

# Elementargeometrie

Universität Freiburg, SoSe 25  
Nadine Große

Skript - Version vom 23. April 2025

Lizenz: CC-BY-SA 4.0



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Euklidische Geometrie – synthetisch</b>	<b>5</b>
I.1. Was setzen wir als gewusst voraus? . . . . .	5
I.2. Satz von Thales . . . . .	6
I.3. Winkel am Kreis . . . . .	10
I.4. Kongruenzsätze . . . . .	11
I.5. Weitere Anwendungen von Kongruenzsätzen . . . . .	13
I.6. Ähnlichkeit . . . . .	15
<b>II. Euklidische Geometrie – analytisch</b>	<b>19</b>
II.1. Modell . . . . .	19
II.2. Thales und Co. aus Kapitel I . . . . .	20
II.3. Trigonometrie im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
<b>III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene</b>	<b>23</b>
III.1. Symmetrien - synthetisch . . . . .	23
III.2. Symmetrien – analytisch . . . . .	26
III.3. Beweise/Konstruktionen unter Nutzen von Symmetrien . . . . .	28
<b>Übersicht: Symmetrien der euklidischen Ebene</b>	<b>31</b>
<b>IV. Andere Geometrien</b>	<b>33</b>
IV.1. Hyperbolische Ebene . . . . .	33
IV.1.1. Hyperbolische Halbebene . . . . .	33
IV.1.2. Das Poincaresche Kreisscheibenmodell . . . . .	36
IV.1.3. Die Kongruenzabbildungen der hyperbolischen Ebene . . . . .	36
IV.1.4. Trigonometrie der hyperbolischen Ebene . . . . .	41
IV.2. Sphärische Geometrie . . . . .	42
<b>Vergleich: Euklidische, hyperbolische und sphärische Geometrie</b>	<b>48</b>
<b>V. Axiomatik der euklidischen Geometrie</b>	<b>49</b>
V.1. Inzidenzstruktur . . . . .	50
V.2. Parallelität und affine Ebenen . . . . .	51
V.3. Angeordnete Inzidenzgeometrien . . . . .	52
V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen . . . . .	55
V.5. Fast-euklidische Geometrie . . . . .	62
V.6. Euklidische Ebene . . . . .	64
<b>Übersicht: Axiomatik</b>	<b>67</b>



# Einleitung

In dieser Vorlesung wollen wir vor allem mit der Geometrie der Ebene beschäftigen. Das wird zum großen Teil auch in der Schule gemacht. Wir werden hier viele Sachen, die man aus der Schule kennt, wiedersehen, diese Sachen beweisen und dabei uns am Anfang vor allem auch überlegen, welches Wissen wir dafür eigentlich aus gegeben vorausgesetzt haben. Zum Beispiel:

**Vorl. 1**

**Satz.** Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .

*Beweis.* Sei  $ABC$  das Dreieck, vgl. Abbildung unten. Sei  $g$  die zur Strecke  $AB$  parallele Gerade durch  $C$ . Seien  $D, E$  Punkte auf  $g$  derart, dass sie auf verschiedenen Seiten von  $C$  liegen und  $D$  auf der anderen Seite der Geraden durch  $AC$  liegt als  $B$ . Dann ist  $\alpha := \angle CAB = \angle DCA$  sowie  $\beta := \angle CBA = \angle ECB$ , weil es sich dabei jeweils um Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen handelt. Da  $\angle DCA + \angle ACD + \angle ECB = 180^\circ$  als gestreckter Winkel an  $C$  ist, folgt die Innenwinkelsumme des Dreiecks mit  $180^\circ$ .  $\square$

Was haben wir an Wissen alles in diesen Beweis gesteckt?

- Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich.
- Man kann Winkel addieren und der gestreckte Winkel ist  $180^\circ$ .
- Es gibt zur einer Geraden  $h$  (hier durch die Strecke  $AB$  mit  $A \neq B$  bestimmt) und einem Punkt  $C$  immer eine zu  $h$  parallele Gerade, die durch  $C$  geht.
- Im zweiten Satz im Beweis haben wir auch noch Wissen über Lagebeziehungen von Punkten bzgl. Geraden gesteckt.

Aber auch, was ist überhaupt ein Winkel, Winkeladdition und eine parallele Gerade? Dazu bald mehr.

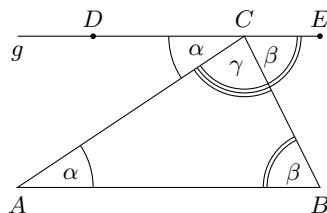
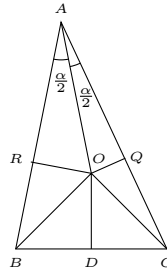


Abb.: Beweisfigur zur Innenwinkelsumme des Dreiecks



Was fällt vielleicht noch auf? Die Beweisfigur ist wichtig, um überhaupt zu sehen, was man machen will und macht (um den Überblick zu halten), aber der Beweis führt alle Punkte und Lagebeziehungen ein bzw. beweist diese. Das ist wichtig, da eine schlechte Beweisfigur oder eine die nur bestimmte Fälle aller Möglichkeiten darstellt einen, z.B. was Lagebeziehungen etc. betrifft in die Irre führen kann. Dies kann man an folgendem Beispiel sehen:

**Satz (falsch)** Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.

Der 'Beweis' dieses Satzes ist mit Kongruenzsätzen und orientiert sich an obiger Beweisfigur. Wenn man die als 'richtig' annimmt, dann ist jeder einzelne Schritt im Beweis richtig. Das Problem ist nur, dass die Beweisfigur nicht die Situation richtig wiedergibt. Die Winkelhalbierende bei A und die Mittelsenkrechte bei D schneiden sich zwar, aber außerhalb des Dreiecks  $ABC$  und zwar auf dem Umkreis des Dreiecks.

*Beweis (auch falsch siehe oben).* Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$  wie im Bild oben. Sei  $m$  die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A. Die Mittelsenkrechte der Seite  $BC$  schneide diese im Punkt  $D$  und die Winkelhalbierende  $m$  im Punkt  $O$ . Die Dreiecke  $BDO$  und  $COD$  sind kongruent, weil die Seitenlängen  $DO$  und  $BD$  bzw.  $CD$  gleich sind und die Innenwinkel in  $D$  übereinstimmen. Deshalb gilt  $|BO| = |CO|$ . Sei  $R$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf die Seite  $AB$  und  $Q$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf die Seite  $AC$ . Die Dreiecke  $ARO$  und  $AOQ$  sind nach dem SWW Kongruenzsatz deckungsgleich, weil die Hypotenuse  $AO$ , ein anliegender Winkel in  $A$  und der gegenüberliegende Winkel in  $R$  bzw.  $Q$  als rechte Winkel übereinstimmen. Deshalb ist  $|AR| = |AQ|$  und  $|OR| = |OQ|$ . Die Dreiecke  $BOR$  und  $CQO$  sind kongruent, weil  $|BO| = |CO|$  sowie  $|OR| = |OQ|$  und sie in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt. Denn der rechte Winkel in  $R$  bzw.  $Q$  liegt der Hypotenuse der betrachteten Dreiecke  $BOR$  und  $CQO$  gegenüber. Also ist auch  $|BR| = |CQ|$ . Insgesamt haben wir also  $|AB| = |AR| + |BR| = |AQ| + |CQ| = |AC|$ .  $\square$

Was soll in dieser Vorlesung passieren?

Wir werden zunächst die Schulgeometrie Revue passieren lassen, die Aussagen dazu beweisen und uns dabei immer wieder überlegen, was wir da an Wissen als von wo immer her als gegeben vorausgesetzt haben. Dies machen wir einmal synthetisch\* und

---

\*Die Art von ebener Geometrie in der Schule bevor man Geometrie analytisch mit Vektorrechnung macht.

einmal mit analytischer Geometrie. Unser eigentliches Ziel ist dann eine Axiomatik der euklidischen Geometrie – d.h. eine Menge von Axiomen, die man als gegeben annimmt und die einmal widerspruchsfrei ist und zum anderen die euklidische Ebene eindeutig bestimmt. D.h. jede andere Geometrie, die es noch geben kann, darf diese Axiome nicht alle erfüllen. Insbesondere wird dann klar, was von dem 'als von wo immer her'-Wissen vom Anfang, wirklich reingesteckt wird und was daraus doch schon folgt.

Mit solch ähnlichen Überlegungen hat schon Euklid angefangen, die Geometrie zu axiomatisieren, siehe Euklids Elemente\*.

Lange wurde auch diskutiert, ob man das Parallelenaxiom (Für jede Gerade und jeden gegebenen Punkt gibt es genau eine durch diesen Punkt verlaufende parallele Gerade.) als Axiom wirklich notwendig ist oder aus anderen folgt. Es wurden zuerst äquivalente Axiome zum Parallelenaxiom gefunden. Zum Beispiel: Es gibt Rechtecke. Erst 1862 stellte Nikolai Lobatschewski eine neue Geometrie vor in der damals formulierten Axiome der euklidischen gelten – bis auf das Parallelenaxiom. Dies war die hyperbolische Ebene.

Bevor wir zur Axiomatik der euklidischen Ebene kommen, werden wir vorher zwei andere Geometrien zum Vergleich kennenlernen – die oben erwähnte hyperbolische Ebene und die Geometrie der Sphäre.

---

\*<https://archive.org/details/firstsixbooksofe00byrn>





# I. Euklidische Geometrie – synthetisch

Wir beginnen mit ebener Geometrie, wie sie in der Schule betrieben wird. In der Einleitung haben wir schon den Beweis für die Innenwinkelsumme im Dreieck gesehen und dabei uns bewusst gemacht, was wir da als Wissen schon rein stecken. Im ersten Abschnitt werden wir etwas genauer aufzählen, was wir in diesem Kapitel unkommentiert als gegeben voraussetzen. Systematischer werden wir das am Ende der Vorlesung in der Axiomatik der euklidischen Ebene machen.

## I.1. Was setzen wir als gewusst voraus?

Wir wissen (das nehmen wir an), was Punkte und Geraden sind und können über Lagebeziehungen von Punkten und Geraden zu einander reden (Punkte können auf einer Geraden, auf der gleichen Seite bzgl. einer Geraden oder auf der gleichen Seite bzgl. eines Punktes auf einer Geraden liegen). Wir haben einen Begriff von 'zwischen Punkten auf einer Geraden'<sup>†</sup> und 'auf der gleichen Seite auf einer Gerade bzgl. eines Punktes der Geraden liegen'. Durch je zwei Punkte  $A \neq B$  gibt es genau eine Gerade – oft mit  $g_{AB}$  bezeichnet. Für drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden liegt immer einer zwischen den beiden anderen usw. Wir verstehen die Geraden auch oft als Menge der Punkte, die auf ihr liegen und schreiben für der Punkt  $A$  liegt auf  $g$  auch manchmal  $A \in g$ .

*Was sind Strecken?* Für Punkte  $A, B$  sei die *Strecke*  $AB$  die Menge, die aus  $A$  und  $B$  und allen Punkten auf der Geraden  $g_{AB}$ , die zwischen  $A$  und  $B$  liegen. Wir ordnen Strecken eine Länge  $|AB|$  in  $[0, \infty)$  zu und alle Längen können auftreten. Es sei  $|AB| = 0$  genau dann, wenn  $A = B$  ist. Es gilt außerdem die Dreiecksungleichung:  $|AB| + |BC| \geq |AC|$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt oder zwei der Punkte übereinstimmen. Das impliziert z.B. schon, dass es zu einer Gerade  $g$  und einem Punkt  $A$  auf  $g$  und einem  $r > 0$  es genau zwei Punkte auf  $g$  mit Abstand  $r$  zu  $A$  gibt.

*Halbebenen* Jede Gerade  $g$  teilt die Ebene in zwei Halbebenen: Zwei Punkte, die nicht auf dieser Geraden liegen, *liegen auf der gleichen Seite von*  $g$  (und damit in der gleichen Halbebene), wenn ihre Verbindungsstrecke keinen Punkt mit der Geraden gemeinsam haben. Sonst liegen sie auf verschiedenen Seiten von  $g$ .

*Was sind Strahlen/Halbgeraden?* Ist eine Gerade  $g$  und Punkte  $A, B, C \in g$  gegeben, mit  $B$  zwischen  $A$  und  $C$ . Der *Strahl*  $S(B, A)$  *von*  $B$  *aus in Richtung*  $A$  ist die Menge aller Punkte auf  $g$ , die auf der gleichen Seite von  $g$  bzgl.  $B$  liegen wie  $A$ , und der Punkt  $B$ . Es ist  $S(B, A) \cap S(B, C) = \{B\}$ .

<sup>†</sup>Wobei  $C$  liegt zwischen  $A$  und  $B$  insbesondere implizieren soll, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen und paarweise verschieden sind.

## I. Euklidische Geometrie – synthetisch

*Was ist ein Winkel?* Ein *Winkel* ist eine Teilmenge der Ebene, die von zwei Strahlen (Halbgeraden) mit gemeinsamem Anfangspunkt  $M$  begrenzt wird. Die Strahlen werden dann *Schenkel* des Winkels genannt. Das *Innere* des Winkels ist die Teilmenge der Ebene, die durch den Winkel ohne die beiden Schenkel gebildet wird.

Einem Winkel wird auch ein Zahlenwert zugeordnet, der der Länge des Schnittes des Winkels mit dem Einheitskreis um  $M$  entspricht und damit Werte zwischen 0 und  $2\pi$  (in Radian gemessen) bzw. in Grade zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  annehmen. Damit können wir insbesondere auch Winkel addieren.

Bilden die beiden Strahlen zusammen eine Gerade, heißt der Winkel *gestreckt* (Wert:  $180^\circ$ ). Ist der Winkel  $90^\circ$ , sagen wir, dass beide Strahlen (bzw. die zugehörigen Geraden) stehen *senkrecht* aufeinander.

Es wird im Sprachgebrauch oft nicht zwischen Winkel als Teilmenge der Ebene und dem Zahlenwert unterschieden.

Mit der Notation  $\sphericalangle ABC$  meinen wir im Folgenden den Winkel mit Schenkeln  $S(B, A)$  und  $S(B, C)$  und der dadurch abgegrenzten Teilmenge der Ebene mit Wert in  $[0, 180^\circ)$ .\*

*Parallelität:* Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder gleich sind.

‘Parallel sein’ ist in der euklidischen Ebene eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden, vgl. ÜB 0.

Die Sätze zu Nebenwinkeln, Gegenwinkeln, Stufenwinkeln und Wechselwinkel nehmen wir auch als gegeben an, vgl. QQ2.

Alle Dreiecke seien (wenn nicht extra dazugesagt) *nicht entartet*, d.h. alle drei Eckpunkte sind verschieden.

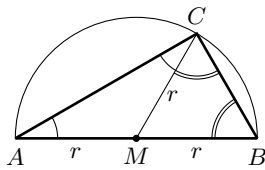
## I.2. Satz von Thales

Der **Satz vom Thales** besagt, dass für ein Dreieck, dessen eine Seite der Durchmesser seines Umkreises<sup>†</sup> ist, der dem Durchmesser gegenüberliegende Winkel ein rechter Winkel ist.

---

\*D.h. insbesondere auch: wir arbeiten nicht mit gerichteten Winkeln – es ist immer auch  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA$ . Wenn man Winkel meint, die zu Werten  $\geq 180^\circ$  gehören, muss man das dazusagen und die anders beschreiben.

<sup>†</sup>Der Umkreis eines Dreiecks ist ein Kreis auf dem die drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. (Diesen gibt es immer und er ist eindeutig, vgl. Satz I.5.1)



*Beweis.* Sei  $ABC$  das Dreieck und  $AB$  der Durchmesser des Umkreises. Sei  $M$  der Mittelpunkt dieses Kreises und damit  $|AM| = |BM| =: r$  der Radius dieses Kreises. Da nach Annahme auch  $C$  auf diesem Kreis liegt, ist auch  $|CM| = r$ . Damit sind beide Dreiecke  $AMC$  und  $CMB$  gleichschenkelig und haben somit gleiche Basiswinkel  $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$ , sowie  $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$ . Also ist  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB$ . Da die Innenwinkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  ist, muss somit  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$  sein.  $\square$

Was haben wir in diesem Beweis alles verwendet?

- (i) Was ein Kreis/Durchmesser ist:

**Definition.** Ein *Kreis* um einen Punkt  $M$  und Radius  $r > 0$  ist die Menge aller Punkte, die vom Punkt  $M$ , den Abstand  $r$  haben. Ein *Durchmesser* des Kreises ist eine Strecke, die durch zwei Punkte auf dem Kreis gebildet wird und durch  $M$  verläuft.

Die Definition braucht insbesondere, dass wir je zwei Punkten überhaupt eine (eindeutige) Strecke und dieser einen Abstand zuordnen können – das hatten wir schon als gewusst vorausgesetzt.

Damit sind die ersten drei Sätze des Beweises geklärt.

- (ii) Als nächstes benutzen wir, dass ein Dreieck genau dann *gleichschenkelig* (= zwei Seiten sind gleich lang) ist, wenn die zugehörigen *Basiswinkel* (die Winkel, die diese Seiten mit der Basis, der noch übrig gebliebenen dritten Seite, bilden) gleich sind. Zu diesem Satz kommen wir hier gleich noch.

Mit den eingeschlossenen Winkeln ist hier jeweils der gemeint, der kleiner gleich  $180^\circ$  ist.

- (iii) Die Innenwinkelsumme im Dreieck und insbesondere Addition von Winkeln, s. Einleitung.

Bevor wir mehr zu (ii) sagen:

Es gilt auch die **Umkehrung des Satzes von Thales**: In einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Eckpunkt an diesem rechten Winkel auf dem\* Kreis, für den die diesem Winkel gegenüberliegende Seite ein Durchmesser ist.

*Beweis.* Sei  $ABC$  das Dreieck mit rechtem Winkel bei  $C$ . Sei  $k$  der Kreis mit Durchmesser  $AB$ . Wir wollen sehen, dass  $C$  auf  $k$  liegt. Dazu bilden wir die Gerade durch

---

\*Dieser Kreis ist wirklich eindeutig, da er mit dem Mittelpunkt dieses Durchmessers und mit dem Radius gleich der Hälfte dieses Durchmessers nach Definition eindeutig bestimmt ist.

