

Лабораторная работа №3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Рожков А. В.

23 ноября 2024 г.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

1 Теоретическое введение

1.А Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (3)$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1.А.1 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

(рис. 1) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= V_0 \frac{\tau}{T}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (5)$$

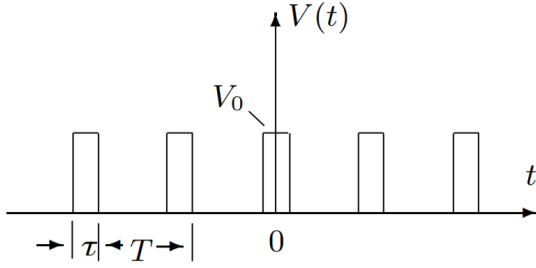


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

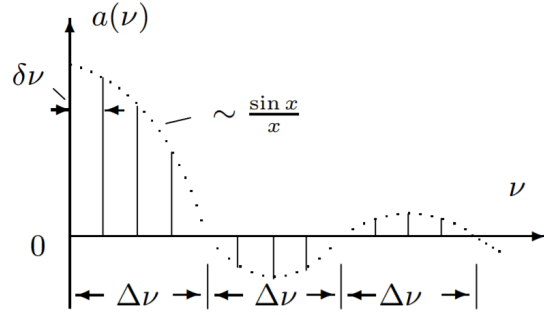


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

1.A.2 Периодическая последовательность цугов

гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3). Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (6)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

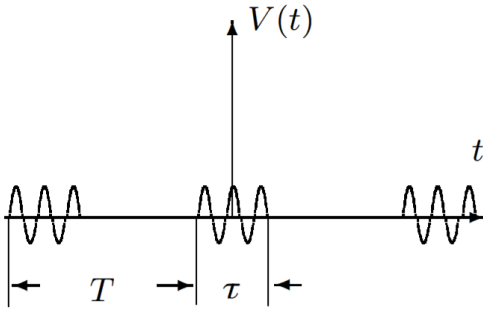


Рис. 3: Последовательность цугов

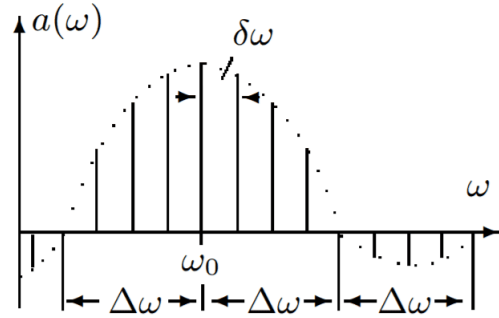


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

1.A.3 Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (8)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (9)$$

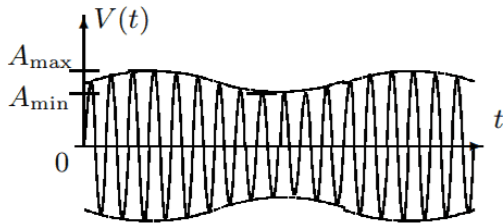


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

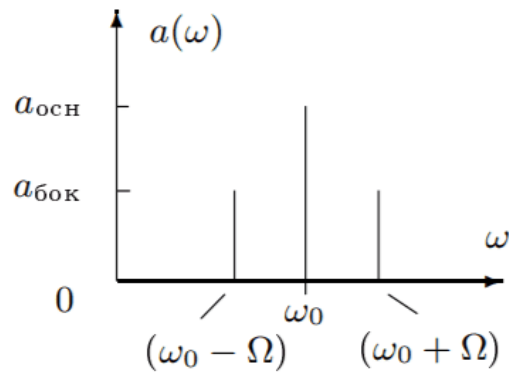


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное не модулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{осн} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды не модулированного колебания:

$$a_{бок} = \frac{A_0 m}{2}. \text{ Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.}$$

2 Ход работы

2.А Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

2.А.3 Настроим прямоугольный сигнал

$$\nu_{повт} = 1 \text{ кГц}, \tau = T/20 = 50 \text{ мкс}$$

2.А.4 Устойчивая картина на экране осциллографа

Снимок экрана на рисунке 7

2.А.5 Спектр прямоугольного сигнала (преобразование Фурье)

Снимок экрана на рисунке 8

2.А.6 Наблюдение изменений спектра при изменении параметров сигнала

Результаты и параметра на рисунках 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

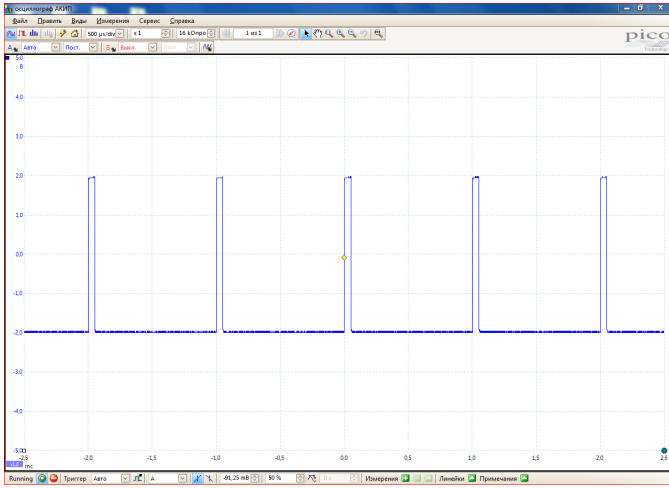


Рис. 7: Устойчивая картина прямоугольных импульсов

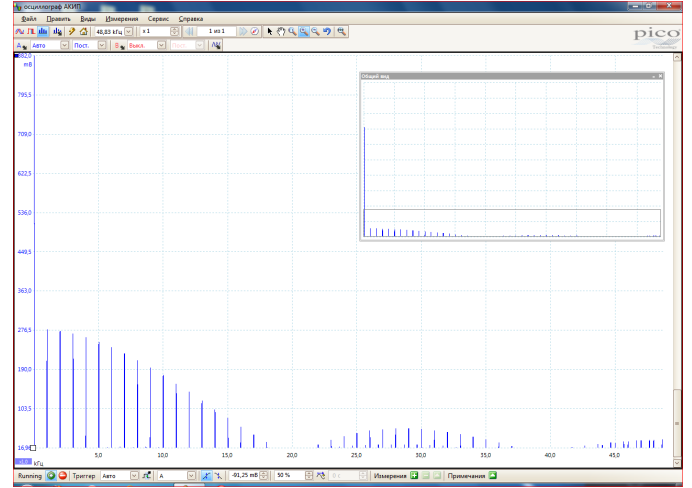


Рис. 8: Спектр прямоугольных импульсов (преобразование Фурье)

