

Лабораторная работа №3.2.5  
Свободные и вынужденные колебания в электрическом  
контуре

Рожков А. В.

13 ноября 2024 г.

**Цель работы:** исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре. **В работе используются:** осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивлений МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

# 1 Введение

## Экспериментальная установка

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности  $L$  с активным сопротивлением  $RL$ , переменной емкости  $C$  и сопротивления  $R$ . Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор  $C_1$  на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор  $C$ . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности.

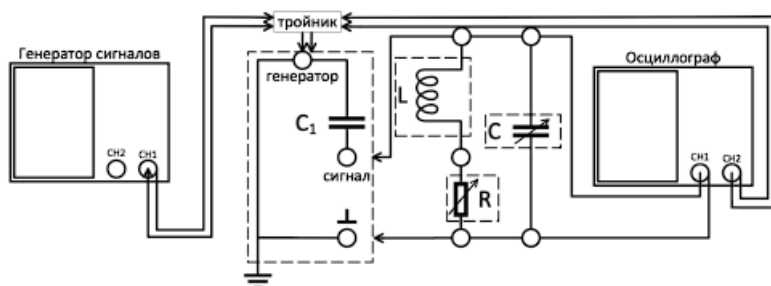


Рис. 2: Схема установки для исследования АЧХ и ФЧХ

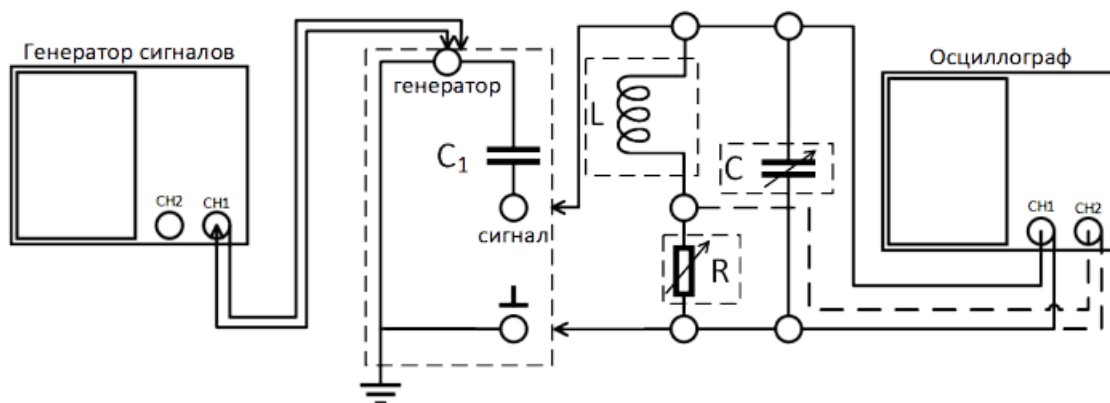


Рис. 1: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

## Теоретические сведения

Для RLC контура применим правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Подставив в уравнение выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа разделив обе части уравнения на  $CL$ , получим:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL} = 0 \quad (2)$$

Произведём замены  $\gamma = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  – собственная круговая частота,  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$  – период собственных колебаний. Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0, \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (5)$$

Для случая  $\gamma < \omega_0$  в силу того, что  $\omega_1 > 0$ , получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (6)$$

Для получения фазовой траектории представим формулу в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

где  $a$  и  $b$  получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и тока через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} (\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t), \quad (8)$$

$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{U_{C0}}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \quad (9)$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (10)$$

где  $\tau$  – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (11)$$

где  $\Theta$  – логарифмический декремент затухания,  $U_k$  и  $U_{k+1}$  – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону,  $N_\tau$  – число полных колебаний за время затухания  $\tau$ .