# I. Euklidische Geometrie – synthetisch

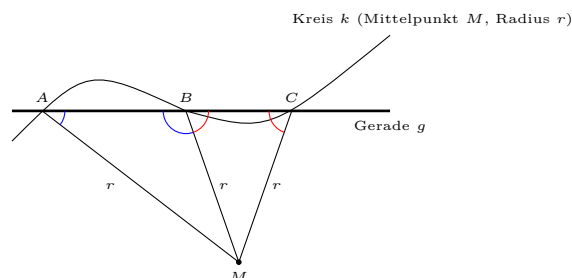
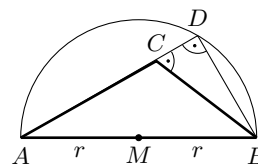


Abb. I.1.: Angenommen es gibt einen Kreis  $k$  und eine Gerade  $g$ , die sich in mindestens drei Punkten schneiden – sagen wir in  $A, B, C$  und o.B.d.A. liege auf  $g$   $B$  zwischen  $A$  und  $C$ . Dann sind  $ABM$  und  $BCM$  gleichschenklige Dreiecke und somit sind die beiden blauen und die beiden roten Winkel gleich groß. Da der blaue und rote Winkel bei  $B$  Nebenwinkel sind und sich damit zu  $180^\circ$  addieren, wäre die Innenwinkelsumme in  $ACM$  dann größer als  $180^\circ$ .

die Punkte  $AC$ . Diese schneidet den Kreis in  $A$ . Wäre  $g$  eine Tangente an  $k$  hätte das Dreieck  $ABC$  zwei rechte Winkel, was ein Widerspruch zur Innenwinkelsumme wäre. Also muss  $g$  den Kreis noch in einem zweiten Punkt  $D$  schneiden. Nach dem Satz vom Thales ist der Winkel  $\angle ADB$  dann ein rechter Winkel. Wäre nun  $C \neq D$ , hätten wir mit dem Dreieck  $ACD$  nun wieder ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, was uns den Widerspruch gibt. Also ist  $C = D$  und damit liegt  $C$  auf dem Kreis  $k$ .  $\square$



*Haben wir hier etwas Neues verwendet?* Ja, die möglichen Lagebeziehungen von Geraden zu Kreisen. Hier können drei Fälle auftreten: Gerade und Kreis können keinen Punkt, genau einen Punkt oder genau zwei Punkte gemeinsam haben.

Im zweiten Fall nennt man die Gerade eine *Tangente* an den Kreis durch ihren gemeinsamen Punkt. Wir haben auch verwendet, dass die Tangente und der Radius des Kreises zu diesem gemeinsamen Punkt, dann einen Winkel von  $90^\circ$  bilden, vgl. Lemma I.2.2.

Woher wissen wir, dass es nur diese drei Fälle der Lagebeziehungen gibt? Angenommen eine Gerade  $g$  und ein Kreis  $k$  (Mittelpunkt  $M$ , Radius  $r$ ) können auch mehr als zwei Punkte gemeinsam haben, also mindestens drei – sagen wir  $A, B, C$ . Dann sieht man wie in Abbildung I.1, dass dies nicht vorkommen kann (benutzt auch wieder die Eigenschaften von gleichschenkligen Dreiecken).

Kommen wir nun noch zur Aussage (ii) von oben über gleichschenklige Dreiecke:

**Lemma I.2.1.** *Ein Dreieck ist gleichschenklig genau dann, wenn zwei seiner Innenwinkel gleich groß sind. Die Fußpunkt der Höhe auf die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist gleichzeitig der Mittelpunkt dieser Seite.*

Der Beweis beruht auf Kongruenzsätzen. *Was bedeutet kongruent bei Dreiecken?* Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie durch eine Symmetrie der Ebene (in diesem Kontext

Kongruenzabbildung genannt) auseinander hervorgehen. Symmetrien sind alle Abbildungen, die die Abstände zwischen Punkten erhalten, mehr in Abschnitt III.1. Z.B. gibt es den Kongruenzsatz SWS, der besagt: Haben zwei Dreiecke zwei Seitenlängen und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gemeinsam, dann sind sie kongruent und damit stimmen insbesondere die verbleibende Seitenlänge und die verbleibenden Winkel überein. Analog gibt es den Kongruenzsatz WSW – hier muss eine Seitenlänge und beide angrenzende Winkel übereinstimmen. Mehr dazu und weitere Kongruenzsätze in Abschnitt I.4. Hier zunächst der Beweis von Lemma I.2.1 als ein Beispiel der Anwendung dieser beiden Kongruenzsätze:

*Beweis von Lemma I.2.1.* Sei das Dreieck  $ABC$  zunächst gleichschenkelig mit  $|AC| = |BC|$ . Vergleichen wir nun die Dreiecke  $ABC$  und  $CBA$  (Das sind natürlich die gleichen Dreiecke. Aber wir vergleichen im Sinne von die Strecke  $AB$  des ersten Dreiecks wird mit  $CB$  im zweiten Dreieck verglichen etc. – deshalb die andere Reihenfolge bei der Benennung): Zwei Seiten sind gleich und auch der eingeschlossene Winkel  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ACB$ . Damit sind beide Dreiecke nach *SWS* kongruent\*. Damit gilt  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB$ . Die Aussage über die Höhe auf die Basis im gleichschenkligen Dreieck folgt auch direkt, da die Höhe in beiden Dreiecken identisch ist und damit die Abschnitte der Basis auch gleich sein müssen.

Sei nun im Dreieck  $ABC$   $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAB$ . Dann vergleichen wir wiederum die Dreiecke  $ABC$  und  $CBA$ . Diese haben nun die Seite  $AB$  und die angrenzenden Winkel gemeinsam und sind somit wieder kongruent nach *WSW* und es folgt  $|AC| = |BC|$ .  $\square$

Die Charakterisierung der gleichschenkligen Dreiecke wird sehr häufig verwendet, so kann man damit z.B. Tangenten an Kreise charakterisieren, wie wir sie schon bei der Umkehrung des Satzes vom Thales verwendet haben.

Vorl. 2

**Lemma I.2.2** (Existenz und Eindeutigkeit von Tangenten am Kreis). *Sei  $k$  ein Kreis um  $M$  mit Radius  $r$ . Sei  $A \in k$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $g$ , die mit  $k$  nur den Punkt  $A$  gemeinsam hat. Diese Gerade  $g$  steht senkrecht zu  $g_{AM}$  und wird Tangente von  $k$  durch  $A$  genannt.*

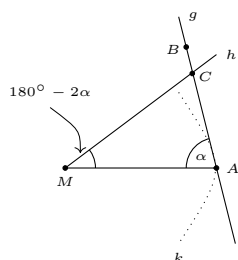
*Beweis.* Sei zunächst  $g$  eine Gerade, die mit  $k$  nur den Punkt  $A$  gemeinsam hat. Wir werden zeigen, dass  $g$  dann senkrecht zu  $AM$  und damit eindeutig sein muss:

Sei  $\alpha$  einer der Winkel, den diese mit  $AM$  einschließt. Der Winkel kann nicht  $0^\circ$  sein, da sonst  $g_{AB} = g_{AM}$  wäre und es noch einen zweiten Schnittpunkt gäbe. O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\alpha \in (0, 90^\circ]$ , da wir sonst den Nebenwinkel als  $\alpha$  wählen könnten.

---

\*Die beiden Dreiecke gehen hier durch Spiegelung an der Winkelhalbierende von  $\sphericalangle BCA$  auseinander hervor und Spiegelungen sind Kongruenzabbildungen, vgl. Abschnitt I.4.

## I. Euklidische Geometrie – synthetisch



Angenommen  $\alpha \neq 90^\circ$ . Sei  $B$  ein Punkt auf  $g$  mit  $\angle BAM = \alpha$ . Sei  $h$  eine Gerade durch  $M$ , die mit  $AM$  auf der Seite von  $AM$ , auf welcher auch  $B$  liegt, den Winkel  $180^\circ - 2\alpha \in (0, 180^\circ)$  einschließt. Angenommen, die Geraden  $h$  und  $g$  schneiden sich in einem Punkt  $C$ . Dann ist  $\angle ACM = \alpha$  (wegen Innenwinkelsumme im Dreieck), und damit ist  $ACM$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $|CM| = |AM|$ . Also liegt  $C$  auf  $k$ , was zur Wahl

von  $g$  im Widerspruch liegt. Also sind  $h$  und  $g$  parallel und damit muss  $180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$ , also  $\alpha = 0$  sein. Dann ist  $g$  aber keine Tangente. Also musste  $\alpha = 90^\circ$  sein. Damit ist  $g$  auch eindeutig bestimmt.

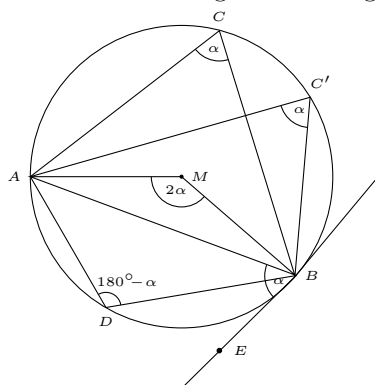
Es bleibt noch zu zeigen, dass ein solches  $g$ , welches durch  $A$  geht und senkrecht zu  $AM$  ist, auch wirklich eine Tangente ist – also keinen weiteren Punkt mit  $k$  gemeinsam haben kann: Angenommen es gibt  $B \in g \cap k$  mit  $B \neq A$ . Dann ist  $ABM$  wegen  $|AM| = |BM| = r$  ein gleichschenkliges Dreieck und damit wäre  $\angle MAB = \angle MBA = 90^\circ$ . Doch dann müsste nach der Innenwinkelsumme im Dreieck  $\angle AMB = 0^\circ$  sein und das Dreieck entartet mit  $A = B$  sein, was den Widerspruch gibt.  $\square$

Bevor wir weiteres zu Kongruenzsätzen sagen, beschäftigen wir uns zunächst noch mit den wichtigsten Sätzen zu Winkeln an Kreis und damit zusammenhängenden Fragen.

### I.3. Winkel am Kreis

Gegeben ein Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M$ . Seien  $A, B, C, C', D$  Punkte auf  $k$ , so dass  $M$  nicht auf  $AB$  liegt,  $C, C'$  auf der gleichen Seite der Geraden durch  $A$  und  $B$  liegen wie  $M$  und  $D$  auf der anderen Seite dieser Geraden liegt. Sei weiterhin  $g$  die Tangente an  $k$  durch  $B$  und  $E$  ein Punkt auf  $g$ , der auf der gleichen Seite von der Geraden durch  $A, B$  wie  $D$  liegt. Dann nennen wir die Strecke  $AB$  eine *Sehne* des Kreises, den Winkel  $\angle AMB$  *Zentriwinkel* über der Sehne  $AB$ , die Winkel  $\angle ACB, \angle AC'B, \angle ADB$  *Peripheriewinkel* über der Sehne  $AB$  und den Winkel  $\angle ABE$  *Sehnen-Tangentenwinkel* zur Sehne  $AB$ .

In dieser Situation gelten die folgenden Sätze:



- **Peripherie-Zentriwinkelsatz**  
 $\angle AMB = 2\angle ACB$
- **Peripheriewinkelsatz**  
 $\angle ACB = \angle AC'B = 180^\circ - \angle ADB$
- **Sehnen-Tangentenwinkelsatz**  
 $\angle AMB = 2\angle ABE$

Für den Beweis des Peripherie-Zentriwinkelsatzes und des zweiten Teils des Peripheriewinkelsatzes, siehe ÜA 1. Der erste Teil des Peripheriewinkelsatzes folgt direkt aus dem Peripherie-Zentriwinkelsatz. Der Sehnen-Tangentenwinkelsatz folgt ebenfalls: Da  $AMB$  ein gleichschenkliges Dreieck ist, gilt  $\sphericalangle ABM = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AMB$ . Aus der Tangenteneigenschaft folgt  $\sphericalangle MBE = 90^\circ$  (vgl. Lemma I.2.2) und damit  $\sphericalangle ABE = \frac{1}{2}\sphericalangle AMB$ . Beim letzten Argument geht ein, dass  $M$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $AB$  liegen und damit sich die einzelnen Winkel zu  $\sphericalangle MBE = 90^\circ$  addieren.

Die Umkehrung Peripheriewinkelsatz gilt auch:

**Lemma I.3.1.** *In der Situation wie oben beschrieben seien  $C'', D'$  weitere Punkte der Ebene mit  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC''B = 180^\circ - \sphericalangle AD'B$  und so dass  $C''$  auf der gleichen Seite von  $AB$  wie  $M$  und  $D'$  auf der anderen Seite liegt. Dann liegen  $C''$  und  $D'$  auch auf dem Kreis.*

*Beweisidee.* Der Beweis geht analog wie der Beweis zur Umkehrung des Satzes von Thales.  $\square$

Aus dem Peripheriewinkelsatz und dessen Umkehrung folgt direkt folgende Aussage über *Sehnenvierecke* (=Vierecke, deren Ecken alle auf einem gemeinsamen Kreis liegen).

**Folgerung I.3.2.** *Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Winkelsumme zweier gegenüberliegender Innenwinkel gleich  $180^\circ$  ist.*

Alle Rechtecke sind Sehnenvierecke. Rauten (*Raute/Rhombus* = Viereck, dessen Seiten alle gleich lang sind) sind genau dann Sehnenvierecke, wenn sie schon Rechtecke sind.

## I.4. Kongruenzsätze

Wie schon erwähnt, geben Kongruenzsätze für Dreiecke Kriterien, wann es für zwei Dreiecke eine Kongruenzabbildung (also eine abstandserhaltende bijektive Abbildung der Ebene auf sich selbst) gibt, die das eine Dreieck auf das andere abbilden. Kongruenzabbildungen erhalten automatisch Winkelgrößen – das setzen wir als bekannt voraus.

Die Kongruenzsätze der euklidischen Ebene sind:

**Satz I.4.1** (Kongruenzsätze). *Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn*

- (SSS) ihre drei Seitenlängen übereinstimmen.*
- (SWS) zwei ihrer Seitenlängen und der davon eingeschlossene Winkel übereinstimmen.*
- (WSW) eine Seitenlänge und die dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen.*
- (SSWg) zwei Seitenlängen und der Winkel, der der längeren der beiden Seiten gegenüberliegt, übereinstimmen.*

*Für kongruente Dreiecke stimmen insbesondere auch ihre Winkel überein.*

## I. Euklidische Geometrie – synthetisch

Seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke, für die es eine Kongruenzabbildung gibt, die die  $A'$  auf  $A$ ,  $B'$  auf  $B$  und  $C'$  auf einen Punkt  $D$  abgebildet wird, der auf der gleichen Seite von  $AB$  liegt wie  $C$ . Dann musste insbesondere  $|AB| = |A'B'|$  gelten. Wie so eine Kongruenzabbildung aussieht und dass es sie immer geben muss, wenn  $|AB| = |A'B'|$  gilt, setzen wir hier erst mal wieder voraus – dazu mehr in Abschnitt I.4. Damit sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  genau dann kongruent, wenn  $ABC$  und  $ABD$  kongruent sind. D.h. man kann den Beweis dieses Satzes zwei teilen, in die Existenz der obigen Abbildung und in den Spezialfall des obigen Satzes, wenn schon zwei der Punkte beider Dreiecke gleich sind.

Hier werden wir uns nur mit dem zweiten Teil des Beweises befassen. Dieser zeigt auch, wie man sich diese Dreiecke dann konstruieren würde.

*Beweis von Satz I.4.1 im Spezialfall von Dreiecken  $ABC$  und  $ABD$ .* Sind zwei Dreiecke  $ABC$  und  $ABD$  gegeben, so dass  $C$  und  $D$  auf der gleichen Seite von  $g_{AB}$  liegen. In diesem Spezialfall wird der Satz nicht nur kongruente sondern so gar diesselben Dreiecke (also  $C = D$ ) liefern. D.h. wir müssen uns überlegen, dass (SSS) etc. das Dreieck  $ABD$  bei gegebenem Dreieck  $ABC$  schon eindeutig bestimmt:

- (SWS) O.B.d.A. sei der Winkel bei  $A$ , der übereinstimmende Winkel. Dann muss  $D$  auf  $g_{AC}$  liegen. Wegen  $|AD| = |AC|$  und da  $C$  und  $D$  auf der gleichen Seite von  $g_{AB}$  liegen, muss  $C = D$  sein.
- (WSW) Dann muss  $D$  auf  $g_{AC}$  und  $g_{BC}$  liegen. Diese beiden Geraden haben  $C$  als eindeutigen Schnittpunkt, also muss  $C = D$  sein.
- (SSWg) Hier sei  $AC$  das erste  $S$  in  $SSWg$  und damit die Seite, die dem größten Winkel gegenüberliegt, und  $AB$  sei das zweite  $S$ . Dann muss  $D$  auf dem Kreis  $k$  um  $A$  mit Radius  $|AC|$  und auf der Geraden  $g_{BC}$  liegen. Es ist  $C \in k \cap g_{BC}$ . Ist dies der einzige Schnittpunkt, so muss  $C = D$  gelten. Gibt es mehr als einen Schnittpunkt, dann gibt es zwei  $C$  und sagen wir  $E$ . Nach Voraussetzung ist  $|AC|$  größer gleich  $|AB|$ . Damit liegt  $B$  im Inneren von  $k$  oder auf  $k$ . Damit liegt  $E$  auf der anderen Seite von  $g_{AB}$  als  $C$  oder es ist  $E = B$ . Damit muss wieder  $C = D$  gelten.

Bevor wir auch den anderen Kongruenzsatz betrachten, benötigen wir noch folgendes Lemma (ÜA 2):

**Lemma I.4.2** (Lagebeziehung zweier Kreise zueinander). *Für  $i \in \{1, 2\}$  sei  $k_i$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M_i$ ,  $M_1 \neq M_2$ . Dann können genau drei Fälle auftreten:  $k_1$  und  $k_2$  haben keinen, genau einen oder genau zwei Punkte gemeinsam. Im zweiten Fall haben die beiden Kreise in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente und der Schnittpunkt liegt auf der Geraden  $g_{M_1M_2}$ . Im dritten Fall steht die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte senkrecht auf  $g_{M_1M_2}$  und die beiden Schnittpunkte liegen auf verschiedenen Seiten von  $g_{M_1M_2}$ .*

Damit haben wir dann:



(SSS) Wegen  $|AD| = |AC|$  und  $|BD| = |BC|$  muss  $D$  sowohl auf dem Kreis  $k_1$  um  $A$  mit Radius  $|AC|$  also auch auf dem Kreis  $k_2$  um  $B$  mit Radius  $|BC|$  liegen. Wir haben zumindest  $C \in k_1 \cap k_2$ . Da  $C \notin g_{AB}$  ist, muss nach letztem Lemma  $k_1 \cap k_2$  aus zwei Punkten bestehen, wovon aber nur einer auf der gleichen Seite von  $g_{AB}$  liegt wie  $C$ . Damit muss  $C = D$  sein.  $\square$

## I.5. Weitere Anwendungen von Kongruenzsätzen

Wir sammeln hier einige wichtige Sätze über besondere Punkte und Geraden im Dreieck, die wir alle mit Kongruenzsätzen beweisen können:

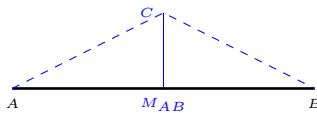
Sei  $AB$  eine Strecke. Die *Mittelsenkrechte* ist die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  geht und senkrecht auf dieser Strecke steht.

