Primeira Prova de Cálculo II - 18/03/2025 - Manhã

Todas as respostas devem ser justificadas através de cálculos e/ou argumentações estudados na disciplina. Mantenha seu celular fora de seu alcance.

NOME COMPLETO: RAQUEL DE PARDE MOTTA Nota: 22,5

Questão 01 (5 pontos) Uma partícula move-se em linha reta de maneira que a sua velocidade (em metros por segundo) no instante t (em segundos) é dada por

derivada da posição $\vec{v}(t) = t^2 - 2t - 8$

Determine a distância total percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 4$ segundos.

Estudando o sinal de $v(t)$

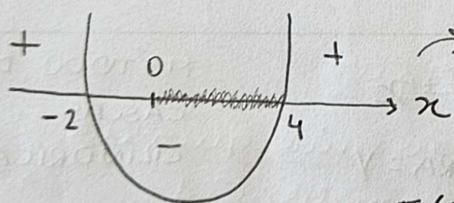
$t^2 - 2t - 8 = \emptyset \rightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \frac{2 \pm 6}{2}$ → $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

conferindo: $4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = \emptyset \rightarrow 16 - 8 - 8 = \emptyset$ ok

$(-2)^2 - 2(-2) - 8 = \emptyset \rightarrow 4 + 4 - 8 = \emptyset$ ok



→ nesse caso, a integral nos dá o deslocamento $\neq$ a dist. total

2,5

$\int_0^4 t^2 - 2t - 8\, dt$

antiderivar

$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} - 8t\right]_0^4$

$F(4) = \frac{4^3}{3} - 4^2 - 8 \cdot 4 = \frac{64}{3} - 16 - 32$

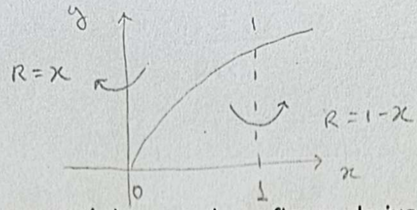
$-$

$F(0) = \frac{0^3}{3} - 0^2 - 8 \cdot 0 = \emptyset$

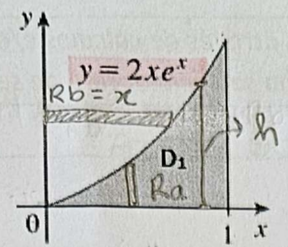
$\therefore \frac{64}{3} - 48 \rightarrow \frac{64 - 144}{3} = \boxed{-\frac{80}{3}\ m}$

pode?

andou p/ trás



Questão 02 (8 pontos) Considere a região que está demarcada na figura abaixo



Fonte: Stewart

a) Escreva uma integral que permita calcular o volume do sólido E obtido pela rotação da região ao redor do eixo x.

$$V = \int_a^b \pi \underbrace{(f(x))}_{\substack{\text{RAIO A} \\ Ra}}^2 dx$$ → MÉTODO DOS DISCOS

$$V = \int_0^1 \pi . (2xe^x)^2 dx$$

b) Escreva uma integral que permita calcular o volume do sólido E obtido pela rotação da região ao redor do eixo y.

$$V = \int_a^b 2\pi \underbrace{x}_{\substack{\text{RAIO CILINDRO} \\ Rb}} \underbrace{f(x)}_{\text{ALTURA}} dx$$

RAIO = x

ALTURA = y

MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

$$V = \int_0^1 2 . \pi . x . (2xe^x) dx$$

$$\frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}} = (\ln x)^{-\frac{1}{2}}$$

Questão 03 (5 pontos) Calcule a integral $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

$$\cancel{\int_e^{e^4} (x\sqrt{\ln x})^{-1}\,dx} \to \cancel{\int_e^{e^4} \left[x.(\ln x)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} dx}$$

$$\int_e^{e^4} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,dx \to \int_e^{e^4} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(\underbrace{\ln x}_{u})^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ derivar C

$$-\frac{1}{2}+1 \to \frac{-1+2}{2} \quad \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \to u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{1}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$$

