Лабораторная работа №3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Рожков А. В.

28 октября 2024 г.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

1 Теоретическое введение

1.A Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \tag{1}$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt. \tag{3}$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1.A.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

(рис. 1) с амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0\frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(n\Omega_1 t)dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\frac{\tau}{2})}{n\Omega_1\frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{4}$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \tag{5}$$

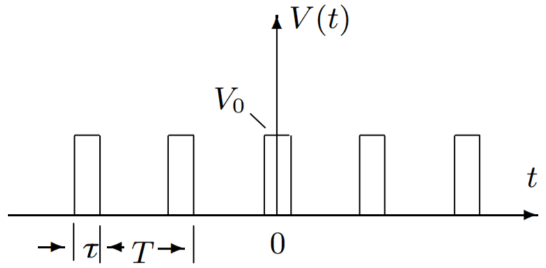

Рис. 1: Прямоугольные импульсы

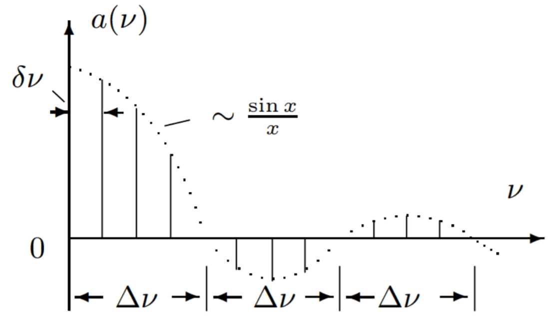

Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

1.A.2 Периодическая последовательность цугов

гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3). Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t)\cos(n\Omega_1 t)dt = V_0 \frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right) \tag{6}$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0.

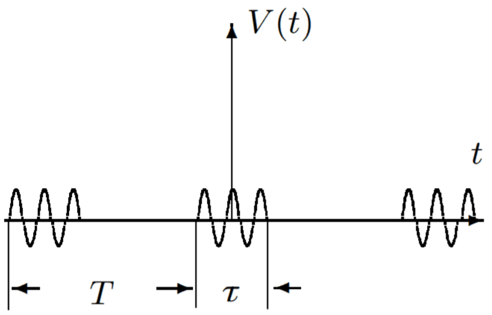

Рис. 3: Последовательность цугов

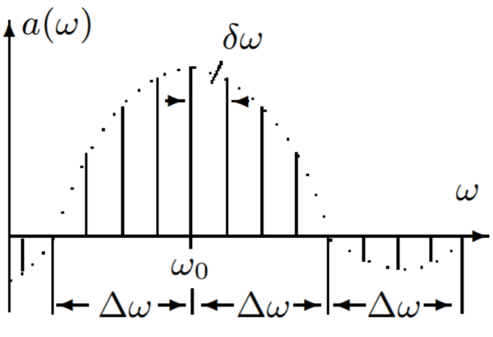

Рис. 4: Спектр последовательности цугов

1.A.3 Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$)) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos\Omega t]\cos\omega_0 t \tag{7}$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{8}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \tag{9}$$

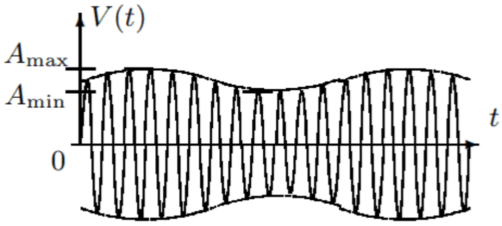

Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

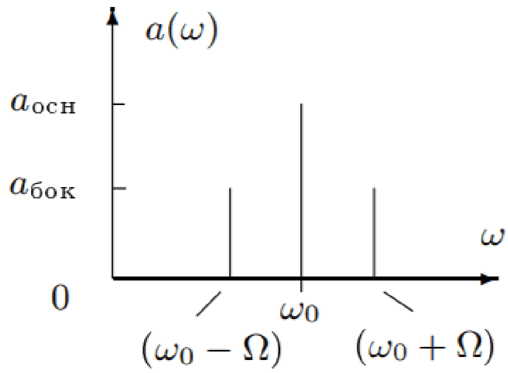

Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания:

