \dot{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.115)$$

sendo ν_T a viscosidade de vórtice SGS, dada por ([GERMANO et al., 1991](#); [PIOMELLI, 1999](#); [HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000](#)):

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 \|\dot{\bar{\varepsilon}}\|, \quad (3.116)$$

em que C_S é a constante de Smagorinsky e $\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|$ é a magnitude do tensor de taxa de deformação em grandes escalas, dada por:

$$\|\dot{\bar{\varepsilon}}\| = (2\dot{\bar{\varepsilon}} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}})^{1/2}. \quad (3.117)$$

Note que o tensor \mathbf{T}_S é um tensor desviador, ou seja, $\mathbf{T}_S = \text{dev } \mathbf{T}_S$.

[Germano et al. \(1991\)](#), [Hughes, Mazzei e Jansen \(2000\)](#) ainda fazem algumas constatações sobre o modelo de Smagorinsky, os quais destacam-se o fato de \mathbf{T}_S não possuir um comportamento assintótico próximo às paredes, o que se esperaria de \mathbf{T} , os valores de C_S na presença de cisalhamento médio causaram amortecimentos excessivos e o tensor \mathbf{T}_S impede a energia de fluir entre diferentes escalas, podendo ser significativo em alguns casos.

Como tentativa de se resolver esses problemas, [Germano et al. \(1991\)](#) propuseram assumir C_S como uma função $C_S = C_S(\mathbf{y}, t)$, permitindo, assim, que esse parâmetro se adapte para melhor modelar as pequenas escalas.

Com isso, e considerando que a dissipação de energia cinática é igual àquela produzida, pode-se obter a amplitude espectral da energia cinética ($E(k)$) como ([HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000](#)):

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.118)$$

em que α é a constante de Kolmogoroff, ε é a dissipação turbulenta.

descrever melhor o que é k , segundo [Hughes, Mazzei e Jansen \(2000\)](#): $E(k)$ é a amplitude espectral da energia cinética, definida como a integral sobre a superfície de esferas parametrizadas com raio k (?)

Assim pode-se determinar o valor de $\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|$ como:

$$\frac{1}{2} \|\dot{\bar{\varepsilon}}\| = \int_0^{\bar{k}} k^2 E(k) dk, \quad (3.119)$$

no qual \bar{k} é o limite de resolução.

Substituindo 3.118 em 3.119, resolvendo a integral e fazendo algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\|\dot{\bar{\varepsilon}}\|^3 = \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^{3/2} \bar{k}^2 \varepsilon. \quad (3.120)$$

Dessa forma, realiza-se o balanço da energia cinética turbulenta dissipada com a produzida, obtendo-se:

$$\varepsilon = \mathbf{T}_S \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.121)$$

que, após seu desenvolvimento, tem-se uma expressão que relaciona os valores de C_S , Δ e ν_T com \bar{k} :

$$C_S \Delta = \left(\frac{2}{3\alpha}\right)^{3/4} \bar{k}^{-1} \varepsilon \quad (3.122)$$

$$\nu_T = \left(\frac{2}{3\alpha}\right) \varepsilon^{1/3} \bar{k}^{-4/3}. \quad (3.123)$$

3.4.2 Variational Multiscale Methods

O Método Variacional Multiescala foi introduzido por [Hughes \(1995\)](#), [Hughes et al. \(1998\)](#), [Hughes, Mazzei e Jansen \(2000\)](#), o qual faz a separação dos espaços de tentativas e de testes em subespaços que representem as escalas grosseiras, que se tratam de subespaços de dimensões finitas e denotadas por uma barra, e as escalas finas, que são subespaços de infinitas dimensões e denotadas por $'$, ou seja:

$$\mathcal{S}_u = \bar{\mathcal{S}}_u \oplus \mathcal{S}'_u, \quad (3.124a)$$

$$\mathcal{S}_p = \bar{\mathcal{S}}_p \oplus \mathcal{S}'_p, \quad (3.124b)$$

$$\mathcal{V}_u = \bar{\mathcal{V}}_u \oplus \mathcal{V}'_u \text{ e} \quad (3.124c)$$

$$\mathcal{V}_p = \bar{\mathcal{V}}_p \oplus \mathcal{V}'_p. \quad (3.124d)$$

Inicialmente será abordado uma técnica baseada em uma descrição Euleriana com domínio fixo, para maior familiarização com o método, e na sequência será apresentada uma formulação em descrição ALE utilizando domínio móvel.