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней внешнего синусоидального источника. Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рисунке (рис. 1):

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (12)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L \phi_0} \sin(\Omega t - \varphi). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (14)$$

Способы измерения добротности  $Q = \frac{W_0}{W_{loss, \tau}} = \frac{\pi}{\Theta}$ :

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (15)$$

2. с помощью амплитуды резонанса можно получить добротность (в координатах  $U_C/U_0$ , где  $U_0$  – амплитуда колебаний напряжения источника, от частоты генератора). Отсюда нетрудно определить декремент затухания  $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$ ,
3. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ( $\Delta\Omega$ ) будет численно равна коэффициенту  $\gamma$ , то есть  $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$ .
4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$\Theta = \frac{\omega_0 n}{2 \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}. \quad (16)$$

5. с помощью формулы

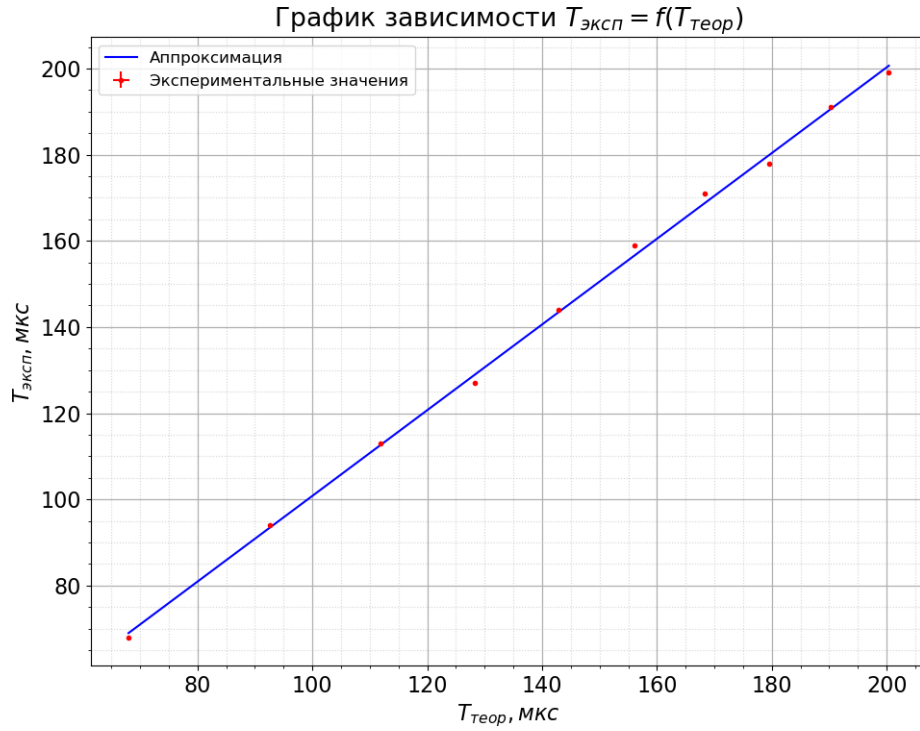
$$\Theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (17)$$

## 2 Ход работы

$$C_0 = 1.2 \text{ нФ}$$

$C + C_0, \text{ нФ}$	$T_{exp}, \text{ мкс}$	$T_{th}, \text{ мкс}$
2.2	94	93
3.2	113	112
4.2	127	128
5.2	144	143
6.2	159	156
7.2	171	168
8.2	178	180
9.2	191	190
10.2	199	200

Таблица 1: Экспериментальные и теоретические значения периодов колебаний



**2.** Подберем и установим значение  $C^*$  так, чтобы частота собственных колебаний была  $\nu_0 = 6.5$  кГц.  $C^* = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2L} \approx 6$  нФ. Рассчитаем теоретически критическое сопротивление контура  $R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 8165$  Ом. Измеряем логарифмических декремент затухания по соседним максимумам при различных внешних сопротивлениях ( $0,05R_{cr} - 0,2R_{cr}$ ):

$R_{\text{вн}}, \text{ Ом}$	$R = R_{\text{вн}} + R_L, \text{ Ом}$	$\theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}}$	$Q = \frac{\pi}{\theta}$	$\sigma_Q$
408 (0,05 $R_{cr}$ )	443	0,38	8,25	0,65
653,2 (0,08 $R_{cr}$ )	688,2	0,54	5,81	0,32
898,2 (0,11 $R_{cr}$ )	933,2	0,73	4,3	0,18
1143,1 (0,14 $R_{cr}$ )	1178,1	0,92	3,42	0,11
1633 (0,2 $R_{cr}$ )	1668	1,27	2,46	0,06

Таблица 2: Декремент затухания свободных колебаний

Основная часть ошибки при расчете добротности данным способом — случайная ошибка в измерении напряжения. Примем её за 2%. В таком случае  $\sigma_\theta \approx 0,03$ .