$a_{\text{бок}} = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

2 Ход работы

2.A Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

2.A.3 Настроим прямоугольный сигнал

$\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = T/20 = 50$ мкс

2.A.4 Устойчивая картина на экране осциллографа

Снимок экрана на рисунке 7

2.A.5 Спектр прямоугольного сигнала (преобразование Фурье)

Снимок экрана на рисунке 8

2.A.6 Наблюдение изменений спектра при изменеии параметров сигнала

Результаты и параметра на рисунках 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

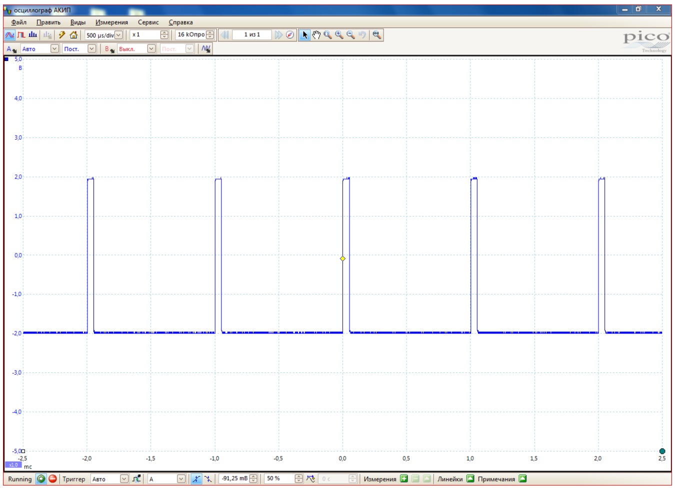

Рис. 7: Устойчивая картина прямоугольных импульсов

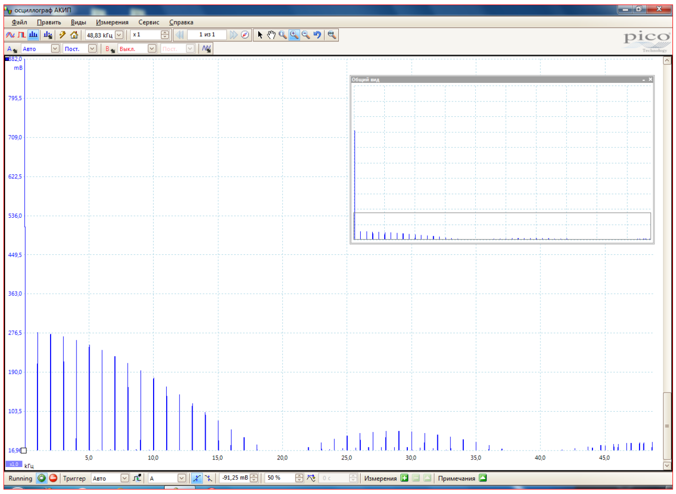

Рис. 8: Спектр прямоугольных импульсов (преобразование Фурье)

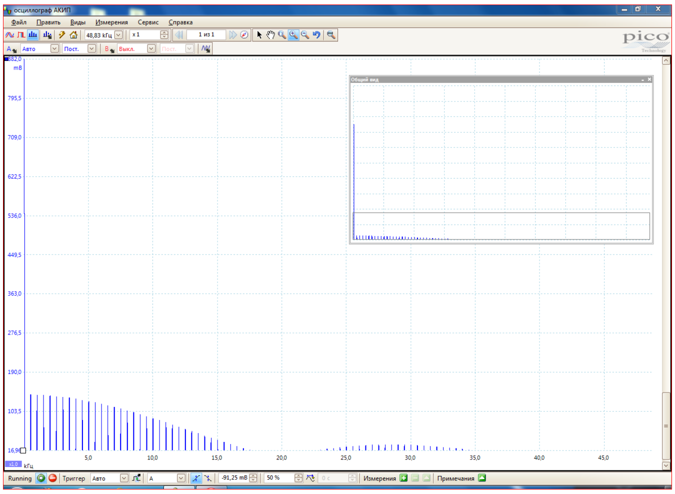

Рис. 9: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 0.5$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