O sistema a ser resolvido parte do apresentado em 3.73, que em sua forma fraca se encontra em 3.104. Primeiramente se a separação dos membros em:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (3.125a)$$

$$p = \bar{p} + p', \quad (3.125b)$$

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}' \text{ e} \quad (3.125c)$$

$$q = \bar{q} + q', \quad (3.125d)$$

em que se adota $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}$ e $q = \bar{q}$ e as escalas finas \mathbf{u}' e p' podem ser modeladas como:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\tau_{\text{SUPS}}}{\rho} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \text{ e} \quad (3.126a)$$

$$p' = -\rho \nu_{\text{LSIC}} r_C(\bar{\mathbf{u}}), \quad (3.126b)$$

nas quais τ_{SUPS} e ν_{LSIC} são termos estabilizadores, dados por ([BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZ-](#)

DUYAR, 2013):

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\frac{4}{\Delta t^2} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{G} \bar{\mathbf{u}} + C_I \nu^2 \mathbf{G} : \mathbf{G} \right)^{-1/2} \mathbf{e} \quad (3.127a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = (\text{tr } \mathbf{G} \tau_{\text{SUPS}})^{-1}, \quad (3.127b)$$

onde C_I é uma constante e:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}^T \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.128)$$

Já os termos $\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ e $r_C(\bar{\mathbf{u}})$ são os resíduos associados à equação de conservação da quantidade de movimento e da continuidade, respectivamente:

$$\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \mathbf{e} \quad (3.129a)$$

$$r_C(\bar{\mathbf{u}}) = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (3.129b)$$

Outra forma de se modelar os parâmetros estabilizadores pode ser dado por (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-1/2} \mathbf{e} \quad (3.130a)$$

$$\nu_{\text{LSIC}} = \tau_{\text{SUPS}} \|\bar{\mathbf{u}}\|^2, \quad (3.130b)$$

tal que:

$$\tau_{\text{SUGN1}} = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} |\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1}, \quad (3.131a)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (3.131b)$$

$$\tau_{\text{SUGN3}} = \frac{h_{\text{RGN}}^2}{4\nu}, \quad (3.131c)$$

$$h_{\text{RGN}} = 2 \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} |\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a| \right)^{-1} \mathbf{e} \quad (3.131d)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \|\bar{\mathbf{u}}\|}{\|\nabla_{\mathbf{y}} \|\bar{\mathbf{u}}\|}. \quad (3.131e)$$

Assim, obtém-se o problema do Método Variacional Multiescala Baseado em Resíduos (*Residual-Based Variational Multiscale* - RBVMS) que busca determinar $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{S}}_u$ e $\bar{p} \in \bar{\mathcal{S}}_p$, tais que para todo $\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_u$ e $\bar{q} \in \bar{\mathcal{V}}_p$ (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}) : \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \bar{\mathbf{w}} \cdot (\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}}}{\rho} : (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) d\Omega^e = 0.
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Para a discretização do problema pode-se realizar a separação da dependência espacial e temporal para os espaços tentativas e testes como:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} \mathbf{u}_a(t) N_a(\mathbf{y}), \tag{3.133a}$$

$$\bar{p}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} p_a(t) N_a(\mathbf{y}), \tag{3.133b}$$

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} \mathbf{w}_a N_a(\mathbf{y}) \text{ e} \tag{3.133c}$$

$$\bar{q}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} q_a N_a(\mathbf{y}). \tag{3.133d}$$

Substituindo 3.133c e 3.133d em 3.132 obtém-se dois vetores que representam o resíduo das equações da conservação da quantidade de movimento e da continuidade, nos quais $\bar{\mathbf{w}}_a$ e q_a são arbitrários:

$$\mathbf{N}_M = [(N_M)_{a,i}], \tag{3.134a}$$

$$\mathbf{N}_C = [(N_C)_a], \tag{3.134b}$$

$$\begin{aligned}
(N_M)_{a,i} = & \int_{\Omega} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \varepsilon(N_a \hat{\mathbf{e}}_i) : \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega - \int_{\Gamma_N} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot N_a \hat{\mathbf{e}}_i) r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i}{\rho} : (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) d\Omega^e,
\end{aligned} \tag{3.134c}$$

$$(N_C)_a = \int_{\Omega} N_a \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a}{\rho} \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e \tag{3.134d}$$