Здесь мы приняли  $R_L = 35 \text{ Ом}$  приблизительно. Построим график зависимости  $\frac{1}{\theta^2} = f(\frac{1}{R^2})$ . Так как

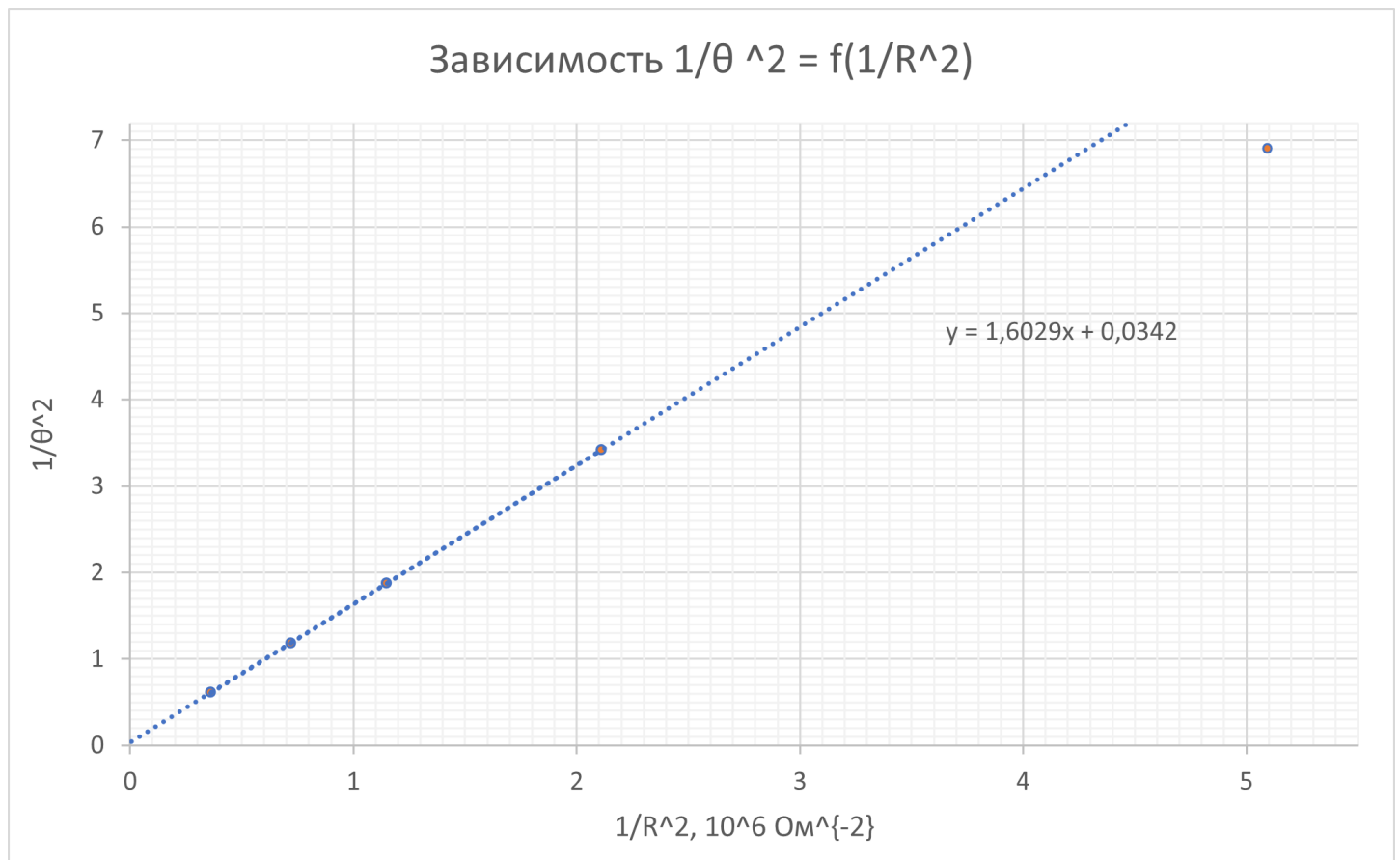
$$\theta = \ln \left( \frac{U_k}{U_{k+1}} \right) = \gamma T = \gamma \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\theta^2 = \gamma^2 \frac{4\pi^2}{\omega_1^2} = \gamma^2 \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1 \right) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{4L}{CR^2} - 1 \right)$$

то зависимость должна получиться линейной:

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2}$$



Прямая построена по 4-м точкам: всем, кроме последней, её убрали из рассмотрения, так как она плохо ложится на прямую. Коэффициент  $k = (1,603 \pm 0,008) \cdot 10^6$   $\varepsilon_k = 0,5\%$ .