**Satz I.5.1.** *Jedes Dreieck besitzt einen eindeutigen Kreis, der durch alle drei Eckpunkte geht – der Umkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks.*

Der Beweis beruht auf einer grundlegenden Eigenschaft von Mittelsenkrechten, die wir extra in einem Lemma beweisen, da sie auch häufig vorkommt:

**Lemma I.5.2.** *Sei  $AB$  eine Strecke. Die Mittelsenkrechte besteht genau aus den Punkten, die zu  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben.*

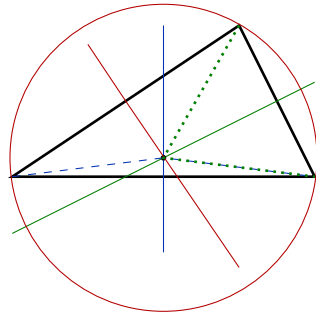
*Beweis.* Sei  $M_{AB}$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Damit ist insbesondere  $|M_{AB}A| = |M_{AB}B|$ .



Sei zunächst  $C$  ein Punkt auf der Mittelsenkrechten von  $AB$ , also  $\angle CM_{AB}A = 90^\circ$ . Dann haben die Dreiecke  $AM_{AB}C$  und  $BM_{AB}C$  zwei Seitenlängen gemeinsam:  $CM_{AB}$  ist eine Seite in beiden Dreiecken und  $|M_{AB}A| = |M_{AB}B|$ . Außerdem ist der eingeschlossene Winkel dieser Seiten in beiden Dreiecken ein rechter. Damit sind diese beiden Dreiecke nach (SWS) kongruent und es gilt  $|AC| = |CB|$ .

Sei nun andersherum  $C$  ein Punkt mit  $|AC| = |CB|$ . Dann haben die Dreiecke  $AM_{AB}C$  und  $BM_{AB}C$  alle drei Seitenlängen gemeinsam. Nach (SSS) sind diese Dreiecke damit kongruent und haben auch gleiche Winkel, also insbesondere  $\angle CM_{AB}A = \angle CM_{AB}B$ . Da diese Winkel sich als Nebenwinkel zu  $180^\circ$  addieren, müssen es rechte Winkel sein und damit liegt  $C$  auf der Mittelsenkrechten von  $AB$ .  $\square$

*Beweis zum Umkreissatz I.5.1.* Sei  $M$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu  $AB$  und  $BC$ . Diese müssen sich wirklich schneiden, da sie sonst parallel wären und damit auch die Geraden durch  $AB$  und  $BC$  auch parallel (vgl. ÜB 0), was nicht sein kann, da sie beide durch  $B$  gehen. Wir wollen zeigen, dass die Mittelsenkrechte von  $AC$  auch durch  $M$  geht:



Nach letztem Lemma folgt aus 'M liegt auf der Mittelsenkrechten zu AB', dass  $|AM| = |BM|$  ist, und 'aus M liegt auf der Mittelsenkrechten zu BC', dass  $|CM| = |BM|$  ist. Damit ist insbesondere  $|AM| = |BM| = |CM|$  und M ist somit der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch A, B und C geht – also des Umkreises. Weiterhin folgt aus  $|AM| = |CM|$  und letztem Lemma, dass M auch auf der Mittelsenkrechten von AC liegt. Damit schneiden sich alle drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. Die Eindeutigkeit des Umkreises folgt auch mit letztem Lemma, da dann der Mittelpunkt des Umkreises auf allen drei Mittelsenkrechten liegen muss und damit gleich M ist.

□

Als nächstes betrachten wir die Winkelhalbierenden eines Dreiecks:

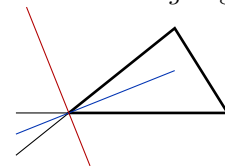
Sei ein Winkel  $\sphericalangle ABC$  gegeben. Sei D ein Punkt im Inneren von  $\sphericalangle ABC$ , so dass  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$  ist. Die Winkelhalbierende ist die Gerade  $g_{BD}$ , diese ist unabhängig von der Wahl von D.

**Lemma I.5.3** (Charakterisierung der Winkelhalbierenden). *Seien g und h zwei verschiedene Strahlen, die in einem gemeinsamen Punkt A starten. Sei  $B \in g$  und  $C \in h$  mit  $A \neq B$  und  $A \neq C$ . Der Anteil der Winkelhalbierende von  $\sphericalangle BAC$  im Inneren von  $\sphericalangle BAC$  ist der geometrische Ort aller Punkte im Inneren des Winkels von  $\sphericalangle BAC$ , die zu g und h den gleichen Abstand haben.*

Der Abstand  $d(P, g)$  eines Punktes P zu einer Geraden g ist definiert als

$$d(P, g) := \inf\{|PQ| \mid Q \in g\}.$$

Dieses Infimum wird immer durch den Fußpunkt des Lotes von P auf g angenommen. Sucht man den geometrischen Ort aller Punkte, die zu den Geraden zu den obigen Strahlen den gleichen Abstand haben, erhält man zwei Geraden – die Winkelhalbierende wie im Lemma und die Winkelhalbierende des Nebenwinkels (im Falle, dass der Winkel von oben ein Innenwinkel eines Dreiecks war, nennt man die zweite Winkelhalbierende auch *äußere Winkelhalbierende*, vgl. Abb. rechts.



In blau: Winkelhalbierende des Dreiecks.

In rot: Zugehörige äußere Winkelhalbierende.

*Beweis.* Sei P ein Punkt auf der Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle BAC$ , der im Inneren von  $\sphericalangle BAC$  liegt. Sei D der Fußpunkt des Lotes von P auf  $g_{AB}$  und E der des Lotes von P auf  $g_{CB}$ . Die Punkte D und E liegen auf den Schenkeln des Winkels. Wir vergleichen die Dreiecke APD und APE. Sie haben mit AP eine gemeinsame Seite. Weiterhin ist

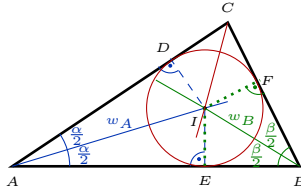
$\angle PDA = \angle PEA = 90^\circ$  und  $\angle PAD = \angle PAE$  nach Definition der Winkelhalbierenden. Also sind beide Dreiecke nach dem Kongruenzsatz (WSW) kongruent. Damit ist  $|PD|$ , der Abstand von  $P$  zu  $g_{AB}$ , gleich  $|PE|$ , dem Abstand von  $P$  zu  $g_{AC}$ .

Sei andererseits  $P$  ein Punkt im Inneren von  $\angle BAC$ , der zu beiden Schenkeln den gleichen Abstand hat. Seien  $D \in g_{AB}$  und  $E \in g_{AC}$  wieder die Fußpunkte der zugehörigen Lote. Wieder vergleichen wir die Dreiecke  $APD$  und  $APE$ . Sie haben mit  $AP$  eine gemeinsame Seite und per Annahme ist  $\angle PDA = \angle PEA$ . Weiterhin ist  $\angle PDA = \angle PEA = 90^\circ$ . Also sind beide Dreiecke nach dem Kongruenzsatz (SSW) kongruent und es folgt  $\angle PAD = \angle PAE$ .  $\square$

Damit können wir direkt zeigen:

**Lemma I.5.4.** *Jedes Dreieck besitzt einen eindeutigen Inkreis (=Ein Kreis, so dass alle Dreiecksseiten Tangenten an diesen Kreis sind.) Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.*

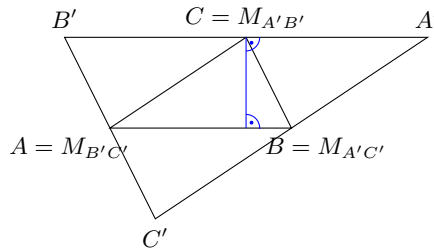
*Beweis.* Sei  $I$  der Punkt, in dem sich die Winkelhalbierende  $w_A$  des Winkels bei  $A$  und die Winkelhalbierende  $w_B$  des Winkels bei  $B$  schneiden. Dieser Schnittpunkt ist im Inneren des Dreiecks. Seien  $D, E$  bzw.  $F$  der Fußpunkt des Lotes von  $I$  auf  $AC, AB$  bzw.  $BC$ . Nach letztem Lemma folgt aus  $I \in w_A$ , dass  $|ID| = |IE|$  ist, und aus  $I \in w_B$ , dass  $|IE| = |IF|$  ist. Damit ist  $|ID| = |IF|$  und nach letztem Lemma liegt damit  $I$  insbesondere auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels bei  $C$ . Außerdem liegen so  $DEF$  alle auf einem Kreis und wegen der rechten Winkel zu den Seiten sind diese nach Lemma I.2.2 Tangenten an diesen Kreis.  $\square$



Auch die Höhen eines schneiden sich in einem Punkt:

**Lemma I.5.5.** *In einem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt.*

*Beweis.* Wir zeichnen die Parallelen zu jeder Seite durch den jeweils gegenüberliegenden Punkt. Dadurch entsteht das Dreieck  $A'B'C'$  wie im Bild. Damit ist das Viereck  $ABA'C$  ein Parallelogramm und somit ist  $|A'C| = |AB|$  (ÜA 4). Analog ist  $|B'C| = |AB|$ . Weiterhin muss die Höhe auf  $AB$  auch senkrecht auf der Parallelen  $g_{A'B'}$  sein. Also ist die Höhe auf  $AB$  gleichzeitig Mittelsenkrechte im Dreieck  $A'B'C'$ . Gleiches gilt für die anderen Höhen in  $ABC$ . Da die Mittelsenkrechten von  $A'B'C'$  sich in einem Punkt schneiden, schneiden sich auch die Höhen von  $ABC$  in einem Punkt.  $\square$



## I.6. Ähnlichkeit

Neben den Kongruenzabbildungen gibt es noch zentrische Streckungen als wichtige Abbildungen der Ebene auf sich selbst:

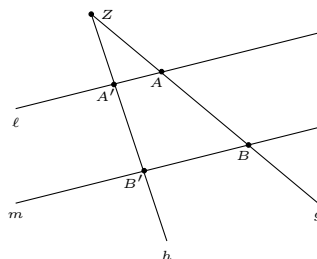


Abb. I.2.: Strahlensatzfigur

**Definition I.6.1.** Sei  $Z$  ein Punkt – das *Streckungszentrum* und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – der *Streckungsfaktor*. Die *zentrische Streckung* von  $Z$  aus um den Faktor  $\lambda$  ist folgende Abbildung: Sei  $P$  ein Punkt ungleich  $Z$  und  $g$  die Gerade durch  $P$  und  $Z$ . Ist  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ), sei das Bild von  $P$  der Punkt  $Q$  auf der Halbgeraden von  $g$  von  $Z$  aus, auf der auch  $P$  liegt (auf der  $P$  nicht liegt) und für den  $|ZQ| = |\lambda| |ZP|$  gilt. Außerdem wird  $Z$  auf sich selbst abgebildet.

Es gelten die Strahlensätze (hier ohne Beweis, der braucht in der synthetischen Geometrie viel mehr Vorbereitung):

**Satz I.6.2** (Strahlensatz). Seien  $g$  und  $h$  zwei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt  $Z$ . Seien  $\ell$  und  $m$  zwei Geraden, die nicht zu  $g$  und  $h$  parallel sind. Damit gibt es Schnittpunkte:  $\{A\} = g \cap \ell$ ,  $\{A'\} = h \cap \ell$ ,  $\{B\} = g \cap m$  und  $\{B'\} = h \cap m$ , vgl. Abbildung I.2.

Dann gilt

$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZA'|}{|ZB'|}$$

genau dann, wenn  $\ell \parallel m$  ist, und genau dann, wenn  $\ell$  und  $m$  durch zentrische Streckung von  $Z$  aus auseinander hervorgehen.

Ist  $\ell \parallel m$ , dann gilt auch

$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$

**Folgerung I.6.3.** Seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei ähnliche Dreiecke (d.h. die Innenwinkel bei  $A$  und  $A'$  bzw.  $B$  und  $B'$  bzw.  $C$  und  $C'$  sind jeweils gleich). Dann gilt

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|C'A'|}{|C'B'|}.$$

Umgekehrt gilt diese Gleichheit genau dann, wenn  $ABC$  und  $A'B'C'$  ähnliche Dreiecke sind.

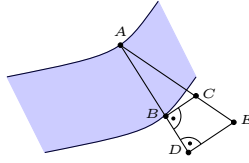


Abb. I.3.: Zur Bestimmung der Breite  $|AB|$  des Flusses kann man Messungen auf dem Land und den Strahlensatz verwenden. Dann ist  $|AD|/|AB| = |DE|/|BC|$  und damit

$$|AB| = (|DE| - |BC|)|BD|/|BC|.$$

*Beweis.* Ist  $C = C'$ ,  $A' \in S(C, A)$  und  $B' \in S(C, B)$ , so folgt diese Aussage direkt aus dem Strahlensatz und den Winkelsätzen an geschnittenen Parallelen.

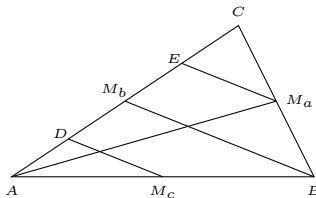
Ist dies nicht der Fall, kann man sich zunächst ein zu  $A'B'C'$  kongruentes Dreieck  $A''B''C''$  suchen, mit  $C = C''$ ,  $A'' \in S(C, A)$  und  $B'' \in S(C, B)$ . Das geht, da der Winkel bei  $C$  und  $C'$  der beiden Dreiecke übereinstimmt und dann den ersten Fall anwenden.  $\square$

„Ähnlichkeiten und Strahlensätze kann man verschieden sogar praktisch anwenden, siehe Abbildung I.3, ÜA 9 oder die Funktionsweise eines Pantografen\*.

Eine weitere Anwendung ist die Existenz des des Schwerpunkts eines Dreiecks:

**Satz I.6.4.** *In einem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden (= die Geraden, die eine Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbinden) in einem Punkt. Dieser Punkt wird Schwerpunkt<sup>†</sup> genannt und teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1 : 2.*

*Beweis.* Sei  $M_a$  der Mittelpunkt von  $BC$ ,  $M_b$  der von  $AC$  und  $M_c$  der von  $AB$ . Sei  $S$  der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden  $M_bB$  und  $M_aA$ . Seien  $D$  bzw.  $E$  Punkte auf  $AC$ , so dass  $DM_c$  bzw.  $EM_a$  parallel zu  $M_bB$ .



Wegen Strahlensatz und  $|CM_a| = |M_aB|$  bzw.  $|AM_c| = |M_cB|$  ist damit  $|EC| = |EM_b|$  bzw.  $|AD| = |DM_b|$ . Wegen  $|AM_b| = |M_bC|$  ist damit  $|EA| = \frac{2}{3}|M_bA|$ . Strahlensatz in  $EM_bASM_a$  liefert, dass  $S$  die Strecke  $\overline{M_aA}$  im Verhältnis 1 : 2 teilt. Analog teilt dann  $S$  auch  $\overline{M_bB}$  in diesem Verhältnis.

Analog teilt auch der Schnittpunkt  $S'$  von  $\overline{M_bB}$  und  $\overline{M_cC}$  beide Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2. Somit muss  $S = S'$  sein. Damit schneiden sich alle drei Seitenhalbierenden in einem Punkt.  $\square$

\*<https://de.wikipedia.org/wiki/Pantograf>

<sup>†</sup>Weil es dem Schwerpunkt/Massenmittelpunkt einer massiven dreieckigen Platte entspricht – <https://de.wikipedia.org/wiki/Massenmittelpunkt>.



## II. Euklidische Geometrie – analytisch

### II.1. Modell

Vorl. 3

In der analytischen Geometrie arbeiten wir mit  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit euklidischem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und zugehöriger Norm  $|\cdot|$ .

Ein *Punkt* ist ein Element von  $\mathbb{R}^2$ . Seien  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist der zugehörige *Winkel* bei  $q$  definiert als  $\angle pqr := \arccos \frac{\langle p-q, r-q \rangle}{|p-q| \cdot |r-q|}$ . Hier ist  $\arccos: [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$  – wir arbeiten hier also auch erst einmal nur mit Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ .

Der Abstand zwischen  $p$  und  $q$  ist  $d(p, q) := |pq| := |p - q|$ .

Eine *Gerade* ist eine Menge folgender Form: Es gibt  $p, q \in \mathbb{R}^2$  mit  $p \neq q$ , so dass die Gerade aus allen Punkten der Form  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  besteht. Schreibt man  $\lambda p + (1 - \lambda)q = q + \lambda(p - q)$ , dann hat man eine Darstellung der Gerade, die durch  $q$  – einem Punkt auf der Geraden – und  $v := \overrightarrow{qp} := p - q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dem *Richtungsvektor* der Geraden bestimmt ist. Der Strahl von  $q$  aus in Richtung von  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist dann die Menge aller Punkte der Form  $q + \lambda v$  mit  $\lambda \geq 0$ .

Die Strecke von  $p$  nach  $q$  ist die Menge aller Punkte der Form  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  mit  $\lambda \in [0, 1]$ .

In diesem Modell lassen sich die Eigenschaften, die wir im Abschnitt 1.1 für die synthetische euklidische Geometrie als gegeben vorausgesetzt haben, direkt nachrechnen. Wir machen es hier nur für ein paar der Aussagen dort.

- (i) (Existenz einer eindeutigen Parallele) Zu jeder Gerade  $g$  und jedem Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$ , gibt es genau eine zu  $g$  parallele Gerade durch den Punkt  $p$  (Definition von parallel wie zuvor):

Liege der Punkt zunächst auf der Geraden. Dann ist  $g$  selbst eine Parallele und nach Definition ist es die einzige.