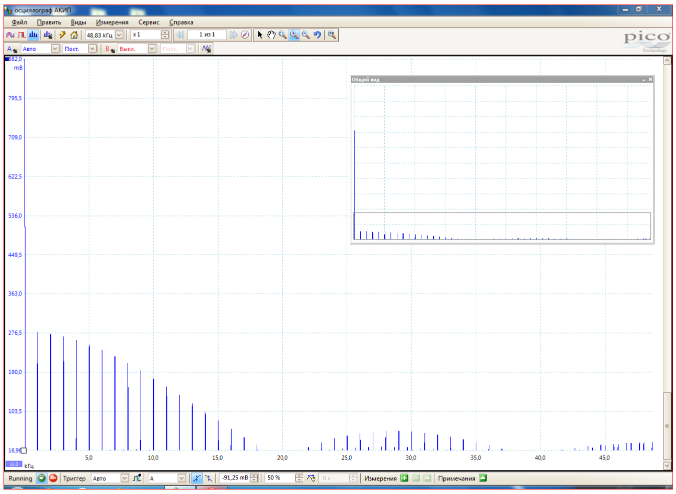

Рис. 10: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

2.A.7 Измерение параматров спектра

Теоретические формулы:

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}, \qquad |a_n| = \frac{|sin\frac{\pi n\tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T}\frac{|sin\pi\nu_n\tau|}{\pi\nu_n\tau}$$

Результаты измерений и расчётов в таблице 1

2.A.8 Измерение полной ширины спектра при различных длинах импульса

Зафиксируем $T = 1$ мс. Результаты в таблице 2

2.A.9 Измерение расстояния между соседними гармониками при различных периодах повторения сигнала

Зафиксируем $\tau = 100$ мкс. Результаты в таблице 3

2.A.10 Графики зависимостей $\Delta\nu(1/\tau)$ и $\delta\nu(1/T)$. Проверка соотношений неопределённости