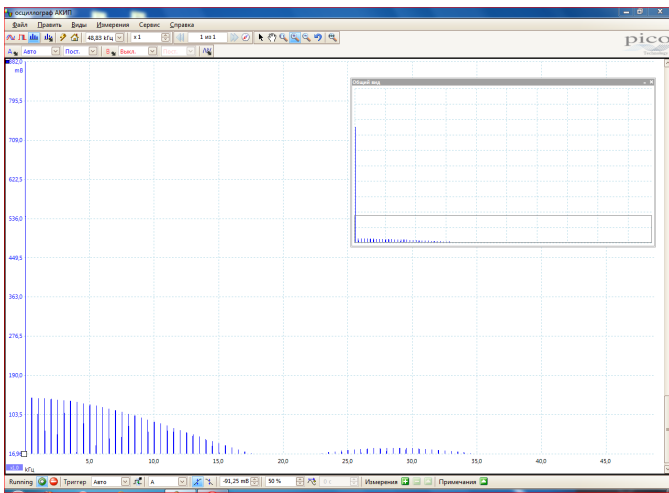


Рис. 9: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 0.5$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

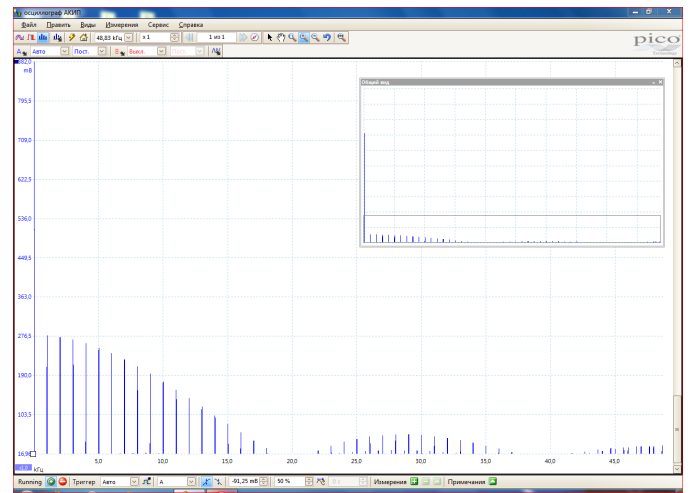


Рис. 10: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

2.А.7 Измерение параметров спектра

Теоретические формулы:

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T},$$

$$|a_n| = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \frac{|\sin \pi \nu_n \tau|}{\pi \nu_n \tau}$$

Результаты измерений и расчётов в таблице 1

2.А.8 Измерение полной ширины спектра при различных длинах импульса

Зафиксируем $T = 1$ мс. Результаты в таблице 2

2.А.9 Измерение расстояния между соседними гармониками при различных периодах повторения сигнала

Зафиксируем $\tau = 100$ мкс. Результаты в таблице 3

2.А.10 Графики зависимостей $\Delta\nu(1/\tau)$ и $\delta\nu(1/T)$. Проверка соотношений неопределённости