Найдем  $R_{cr} = 2\pi\sqrt{k} = (7955 \pm 20)$  Ом. В пределах случайной погрешности не попадает в теоретически рассчитанное значение, вероятно потому, что мы не очень хорошо знаем  $R_L$ .

**3.** Расчет добротности по спирали на фазовой плоскости. В помощью осциллографа получаем портрет колебаний на фазовой плоскости (в режиме XY), определяем декремент затухания по соседним пересечениям оси X. Так как измерения проводились на глаз, то оценим погрешность  $\sigma_U = 0,1$  дел.

R, Ом	$U_k$ , дел	$U_{k+1}$ , дел	$\theta$	$Q$	$\sigma_Q$
443	4,4	3	0,38	8,20	0,86
1668	3,8	1	1,34	2,35	0,18

Таблица 3: Определение добротности по фазовой плоскости

**4.** Рассчитаем теоретическое значение добротности через параметры контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{L}{R} \omega_1 = \frac{L}{R} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$$

При параметрах  $L = 100$  мГн,  $C = 6$  нФ имеем (примем погрешность  $\sigma_{R_L} = 5$  Ом):

1.  $R_1 = 443$  Ом  $Q_1 = 9,20$ ,  $\sigma_{Q_1} = 0,10$

2.  $R_2 = 1668$  Ом  $Q_2 = 2,40$ ,  $\sigma_{Q_2} = 0,01$

**5.** Измерение АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний.

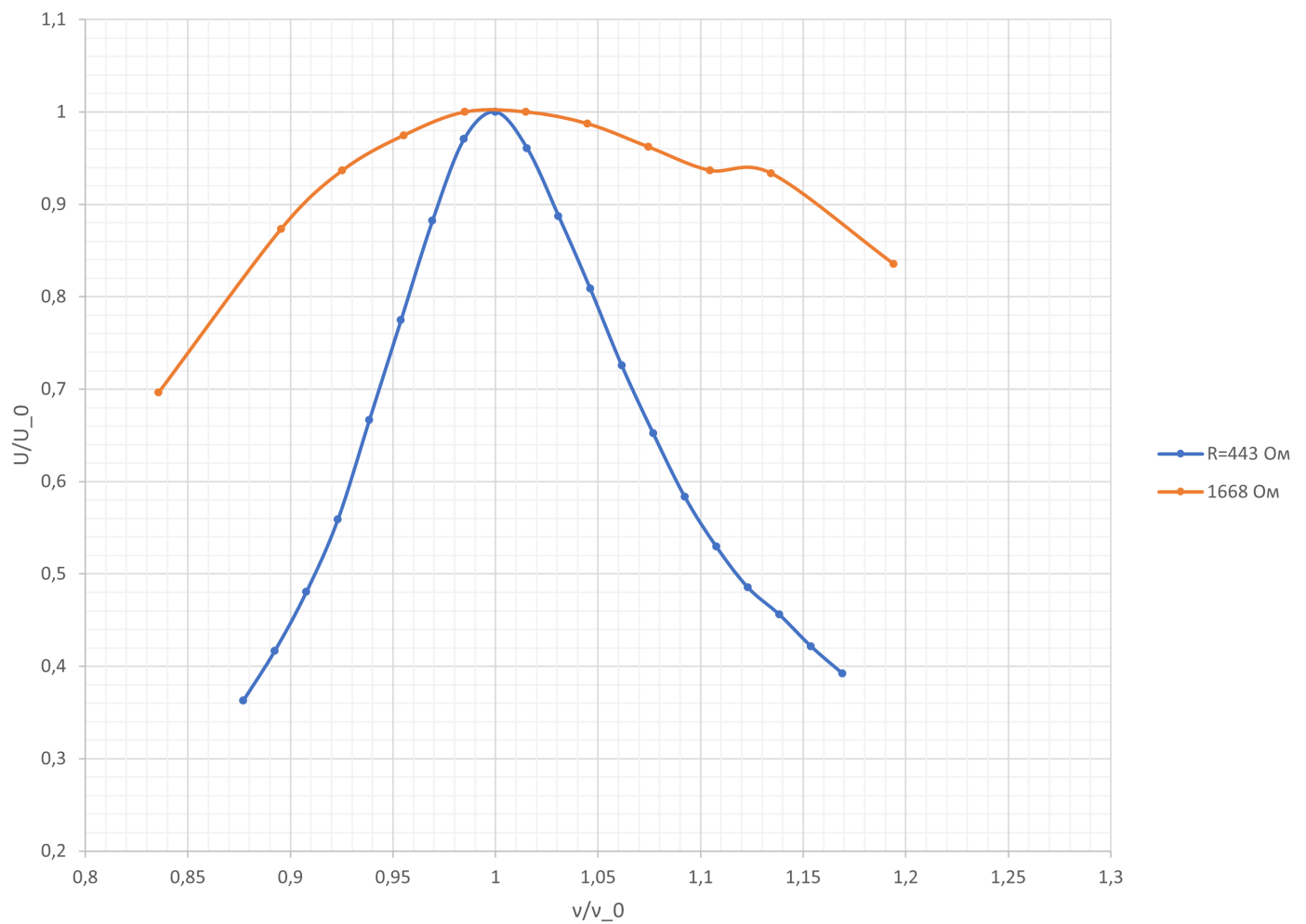
Установим на генераторе синусоидальный сигнал и будем наблюдать картину вынужденных колебаний. Занесем в таблицу полученные данные и построим графики в координатах  $\frac{U}{U_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$