Графики на рисунках 16 и 17

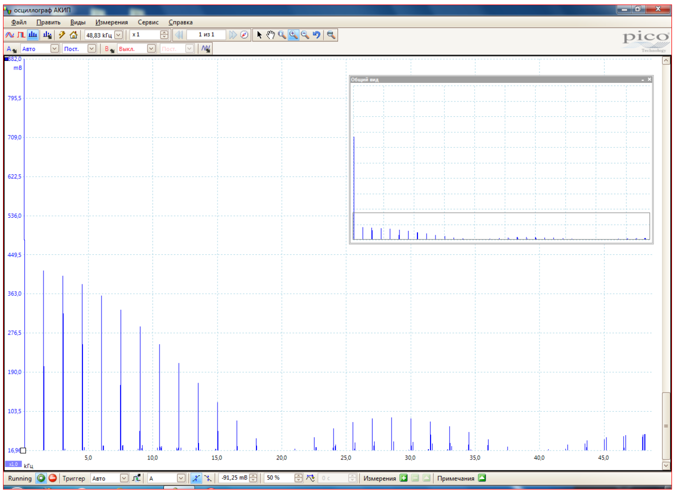

Рис. 11: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

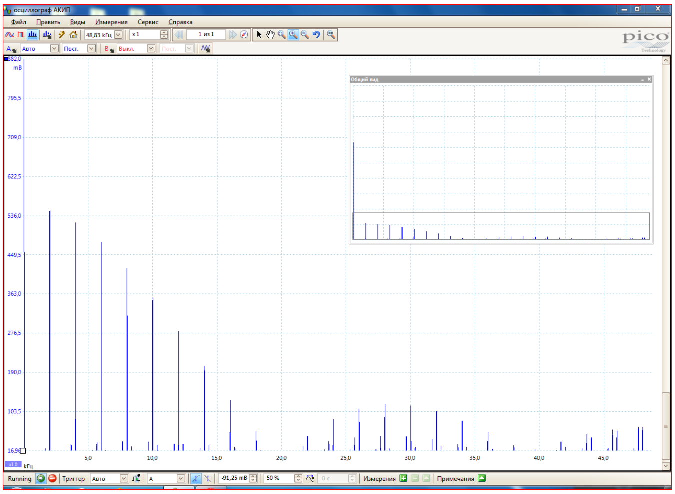

Рис. 12: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

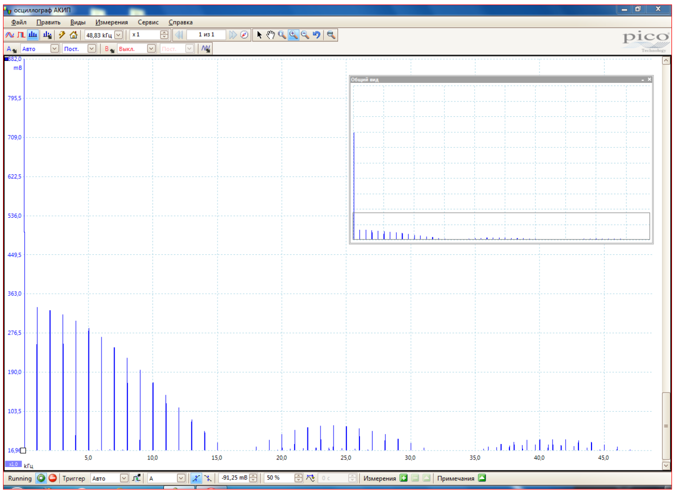

Рис. 13: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 60$ мкс)

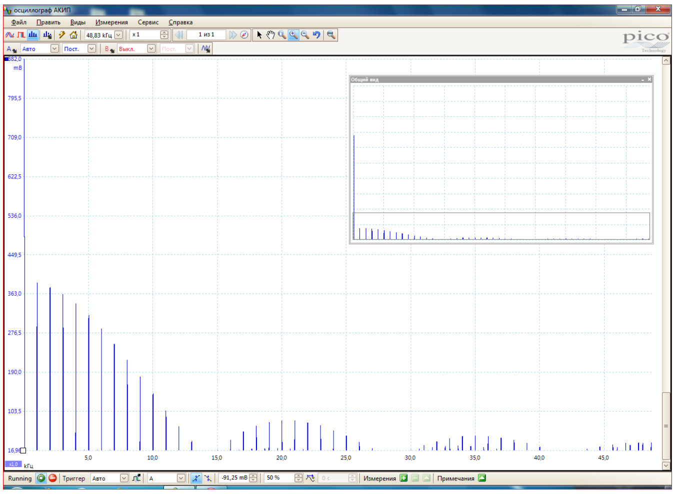

Рис. 14: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 70$ мкс)

n	1	2	3	4	5
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	1.00 ± 0.01	2.00 ± 0.01	3.00 ± 0.01	4.00 ± 0.01	5.00 ± 0.01
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	1	2	3	4	5
$\lvert a_n \rvert^{\text{эксп}}$, усл.ед.	279.0 ± 1.0	274.0 ± 1.0	269.0 ± 1.0	261.0 ± 1.0	251.0 ± 1.0
$\lvert a_n/a_1 \rvert^{\text{эксп}}$	1.000 ± 0.005	0.982 ± 0.005	0.964 ± 0.005	0.935 ± 0.005	0.900 ± 0.005
$\lvert a_n/a_1 \rvert^{\text{теор}}$	1	0.987688	0.967371	0.939347	0.904029

n	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	6.00 ± 0.01	7.00 ± 0.01	8.00 ± 0.01
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	6	7	8
$\lvert a_n \rvert^{\text{эксп}}$, усл.ед.	239.0 ± 1.0	226.0 ± 1.0	211.0 ± 1.0
$\lvert a_n/a_1 \rvert^{\text{эксп}}$	0.857 ± 0.005	0.810 ± 0.005	0.756 ± 0.004
$\lvert a_n/a_1 \rvert^{\text{теор}}$	0.861934	0.813674	0.759948

Таблица 1: Параметры спектра прямоугольного сигнала

Проверим соотношения неопределённостей: $\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}$ и $\delta\nu \sim \frac{1}{T}$

По МНК коэффициенты: $k_\tau = 1.012 \pm 0.007$; $k_T = 1.021 \pm 0.003$. Как видим соотношения выполняются с хорошей точностью.