Sendo os vetores $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_B]$, $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{\mathbf{u}}_B]$ e $\mathbf{P} = [p_B]$, que representam, respectivamente, os graus de liberdade em velocidades, primeira derivada temporal das velocidades e pressões nodais, então o problema a ser resolvido será dado por: encontrar \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{P} , tais que:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \text{ e} \quad (3.135a)$$

$$\mathbf{N}_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \quad (3.135b)$$

Uma formulação alternativa à apresentada é apresentada por [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#), denominada como SUPG/PSPG, onde se omite os dois últimos termos da equação 3.132 e se utiliza de valores diferentes de τ para as equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade, resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}) : \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left(\frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e = 0, \end{aligned} \quad (3.136)$$

na qual, segundo os autores, adota-se $\tau_{\text{PSPG}} = \tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{SUPS}}$ para uma boa variedade de problemas.

Por sua vez, a formulação baseada em uma descrição ALE parte das equações apresentadas em 3.84, cujo problema semi-discreto pode ser dado por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma(\mathbf{u}, p) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma + \int_{\Omega} q \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Portanto o problema semi-discreto em formulação RBVMS de escoamentos incompressíveis segundo uma descrição ALE será: encontrar $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{S}}_u$ e $\bar{p} \in \bar{\mathcal{S}}_p$, tais que para todo $\bar{\mathbf{w}} \in \bar{\mathcal{V}}_u$ e $\bar{q} \in \bar{\mathcal{V}}_p$ ([BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013](#)):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\mathbf{w}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{\mathbf{w}}) : \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega - \\
& \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \left((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}} + \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{q}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{w}} r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \bar{\mathbf{w}} \cdot (\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{w}}}{\rho} : (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) d\Omega^e = 0,
\end{aligned} \tag{3.138}$$

em que os termos estabilizadores τ_{SUPS} e ν_{LSIC} são alterados das equações 3.127, onde se considera, ao invés da velocidade do fluido $\bar{\mathbf{u}}$, a velocidade relativa à malha $(\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}})$, ou seja, $\bar{\mathbf{u}} \leftarrow \bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}$.

Para o problema discretizado utiliza-se as seguintes expressões de aproximação dos espaços tentativas e testes:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} \mathbf{u}_a(t) N_a(\mathbf{y}, t), \tag{3.139a}$$

$$\bar{p}(\mathbf{y}, t) = \sum_{\eta^s} p_a(t) N_a(\mathbf{y}, t), \tag{3.139b}$$

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} \mathbf{w}_a N_a(\mathbf{y}, t) \mathbf{e} \tag{3.139c}$$

$$\bar{q}(\mathbf{y}) = \sum_{\eta^w} q_a N_a(\mathbf{y}, t), \tag{3.139d}$$

onde as funções de forma $N_a(\mathbf{y}, t)$ são definidas como:

$$N_a(\mathbf{y}, t) = \hat{N}_a(\hat{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{y}, t)), \tag{3.140}$$

em que $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t)$ é a função de mudança de configuração de $\hat{\Omega} \rightarrow \Omega$, conforme apresentado no item 3.3.2, dada em sua forma discreta por:

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \sum_{a \in \eta^s} (\hat{\mathbf{x}}_a + \Delta \hat{\mathbf{x}}_a(t)) \hat{N}_a(\hat{\mathbf{x}}), \tag{3.141}$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}_a$ as posições nodais em $\hat{\Omega}$, $\Delta \hat{\mathbf{x}}(t)$ o deslocamento nodal e \hat{N}_a é a função de forma fixa da discretização de $\hat{\Omega}$. Nota-se, portanto, que as funções $N_a(\mathbf{y}, t)$ possuem dependência temporal devido à movimentação da malha.