$\nu$ , Гц	$U$ , В	$\Delta t$ , мкс	$\Delta \phi$ , $\cdot \pi$
5700	37	72,4	0,83
5800	42,5	69,2	0,80
5900	49	67,2	0,79
6000	57	62,8	0,75
6100	68	58,8	0,72
6200	79	53,2	0,66
6300	90	47,6	0,60
6400	99	40,8	0,52
6500	102	34,4	0,45
6600	98	27,2	0,36
6700	90,5	22	0,29
6800	82,5	17,2	0,24
6900	74	14,8	0,20
7000	66,5	12	0,17
7100	59,5	10,4	0,15
7200	54	8,8	0,13
7300	49,5	8	0,12
7400	46,5	6,4	0,095
7500	43	6	0,09
7600	40	4,4	0,07

$\nu$ , Гц	$U_{max}$ , В	$\Delta t$ , мкс	$\Delta \phi$ , $\cdot \pi$
5600	22,0	50	0,56
6000	27,6	40	0,48
6200	29,6	35,6	0,44
6400	30,8	31,2	0,40
6600	31,6	26,8	0,35
6800	31,6	22,8	0,31
7000	31,2	19,6	0,27
7200	30,4	16,8	0,24
7400	29,6	14	0,21
7600	29,5	12	0,18
8000	26,4	8,4	0,13