$du = \frac{1}{x}.dx \to dx = du.x$

$$\int_{x=e}^{x=e^4} \frac{1}{x}.u^{-\frac{1}{2}}.du.x \to \int_{x=e}^{x=e^4} u^{-\frac{1}{2}}\,du$$ C

5 $$\left[2.u^{\frac{1}{2}}\right]_{x=e}^{x=e^4} \longrightarrow \left[2.\sqrt{\ln x}\right]_{e\to a}^{e^4\to b}$$ $F(b)-F(a)$

$F(b) = 2.\sqrt{\ln e^4} = 2.\sqrt{4} = 2.2 = 4$ C

$F(a) = 2.\sqrt{\ln e} = 2.\sqrt{1} = 2.1 = 2$

$\therefore 4-2 = 2$ // C

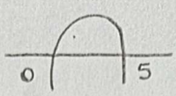
54,59815003

2,718281828

$-x^2 + 5x = \emptyset \rightarrow a = -1,\ b = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow 5^2 - 4 \cdot -1 \cdot \emptyset = 25$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \frac{-5 \pm 5}{-2}$ ↗ $x_1 = \emptyset$ ↘ $x_2 = 5$



$f(2) = 5 \cdot 2 - 2^2 = 10 - 4 = 6$ $\quad g(2) = 2$

$f(4) = 5 \cdot 4 - 4^2 = 20 - 16 = 4$ $\quad g(4) = 4$

$f(0) = 5 \cdot 0 - 0^2 = \emptyset$ $\quad g(0) = \emptyset$

Questão 04 (7 pontos) Seja R a região delimitada pelos gráficos de $f(x) = 5x - x^2$ e $g(x) = x$.

por cima

a) (2 pontos) Escreva uma integral que permita calcular a área da região R.

$$A = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{função de cima}} - g(x)\, dx$$

$$R = \int_0^4 (5x - x^2) - (x)\, dx \rightarrow R = \int_0^4 -x^2 + 4x\, dx$$ C

b) (5 pontos) Calcule a área da região R.

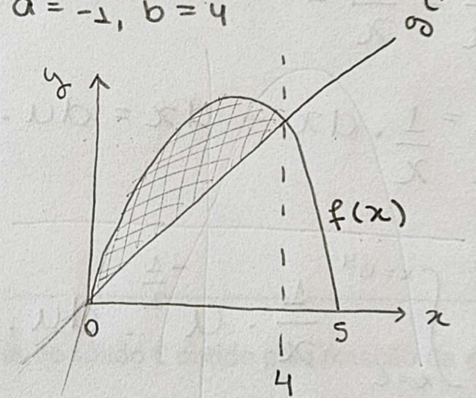
Interseções entre as curvas: $f(x) = g(x)$

$5x - x^2 = x \rightarrow -x^2 + 5x - x = \emptyset \rightarrow -x^2 + 4x = 0$

$a = -1,\ b = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \emptyset = 16$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \frac{-4 \pm 4}{-2}$ ↗ $x_1 = 0$ ↘ $x_2 = 4$



$-0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ OK

$-4^2 + 4 \cdot 4 = 0 \rightarrow -16 + 16 = 0 \rightarrow$ OK

$$\int_0^4 -x^2 + 4x\, dx \rightarrow \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}} \right]_{0 \to a}^{4 \to b}$$

R é igual a

$$F(4) = -\frac{(4)^3}{3} + 2 \cdot (4)^2 = -\frac{64}{3} + 32 \rightarrow \frac{-64 + 96}{3} = \frac{32}{3}$$ C

$$F(0) = -\frac{(0)^3}{3} + 2 \cdot (0)^2 = \emptyset$$

$\cancel{4} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} = 2x^2$

$5x - x = 4x - x^2$