Sei nun  $p \notin g$ . Die Gerade  $g$  habe die Form  $g = \{q + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  für ein  $q \in \mathbb{R}^2$  und ein  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Wir setzen  $h = \{p + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Wir zeigen zunächst, dass  $g \cap h = \emptyset$  gilt: Angenommen es ist  $a \in g \cap h$ . Dann gibt es  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  mit  $a = p + \lambda_1 v = q + \lambda_2 v$ . Dann ist insbesondere  $p = q + (\lambda_2 - \lambda_1)v \in g$ , was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, dass  $p$  nicht auf  $g$  liegt.

Damit haben gezeigt, dass  $g$  und  $h$  parallel sind, es also eine solch gesuchte Parallele gibt. Wir wollen nun zeigen, dass diese Parallele eindeutig ist. Angenommen  $k$

## II. Euklidische Geometrie – analytisch

sei eine Parallele zu  $g$  durch  $p$ . Dann ist  $k = \{p + \mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\}$  für ein geeignetes  $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Da  $k$  und  $g$  parallel sind, ist  $k \cap g = \emptyset$ . Wir schauen nun, was dies für  $w$  bedeutet: Sei dazu  $v^\perp$  ein Einheitsvektor senkrecht auf  $v$ . Dann ist  $w = av + bv^\perp$  für geeignete  $a, b \in \mathbb{R}$ . Somit folgt aus  $p + \mu w = q + \lambda v$ ,  $\langle p - q, v^\perp \rangle + \mu b = 0$ . Es ist  $\langle p - q, v^\perp \rangle$ , da  $p \notin g$ . D.h. es kann nur  $k \cap g = \emptyset$  gelten, wenn  $b = 0$ , also  $w = av$  ist. Also hat  $k$  die Form von oben und die Parallele ist eindeutig.

- (ii) (Winkel unabhängig von Wahl der Punktes auf dem Schenkel) Sei  $\angle pqr$  ein Winkel und sei  $s = q + t(p - q)$  für  $t > 0$  (also ein Punkt auf dem Strahl auf der Geraden  $g_{pq}$  von  $q$  aus auf dem auch  $p$  liegt). Dann gilt  $\angle pqr = \angle sqr$ :

$$\begin{aligned} \angle sqr &= \arccos \frac{\langle s - q, r - q \rangle}{|s - q| \cdot |r - q|} = \arccos \frac{\langle t(p - q), r - q \rangle}{t|p - q| \cdot |r - q|} \\ &= \arccos \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|p - q| \cdot |r - q|} = \angle pqr. \end{aligned}$$

- (iii) (Nebenwinkelsatz) Sei  $g = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade mit  $p, v \in \mathbb{R}^2$ . Sei  $q \notin g$ ,  $r = p - v$  und  $s = p + v$ . Dann sind  $\angle rpq$  und  $\angle qps$  Nebenwinkel und es gilt

$$\angle rpq = \arccos \frac{\langle r - p, q - p \rangle}{|r - p| |q - p|} = \arccos \left( -\frac{\langle s - p, q - p \rangle}{|s - p| |q - p|} \right) = \pi - \angle spq.$$

## II.2. Thales und Co. aus Kapitel I

Wir beweisen zum Vergleich noch mal einige der Sätze, die wir schon mit synthetischer Geometrie bewiesen haben, nun mittels analytischer Geometrie:

**Thales.** Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ ,  $a = \overrightarrow{MB}$  und  $c = \overrightarrow{MC}$ . Dann ist  $\overrightarrow{MA} = -a$ ,  $\overrightarrow{AC} = c + a$  und  $\overrightarrow{BC} = c - a$ . Wir rechnen

$$\langle a + c, c - a \rangle = |c|^2 - |a|^2.$$

Also ist  $a + c \perp c - a$  (das Dreieck ist rechtwinklig) genau dann, wenn  $|c| = |a|$  ist (also  $C$  auf dem Kreis um  $M$  mit Radius  $|a|$  liegt).

**Höhenschnittpunkt.** Sei  $\overrightarrow{AB} = b$  und  $\overrightarrow{AC} = c$ . Sei  $H$  der Höhenschnittpunkt der Höhen durch  $B$  und durch  $C$ . Seien  $H_B$  bzw.  $H_C$  die Fußpunkte dieser beiden Höhen. Sei  $p := \overrightarrow{H_C H}$  und  $q := \overrightarrow{H_B H}$ . Dann ist  $p \perp b$  und  $q \perp c$ . Wir stellen  $\overrightarrow{AH}$  auf verschiedene Arten dar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{H_C H} + \overrightarrow{AH_C} = p + \lambda \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{H_B H} + \overrightarrow{BH_B} = q + \mu \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

für geeignete  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Also ist  $p + \lambda c = q + \mu b$ . Es ist zu zeigen: Die Gerade durch  $AH$  ist die Höhe auf  $BC$ , also  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ .



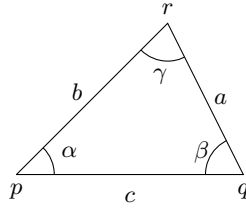


Abb. II.1.: Bezeichnungen für ein Dreieck

Es gilt: Da  $CH_C$  die Höhe ist, muss  $\lambda b + \kappa p = c$  für ein geeignetes  $\kappa \in \mathbb{R}$  sein. Durch Skalarprodukt mit  $b$ , erhält man  $\lambda|b|^2 = \langle b, c \rangle$ . Analog erhält man  $\mu|c|^2 = \langle b, c \rangle$ . Damit ist

$$\langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle q + \mu c, c \rangle - \langle p + \lambda b, b \rangle = \mu|c|^2 - \lambda|b|^2 = \langle b, c \rangle - \langle b, c \rangle = 0.$$

Als ein anderes Beispiel rechnen wir in ÜA 12 den Strahlensatz I.6.2 nach.

Nicht immer kann man Sachen 'einfach' nachrechnen. Das ist oft auch komplexer oder die Kompliziertheit hängt sehr davon ab, wie man das Koordinatensystem legt.

### II.3. Trigonometrie im $\mathbb{R}^2$

Seien jetzt  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  nicht kollineare Punkte, dann betrachten wir das Dreieck  $\triangle pqr$ , vgl. Abb. II.1, mit den Seitenlängen

$$a = |\overrightarrow{rq}|, \quad b = |\overrightarrow{pr}|, \quad c = |\overrightarrow{pq}|$$

und den Winkelbeträgen:

$$\alpha = |\angle qpr|, \quad \beta = |\angle pqr|, \quad \gamma = |\angle prq|.$$

**Lemma II.3.1.** (Rechtwinklige Dreiecke) Sei  $pqr$  ein Dreieck mit  $\angle prq = \pi/2$ . Dann gilt

$$(i) \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$(ii) \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$(iii) \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Beweis. Übungsaufgabe 11

□

**Lemma II.3.2.** (Winkeladdition) Seien  $p, q, r, s$  vier Punkte, so dass  $pqr$  und  $pqs$  jeweils nicht kollinear sind. Weiterhin liegen  $r$  und  $s$  auf verschiedenen Seiten der Geraden durch  $p$  und  $q$ . Dann gilt  $\angle spr = \angle spq + \angle qpr$ .

## II. Euklidische Geometrie – analytisch

*Beweis.* Übungsaufgabe 11

□

**Satz II.3.3.** Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Seien  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  wie in Abbildung II.1. Dann gilt:

(i) Kosinussatz:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ .

(ii) Sinussatz:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

(iii) Winkelsumme:  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

*Beweis.* (i) Es gilt

$$\cos \gamma = \frac{\langle p - r, q - r \rangle}{a \cdot b} = \frac{1}{2ab} \cdot (-|p - q|^2 + |p - r|^2 + |r - q|^2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

(ii) Durch Einzeichnen einer Höhe erhalten wir zwei rechtwinklige Dreiecke. Für diese wenden wir Lemma II.3.1.iii an und erhalten zusammen die Behauptung.

(iii) Sei  $g$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $r$ , die zur Geraden durch  $p$  und  $q$  parallel ist. Anwenden des Wechselwinkelsatzes und der Winkeladdition liefert die Behauptung. □

# III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene

Sobald man eine Menge  $X$  mit Abstandsfunktion hat – also einen metrischen Raum, kann man nach Symmetrien/Kongruenzabbildungen fragen (i.A. Kontext von metrischen Räumen eher Isometrie genannt):

Eine surjektive Abbildung  $f: X \rightarrow X$  heißt *Symmetrie/Kongruenzabbildung*, wenn sie Abstände erhält, d.h.,

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Jede Kongruenzabbildung ist sogar bijektiv: Surjektiv ist sie per Definition. Injektivität folgt, da für alle  $x, y \in X$  mit  $f(x) = f(y)$  folgt,  $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  und damit  $x = y$ .

Die Menge der Kongruenzabbildungen bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Wir werden uns die Menge der Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene anschauen – zuerst synthetisch, dann analytisch.

Da in der euklidischen Geometrie für drei paarweise verschiedene Punkte  $x, y, z$  genau dann Gleichheit in der Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  gilt, wenn diese auf einer Geraden liegen und  $z$  zwischen  $x$  und  $y$  liegen, bilden Kongruenzabbildungen Geraden in Geraden ab. Auch Winkel werden in Winkel gleicher Größe überführt (dass zu sehen, ist unterschiedlich schwer, je nachdem, welches Wissen man voraussetzt – kümmern wir uns jetzt nicht darum).

## III.1. Symmetrien - synthetisch

**Satz III.1.1.** *Jede Symmetrie/Kongruenzabbildung der euklidischen Ebene ist eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

Der Beweis kommt erst später (und wird voraussetzen, dass wir wissen, dass die folgenden Abbildungen Kongruenzabbildungen sind und diese die Gruppe aller Kongruenzabbildungen erzeugen), zunächst definieren wir diese Abbildungen, vgl. Abbildung III.1, und überlegen uns, was passiert, wenn wir verschiedene solcher Abbildungen hintereinander ausführen:

### III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene

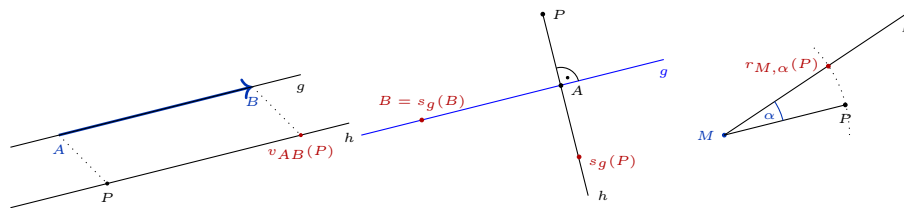


Abb. III.1.: Links: Verschiebung  $v_{AB}$ , Mitte: Spiegelung  $s_g$ , Rechts: Drehung  $r_{M,\alpha}$

- (i) Eine *Verschiebung*  $v_{AB}$  ist eine Kongruenzabbildung, die durch zwei Punkte  $A \neq B$  wie folgt definiert werden kann: Sei  $g$  die Gerade durch  $A$  und  $B$ . Um für einen Punkt  $P$  nun  $v_{AB}(P)$  zu definieren, sei  $h$  die Parallele zu  $g$  durch  $P$ . Sei nun  $v_{AB}(P)$  der Punkt auf  $h$  mit Abstand  $|AB|$  zu  $P$ , der auf der gleichen Halbebene zur Geraden durch  $A$  und  $P$  liegt wie  $B$ .

Verschiedene Strecken  $AB$  können so zu den gleichen Kongruenzabbildungen führen. Seien  $C \neq D$  zwei Punkte. Dann ist  $v_{AB} = v_{CD}$  genau dann, wenn die Gerade durch  $A$  und  $B$  und die durch  $C$  und  $D$  parallel sind,  $|AB| = |CD|$  ist und  $B$  und  $D$  in der gleichen Halbebene von  $g_{AC}$  liegt (die letzte Bedingung unterscheidet  $v_{AB}$  von  $v_{BA}$ ).

Eigenschaften von Verschiebungen:

- (a)  $v_{AB}v_{BA} = \text{id}$
- (b)  $v_{BC}v_{AB} = v_{AB}v_{BC} = v_{AC}$

- (ii) Eine *Spiegelung*  $s_g$  an eine Geraden  $g$  ist definiert wie folgt: Für einen Punkt  $P$  sei  $h$  die zu  $g$  senkrechte Gerade, die durch  $P$  verläuft. Der Schnittpunkt von  $h$  mit  $g$  sei  $A$ . Ist  $A = P$ , dann ist  $s_g(P) = P$ . Ist  $A \neq P$ , dann ist  $s_g(P)$  der Punkt auf  $h$ , der zu  $A$  den Abstand  $|AP|$  hat und nicht gleich  $P$  ist.

Eigenschaften von Spiegelungen:

- (a)  $s_g s_g = \text{id}$  (D.h. eine Spiegelung ist ein Element der Ordnung 2 in der Gruppe der Kongruenzabbildungen. Alle Kongruenzabbildungen mit dieser Eigenschaft sind auch wirklich Spiegelungen.)
- (b) Aus  $s_g = s_h$  folgt  $g = h$ .
- (c) Ist  $g \parallel h$ , dann ist  $s_g s_h$  eine Verschiebung in senkrecht  $g$  um den doppelten Abstand zwischen  $g$  und  $h$  und von  $h$  aus gesehen in die Richtung, die weg von  $g$  führt, s. Abbildung III.2.
- (d) Es ist  $s_g v_{BA} = v_{BA} s_{v_{AB}(g)}$ , vgl. Abb. III.2.
- (e) Jede Kongruenzabbildung  $k$ , für die es eine Gerade  $g$  gibt, die die Fixpunktmenge von  $k$  ist, und welche die Halbebenen erhält (d.h. für alle  $A \notin g$  liegen  $A$  und  $k(A)$  auf der gleichen Seite von  $g$ .) ist entweder die Identität oder eine Spiegelung an einer zu  $g$  senkrechten Geraden.

### III.1. Symmetrien - synthetisch

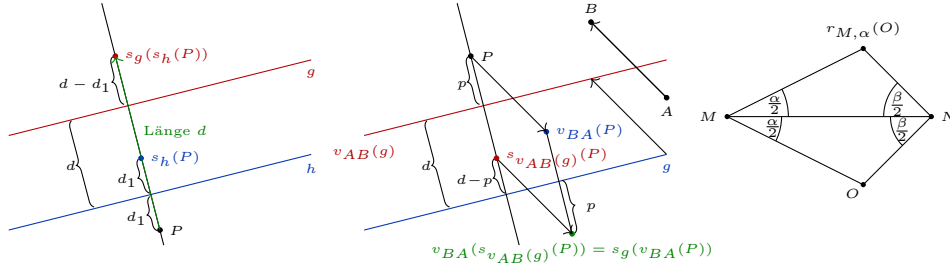


Abb. III.2.: Links: Spiegelungen an zwei parallelen Geraden, Mitte: Vertauschen von Spiegelung und Verschiebung, Rechts: Konstruktion des Mittelpunktes  $O$  der resultierenden Drehung zu  $r_{N, \beta} r_{M, \alpha}$ . (Falls  $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360^\circ}$ , sonst existiert der Schnittpunkt nicht.)

Eine *Gleitspiegelung* ist die Hintereinanderausführung einer Verschiebung und einer Spiegelung.

- (iii) Eine *Drehung*  $r_{M, \alpha}$  um einen Punkt  $M$  und einen Winkel  $\alpha \in [0, 360^\circ)$  ist wie folgt definiert: Es ist  $r_{M, \alpha}(M) = M$ . Sei nun  $P \neq M$ . Sei  $\ell$  der Strahl von  $P$  aus, der mit  $\overline{PM}$  gegen den Uhrzeigersinn den Winkel  $\alpha$  einschließt. Dann ist  $r_{M, \alpha}(P)$  der Punkt auf  $\ell$  mit  $|r_{M, \alpha}(P)M| = |PM|$ .

Eigenschaften von Drehungen :

- (a) Sei  $\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360^\circ}$ :  $r_{M, \alpha} r_{M, \beta} = r_{M, \gamma}$  mit  $\gamma = \alpha + \beta$  falls  $\alpha + \beta < 360^\circ$  ist, sonst  $\gamma = \alpha + \beta - 360^\circ$ .  $r_{N, \beta} r_{M, \alpha} = r_{O, \alpha + \beta \pmod{360^\circ}}$  mit  $O$  wie in der Abbildung III.2. Für einen Beweis dieser Aussage, siehe Beispiel III.3.2.

Ist  $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ , dann ist  $r_{N, \beta} r_{M, \alpha} = v_{M r_{N, \beta}(M)}$ .

- (b) Ist  $g \cap h = \{M\}$  und  $\alpha \in [0, \pi)$  der von  $g$  und  $h$  eingeschlossene Winkel, dann ist  $s_g s_h = s_h s_g = r_{M, 2\alpha}$ .
- (c) Die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Verschiebung (und auch in umgekehrter Reihenfolge) ist wieder eine Drehung – ÜA 16.
- (d) Die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Spiegelung (und auch in umgekehrter Reihenfolge) ist eine Gleitspiegelung – ÜA 16.

*Beweis von Satz III.1.1.* Wir setzen wie angekündigt als Wissen voraus, dass Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen Kongruenzabbildungen sind und die Gruppe der Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene erzeugen.