Графики на рисунках 16 и 17

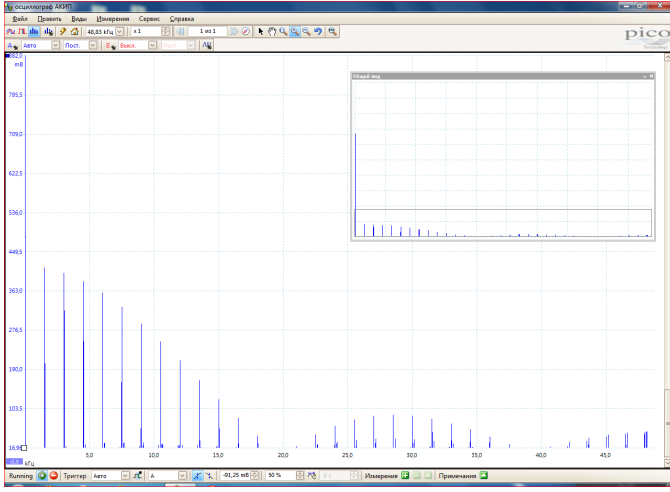


Рис. 11: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

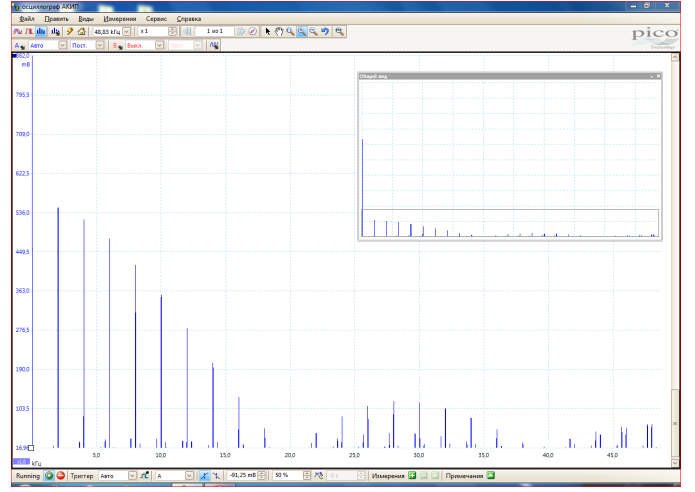


Рис. 12: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

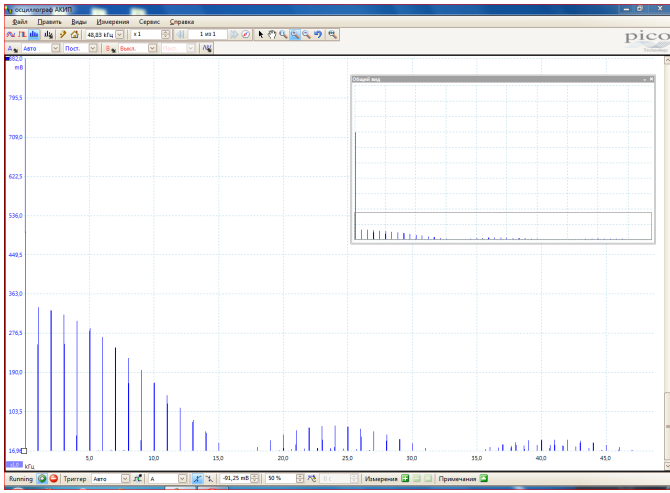


Рис. 13: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 60$ мкс)

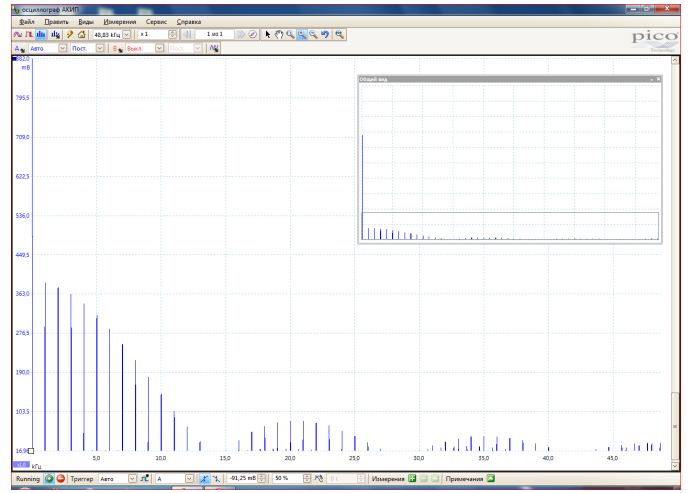


Рис. 14: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 70$ мкс)

n	1	2	3	4	5
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	1.00 ± 0.01	2.00 ± 0.01	3.00 ± 0.01	4.00 ± 0.01	5.00 ± 0.01
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	1	2	3	4	5
$ a_n ^{\text{эксп}}$, усл.ед.	279.0 ± 1.0	274.0 ± 1.0	269.0 ± 1.0	261.0 ± 1.0	251.0 ± 1.0
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1.000 ± 0.005	0.982 ± 0.005	0.964 ± 0.005	0.935 ± 0.005	0.900 ± 0.005
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0.987688	0.967371	0.939347	0.904029

n	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	6.00 ± 0.01	7.00 ± 0.01	8.00 ± 0.01
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	6	7	8
$ a_n ^{\text{эксп}}$, усл.ед.	239.0 ± 1.0	226.0 ± 1.0	211.0 ± 1.0
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	0.857 ± 0.005	0.810 ± 0.005	0.756 ± 0.004
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	0.861934	0.813674	0.759948

Таблица 1: Параметры спектра прямоугольного сигнала

Проверим соотношения неопределённостей: $\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}$ и $\delta\nu \sim \frac{1}{T}$

По МНК коэффициенты: $k_\tau = 1.012 \pm 0.007$; $k_T = 1.021 \pm 0.003$. Как видим соотношения выполняются с хорошей точностью.

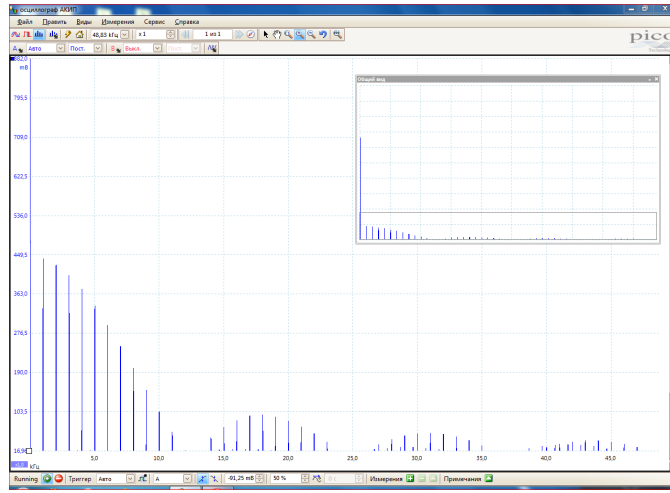


Рис. 15: Спектр прямоугольного сигнала
($\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$; $\tau = 80 \text{ мкс}$)