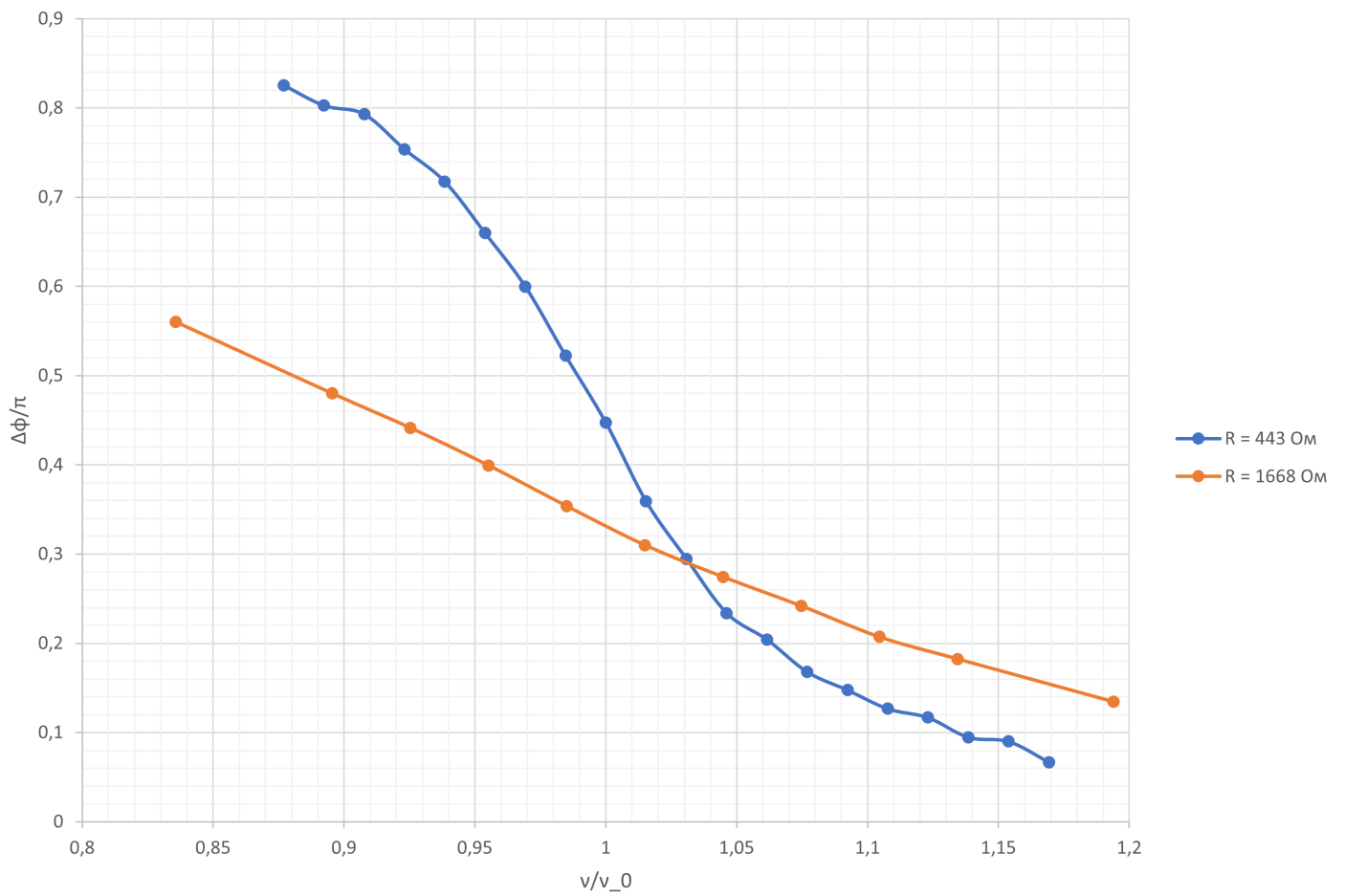
Таблица 4: АЧХ и ФЧХ для  $R_1 = 443$  Ом и  $R_2 = 1668$  Ом

Амплитудно-частотная характеристика





Фазово-частотная характеристика



$R, \text{ Ом}$	$\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}$	$Q$	$\sigma_Q$
443	0,12	8,33	0,69
1668	0,43	2,33	0,16

Таблица 5: Определение добротности по графику АЧХ

Определим добротность по графику АЧХ.  $Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}$ , где  $2\Delta\Omega$  - ширина резонансной кривой на уровне  $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

Рассчитаем добротность по ФЧХ. Для этого проведем горизонтальную линию через уровень, где наблюдается резонанс (ровно  $\frac{\pi}{2}$  не наблюдается в экспериментальном резонансе). Затем отразим одну половину относительно этой прямой и измерим приблизительно ширину на расстоянии  $\frac{\pi}{4}$  от резонанса (ровно в  $\frac{\pi}{4}$  не сможем измерить ввиду недостатка точек и смещения резонанса). Примерные результаты:

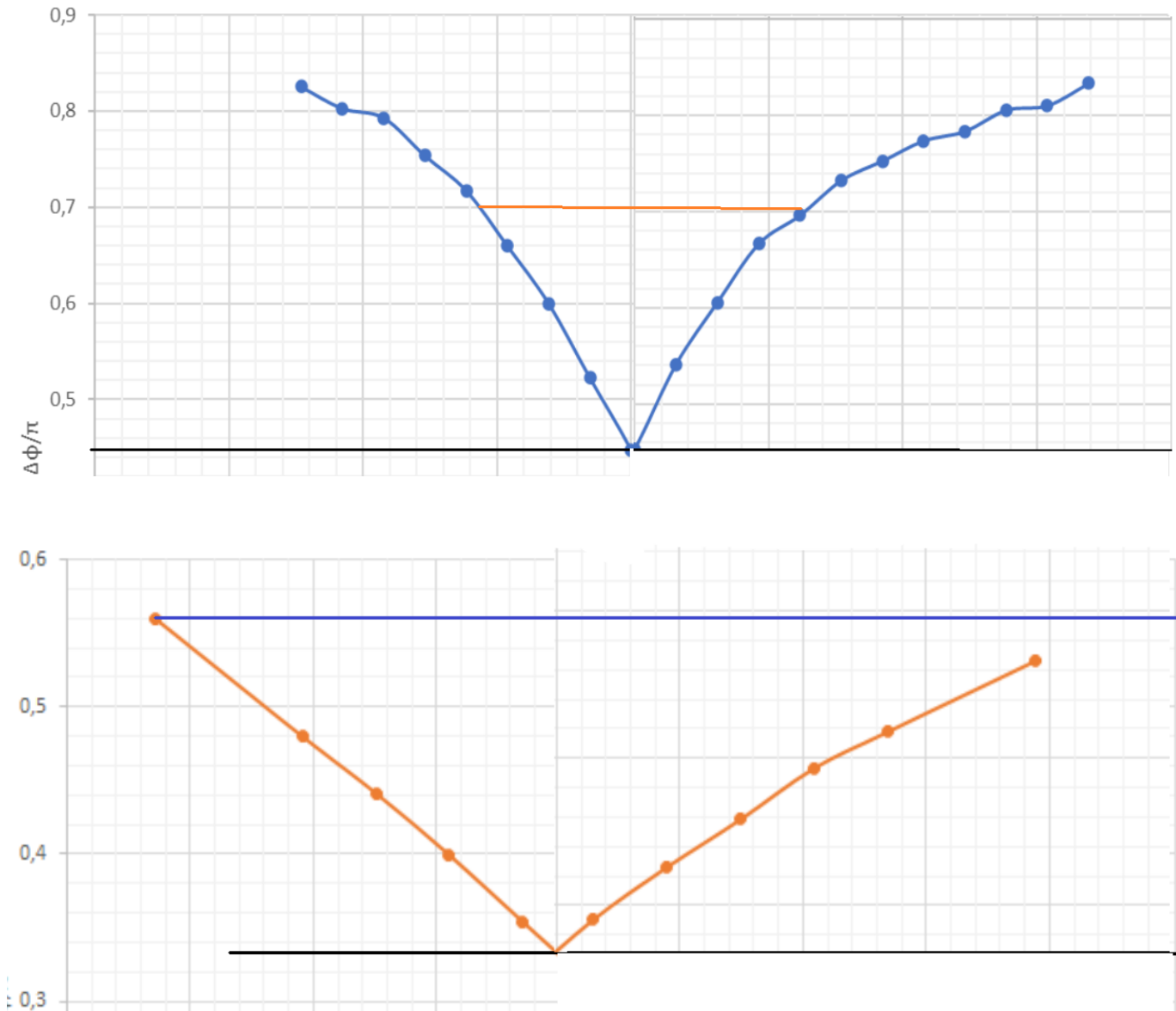


Рис. 1: Вспомогательные графики для определения погрешности по ФЧХ

Погрешности в этих методах сложно оценить. Примем погрешность в определении ширины резонансной кривой за  $\sigma_{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = 0,01$  в случае  $R = 443 \text{ Ом}$  и  $0,03$  в случае  $R = 1668 \text{ Ом}$ . (для второго случая приходится немного экстраполировать).