D.h. eine beliebige Kongruenzabbildung  $k$  ist eine Hintereinausführung von Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen  $k_i$ :  $k = k_1 k_2 \dots k_n$ . Sind zwei aufeinanderfolgende  $k_i$  Spiegelungen, so können diese durch (ii-a), (ii-b) oder (iii-c) durch die Identität, eine Verschiebung oder eine Drehung ersetzt werden. Sind danach zwei aufeinanderfolgende

### III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene

$k_i$  eine Drehung und eine Verschiebung, so können diese nach (iii-d) durch eine Spiegelung und eine Verschiebung ersetzt werden. Sind danach zwei aufeinanderfolgende  $k_i$  Drehungen, so können diese durch (iii-a) in eine Drehung zusammen gefasst werden. Die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Spiegelung kann nach (iii-e) aber auch immer wieder als Spiegelung dargestellt werden. Durch Iteration der bisherigen Ersetzungen können dann in der Darstellung  $k = \ell_1 \dots \ell_m$  keine Spiegelungen direkt neben einander stehen, ebenso keine Drehungen und keine Verschiebungen. Außerdem steht auch keine Verschiebung neben einer Drehung und auch keine Spiegelung neben einer Drehung. Wenn also nun noch eine Drehung vorkommt, so muss sie schon  $k$  selbst sein. Kommt keine Drehung mehr vor, muss es sich also abwechselnd um Spiegelungen und Verschiebungen handeln. Nach (ii-d) kommutieren Spiegelung und Verschiebungen zwar nicht, können jedoch durch eine Verschiebung mit einer anderen Spiegelung in vertauschter Reihenfolge ersetzt werden. So bleibt am Ende dann nur noch entweder die Identität (kann als Rotation um den Winkel  $0^\circ$  interpretiert werden), eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung übrig.  $\square$

Direkt aus obigem folgt:

**Satz III.1.2** (Dreispiegelungssatz). *Jede Bewegung/Symmetrie/Kongruenzabbildung der euklidischen Ebene ist eine Hintereinanderausführung von maximal drei Spiegelungen.*

*Beweis.* Nach letztem Satz ist jede Kongruenzabbildung eine Spiegelung, eine Verschiebung, eine Drehung oder eine Gleitspiegelung. Verschiebung bzw. Drehung, lassen sich nach (ii-c) bzw. (iii-c) durch zwei Spiegelungen darstellen. Die Gleitspiegelung lässt sich nach (ii-c) durch drei Spiegelungen darstellen.  $\square$

Es bleibt noch: Zum Beweis der Kongruenzsätze von Satz I.4.1 fehlte noch der erste Schritt:

**Lemma III.1.3.** *Seien  $A, B, A', B'$  Punkte mit  $|AB| = |A'B'|$  und  $A \neq B$ . Dann gibt es genau zwei Kongruenzabbildung, die  $A'$  auf  $A$  und  $B'$  auf  $B$  abbildet.*

*Beweis.* Sei  $g$  die Gerade durch  $A$  und  $B$  und  $h$  die durch  $A'$  und  $B'$ . Sei  $v_{A'A}$  die Verschiebung, die  $A'$  auf  $A$  abbildet. Sei  $r$  die Rotation um  $A$ , die  $S(A, v_{A'A}B')$  auf  $S(A, B)$  abbildet (und damit  $v_{A'A}B'$  auf  $B$  abbildet). Dann sind  $rv_{A'A}$  und  $s_g rv_{A'A}$  Kongruenzabbildungen, die  $A'$  auf  $A$  und  $B'$  auf  $B$  abbildet.

Dass die Kongruenzabbildung mit  $A'$  geht auf  $A$ ,  $B'$  geht auf  $B$  und welche Seite von  $g_{A'B'}$  auf welche Seite von  $g_{AB}$  schon die Abbildung eindeutig bestimmt, haben wir schon im Beweis des zweiten Teils von Satz I.4.1 gesehen.  $\square$

## III.2. Symmetrien – analytisch

Der Vorteil in der analytischen Geometrie ist wieder, dass man das Erhalten der Abstände rechnerisch leicht überprüfen kann. Alle Symmetrien erhalten wir wie folgt:

### III.2. Symmetrien – analytisch

**Satz III.2.1.** Sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Symmetrie der euklidischen Ebene. Dann gibt es einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^2$  und eine Matrix  $A \in O(2) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(2) \mid A^T A = \text{Id}\}$ , so dass  $\psi(p) = Ap + b$  für alle  $p \in \mathbb{R}^2$  gilt. Andererseits ist jedes  $\psi$  dieser Form eine Symmetrie.

*Beweis.* Sei  $\psi(v) = Av + b$  für  $A \in O(2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\psi(v), \psi(w))^2 &= |\psi(v) - \psi(w)|^2 = \langle A(v - w), A(v - w) \rangle \\ &= \langle v - w, A^T A(v - w) \rangle = |v - w|^2 = d(v, w). \end{aligned}$$

Also ist  $\psi$  eine Symmetrie.

Sei nun  $\psi$  eine Symmetrie. Wir setzen  $b := \psi(0)$  und definieren

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto \psi(v) - b.$$

Wegen  $d(\phi(v), \phi(w)) = |\phi(v) - \phi(w)| = |\psi(v) - \psi(w)| = d(\psi(v), \psi(w)) = d(v, w)$ , ist auch  $\phi$  eine Isometrie. Da  $\phi((0, 0)) = (0, 0)$  ist, folgt insbesondere  $|\phi(v)| = |v|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (|v|^2 + |w|^2 - |v - w|^2) \\ &\stackrel{\text{Isometr.}}{=} \frac{1}{2} (|\phi(v)|^2 + |\phi(w)|^2 - |\phi(v) - \phi(w)|^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \phi(v), \phi(w) \rangle. \end{aligned} \tag{III.1}$$

(Die Identität  $(*)$  rechnet man direkt nach und heißt *Parallelogrammidentität*. Abbildungen, die (III.1) erfüllen, nennt man *orthogonal*.) Damit folgt

$$\begin{aligned} |\phi(v + w) - \phi(v) - \phi(w)|^2 &= |\phi(v + w)|^2 + |\phi(v)|^2 + |\phi(w)|^2 \\ &\quad - 2\langle \phi(v + w), \phi(v) \rangle - 2\langle \phi(v + w), \phi(w) \rangle + 2\langle \phi(v), \phi(w) \rangle \\ &= |v + w|^2 + |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v + w, v \rangle - 2\langle v + w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle \\ &= 0 \\ |\phi(\lambda v) - \lambda \phi(v)|^2 &= |\phi(\lambda v)|^2 + |\lambda \phi(v)|^2 - 2\langle \phi(\lambda v), \lambda \phi(v) \rangle \\ &= |\phi(\lambda v)|^2 + \lambda^2 |\phi(v)|^2 - 2\lambda \langle \phi(\lambda v), \phi(v) \rangle \\ &= |\lambda v|^2 + \lambda^2 |v|^2 - 2\lambda \langle \lambda v, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\phi$  eine lineare Abbildung. Es gibt also eine reelle  $2 \times 2$  Matrix  $A$  mit  $\phi(v) = Av$ . Mit (III.1) folgt dann  $\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle v, A^T A w \rangle$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Also gilt  $A^T A = \text{Id}$ , d.h.  $A \in O(2)$ .  $\square$

**Bemerkung III.2.2.** (i) Der letzte Satz gilt ganz analog für den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Jede Verschiebung  $v_{AB}$  (vgl. Notation aus Abschnitt III.1) hat die Form des letzten Satzes mit  $A = \text{Id}$  und  $b = \overrightarrow{AB}$  und die Rotation  $r_{M, \alpha}$  mit  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$  (für  $M = (x_M, y_M)^T$ ).

### III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene

Die Spiegelung  $s_g$  an einer Geraden  $g = \{c + td \mid t \in \mathbb{R}\}$  für  $c, d \in \mathbb{R}^2, d \neq 0\}$  ist die Abbildung

$$s_g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto -p + 2 \left( c + \frac{\langle p - c, d \rangle}{|d|^2} d \right).$$

Diese ist gleich  $p \mapsto Ap + b$  für  $b = 2c - \frac{2\langle c, d \rangle}{|d|^2} d$  und  $A = 2 \frac{dd^T}{|d|^2} - \text{Id}$ . Dass  $A \in O(2)$  ist, rechnet man direkt nach.

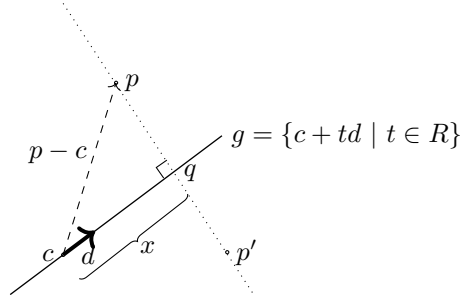


Abb. III.3.: Spiegelung:  $x = \langle p - c, \frac{d}{|d|} \rangle$ ,  $p - q = p - c - x \frac{d}{|d|}$ ,  $p - p' = 2 \left( p - c - x \frac{d}{|d|} \right)$ .

- (iii) Die Abbildungen  $\psi(p) = Ap + b$  mit  $A \in O(2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$  müssen ja eine Gruppe bilden. Was ist die Gruppenoperation? Durch direktes Nachrechnen der Hintereinanderausführung sieht man  $(A, a) \cdot (B, b) = (AB, Ab + a)$ . Diese Operation auf  $O(2) \times \mathbb{R}^2$  ist die Gruppenoperation zu einem semidirekten Produkt und wird als  $E(2) := O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$  notiert.

**Folgerung III.2.3.** Eine Symmetrie der euklidischen Ebene ist winkelerhaltend.

*Beweis.* Sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Symmetrie. Dann ist  $\psi(v) = Av + b$  mit  $A \in O(2)$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ . Wir haben

$$\begin{aligned} \cos \angle \psi(p)\psi(q)\psi(r) &= \frac{\langle \psi(p) - \psi(q), \psi(r) - \psi(q) \rangle}{|\psi(p) - \psi(q)| |\psi(r) - \psi(q)|} = \frac{\langle A(p - q), A(r - q) \rangle}{|A(p - q)| |A(r - q)|} \\ &= \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|p - q| |r - q|} = \cos \angle pqr. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung III.2.4.** Umgekehrt ist aber nicht jede winkelerhaltende Abbildung eine Symmetrie. Z.B. die zentrische Streckung.

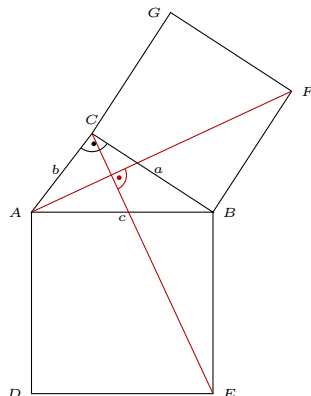
### III.3. Beweise/Konstruktionen unter Nutzen von Symmetrien

Kongruenzabbildungen können auch in Beweisen und Konstruktionen verwendet werden. Wir schauen uns hier einige Beispiele an:



**Beispiel III.3.1** (Beweis durch Drehung).

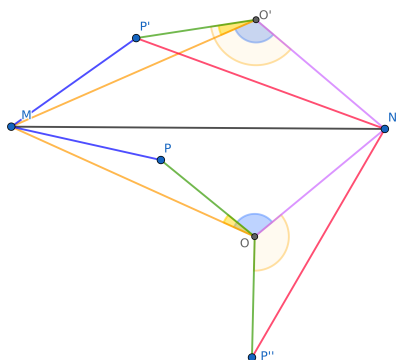
Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck. Auf dessen Seiten  $BC$  bzw.  $AB$  sei jeweils nach außen ein Quadrat  $CBFG$  bzw.  $BADE$  (jeweils gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet, vgl. Bild) errichtet. Dann ist  $|AF| = |CE|$  und diese beiden Strecken stehen senkrecht aufeinander:



Eine Drehung um  $B$  um  $90^\circ$  bildet  $F$  auf  $C$  und  $A$  auf  $E$  ab. Da Kongruenzabbildungen Geraden erhalten ist damit  $|AF| = |CE|$  und diese beiden Strecken stehen senkrecht aufeinander.

**Beispiel III.3.2** (Beweis von (iii-a) von S. 25). Die Hintereinanderausführung  $r_{N,\beta}r_{M,\alpha}$  ist eine Drehung um  $O$  um  $\alpha + \beta$  (ggf.  $-360^\circ$ ):

Sei  $O$  konstruiert wie in Abbildung III.2. Sei  $P$  ein beliebiger Punkt und sei  $P' = r_{M,\alpha}(P)$ ,  $P'' = r_{N,\beta}(P')$  und  $O' = r_{M,\alpha}(O)$ , vgl. Bild.



Gleichfarbige Strecken bzw. Winkel gehen bei einer der beiden Rotationen oder der Spiegelung an  $g_{MN}$  ineinander über und sind damit gleichlang bzw. gleichgroß. Damit ist insbesondere  $|PO| = |r_{N,\beta}(r_{M,\alpha}(P))|$ . Damit muss die Hintereinanderausführung der beiden Drehungen wieder eine Drehung um  $O$  sein und wir müssen nur noch den Drehwinkel bestimmen:

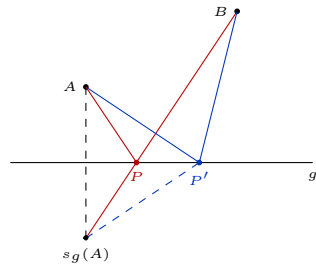
Es bleibt also noch  $\sphericalangle POP'' = \alpha + \beta$  falls  $\alpha + \beta < 360^\circ$  bzw.  $\sphericalangle POP'' = \alpha + \beta - 360^\circ$  sonst:

Die Lage der Winkel (Winkeladdition) hängt von der genauen Lage von  $P$  ab. Wir beschränken uns hier auf die Situation im Bild mit  $\alpha + \beta < 360^\circ$  – der andere Fall ginge analog. Wir wollen den Drehwinkel mit Hilfe des Punktes  $P$  im Bild bestimmen. Für diesen ist  $\sphericalangle P'O'N = \sphericalangle P'O'M + \sphericalangle MO'N$  und  $\sphericalangle NOM = \sphericalangle NOP + \sphericalangle POM}$  gilt. Damit ist  $\sphericalangle POP'' = 360^\circ - \sphericalangle NOP - \sphericalangle NOP'' = 360^\circ - 2\sphericalangle NOM}$ . Nach Konstruktion von  $O$  ist  $\sphericalangle NOM = 180^\circ - (\alpha + \beta)/2$ , vgl. Abbildung III.2 – also  $\sphericalangle POP'' = \alpha + \beta$ .

Ein weiteres Beispiel für eine Konstruktion/einen Beweis mit Drehung ist der Fermatpunkt als ÜA 15.

**Beispiel III.3.3** (Konstruktion durch Spiegelung). Sei  $g$  eine Gerade und seien  $A \neq B$  Punkte, die auf derselben Seite von  $g$  liegen. Gesucht ist ein Punkt  $P \in g$ , so dass  $|AP| + |BP|$  unter allen Punkten  $P$  auf  $g$  minimal ist:

### III. Kongruenzabbildungen der euklidischen Ebene



Sei  $P'$  ein beliebiger Punkt auf  $g$ . Dann ist  $|AP'| = |s_g(A)P'|$ , da  $s_g(P') = P'$  ist und Spiegelung Abstände erhält. Damit ist  $|AP'| + |P'B| = |s_g(A)P'| + |P'B| \geq |s_g(A)B|$ . Da  $A$  und  $B$  auf der gleichen Seite von  $g$  liegen, liegen  $s_g(A)$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ . Damit gibt es  $P \in \overline{AB} \cap g$ . Für dieses  $P$  als  $P'$  gilt nun Gleichheit in obiger Ungleichung – also  $|AP| + |PB| = |s_g(A)B|$ . Damit gibt dieses  $P$  das gesuchte Minimum.

	<p><b>Verschiebung</b></p> <p> <math>v_{AB} = v_{CD} \iff g_{AB} = g_{CD},  AB  =  CD </math> und  <math>B</math> und <math>D</math> liegen auf der gleichen Seite von <math>g_{AC}</math> </p>	<p><b>Spiegelung</b></p> <p> <math>s_g = s_\ell \iff g = \ell</math> </p>	<p><b>Drehung</b></p> <p> <math>r_{M, \alpha} = r_{N, \beta} \iff M = N \text{ und } \alpha \equiv \beta \pmod{360^\circ}</math> </p>
<p><b>Verschiebung</b></p> <p>- keine Fixpunkte</p>	<p> <math>v_{AA} = \text{id}</math>  <math>v_{BA}v_{AB} = \text{id}</math>  <math>v_{CB}v_{AB} = v_{AC}</math> </p>		
<p><b>Spiegelung</b></p> <p>- Menge der Fixpunkte: Spiegelungsgerade</p>	<p> <math>s_g v_{BA} = v_{BA} s_{v_{AB}(g)}</math>  <i>Gleitspiegelung</i> </p>	<p> <math>s_g s_g = \text{id}</math>  <math>g \parallel h, g \neq h \implies s_g s_h = v_{AB} v_{AB}</math>  für <math>A \in h, B \in g, g_{AB} \perp g</math>  <math>g \cap h = \{M\} \implies s_g s_h = r_{M, 2\alpha}</math>  für <math>\alpha</math> der Winkel zwischen <math>g</math> und <math>h</math> </p>	
<p><b>Drehung</b></p> <p>- ein Fixpunkt: Mittelpunkt der Drehung</p>	<p> <math>v_{MN} r_{M, \alpha} = r_{O, \alpha}</math>  <math>r_{M, \alpha} v_{MN} = r_{U, \alpha}</math>  für geeignetes <math>O, U</math>, s. ÜA 16 </p>	<p> <math>r_{M, \alpha} s_g</math> und <math>s_g r_{M, \alpha}</math> sind Gleitspiegelungen, vgl. ÜA 16 </p>	<p> <math>r_{M, \alpha} r_{M, \beta} = r_{M, \alpha + \beta \pmod{360^\circ}}</math>  <math>r_{M, \alpha} r_{N, \beta} = r_{O, \alpha + \beta \pmod{360^\circ}}</math> mit <math>O</math> wie in der Abb. III.2  falls <math>\alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360^\circ}</math> sonst Verschiebung <math>v_{N r_{M, \alpha}(N)}</math> </p>



## IV. Andere Geometrien

Wir wollen nun andere Geometrien als die euklidische kennenlernen.

### IV.1. Hyperbolische Ebene

#### IV.1.1. Hyperbolische Halbebene

Sei  $P := \mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^2$  die Menge aller Punkte der hyperbolischen Halbebene. Geraden im hyperbolischen Raum seien Mengen der folgenden Form  $g_b = \{(b, y) \in P \mid y > 0\}$  bzw.  $h_{x_0, r} = \{(x, y) \in P \mid (x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$  für  $b, x_0 \in \mathbb{R}$  bzw.  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , vgl. Abbildung IV.1. Wie im euklidischen kann man wieder entscheiden, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, d.h. ob er ein Element dieser Menge ist.

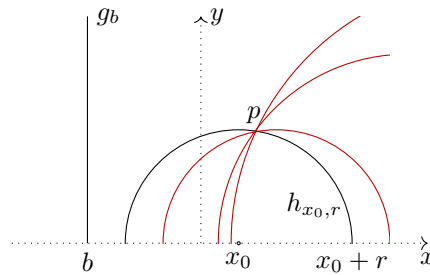


Abb. IV.1.: Geraden der hyperbolischen Ebene; alle roten Kreise gehen durch den Punkt  $p$  und sind parallel zu  $g_b$  und z.B. auch zu jedem Kreis der links von  $g_b$  liegt.