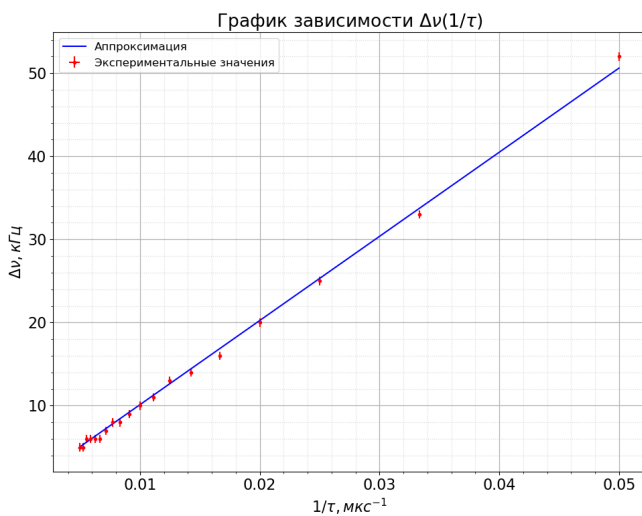


Рис. 16: График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

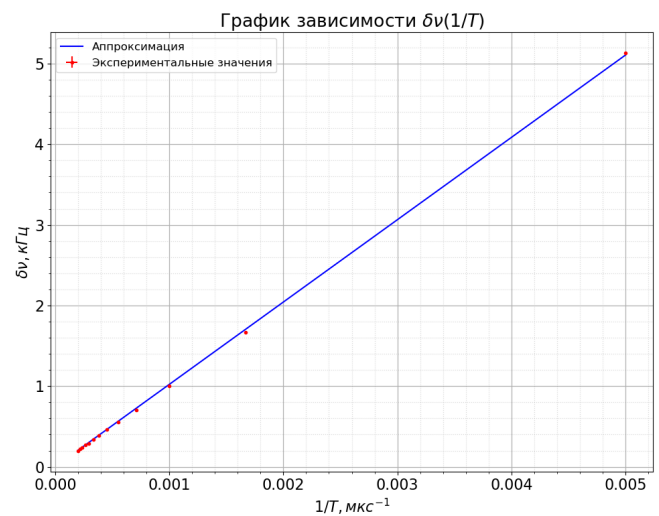


Рис. 17: График зависимости $\delta\nu(1/T)$

2.В Наблюдение периодической последовательности цугов

2.В.11 Устойчивая картина цугов на экране осциллографа

Частота несущей $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$, период повторения $T = 1 \text{ мс}$, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$

Получили картину на рисунке 18

2.В.12 Спектр периодической последовательности цугов

Спектр для сигнала с теми же параметрами на рисунке 19

2.В.13 Изменение спектра при изменении параметров

Спектры представлены на рисунках 19, 20, 21 и 22

2.В.14 Параметры спектров, проверка соотношений неопределённостей

Проверим соотношения неопределённостей: должно выполняться $\Delta\nu \cdot \tau_0 \sim 1$ и $\delta\nu \cdot T \sim 1$

По теореме смещения, смещение по времени не меняет амплитуд спектральных компонент, а лишь сдвигает их фазы (пропорционально частоте компоненты)

τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц
20	52.0 ± 0.5
30	33.0 ± 0.5
40	25.0 ± 0.5
50	20.0 ± 0.5
60	16.0 ± 0.5
70	14.0 ± 0.5
80	13.0 ± 0.5
90	11.0 ± 0.5
100	10.0 ± 0.5
110	9.0 ± 0.5
120	8.0 ± 0.5
130	8.0 ± 0.5
140	7.0 ± 0.5
150	6.0 ± 0.5
160	6.0 ± 0.5
170	6.0 ± 0.5
180	6.0 ± 0.5
190	5.0 ± 0.5
200	5.0 ± 0.5

T , мкс	$\delta\nu$, кГц
200	5.13 ± 0.01
600	1.67 ± 0.01
1000	1.00 ± 0.01
1400	0.70 ± 0.01
1800	0.55 ± 0.01
2200	0.46 ± 0.01
2600	0.39 ± 0.01
3000	0.34 ± 0.01
3400	0.29 ± 0.01
3800	0.27 ± 0.01
4200	0.24 ± 0.01
4600	0.22 ± 0.01
5000	0.20 ± 0.01

Таблица 3: Зависимость расстояния между соседними гармониками от периода повторения

Таблица 2: Зависимость полной ширины спектра от длительности импульса

τ_0 , мс	$\Delta\nu$, кГц	$\Delta\nu \cdot \tau_0$	T , мс	$\delta\nu$, кГц	$\delta\nu \cdot T$
0.02	10	0.2	1	1	1
0.04	5	0.2	1	1	1
0.02	10	0.2	0.5	2	1
0.02	5	0.1	1	1	1

Таблица 4: Параметры спектра последовательности цугов

2.D Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

2.D.19 Модулированный по амплитуде синусоидальный сигнал

Частота несущей $\nu_0 = 50$ кГц, частота модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубина модуляции 50 % ($m = 0.5$)
Устойчивая картина сигнала на рисунке 23

2.D.20 Параметры сигнала

$$A_{\max} = 1.44 \text{ В}$$

$$A_{\min} = 0.48 \text{ В}$$

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{1.44 - 0.48}{1.44 + 0.48} = 0.5 = 50\%$$

Равенство выполняется

2.D.21 Спектр сигнала

Спектры сигнала при различных параметрах на рисунках 24, 25, 26 и 27
Параметры в таблице 5