Com isso, define-se os vetores de resíduos da conservação de quantidade de movimento e da continuidade como:

$$\mathbf{N}_M = [(N_M)_{a,i}], \tag{3.142a}$$

$$\mathbf{N}_C = [(N_C)_a], \tag{3.142b}$$

$$\begin{aligned}
(N_M)_{a,i} = & \int_{\Omega} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} + (\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \varepsilon(N_a \hat{\mathbf{e}}_i) : \sigma(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega - \int_{\Gamma_N} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{h}} d\Gamma_N + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}}((\bar{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}}(\nabla_{\mathbf{y}} \cdot N_a \hat{\mathbf{e}}_i) r_C(\bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}}) d\Omega^e - \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a \hat{\mathbf{e}}_i}{\rho} : (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) \otimes (\tau_{\text{SUPS}} \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})) d\Omega^e,
\end{aligned} \tag{3.142c}$$

$$(N_C)_a = \int_{\Omega} N_a \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPS}} \frac{\nabla_{\mathbf{y}} N_a}{\rho} \cdot \mathbf{r}_M(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega^e \tag{3.142d}$$

Assim, pretende-se determinar os vetores \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ e \mathbf{P} , tais que:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0} \text{ e} \tag{3.143a}$$

$$\mathbf{N}_C(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{P}) = \mathbf{0}. \tag{3.143b}$$

Continuar escrevendo sobre ALE (?)

3.4.3 Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Na tentativa de se obter soluções aproximativas para as equações de Navier-Stokes, são desenvolvidas técnicas de aproximação, baseadas em equações diferenciais. Uma dessas aproximações, denominada de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) busca encontrar uma solução a partir da decomposição de Reynolds. Nesse contexto, observa-se que simulações feitas utilizando RANS são mais eficientes computacionalmente que aquelas feitas a partir de LES, além de possuírem uma implementação mais facilitada (ALFONSI, 2009; LING; TEMPLETON, 2015). Ainda segundo Alfonsi (2009), problemas envolvendo RANS podem ser classificados dependendo da quantidade de equações diferenciais resolvidas, em que cada equação adicionada refere-se ao transporte de uma propriedade relativa à turbulência.

Em uma descrição Euleriana, sua obtenção parte da equação 3.73 e considera-se que uma propriedade ϕ pode ser decomposta em duas parcelas: uma referente à média temporal, denotada por uma barra ($\bar{\phi}(\mathbf{y})$), dada por (TENNEKES et al., 1972; SPEZIALE, 1991):

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(\mathbf{y}, t) dt, \tag{3.144}$$

e uma referente às flutuações no espaço-tempo, denotada por $\phi'(\mathbf{y}, t)$, ou seja, $\phi(\mathbf{y}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{y}) + \phi'(\mathbf{y}, t)$.

Vale ressaltar algumas propriedades interessantes relacionadas à média de uma propriedade (ϕ , ϕ_1 ou ϕ_2 quaisquer), tais como:

- a. $\overline{\phi'}(\mathbf{y}) = 0$;
- b. $\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi}$;
- c. $\overline{\phi_1 + \phi_2} = \overline{\phi_1} + \overline{\phi_2}$;
- d. $\overline{\phi_1 \phi_2} = \overline{\phi_1} \overline{\phi_2}$;
- e. $\overline{\phi_1 \phi_2} = \overline{\phi_1} \overline{\phi_2} + \overline{\phi'_1 \phi'_2}$; e
- f. $\overline{\frac{\partial \phi}{\partial y_i}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial y_i}$.

Assim, pode-se tomar a média das Equações de Navier-Stokes, obtendo-se:

$$\begin{cases} \rho \left(\overline{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} \Big|_{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} \right) - \overline{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \sigma^T} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \overline{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.145)$$

Note que, ao tomar a média temporal, o problema se torna independente do tempo. Portanto o termo referente à derivada temporal de \mathbf{u} desaparece. Assim, aplicando também o modelo constitutivo apresentado em 3.3.3, o problema se torna:

$$\begin{cases} \rho \left(\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} \right) - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\overline{2\mu \dot{\epsilon}}) + \nabla_{\mathbf{y}} \overline{p} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.146)$$