Seien nun  $p, q \in P$ ,  $p \neq q$ . Dann gibt es, wie im euklidischen, eine eindeutige Gerade  $\ell$  durch  $p = (x_p, y_p)$  und  $q = (x_q, y_q)$ : Ist  $x_p = x_q$ , dann ist es  $\{x = x_p\}$ . Ist  $x_p \neq x_q$ , dann ist es ein Halbkreis dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $\overline{pq}$  mit der  $x$ -Achse ist.

Wir verwenden den Begriff von 'parallel' analog zum euklidischen: Zwei Geraden sind parallel, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben.

Dann fällt folgender Unterschied zur euklidischen Ebene auf: Zu jeder Gerade  $\ell$  in  $G$  und jedem Punkt  $p \in P$ , der nicht auf  $\ell$  liegt, gibt es unendlich viele Geraden durch  $p$ , die zu  $\ell$  parallel sind, vgl. Abbildung IV.1.

#### IV. Andere Geometrien

Man führt für die hyperbolische Ebene auch eine Abstandsfunktion und einen Begriff von Winkel ein: Dazu werden wir im Folgenden  $\mathbb{R}^2$  oft mit den komplexen Zahlen identifizieren und mit diesen rechnen. Insbesondere benötigen wir folgendes Hilfsobjekt:

**Definition IV.1.1.** Für vier komplexe Zahlen  $z_1, \dots, z_4$ , von denen mindestens drei verschieden sind, definieren wir das *Doppelverhältnis*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (\text{IV.1})$$

wobei  $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \infty$  sein soll, falls  $z_1 = z_4$  oder  $z_2 = z_3$  ist. Für  $z_1, z_2, z_3$  verschieden sei

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \quad (\text{IV.2})$$

**Bemerkung IV.1.2.**

- (i) Es gilt  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_3, z_4, z_1, z_2) = (z_2, z_1, z_3, z_4)^{-1} = (z_1, z_2, z_4, z_3)^{-1} = (z_2, z_1, z_4, z_3)$  für (IV.1).
- (ii) Es gilt  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (z_1, z_2, z_3, \infty)$  für  $|z_4| \rightarrow \infty$  – somit ist die Definition in (IV.2) die natürliche Wahl.

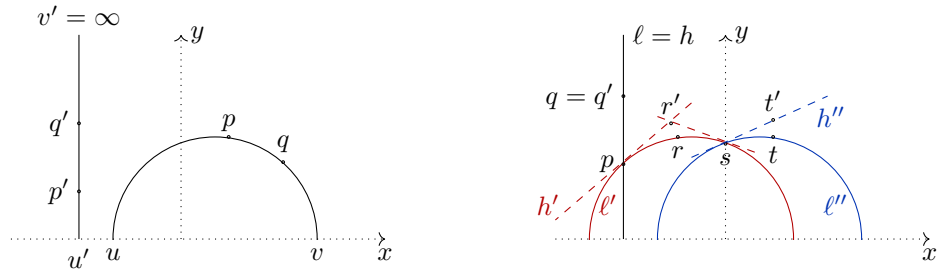


Abb. IV.2.: Links:  $u$  und  $v$  sind die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$ . Analog sind  $u'$  und  $v' = \infty$  sind die Randpunkte der Geraden durch  $p'$  und  $q'$ . Rechts: Dem Winkel  $\angle qpr$  in hyperbolischer Ebene ordnen wir den Betrag des euklidischen Winkels  $\angle q'p'r'$  zu, analog dem Winkel  $\angle rst$  dem Betrag des euklidischen Winkels  $\angle r's't'$ .

**Definition IV.1.3** (Abstand und Winkel in der hyperbolischen Halbebene). Sei  $\ell$  die Gerade durch  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p \neq q$ . Seien  $u, v$  die Punkte in  $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ , die die *Randpunkte* der Geraden  $\ell$  bilden, vgl. Abb. IV.2 links.

Wir setzen

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) := |\ln |(p, q, u, v)|| \text{ und } d_{\mathbb{H}}(p, p) := 0.$$

Seien  $p, q, r$  drei nichtkollineare Punkte. Seien  $\ell$  bzw.  $\ell'$  die Geraden durch  $p$  und  $q$  bzw. durch  $q$  und  $r$ . Seien  $h$  und  $h'$  die Tangenten\* an  $\ell$  bzw.  $\ell'$  in  $p$ . Sei  $q'$  bzw.  $r'$  ein Punkt auf  $h$  bzw.  $h'$ , der auf der gleichen Seite von  $h'$  bzw.  $h$  liegt wie  $q$  bzw.  $r$ , vgl. Abb. IV.2 rechts. Dem Winkel  $\angle pqr$  in hyperbolischer Ebene ordnen wir den Betrag des euklidischen Winkels  $\angle q'pr'$  zu. Wir nennen zwei Winkel der hyperbolischen Ebene *kongruent*, wenn die Beträge der zugehörigen euklidischen Winkel übereinstimmen.

**Bemerkung IV.1.4.**

- (i) Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Randpunkte  $u$  und  $v$  in der Definition von  $d_{\mathbb{H}}$  gesetzt werden, denn:

$$|\ln |(p, q, u, v)|| = |\ln |(p, q, v, u)|^{-1}| = |-\ln |(p, q, v, u)|| = |\ln |(p, q, v, u)||.$$

- (ii) Man kann  $d_{\mathbb{H}}$  auch expliziter angeben:<sup>†</sup>

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{|q - p|^2}{2 \operatorname{Im} p \operatorname{Im} q} \right).$$

Das kann man nachrechnen, in dem man die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$  explizit berechnet<sup>‡</sup>. Für die meisten der folgenden Überlegungen, kann man aber mit dem Doppelverhältnis besser arbeiten.

- (iii)  $d_{\mathbb{H}}$  ist eine Abstandsfunktion<sup>§</sup> auf  $\mathbb{H}^{\P}$ .
- (iv) Es gilt genau dann  $d_{\mathbb{H}}(p, r) = d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, r)$ , wenn  $p, q, r$  Punkte auf einer (hyperbolischen) Geraden sind, so dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt. Das impliziert insbesondere, dass eine Kongruenzabbildung der hyperbolischen Ebene, Geraden auf Geraden abbilden muss.
- (v) Weil man die (hyperbolischen) Winkel über die euklidischen Winkel der Tangenten definiert, erbt man insbesondere auch die Winkeladdition aus der euklidischen Geometrie. D.h.  $\angle pqr + \angle sqr = \angle pqs$ , falls  $r$  im Inneren von  $\angle pqs$  liegt, d.h. auf der gleichen Halbebene von  $g_{qs}$  wie  $p$  und auf der gleichen Halbebene von  $g_{ps}$  wie  $q$ . (Halbebenen bzgl. einer Geraden  $g$  sind wieder die beiden Mengen zusammenhängenden Mengen von  $\mathbb{H} \setminus g$ ).<sup>¶</sup>

\*Ist  $\ell$  schon eine euklidische Gerade, dann ist  $h = \ell$ .

<sup>†</sup>Hierbei ist  $\operatorname{Im} p$  der Imaginärteil von  $p$  und  $\operatorname{arcosh}$  die Umkehrfunktion vom Kosinus hyperbolicus

$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ist.

<sup>‡</sup>und  $\cosh(\ln(x)) = \frac{x^2 + 1}{2x}$  benutzt

<sup>§</sup>Auf einer Menge  $X$  ist eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine *Abstandsfunktion*, wenn  $\forall x, y, z \in X$

- (Symmetrie)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (Positiv definit)  $d(x, y) \geq 0$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $x = y$  ist.
- (Dreiecksungleichung)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

gilt.

<sup>¶</sup>Das Nachrechnen der Dreiecksungleichung erfordert Arbeit – machen wir hier nicht.

### IV.1.2. Das Poincaresche Kreisscheibenmodell

Das Poincaresche Kreisscheibenmodell ist ein anderes Modell für die hyperbolische Ebene. Die Menge der Punkte ist nun  $\mathbb{D} := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| < 1\}$ . Wir benutzen die Bijektion

$$f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, \quad p \mapsto \frac{p - i}{p + i}$$

um alle anderen geometrischen Strukturen von  $\mathbb{H}$ , wie Geraden, Abstandsfunktion und Winkel auf  $\mathbb{D}$  zu übertragen, s.u. So kann man jede Geometrie mit Hilfe eine Bijektion anders darstellen – man nennt es dann ein anderes Modell. Das ginge auch für die euklidische Geometrie, aber da die euklidische Ebene so viel mit unser realen Welt zu tun hat, ist das dort die kanonische Wahl. Für den hyperbolischen Raum gibt es diese Wahl erst mal nicht, sondern hängt vom Kontext ab.

Wir nutzen nun  $f$ , wie oben beschrieben, um auf  $\mathbb{D}$  die Struktur einer hyperbolischen Ebene zu erhalten.

Insbesondere seien:

- Geraden in  $\mathbb{D}$  sollen genau die Bilder von Geraden aus  $\mathbb{H}$  sein, vgl. Abb. IV.3.
- $d_{\mathbb{D}}(p, q) := d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$
- $\angle pqr := \angle f^{-1}(p)f^{-1}(q)f^{-1}(r)$

Mit diesen Definition gilt dann (kann man alles direkt nachrechnen, dauert nur eine Weile):

#### Bemerkung IV.1.5.

- (i) Man kann nachrechnen, dass  $\angle pqr$  in  $\mathbb{D}$  genau dem euklidischen Winkel zwischen den Geraden in  $\mathbb{D}$  sind, vgl. Abb. IV.3.
- (ii)  $d_{\mathbb{D}}(p, q) = |\ln |(p, q, u, v)||$ , wobei  $u, v$  wieder die Randpunkte der Geraden durch  $p$  und  $q$  sind - also  $u, v \in S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ .
- (iii) Die Winkel sind dann wie im hyperbolischen dann auch wieder die Winkel der zugehörigen Tangenten (müsste man nachrechnen) und man hat auch wieder Winkeladdition.

### IV.1.3. Die Kongruenzabbildungen der hyperbolischen Ebene

Wir suchen – wie schon im Euklidischen – für beide Modelle der hyperbolischen Ebene die Kongruenzabbildungen, also bijektive Abbildungen, die die Abstände zwischen Punkten erhalten.

**Lemma IV.1.6.** *Eine Abbildung  $h$  ist genau dann eine Kongruenzabbildung für  $\mathbb{H}$ , wenn  $f \circ h \circ f^{-1}$  eine Kongruenzabbildung von  $\mathbb{D}$  ist.*



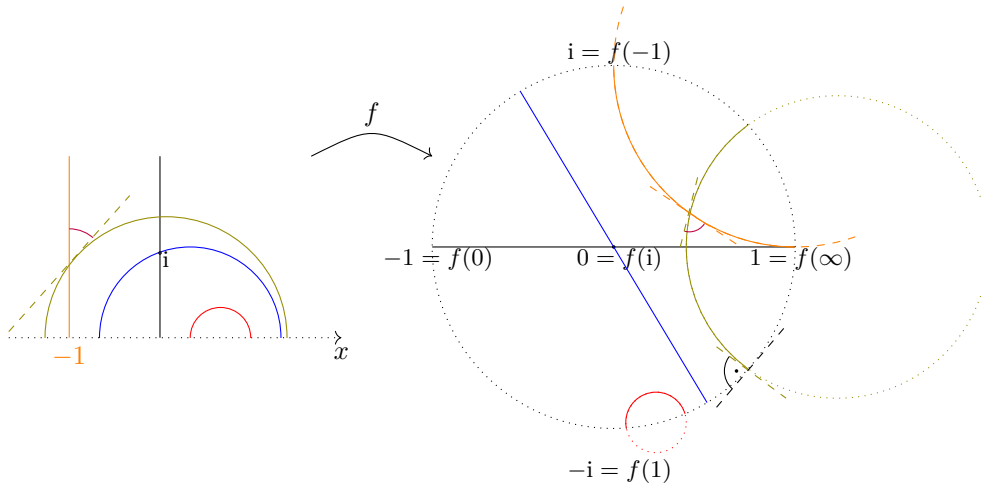


Abb. IV.3.: Die Abbildung zeigt, wohin Geraden aus  $\mathbb{H}$  unter  $f$  abgebildet werden.

Am Rand des Kreises wird auch gezeigt, wohin Randpunkte aus  $\mathbb{H}$  mit der stetigen Fortsetzung von  $f$  (die resultierende Abbildung wird dann auch einfach  $f$  genannt) abgebildet werden. Jede Gerade durch  $i \in \mathbb{H}$  wird auf eine Gerade durch  $0 \in \mathbb{D}$  abgebildet. Alle anderen Geraden aus  $\mathbb{H}$  werden auf Teilkreise (Schnitt eines Kreises mit  $\mathbb{D}$ ) abgebildet. Diese Teilkreise sind immer derart, dass sie den Einheitskreis (also den 'Rand' von  $\mathbb{D}$ ) im rechten Winkel schneiden (in der Abbildung nur für die grüne Gerade eingezeichnet).

Es hilfreich zu sehen, dass sich  $f$  stetig auf  $\mathbb{H}$  mit allen Randpunkten fortsetzt durch  $f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \cup \{\infty\} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}, p \mapsto \frac{p-i}{p+i}$  und dass eine Gerade (in beiden Modellen) durch ihre Randpunkte schon immer eindeutig bestimmt ist.

Die Beträge der Winkel in  $\mathbb{D}$  erhält man, analog wie in  $\mathbb{H}$ , als euklidischen Winkel der jeweiligen Tangenten - vgl. die lilanen Winkel.

Insbesondere setzt sich  $f$  auf die Randpunkte von  $\mathbb{H}$  fort: Die  $x$ -Achse wird auf den Rand von  $\mathbb{D}$  außer der Eins abgebildet. Der Randpunkt  $\infty$  von  $\mathbb{H}$  wird auf die Eins abgebildet.

#### IV. Andere Geometrien

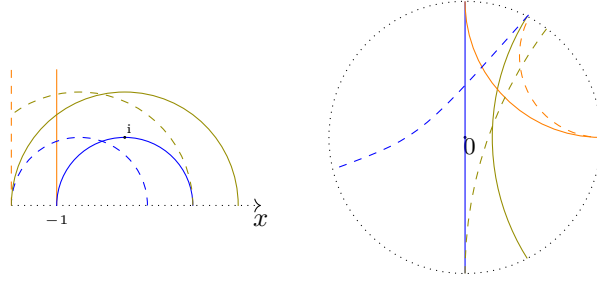


Abb. IV.4.: Links: Verschiebung in  $x$ -Richtung. Eine Gerade wird dabei auf die jeweils gleichfarbig gestrichelte Gerade abgebildet.  
Rechts: Die gleichen Geraden jeweils im Poincare-Modell

*Beweis.* Das folgt direkt aus  $d_{\mathbb{D}}(p, q) = d_{\mathbb{H}}(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$ .  $\square$

Je nach Modell ist sind verschiedene Kongruenzabbildungen leichter zu sehen:

- Im Halbebenenmodell sieht man schnell, dass die Verschiebungen in  $x$ -Richtung  $t_a: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto z + a$  für  $a \in \mathbb{R}$  solche Abbildungen sind: Eine Gerade der Form  $g_b$  (Randpunkte  $b, \infty$ ) wird auf die Gerade der Form  $g_{a+b}$  (Randpunkte  $a + b, \infty$ ) abgebildet und analog eine Gerade der Form  $h_{x_0, r}$  (Randpunkte  $x_0 - r, x_0 + r$ ) auf die Gerade  $h_{x_0+a, r}$  (Randpunkte  $x_0 - r + a, x_0 + r + a$ ) abgebildet. Da im Doppelverhältnis nur Differenzen von Punkten vorkommen, spielt  $a$  keine Rolle und Abstände bleiben erhalten.
- Im Kreisscheibenmodell sieht man besonders leicht, dass Rotationen um den Ursprung und Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung Kongruenzabbildungen sind:

Wegen  $d_{\mathbb{D}}(p, q) = |\ln |(p, q, u, v)| = |\ln |(pe^{i\alpha}, qe^{i\alpha}, ue^{i\alpha}, ve^{i\alpha})|| = d_{\mathbb{D}}(pe^{i\alpha}, qe^{i\alpha})$ , ist die Rotation eine Kongruenzabbildung.

Spiegelung an der  $x$ -Achse bildet  $p$  auf  $\bar{p}$  ab und auch die Randpunkte einer Geraden werden auf die komplex konjugierten Punkte abgebildet. Damit bleibt auch die Abstandsfunktion erhalten und somit ist Spiegelung an der  $x$ -Achse eine Kongruenzabbildung.

Spiegelung an einer anderen Geraden durch den Ursprung ist die Hintereinanderausführung einer Rotation um den Ursprung und der Spiegelung an der  $x$ -Achse und somit auch eine Kongruenzabbildung.

In Abbildung IV.4 und IV.5 sieht man, wie die obigen Kongruenzabbildungen Verschiebung und Drehung im jeweils anderen Modell aussehen.

Etwas überraschender ist eventuell, dass  $s_a: z \in \mathbb{H} \mapsto az$  für  $a > 0$  eine Kongruenzabbildung (*Lorentzboost* genannt) ist, vgl. Abb IV.6.

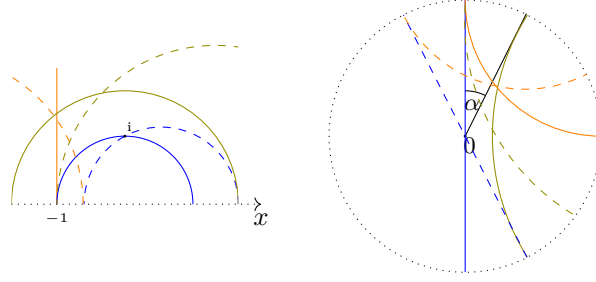


Abb. IV.5.: Rechts: Drehung um den Ursprung um den Winkel  $\alpha$ . Eine Gerade wird dabei auf die jeweils gleichfarbig gestrichelte Gerade abgebildet.  
Links: Die gleichen Geraden jeweils im oberen Halbebenenmodell

Jede Hintereinanderausführung der obigen Kongruenzabbildungen (jeweils auf  $\mathbb{H}$  bzw.  $\mathbb{D}$ ) ist natürlich wieder eine. Damit erhält man dann schon alle Kongruenzabbildungen von  $\mathbb{H}$  bzw.  $\mathbb{D}$  (hier ohne Beweis). Insbesondere sieht man, dass man jedes Dreieck  $ABC$  durch genau eine Kongruenzabbildung (in  $\mathbb{D}$ ) auf ein Dreieck  $A'B'C'$  abbilden kann mit  $A' = (0, 0)$ ,  $B' = (r, 0)$  ( $r$ , so dass  $d_{\mathbb{D}}(A'B') = d_{\mathbb{D}}(A, B)$  ist) und  $C'$  mit positiver  $y$ -Koordinate, vgl. ÜA 23(i). Das entspricht dann wieder einem Kongruenzsatz (SSS), s.u.