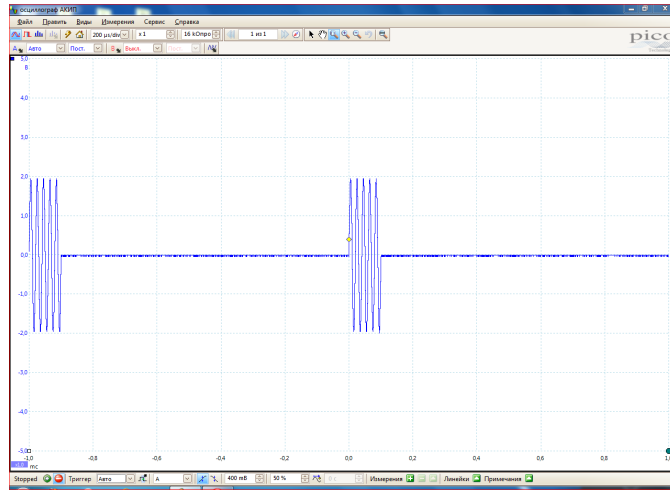


Рис. 18: Устойчивая картина цугов

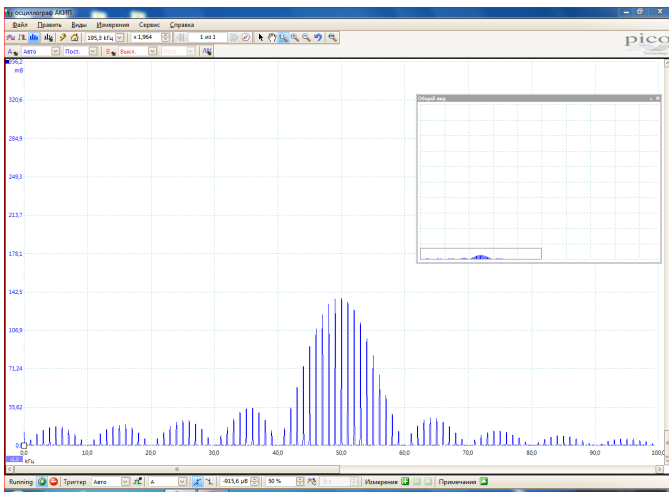


Рис. 19: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 5$)

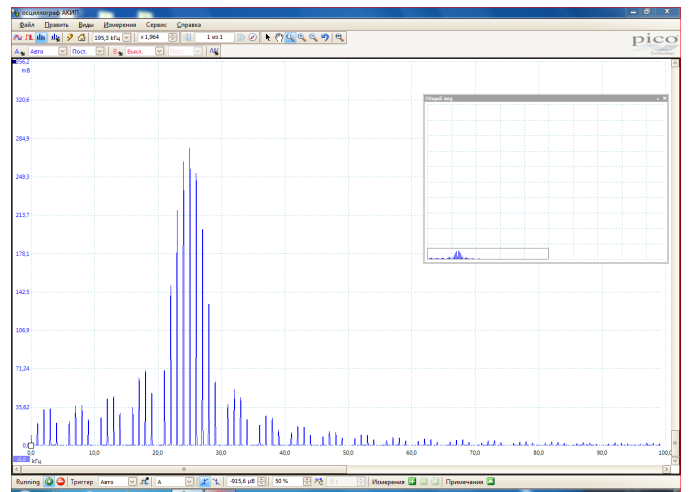


Рис. 20: Спектр цугов
($\nu_0 = 25$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 5$)

ν_0 , кГц	$\nu_{\text{МОД}}$, кГц	m	$\nu_0^{\text{ИЗМ}}$, кГц	$\nu_{\text{МОД}}^{\text{ИЗМ}}$, кГц
50	2	0.5	50	2
100	2	0.5	100	2
50	4	0.5	50	4
50	2	0.75	50	2

Таблица 5: Параметры спектра модулированного сигнала

2.D.22 Отношение амплитуд при различной глубине модуляции

Результат в таблице 6

$m, \%$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$	0.051	0.1	0.15	0.2	0.249	0.299	0.348	0.399	0.449	0.495

Таблица 6: Отношение амплитуд при различной глубине модуляции

2.D.23 График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

Амплитуда боковой гармоники $a_1 = ma_0/2$, где a_0 - амплитуда основной гармоники
График на рисунке 28

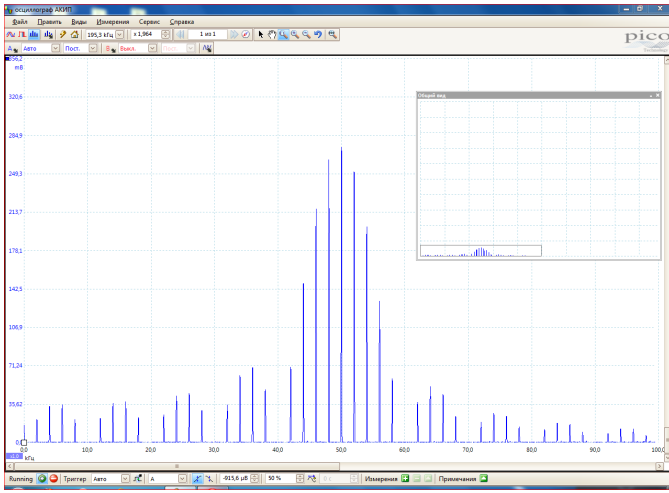


Рис. 21: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 0.5$ мс; $N = 5$)

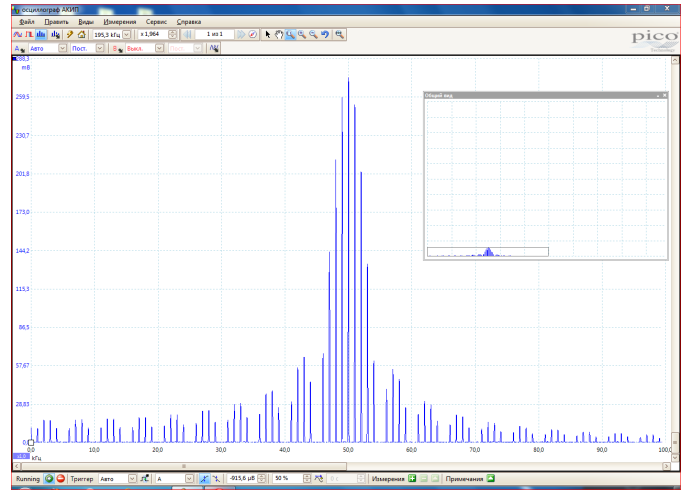


Рис. 22: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 10$)