Realizando a separação dos parâmetros em suas respectivas parcelas na equação da conservação de movimento, tem-se que:

$$\rho \left(\overline{(\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla_{\mathbf{y}} (\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') - \mathbf{f}} \right) - \mu \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} (\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') + \nabla_{\mathbf{y}}^T (\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) + \nabla_{\mathbf{y}} \overline{p} = \mathbf{0}, \quad (3.147)$$

que leva à seguinte expressão simplificada:

$$\rho \left(\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \mathbf{f}) \right) - \mu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \overline{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \overline{p} = \mathbf{0}, \text{ ou} \quad (3.148a)$$

$$\rho \left(\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial y_i}} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial y_i} - \overline{f_j} \right) - \mu \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial y_i \partial y_i} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial y_j} = 0, \quad (3.148b)$$

a qual representa a equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis em regime estacionário em uma formulação RANS (CHOU, 1945; ALFONSI, 2009).

Além disso, é possível fazer a substituição de $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ e $p = \overline{p} + p'$ na equação da quantidade de movimento, o que leva a:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\overline{\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}} \Big|_{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}' - \overline{\mathbf{f}} \right) - \\ & \mu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \overline{\mathbf{u}} - \mu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \mathbf{u}' + \nabla_{\mathbf{y}} \overline{p} + \nabla_{\mathbf{y}} p' = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Subtraindo 3.148 de 3.149 obtém-se:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}' - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') \right) - \quad (3.150a)$$

$$\mu \nabla_{\mathbf{y}}^2 \mathbf{u}' + \nabla_{\mathbf{y}} p' = \mathbf{0}, \text{ ou} \quad (3.150b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_j}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} + u'_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial y_i} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} - \frac{\partial \bar{u}'_i u'_j}{\partial y_i} \right) - \mu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial y_i \partial y_i} + \frac{\partial p'}{\partial y_j} = 0.$$

e de forma similar tem-se:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}' = 0, \text{ ou} \quad (3.151a)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial y_i} = 0. \quad (3.151b)$$

Nesse contexto vale mencionar o tensor de tensões de Reynolds (dividido pela densidade), dado por $\tau = -\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$, que traz a interferência que os efeitos turbulentos da parcela de flutuação causa no movimento médio (CHOU, 1945; ALFONSI, 2009). Porém, verifica-se que, ao assumir essa separação de variáveis, o problema conta com mais incógnitas que equações para determiná-las. Logo, uma forma de se obter equações adicionais que auxiliem na resolução do problema se encontra na modelagem do tensor de tensões de Reynolds de forma a relacionar as flutuações de velocidades com as velocidades médias.

Segundo Alfonsi (2009) o tensor de Reynolds pode ser subdividido em uma parte isotrópica (τ_{ij}^I) e outra desviadora (τ_{ij}^D):

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^I + \tau_{ij}^D, \quad (3.152)$$

em que:

$$\tau_{ij}^I = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} \mathbf{e} \quad (3.153a)$$

$$\tau_{ij}^D = 2\nu_T \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (3.153b)$$

sendo K a energia cinética média gerada pelo campo de flutuações de velocidade:

$$K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad (3.154)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ é a taxa de deformação do campo de velocidades média:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.155)$$

e ν_T é a viscosidade de vórtice.

Capítulo 4

Metodologia e cronograma

O trabalho será conduzido inicialmente pelo estudo e formulação matemática dos diferentes métodos de modelagem de escoamentos turbulentos e de dinâmica das estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional, seguida pela discretização desses modelos e implementação computacional para obtenção de soluções numéricas. Esses resultados serão validados através da comparação com resultados consagrados na literatura, assim como aplicação em problemas relevantes na engenharia.

A linguagem de programação que será utilizada é a C++ orientada a objeto, em um sistema operacional Linux, uma vez que se é possível aproveitar diversas funções já desenvolvidas pelo grupo de pesquisa. Serão utilizadas as bibliotecas *Boost* e PETSc, que permite a utilização de processamento em paralelo MPI. As malhas serão geradas a partir do *software* Gmsh (GEUZAIN; REMACLE, 2009), e os resultados serão apresentados graficamente pela exportação para o *software* Paraview (AHRENS; GEVECI; LAW, 2005).