Es gibt eine kompakte Darstellung der Kongruenzabbildungen in  $\mathbb{H}$  bzw.  $\mathbb{D}$  mit Hilfe von Möbiustransformationen, die wir zunächst allgemein auf  $\mathbb{C}$  definieren:

**Definition IV.1.7.** Wir setzen  $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  und definieren:

$$\phi_A: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})^*$ , wobei

$$\phi_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{für } c \neq 0 \\ \infty & \text{für } c = 0 \end{cases}$$

gelten soll. Wir setzen

$$\begin{aligned} \text{Möb}_+(\bar{\mathbb{C}}) &:= \{\phi_A \mid A \in GL(2, \mathbb{C})\} \\ \overline{\text{Möb}(\bar{\mathbb{C}})} &:= \{\bar{\phi}_A: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, z \mapsto \overline{\phi_A(z)} \mid A \in GL(2, \mathbb{C})\} \\ \text{Möb}(\bar{\mathbb{C}}) &:= \text{Möb}_+(\bar{\mathbb{C}}) \cup \overline{\text{Möb}(\bar{\mathbb{C}})} \end{aligned}$$

Für  $S \subset \bar{\mathbb{C}}$  setzen wir  $\text{Möb}_+(S) = \{\phi \in \text{Möb}_+(\bar{\mathbb{C}}) \mid \phi(S) = S\}$  und analog  $\text{Möb}(S)$ . Wir nennen Elemente in  $\text{Möb}_{(+)}(\mathbb{C})$  (*orientierungserhaltende*) *Möbiustransformationen*.

\*Das sind alle komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante ungleich Null

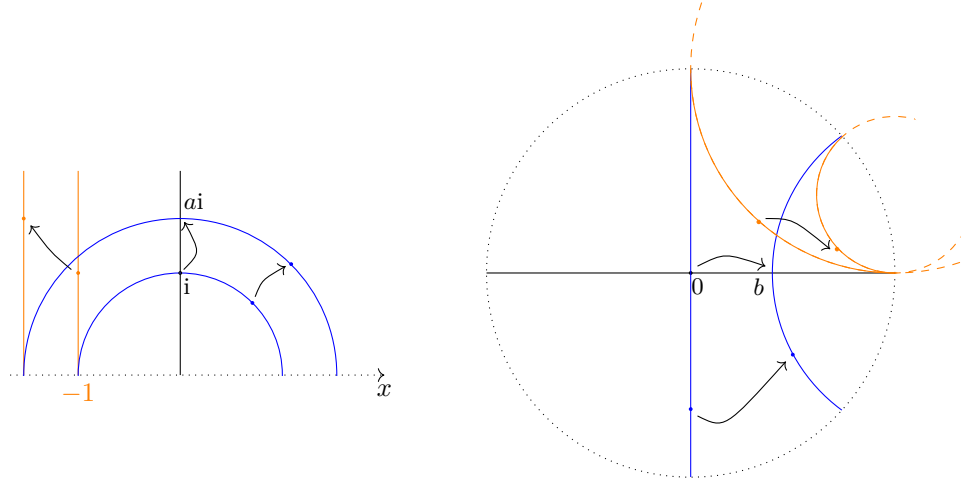


Abb. IV.6.: Der Lorentzboost  $L_\eta^1$  in  $\mathbb{H}$  (links) und  $\mathbb{D}$  (rechts)  $\left(b = \frac{a^2-1}{2a}\right)$ .

**Bemerkung IV.1.8.** Die Abbildungen in  $\text{Möb}_+(\mathbb{C})$  erhalten die Orientierung von Dreiecken, die in  $\overline{\text{Möb}_+(\mathbb{C})}$  kehren diese um, vgl. Abb. IV.7 – daher auch der Name.

Beachten Sie: Die Zuordnung  $\phi_A$  zu  $A$  ist nicht eindeutig, dann  $\phi_A = \phi_{\lambda A}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- Bemerkung IV.1.9.**
- Die Verschiebung  $t_a: z \in \mathbb{H} \mapsto z + a \in \mathbb{H}$  entspricht  $\phi_A$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - Die Spiegelung an der  $y$ -Achse  $s_{x=0}: z = x + iy \in \mathbb{H} \mapsto -\bar{z} = -x + i^y \in \mathbb{H}$  entspricht  $\overline{\phi_A}$  mit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe – man rechnet direkt  $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$  nach.

Durch geeignete Einschränkungen erhält man alle Kongruenzabbildungen der hyperbolischen Ebenen bzw. des Poincaré-Modells (hier ohne Beweis):

**Satz IV.1.10.** Die Symmetrien der hyperbolische Halbebene  $\mathbb{H}$  sind gegeben durch  $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \text{Möb}_+(\mathbb{H}) \cup \overline{\text{Möb}_+(\mathbb{H})}$  mit  $\text{Möb}_+(\mathbb{H}) := \{\phi_A \mid A \in SL(2, \mathbb{R})\}$ . Die Symmetrien des hyperbolische Kreismodells  $\mathbb{D}$  sind gegeben durch  $\text{Möb}(\mathbb{D}) = \text{Möb}_+(\mathbb{D}) \cup \overline{\text{Möb}_+(\mathbb{D})}$  mit  $\text{Möb}_+(\mathbb{D}) := \{\phi_A \mid A \in SU(1, 1)\}$ . Hierbei sind  $SL(2, \mathbb{R})$  alle reellen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1, und

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

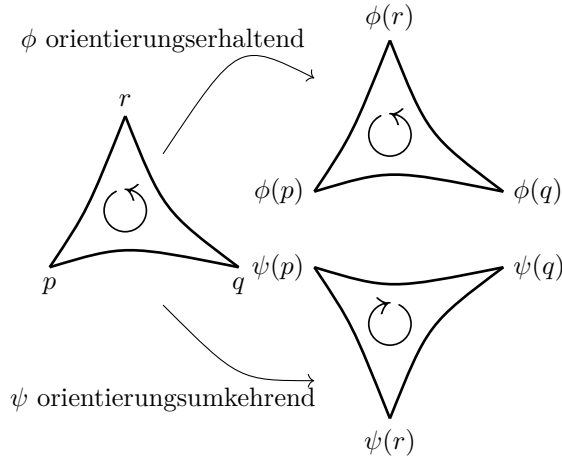


Abb. IV.7.: Orientierung von Dreiecken

#### IV.1.4. Trigonometrie der hyperbolischen Ebene

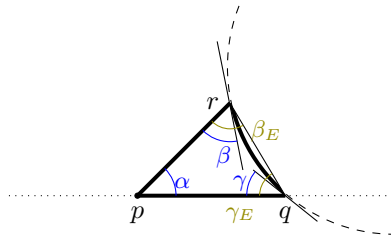
Wir wollen nun in Analogie zum euklidischen trigonometrische Formeln für hyperbolische Dreiecke finden – also für Dreiecke in der hyperbolischen Ebene deren Seiten durch Teile (hyperbolischer) Geraden gebildet werden.

Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte in der hyperbolischen Ebene, dann betrachten wir das Dreieck  $\triangle pqr$ , vgl. Abb. IV.8, mit den Seitenlängen

$$a = |\overline{rq}|, \quad b = |\overline{pq}|, \quad c = |\overline{pr}|$$

und den Winkelbeträgen:

$$\alpha = |\angle qpr|, \quad \beta = |\angle prq|, \quad \gamma = |\angle pqr|$$


 Abb. IV.8.: Ein hyperbolisches Dreieck in  $\mathbb{D}$  mit  $p$  im Ursprung

Da die Seitenlängen und Winkel nicht vom Modell der hyperbolischen Ebene abhängen, können wir es frei wählen. Wir wählen  $\mathbb{D}$ . Da auch Kongruenzabbildungen diese Größen

## IV. Andere Geometrien

invariant lassen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $p = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $r = se^{i\alpha}$  ist, vgl. ÜA 23 und Abbildung IV.8.

### Satz IV.1.11.

- (i) *Seitenkosinussatz*:  $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$ .
- (ii) *Sinussatz*:  $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$ .
- (iii) *Winkelkosinussatz*:  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$ .
- (iv) *Winkelsumme*:  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .

*Beweis.* (i)-(iii) Nachrechnen für das Dreieck  $p = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $r = se^{i\alpha}$  (oder alternativ nachrechnen in der hyperbolischen Halbebene)

(iv) Da die euklidische Gerade durch  $q$  und  $r$  Sehne des Kreises ist, der die hyperbolische Gerade durch diese Punkte darstellt, ist  $\beta < \beta_E$  und  $\gamma < \gamma_E$ , siehe Abb. IV.8. Also  $\alpha + \beta + \gamma < \alpha + \beta_E + \gamma_E = \pi$ .  $\square$

**Bemerkung IV.1.12.** Aus dem letzten Satz folgen die Kongruenzsätze (SSS), (SWS), (WSW), (SWW), (SSWg), die es auch schon im Euklidischen gibt. Im euklidischen ist wegen der konstanten Innenwinkelsumme allerdings (SWW) gleich (WSW). Als neuer Kongruenzsatz folgt mit dem Winkelkosinussatz (WWW), insbesondere sind im hyperbolischen Dreieck die Seitenlängen schon durch die Winkel bestimmt.

## IV.2. Sphärische Geometrie

### Vorl. 4

Als ein weiteres Beispiel wollen wir uns die Geometrie der Sphäre  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  anschauen, die insbesondere die Geometrie der Erde modelliert.

Ein *Großkreis* ist ein Kreis der als Schnitt von  $S^2$  mit einer Ebene durch den Mittelpunkt der  $S^2$  entsteht.

*Was soll eine Gerade in der sphärischen Geometrie sein?* Kurven auf der  $S^2$ , die den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten realisieren. Diesen Abstand haben wir aber noch nicht definiert. Was wir aber schon bestimmen können, ist die Länge einer Kurve auf  $S^2$ : Haben wir  $\gamma: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar (als Funktion von  $I$  nach  $\mathbb{R}^3$ ), können wir dieser wie in Analysis I [1, S.157-158] eine Länge zuordnen:  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(s)| ds$ . Im Euklidischen wäre  $d_{\text{eukl}}(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ist eine stetig differenzierbare Kurve von } p = \gamma(0) \text{ nach } q = \gamma(1)\}$  und dieses Infimum wird durch die Strecke von  $p$  nach  $q$  angenommen. So wollen wir auch auf der Sphäre eine Abstandsfunktion und damit Geraden definieren, indem wir die gleiche Definition nehmen, jedoch nur Kurven auf  $S^2$  zulassen:

$$d_S(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist eine stetig differenzierbare Kurve von } p = \gamma(0) \text{ nach } q = \gamma(1)\}$$

Man kann nachrechnen, dass dies wirklich eine Abstandsfunktion (s. Fußnote § auf Seite 35) ist und dass das Infimum immer durch den kürzeren Großkreisabschnitt von  $p$  nach  $q$  angenommen wird (Dies erfordert Variationsrechnung und ist nicht Teil dieser Vorlesung.) Man kann nachrechnen, dass damit gilt:\*

$$d_S(p, q) = \arccos \langle p, q \rangle \in [0, \pi]$$

Wir verwenden ab hier diesen Ausdruck alternativ zum obigen Vorgehen einfach als Definition von  $d_S$ .

**Bemerkung IV.2.1.**

- (i) Sei  $A, B \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $|A| = |B| = 1$  (mit  $|\cdot|$  die euklidische Norm). Sei  $\angle(A, B) \in [0, \pi]$  der Winkel, der von  $A, B$  eingeschlossen wird. Dann ist  $\langle A, B \rangle = |A||B| \cos \angle(A, B) = \cos \angle(A, B)$ , also

$$d_S(A, B) = \angle(A, B).$$

- (ii)  $|A \times B| = |A||B| \sin d_S(A, B) = \sin d_S(A, B) = \sin \angle(A, B)$ .<sup>†</sup>

**Lemma IV.2.2.** Für  $A, B \in S^2$  definiert  $d_S(A, B) = \arccos \langle A, B \rangle \in [0, \pi]$  eine Abstandsfunktion auf  $S^2$ .

*Beweis.* Sei  $x, y, z \in S^2$ .

- Symmetrie und  $d_S(x, x) = 0$  ist klar.
- Es ist  $d_S(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $\langle x, y \rangle = 1$ . Es ist

$$1 = |\langle x, y \rangle| = |x||y| |\cos(\text{eingeschl. Winkel})| \leq |x||y| = 1.$$

Es muss also in der Ungleichung Gleichheit gelten, also  $\cos(\text{eingeschl. Winkel}) = \pm 1$  sein, also  $x = \lambda y$  für  $\lambda = \pm 1$ . Da  $\langle x, y \rangle = 1$ , muss  $x = y$  sein.

---

\*Für  $p, q \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist mit  $\langle p, q \rangle$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  gemeint. Außerdem ist  $x \mapsto \cos(x)$  auf  $[0, \pi]$  monoton fallend und  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  sei die zugehörige Umkehrfunktion.

<sup>†</sup>Nützliche Rechenregeln für Vektoren  $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$  mit Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned} x \times y &= -y \times x, & |x \times y| &= |x||y| \sin \angle(x, y) \\ \langle x \times y, z \rangle &= \det(x, y, z) \\ x \times (y \times z) &= \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z \\ \langle x \times y, z \times w \rangle &= \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \\ (x \times y) \times (z \times w) &= w \det(x, y, z) - z \det(x, y, w) \end{aligned}$$

#### IV. Andere Geometrien

- Dreiecksungleichung: Ist  $d_S(x, y) + d_S(y, z) > \pi$ , dann gilt die Dreiecksungleichung trivialerweise. Sei nun  $d_S(x, y) + d_S(y, z) \leq \pi$ . Dann ist (mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\begin{aligned}
 \cos(d_S(x, y) + d_S(y, z)) &= \cos d_S(x, y) \cos d_S(y, z) - \sin d_S(x, y) \sin d_S(y, z) \\
 &= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - |x \times y| |y \times z| \\
 &\leq \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \underbrace{\langle x \times y, y \times z \rangle}_{\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, y \rangle \langle x, z \rangle} \\
 &= \langle x, z \rangle = \cos d_S(x, z)
 \end{aligned}$$

Da sowohl  $d_S(x, y) + d_S(y, z)$  als auch  $d_S(x, z)$  in  $[0, \pi]$  liegen, können wir mittels der monoton fallenden Umkehrfunktion  $\arccos$  auf

$$d_S(x, y) + d_S(y, z) \geq d_S(x, z)$$

schließen. □

**Bemerkung IV.2.3.** Wenn Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt, dann müssen  $x \times y$  und  $y \times z$  linear abhängig sind. Da  $x \times y$  senkrecht auf der Ebene ist, die durch  $x$  und  $y$  aufgespannt ist, und analog  $y \times z$  senkrecht zu der von  $y$  und  $z$  aufgespannten Ebene ist, müssen diese beiden Ebenen übereinstimmen. Also müssen  $x, y, z$  die gleiche Ebene aufspannen und damit auf dem gleichen Großkreis liegen (= Großkreise sind die Geraden der sphärischen Geometrie).

Wir wollen wie bei den Geometrien zuvor wieder den Winkel zwischen zwei Geraden, also hier zwei Großkreise definieren. Dazu beschreiben wir den Großkreis mittels eines Punktes auf dem Großkreis und einer Richtung – einem Tangentialvektor:

**Definition IV.2.4.** Sei  $E$  eine Ebene durch  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $K = S^2 \cap E$  ein Großkreis. Sei  $p \in K$ . Dann heißen die Vektoren  $X \in E$  mit  $\langle X, p \rangle = 0$  *Tangentialvektoren* an  $K$  in  $p$ .

Sei  $K$  ein Großkreis,  $p \in K$  und  $X$  ein Tangentialvektor an  $K$  in  $p$  mit  $|X| = 1$ . Dann ist

$$K = \{c(t) = \cos(t)p + \sin(t)X \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{IV.3})$$

Für  $t \in [0, \pi]$  gilt  $\cos d_S(p, c(t)) = \langle p, c(t) \rangle = \cos t$  und damit  $d_S(p, c(t)) = t$ .

**Lemma IV.2.5.** Seien  $A, B \in S^2$ . Gilt  $A \neq B$  und  $A \neq -B$ , d.h.  $A$  und  $B$  sind nicht antipodal, dann gibt es genau einen Großkreis  $K$ , der  $A$  und  $B$  enthält.

*Beweis.* Gilt  $A \neq -B$ . Dann liegen  $A, B, 0 \in \mathbb{R}^3$  nicht auf einer Geraden und bestimmen somit eindeutig eine Ebene  $E$ . Der Großkreis  $K = E \cap S^2$  enthält  $A$  und  $B$  und ist damit auch eindeutig bestimmt. □

**Definition IV.2.6.** Seien  $K_1 = \{c_1(t) := \cos(t)A + \sin(t)X \mid t \in \mathbb{R}\}$  und  $K_2 = \{c_2(t) := \cos(t)A + \sin(t)Y \mid t \in \mathbb{R}\}$  zwei Großkreise durch  $A \in S^2$  ( $X, Y$  seien Vektoren



der Länge 1 senkrecht auf  $A$ ). Sei  $B = c_1(t_1)$  und  $C = c_2(t_2)$  für  $t_i \in (0, \pi)$ .<sup>\*</sup> Dann ist die Winkelgröße  $\sphericalangle BAC$  definiert als

$$\sphericalangle BAC := \arccos \langle X, Y \rangle.$$

**Definition IV.2.7.** Ein *sphärisches Dreieck* auf  $S^2$  ist ein Tripel von Punkten  $A, B, C \in S^2$ , die paarweise verschieden und nicht antipodal sind und auch nicht alle auf einem Großkreis liegen. Wir nennen  $A, B, C$  die *Ecken* des Dreiecks, die kürzeren Großkreisbögen zwischen  $A$  und  $B$ , bzw.  $B$  und  $C$ , bzw.  $C$  und  $A$  heißen *Seiten* des Dreiecks. Die Seitenlängen sind jeweils durch  $c := d_S(A, B)$ ,  $a := d_S(B, C)$ ,  $b := d_S(C, A)$ . Die Winkelgrößen sind gegeben durch  $\alpha := \sphericalangle BAC$  etc.