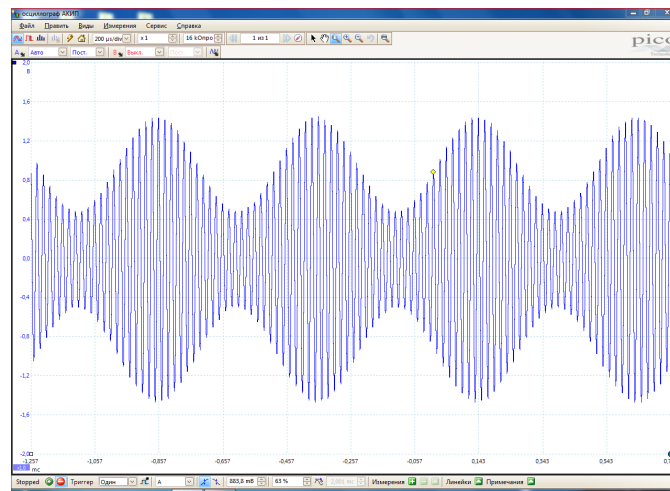


Рис. 23: Устойчивая картина модулированного сигнала

2.F Изучение фильтрации сигналов

2.F.24 Параметры RC-цепочки

$$R = 3 \text{ кОм} \quad C = 1000 \text{ пФ} \quad \tau_{RC} = RC = 3 \text{ мкс} \quad \nu_{RC} = 1/\tau_{RC} = 0.33 \text{ МГц}$$

Подадим последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = 3 \text{ мкс} \sim \tau_{RC}$ и длительностью $\tau = 150 \text{ нс} \sim T/20$

2.F.25 Сигналы и спектры при различных значениях T

Сигналы на рисунках 29, 30 и 31
Спектры на рисунках 32, 33 и 34

2.F.26 Сравнение амплитуд спектральных гармоник исходного и фильтрованного сигналов

Подадим последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = 3 \text{ мкс}$ и длительностью $\tau = 150 \text{ нс}$

Результаты измерения амплитуд фильтрованного и исходного сигнала в таблице 7

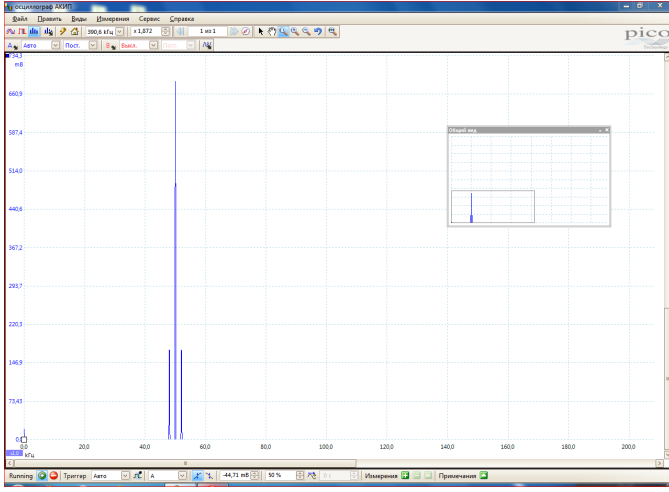


Рис. 24: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; $m = 0.5$)

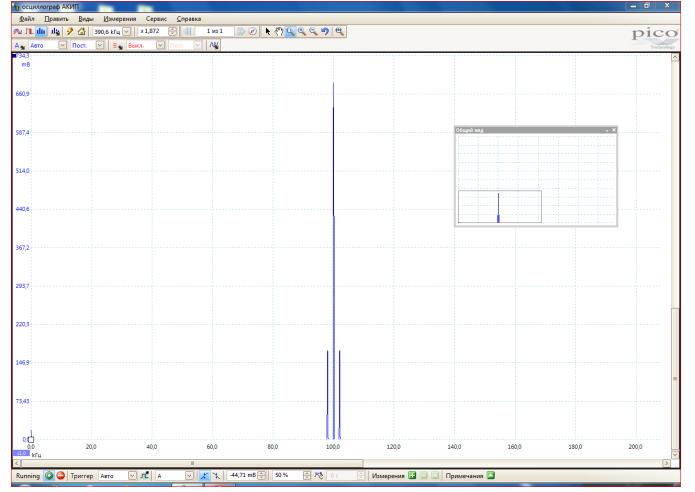


Рис. 25: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 100$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; $m = 0.5$)

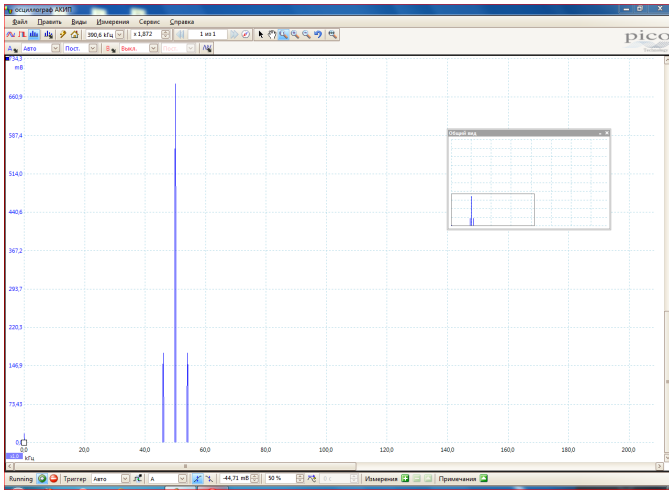


Рис. 26: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 4$ кГц; $m = 0.5$)