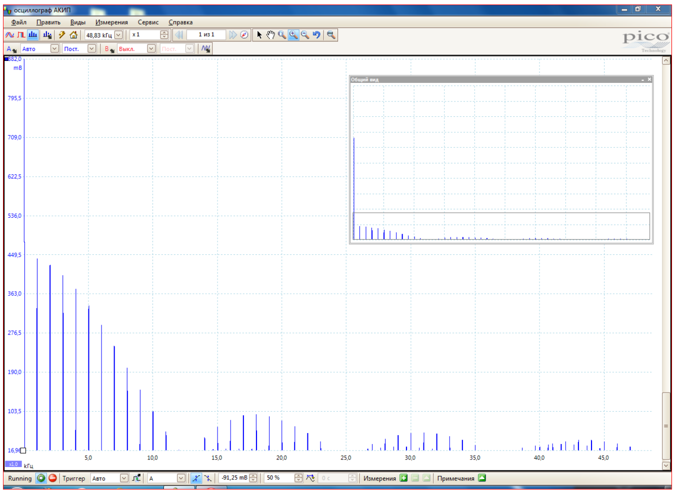

Рис. 15: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 80$ мкс)

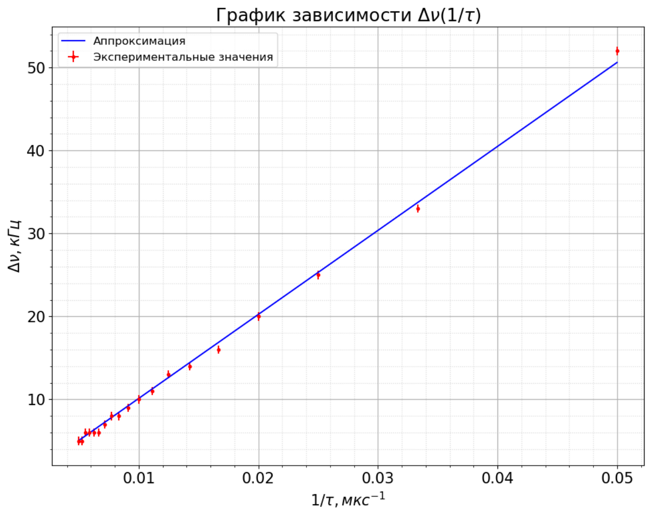

Рис. 16: График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

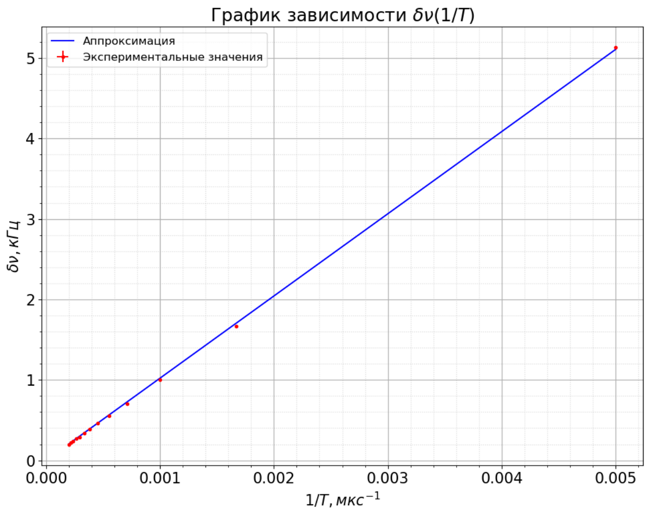

Рис. 17: График зависимости $\delta\nu(1/T)$

τ, мкс	$\Delta\nu$, кГц
20	52.0 ± 0.5
30	33.0 ± 0.5
40	25.0 ± 0.5
50	20.0 ± 0.5
60	16.0 ± 0.5
70	14.0 ± 0.5
80	13.0 ± 0.5
90	11.0 ± 0.5
100	10.0 ± 0.5
110	9.0 ± 0.5
120	8.0 ± 0.5
130	8.0 ± 0.5
140	7.0 ± 0.5
150	6.0 ± 0.5
160	6.0 ± 0.5
170	6.0 ± 0.5
180	6.0 ± 0.5
190	5.0 ± 0.5
200	5.0 ± 0.5

Таблица 2: Зависимость полной ширины спектра от длительности импульса

T, мкс	$\delta\nu$, кГц
200	5.13 ± 0.01
600	1.67 ± 0.01
1000	1.00 ± 0.01
1400	0.70 ± 0.01
1800	0.55 ± 0.01
2200	0.46 ± 0.01
2600	0.39 ± 0.01
3000	0.34 ± 0.01
3400	0.29 ± 0.01
3800	0.27 ± 0.01
4200	0.24 ± 0.01
4600	0.22 ± 0.01
5000	0.20 ± 0.01

Таблица 3: Зависимость расстояния между соседними гармониками от периода повторения