O cronograma apresentado na Tabela 3 é planejado tomando-se um período de Novembro de 2022 à Fevereiro de 2024, o qual considera as seguintes etapas para devida execução da pesquisa:

- a. Integralização dos créditos necessários das disciplinas do Mestrado;
- b. Revisão bibliográfica, a qual será realizada ao longo de todo o trabalho, para que o mesmo se mantenha atualizado durante toda sua execução;
- c. Formulação matemática das técnicas de análise de escoamentos turbulentos e de Interação Fluido-Estrutura;
- d. Redação do texto e qualificação de Mestrado;
- e. Implementação computacional das técnicas formuladas;

- Tabela 3 – Cronograma de atividades

Item	2022		2023												2024					
	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev				
a.																				
b.																				
c.																				
d.																				
e.																				
f.																				
g.																				
h.																				

Referências

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. Paraview: An end-user tool for large data visualization. **The visualization handbook**, v. 717, n. 8, 2005.

ALFONSI, G. Reynolds-averaged navier–stokes equations for turbulence modeling. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 62, n. 4, 2009.

ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.

BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent taylor–couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 229, n. 9, p. 3402–3414, 2010.

BAZILEVS, Y. et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 197, n. 1-4, p. 173–201, 2007.

_____. 3d simulation of wind turbine rotors at full scale. part i: Geometry modeling and aerodynamics. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 65, n. 1-3, p. 207–235, 2011.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational fluid-structure interaction: methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CHOU, P. Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. **Quarterly of applied mathematics**, v. 3, n. 1, p. 38–54, 1945.

CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. 1993.

CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional fem. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 3, p. 187–212, 2009.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, Springer, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

_____. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical problems in engineering**, Hindawi, v. 2009, 2009.

_____. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, American Institute of Physics, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

HUGHES, T. J. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. et al. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 166, n. 1-2, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

- HUGHES, T. J.; MAZZEI, L.; JANSEN, K. E. Large eddy simulation and the variational multiscale method. **Computing and visualization in science**, Springer, v. 3, n. 1, p. 47–59, 2000.
- HUGHES, T. J.; OBERAI, A. A. The variational multiscale formulation of les with application to turbulent channel flows. In: **Geometry, mechanics, and dynamics**. [S.l.]: Springer, 2002. p. 223–239.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 191, n. 45, p. 5159–5176, 2002.
- IRGENS, F. **Continuum mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- α method for integrating the filtered navier–stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 305–319, 2000.
- KARAGIOZIS, K. et al. A computational study of supersonic disk-gap-band parachutes using large-eddy simulation coupled to a structural membrane. **Journal of Fluids and Structures**, Elsevier, v. 27, n. 2, p. 175–192, 2011.
- LAI, W. M. et al. **Introduction to continuum mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2009.
- LING, J.; TEMPLETON, J. Evaluation of machine learning algorithms for prediction of regions of high reynolds averaged navier stokes uncertainty. **Physics of Fluids**, AIP Publishing LLC, v. 27, n. 8, p. 085103, 2015.
- MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. [S.l.: s.n.], 1969.
- MASE, G. T.; SMELSER, R. E.; MASE, G. E. **Continuum mechanics for engineers**. [S.l.]: CRC press, 2009.
- PIMENTA, P.; CAMPELLO, E.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.
- PIMENTA, P. d. M.; CAMPELLO, E. d. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: Rods. **Computational Mechanics**, Springer, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.
- PIOMELLI, U. Large-eddy simulation: achievements and challenges. **Progress in aerospace sciences**, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 335–362, 1999.
- POPIOLEK, T. L. Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas. 2005.
- SAMPAIO, P. D. et al. Petrov-galerkin solutions of the incompressible navier-stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 106, n. 1-2, p. 143–178, 1993.
- SANCHES, R. A.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.

ŠEKUTKOVSKI, B. et al. A partitioned solution approach for the fluid–structure interaction of thin-walled structures and high-reynolds number flows using rans and hybrid rans–les turbulence models. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, v. 113, p. 106629, 2021.

SHAUGHNESSY, E. J.; KATZ, I. M.; SCHAFFER, J. P. **Introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: Oxford University Press New York, 2005. v. 8.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. **Monthly weather review**, American Meteorological Society, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963.

SPEZIALE, C. G. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. **Annual review of fluid mechanics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 107–157, 1991.

TENNEKES, H. et al. **A first course in turbulence**. [S.l.]: MIT press, 1972.

TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 28, p. 1–44, 1991.