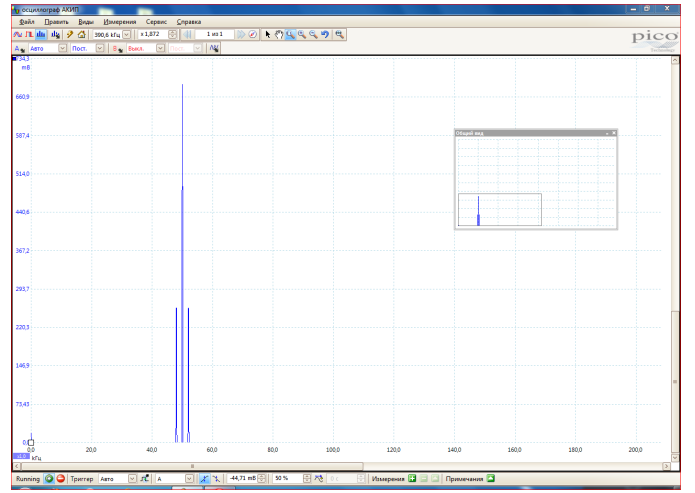


Рис. 27: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; $m = 0.75$)

n	a_n^0 , мВ	a_n^Φ , мВ	$K_n = a_n^\Phi / a_n^0 $
1	264 ± 10	33.5 ± 1.0	0.127 ± 0.006
2	260 ± 10	20.0 ± 1.0	0.077 ± 0.005
3	257 ± 10	9.6 ± 1.0	0.037 ± 0.004
4	247 ± 10	8.8 ± 1.0	0.036 ± 0.004
5	237 ± 10	8.8 ± 1.0	0.037 ± 0.005
6	227 ± 10	8.2 ± 1.0	0.036 ± 0.005
7	216 ± 10	6.4 ± 1.0	0.030 ± 0.005
8	202 ± 10	4.5 ± 1.0	0.022 ± 0.005
9	187 ± 10	2.0 ± 1.0	0.011 ± 0.005

Таблица 7: Сравнение амплитуд спектральных гармоник исходного и фильтрованного сигналов

Теоретическая зависимость $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t') dt'$

Построим график $K(1/\nu)$ на рисунке 35. По углу наклона определим τ_{RC}

$$\tau_{RC} = \frac{1}{2\pi k} = (3.6 \pm 0.6) \text{ мкс}$$

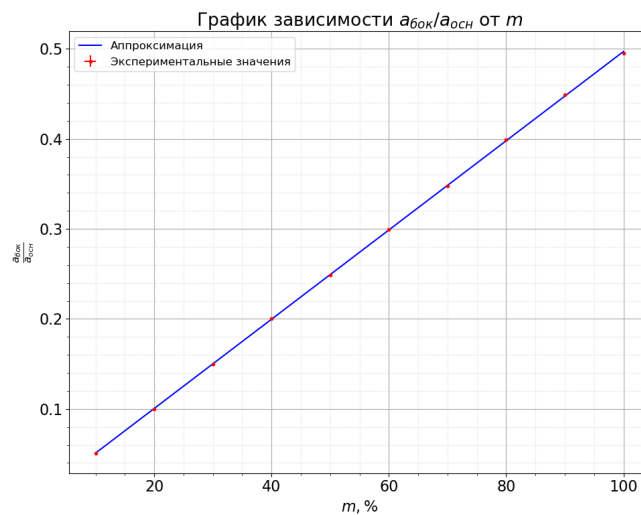


Рис. 28: График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

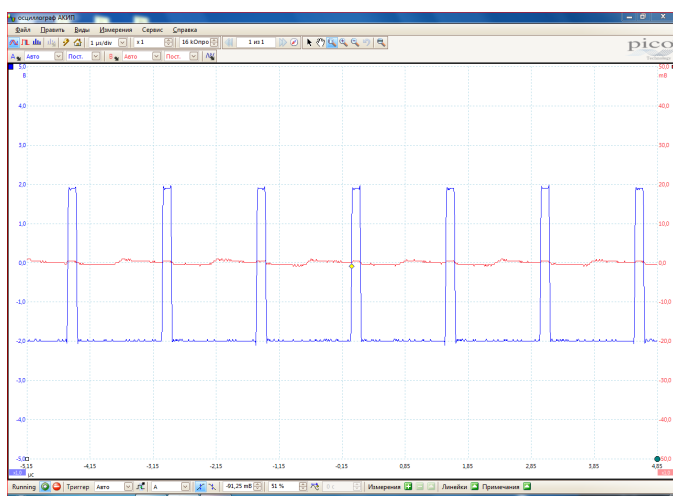


Рис. 29: Прямоугольные импульсы ($T = 1.5$ мкс; $\tau = 150$ нс)

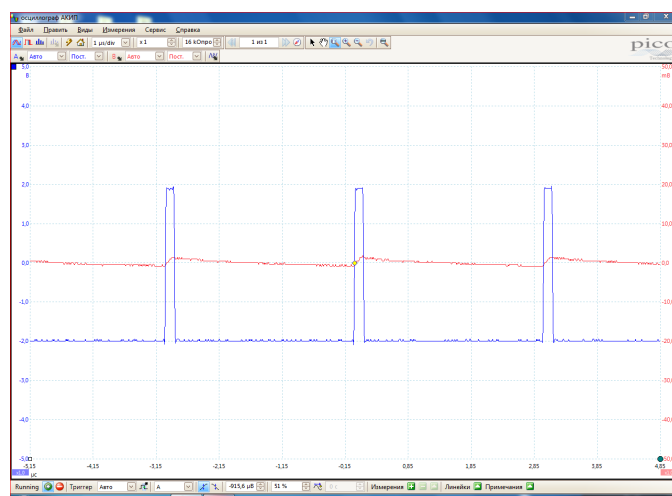


Рис. 30: Прямоугольные импульсы ($T = 3$ мкс; $\tau = 150$ нс)

3 Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов, а точнее прямоугольных импульсов, цугов гармонических колебаний, гармонических сигналов, модулированных по амплитуде и частоте, а также проанализировали фильтрацию сигналов при прохождении их через RC контур. Проверили частный случай выполнения соотношения неопределённости.