$R, \text{ Ом}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$Q$	$\sigma_Q$
443	0,115	8,70	0,76
1668	0,415	2,41	0,17

Таблица 6: Определение добротности по графику ФЧХ

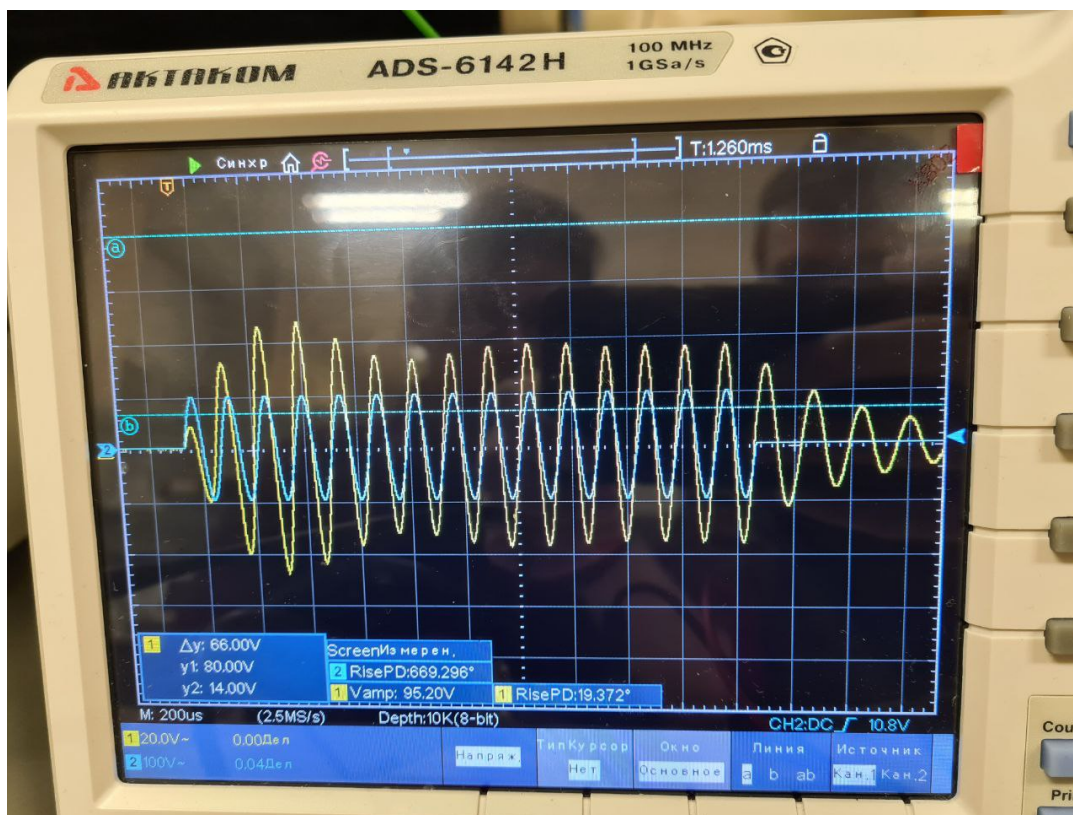


Рис. 2: Картина биений при смещении частоты от резонансной

#### 6. Итоговая таблица:

$R, \text{ Ом}$	$f(L, C, R)$	$f(\theta)$	Фаз. спираль	АЧХ	ФЧХ
443	$9,20 \pm 0,10$ (1%)	$8,25 \pm 0,65$ (8%)	$8,20 \pm 0,86$ (10%)	$8,33 \pm 0,69$ (8%)	$8,70 \pm 0,76$ (9%)
1668	$2,40 \pm 0,01$ (0,3%)	$2,46 \pm 0,06$ (2%)	$2,35 \pm 0,18$ (8%)	$2,33 \pm 0,16$ (7%)	$2,41 \pm 0,17$ (7%)

## 3 Вывод

В данной лабораторной работе мы исследовали свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре и различными способами находили его добротность. Самый точный способ, конечно же, теоретический. Затем достаточно эффективен способ вычисления через декремент затухания. Фазовая спираль даёт высокую погрешность, поэтому это не очень надежный способ вычисления добротности. Способы вычисления через АЧХ и ФЧХ хороши, если есть специальная программа, позволяющая вычислять ширину резонансной кривой, и хорошо снятые данные (с этим тоже возникли проблемы). Несмотря на то, что при нашей оценке у  $R_2 = 1668 \text{ Ом}$  относительная погрешность в этих опытах 7%, данные были сняты некачественно и ориентироваться на них сложно.