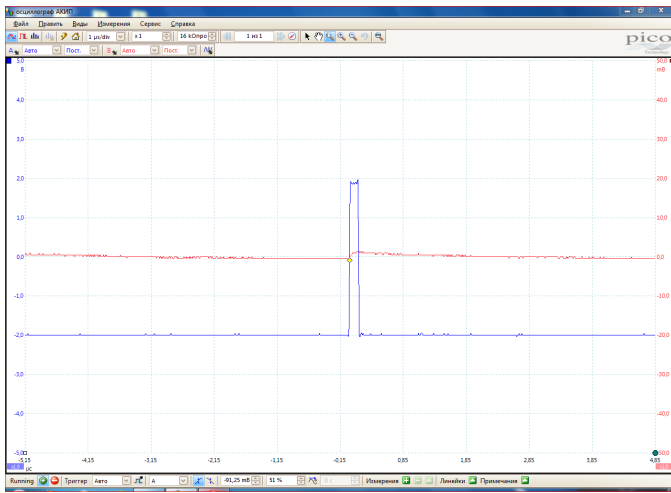


Рис. 31: Прямоугольные импульсы
($T = 6$ мкс; $\tau = 150$ нс)

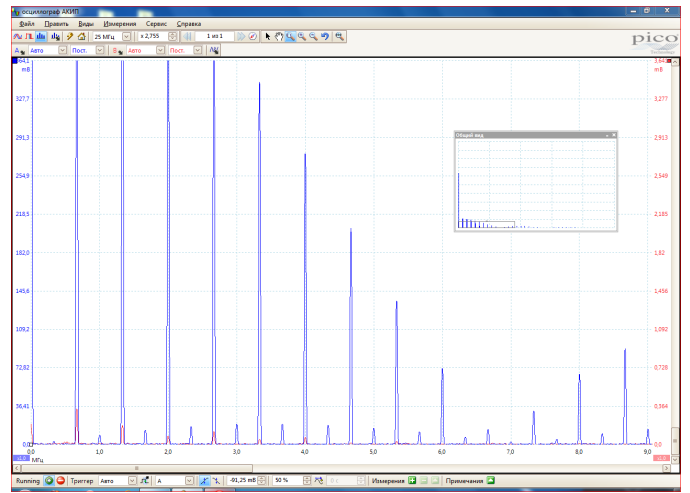


Рис. 32: Спектр прямоугольных импульсов
($T = 1.5$ мкс; $\tau = 150$ нс)

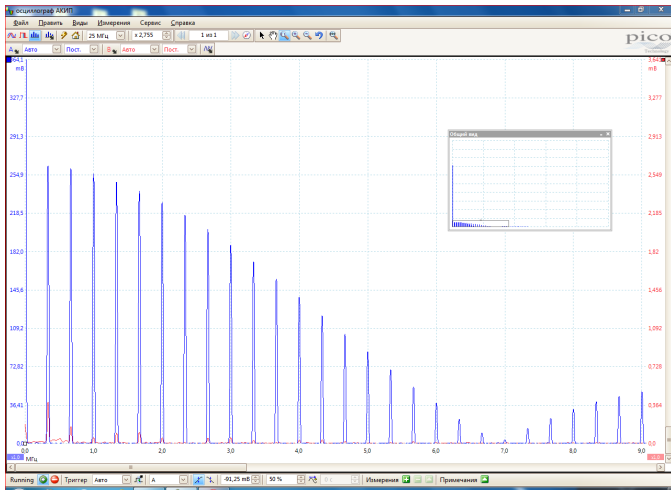


Рис. 33: Спектр прямоугольных импульсов
($T = 3$ мкс; $\tau = 150$ нс)

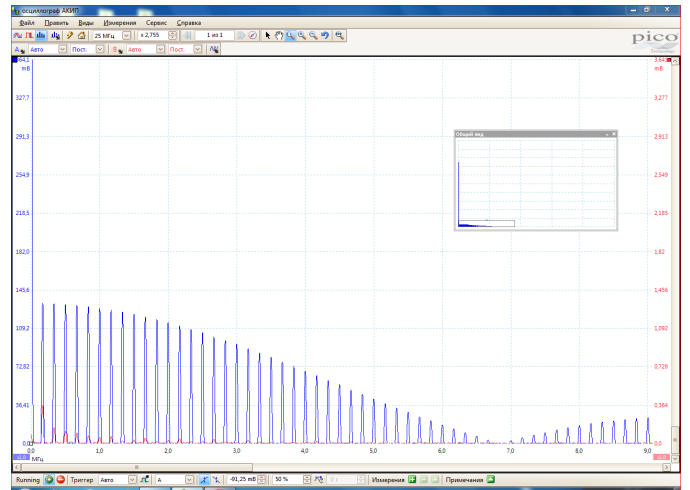


Рис. 34: Спектр прямоугольных импульсов
($T = 6$ мкс; $\tau = 150$ нс)

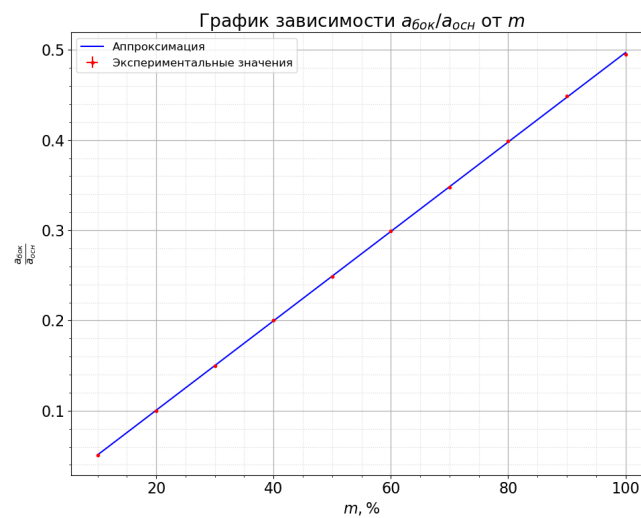


Рис. 35: График зависимости $K(1/\nu)$