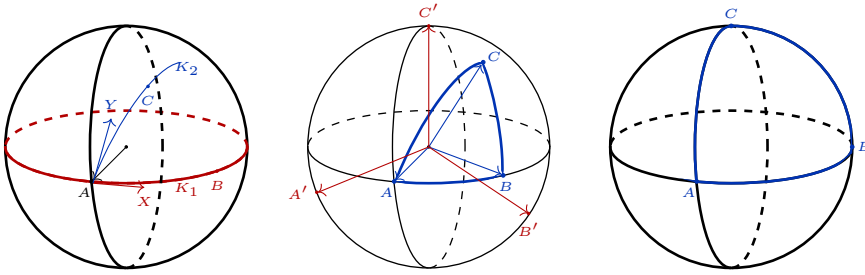


Abb. IV.9.: Links: Definition des Winkels zwischen zwei Großkreisen.

Mittig: Das Polardreieck  $A'B'C'$  zum Dreieck  $ABC$ .

Rechts: Ein Dreieck mit drei rechten Winkeln.

**Bemerkung IV.2.8.**  $A, B, C \in S^2$  bilden genau dann ein sphärisches Dreieck, wenn  $A, B, C$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$  sind, also genau dann, wenn  $\det(A, B, C) \neq 0$  ist.

**Beispiel IV.2.9.** Sphärisches Dreieck mit drei rechten Winkeln, vgl. Abbildung IV.9 rechts. Insbesondere ist damit die Innenwinkelsumme dieses Dreiecks mit  $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$  größer als die Innenwinkelsumme im euklidischen Dreieck.

**Lemma IV.2.10.** Sei  $A, B, C$  ein sphärisches Dreieck mit Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  wie oben. Dann gilt

$$\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C).$$

*Beweis.* Seien  $X, Y$  die Tangentialvektoren der Länge eins an die Großkreisbögen  $AB$  und  $AC$  im Punkt  $A$  in Richtung des kürzeren Geodätenbogens. Dann gibt es (Vgl. (IV.3))  $c, b < \pi$  mit

$$B = \cos(c)A + \sin(c)X, \quad C = \cos(b)A + \sin(b)Y \quad (\text{IV.4})$$

<sup>\*</sup>Damit bildet  $\{c_i(t) \mid t \in (0, t_i)\}$  den kürzeren Großkreisbogen zwischen  $A$  und  $B$  bzw.  $C$ .

#### IV. Andere Geometrien

(Wegen der Wahl von  $X$  und  $Y$  ist  $c = d_S(A, B)$  und  $b = d_S(A, c)$ , vgl. Definition IV.2.4 und darunter.) Dann ist  $A \times B = \sin(c)A \times X$  und  $A \times C = \sin(b)A \times Y$ . Hier haben  $A \times X$  und  $A \times Y$  jeweils Länge eins, da  $A, X$  und  $Y$  Länge eins haben und  $A \perp X$ ,  $A \perp Y$  gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \cos \angle(A \times B, A \times C) &= \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{|A \times B| |A \times C|} = \frac{\langle A \times X, A \times Y \rangle}{|A \times X| |A \times Y|} \\ &= \langle A \times X, A \times Y \rangle = \langle A, A \rangle \langle X, Y \rangle - \langle A, Y \rangle \langle X, A \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle = \cos \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung IV.2.11.** Sei  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, also  $\det(A, B, C) \neq 0$ . Es gilt  $\det(A \times B, B \times C, C \times A) = \det(A, B, C)^2$ . Also sind  $B \times C$ ,  $C \times A$  und  $A \times B$  linear unabhängig. Wir setzen  $\epsilon = \text{sign}(\det(A, B, C))$ ,  $A' = \epsilon \frac{B \times C}{|B \times C|}$ ,  $B' = \epsilon \frac{C \times A}{|C \times A|}$  und  $C' = \epsilon \frac{A \times B}{|A \times B|}$ . Somit bilden auch  $A'B'C'$  ein sphärisches Dreieck – das *Polardreieck* zu  $ABC$ , siehe Abbildung IV.9.

*Zusammenhang  $ABC$  zum Polardreieck  $A'B'C'$ ?* Es ist

$$\begin{aligned} a' = \angle(B', C') &= \angle(C \times A, A \times B) = \angle(-A \times C, A \times B) \\ &= \pi - \angle(A \times C, A \times B) = \pi - \alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

und analog  $b' = \pi - \beta$  und  $c' = \pi - \gamma$ .

**Satz IV.2.12.** Sei  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, sei  $A'B'C'$  das Polardreieck zu  $ABC$ . Dann ist  $ABC$  das Polardreieck zu  $A'B'C'$ .

*Beweis.* ÜA 25A □

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die Sätze der Trigonometrie der sphärischen Geometrie formulieren und beweisen.

**Satz IV.2.13.** (i) *Seitenkosinussatz:*  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ .

(ii) *Winkelkosinussatz:*  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$ .

(iii) *Sinussatz:*  $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ .

(iv) *Winkelsumme:*  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .

\*

$$\begin{aligned} \det(A \times B, B \times C, C \times A) &= \langle (A \times B) \times (B \times C), C \times A \rangle = \langle (\langle A, B \times C \rangle B - \underbrace{\langle B, B \times C \rangle A}_{=0}), C \times A \rangle \\ &= \langle (\det(A, B, C) B, C \times A) = \det(A, B, C) \det(B, C, A) = \det(A, B, C)^2 > 0 \end{aligned}$$

*Beweis.* (i) Man hat  $\langle C \times A, C \times B \rangle = |C|^2 \langle A, B \rangle - \langle C, B \rangle \langle C, A \rangle = \cos c - \cos a \cos b$  und (nutzt Bemerkung IV.2.1 und Lemma IV.2.10)

$$\begin{aligned} \langle C \times A, C \times B \rangle &= |C \times A| \cdot |C \times B| \cdot \cos \angle(C \times A, C \times B) \\ &= \sin \angle(A, C) \sin \angle(B, C) \cos \angle(C \times A, C \times B) \\ &= \sin b \sin a \cos \gamma. \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) für das Polardreieck und (IV.5).

(iii) Man überlegt sich  $|\det(A, B, C)| = \sin b \sin c \sin \alpha$  gilt (indem man  $B$  und  $C$  wie in (IV.4) darstellt), dann folgt der Rest durch permutieren.

(iv) Nach (IV.5) gilt fürs zugehörige Polardreieck

$$\pi - \alpha = a' < b' + c' = (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)$$

Das erste Ungleichzeichen ist die Dreiecksungleichung mit einem echten Kleinerzeichen, da die drei Punkte nicht auf einem Großkreis liegen. Sei  $D = -A$  und betrachten wir das sphärische Dreieck  $BCD$ . Dann ist der Innwinkel bei  $D$  wieder  $\alpha$ , der bei  $B$   $\pi - \beta$  und der bei  $C$   $\pi - \gamma$ . Obige Ungleichung im Dreieck  $BCS$  gibt also

$$\pi - \alpha < \pi - (\pi - \beta) + \pi - (\pi - \gamma).$$

Somit folgt  $\pi < \alpha + \beta + \gamma$ . □

**Bemerkung IV.2.14.** Wieder folgen aus den trigonometrischen Beziehungen direkt Kongruenzsätze: Es gelten (SSS), (SWS), (SSWg), (SWW), (WSW) und (WWW).

Kongruenzabbildungen für die sphärische Geometrie haben wir noch nicht untersucht und werden wir auch im Folgenden nicht. Man kann zeigen (hier ohne Beweis), dass gilt:

**Satz IV.2.15.** Eine Abbildung  $\phi: S^2 \rightarrow S^2$  ist genau dann eine Kongruenzabbildung, wenn es ein  $A \in O(3)$  mit  $\phi = A|_{S^2}$  gibt.

	euklidisch	hyperbolisch		sphärisch
Modelle	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{D}$	$S^2$
Geraden	eukl. Geraden	<ul style="list-style-type: none"> <li>• senkrechte Geraden</li> <li>• Halbkreise (Radius auf <math>x</math>-Achse)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Geraden durch 0</li> <li>• Kreise (senkrecht zu <math>\partial\mathbb{D}</math>)</li> </ul>	Großkreis $= S^2 \cap (\text{Ebene } \subset \mathbb{R}^3 \text{ durch } 0)$
Abstände	$d(p, q) =  p - q $	$d_R(p, q) =  \ln  (p, q, u, v)  $ für $R = \mathbb{H}, \mathbb{D}$ $u, v$ die Randpunkte der Geraden durch $p, q$		$d_S(p, q) = \arccos \langle p, q \rangle$
Trigonometrie	Kosinussatz	Seitenkosinussatz		Seitenkosinussatz
	–	Winkelkosinussatz		Winkelkosinussatz
	Sinussatz	Sinussatz		Sinussatz
Winkelsumme im Dreieck	$\pi$	$< \pi$		$> \pi$
Kongruenzsätze		(SSS), (SWS), (SSWg), (SWW), (WSW)		
	–	(WWW)		(WWW)

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

Wir wollen nun die euklidische Geometrie axiomatisch fassen. Wie schon erwähnt hat Euklid damit angefangen, die Geometrie zu axiomatisieren, siehe Euklids Elemente<sup>†</sup>. Recht verbreitet ist Hilberts Axiomatik<sup>‡</sup>, aber es gibt auch andere<sup>§</sup>.

Wir werden hier einem Ansatz von Wolfgang Soergel [2], s. auch das Skript von Annette Huber-Klawitter [3], die Kongruenzaxiome von Hilbert durch eine Kongruenzgruppe, d.h. am Ende durch Forderungen an die Existenz geeigneter Symmetrien, zu ersetzen.

Wenn wir uns an den ersten Teil der Vorlesung erinnern, wissen wir was wir dort gebraucht und oft als gegeben vorausgesetzt haben. Dies wollen wir nun axiomatisch fassen. Dazu sammeln wir das mal kurz überblicksmäßig:

Wir brauchen

- Punkte und Geraden und deren Lagebeziehungen zueinander – das wird die *Inzidenzstruktur*.
- Existenz einer eindeutigen Parallelen zu einer gegebenen Gerade und einem gegebenen Punkt – das führt zu *affinen Ebenen*.
- Lagebeziehungen von Punkten auf einer Gerade untereinander, also 'A liegt zwischen B und C' – das wird die *Anordnungsstruktur*.
- Kongruenzabbildungen (insbesondere Spiegelungen, da man dadurch jede Symmetrie der euklidischen Ebene darstellen kann) – das wird die *Kongruenzgruppe*.
- Ein Axiom, dass mal entlang einer Gerade wirklich alle Abstände realisieren kann, diese also isomorph zu  $\mathbb{R}$  ist. Das wird ähnlich wie bei der Konstruktion der reellen Zahlen ein Vollständigkeitsaxiom erfordern – das wird hier die *Supremumseigenschaft* sein.

Mit diesen Axiomen kann man dann zeigen, dass die zugehörige Geometrie immer isomorph zu  $\mathbb{R}^2$  wie in Kapitel II ist. Die Notwendigkeit des Parallelenaxioms für die euklidische Geometrie war lange nicht klar und wurde seit Euklid diskutiert. Erst 1862 stellte Nikolai Lobatschewski eine neue Geometrie vor in der alle Axiome der euklidischen gelten – bis auf das Parallelenaxiom. Dies war die hyperbolische Ebene aus Abschnitt IV.1.

---

<sup>†</sup><https://archive.org/details/firstsixbooksofe00byrn>

<sup>‡</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts\\_Axiomensystem\\_der\\_euklidischen\\_Geometrie](https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Axiomensystem_der_euklidischen_Geometrie)

<sup>§</sup>z.B. [https://en.wikipedia.org/wiki/Birkhoff%27s\\_axioms](https://en.wikipedia.org/wiki/Birkhoff%27s_axioms)

## V.1. Inzidenzstruktur

Sei  $P$  eine Menge und  $G \subset \mathcal{P}(P)^*$ . Das Paar  $\mathcal{I} := (P, G)$  nennt man eine *Inzidenzstruktur*.<sup>†</sup> Die Elemente der Menge  $P$  heißen *Punkte* und die Elemente der Menge  $G$  heißen *Geraden* der Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$ . Ein Punkt  $p \in P$  liegt genau dann auf einer Geraden  $g \in G$ , falls  $p \in g$  gilt. Wir sagen zwei Geraden *schneiden sich*, falls es einen Punkt gibt, der auf beiden Geraden liegt.

Eine Abbildung  $(\sigma, \tau): \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$  zwischen Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I} = (P, G)$  und  $\mathcal{I}' = (P', G')$  ist gegeben durch Abbildungen  $\sigma: P \rightarrow P'$  und  $\tau: G \rightarrow G'$  gibt. Diese Abbildung ist ein *Isomorphismus* (die beiden Inzidenzstrukturen heißen dann *isomorph*), wenn  $\sigma$  und  $\tau$  bijektiv sind.

Sei  $(P, G)$  eine Inzidenzstruktur und  $X \subseteq P$  eine Menge von Punkten. Die Punkte aus  $X$  heißen *kollinear*, wenn es ein  $g \in G$  mit  $x \in g$  für alle  $x \in X$  gibt (d.h. die Punkte aus  $X$  liegen alle auf einer Geraden).

Bis auf die Bezeichnungen Punkte und Geraden hat eine Inzidenzstruktur bisher keine geometrischen Eigenschaften. Die meisten von uns betrachteten Geometrien sind spezielle Inzidenzgeometrien. Eine *Inzidenzgeometrie* ist eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, G)$ , welche die *Inzidenzaxiome* (I1)–(I3) erfüllt:

(I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

(I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte (d.h. es gibt drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen).

Das Axiom (I3) besagt, dass in Inzidenzgeometrien mindestens ein Dreieck existiert und damit mindestens drei Geraden.

**Beispiel V.1.1.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$ . Wir setzen  $P = \mathbb{K}^n$ . Auch die Geraden unserer Inzidenzstruktur  $(P, G)$  sollen die 'normalen' Geraden in  $\mathbb{K}^n$  werden und  $p \in P$  indiziert mit einer Geraden  $g$  genau dann, wenn  $p$  ein Element der 'normalen' Geraden  $g \subset \mathbb{K}^n$ . Wir wollen das jetzt formalisieren: Eine Gerade in  $\mathbb{K}^n$  kann mittels  $a + \mathbb{K} \cdot b = \{a + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^n$  mit  $b \in \mathbb{K}_*^n := \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbb{K}^n$  parametrisiert werden. Dabei beschreiben aber verschiedene Parametrisierungen die gleiche Gerade. Deshalb definieren wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Parametrisierungen, also auf  $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}_*^n$ , durch  $(a, b) \sim (a', b')$  genau dann, wenn  $a + \mathbb{K} \cdot b = a' + \mathbb{K} \cdot b' \subset \mathbb{K}^n$ . Die Menge der Geraden der Inzidenzstruktur wird also durch den Quotienten  $G := \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}_*^n / \sim$  beschrieben, und das Paar  $(p, g = [(a, b)]) \in P \times G$  sei genau dann in  $I$ , wenn  $p \in a + \mathbb{K} \cdot b \subset \mathbb{K}^n$ . Damit haben wir eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, G)$  definiert. Man überprüft leicht, dass sie (I1) und (I2) erfüllt. Falls  $n > 1$  ist, ist auch (I3) erfüllt. Für  $n = 2$  nennt man diese Geometrie *kartesische Ebene*.

\* $\mathcal{P}(P)$  ist die Potenzmenge von  $P$ , also die Menge aller Teilmengen von  $P$ . Damit ist ein Element von  $G$  erst einmal nur eine Teilmenge von  $P$ .

<sup>†</sup>Inzidenz (von lat. incidere 'fallen')

**Beispiel V.1.2.** Die Objekte einer Inzidenzstruktur heißen zwar Punkte bzw. Geraden, müssen a priori aber erst mal nichts mit Geometrie zu tun haben: Wir setzen  $P := \{\text{Anna, Berta, Charlie, Doris, Emil}\}$ ,  $G := \{\text{lesen, kochen, tanzen, reisen, stricken}\}$ . Durch die Tabelle in Abb. V.1 ist gegeben, welche Punkte die Geraden 'lesen' etc enthalten, d.h.  $\text{lesen} = \{\text{Anna, Berta, Charlie, Doris}\} \subset P$  usw. Die Inzidenzstruktur  $(P, G)$  erfüllt (I1)–(I3).

Auch  $\mathcal{I}' = (P', G')$  gegeben in Abb. V.1 mittels Punkten und Geraden ist eine Inzidenzstruktur. Die beiden Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  sind isomorph.

	Anna	Berta	Charlie	Doris	Emil
lesen	ja	ja	ja	ja	nein
tanzen	ja	nein	nein	nein	ja
kochen	nein	ja	nein	nein	ja
reisen	nein	nein	ja	nein	ja
stricken	nein	nein	nein	ja	ja

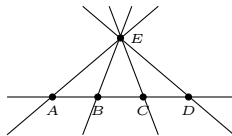


Abb. V.1.: Links: Inzidenztabelle zu Bsp. V.1.2, Rechts: Isomorphe Inzidenzstruktur (Nur die fettgedruckten Punkte sind Punkte und die Geraden bestehen auch nur aus den jeweils fettgedruckten Punkten und die 'Verbindungen' sind nur schematisch da, um zu zeigen, was auf der gleichen Gerade liegt.).

**Bemerkung V.1.3.** Zwei verschiedene Geraden einer Inzidenzstruktur, die (I1) erfüllt, haben höchstens einen gemeinsamen Punkt (d.h. es gibt höchstens einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt).

*Beweis.* Seien  $g$  und  $h$  zwei Geraden, die die Punkte  $p$  und  $q$  gemeinsam haben. Sei  $p \neq q$ . Dann gibt es nach Axiom (I1) eine eindeutige Gerade durch  $p$  und  $q$ . Also ist  $g = h$ .  $\square$

**Beispiel V.1.4.** Die Inzidenzstruktur der sphärischen Geometrie ist gegeben durch:

$$P = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$G = \{E \cap S^2 \mid E \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist eine Ebene durch den Ursprung}\} = \{\text{Großkreise}\}.$$

Diese Inzidenzstruktur erfüllt (I2) und (I3) aber nicht das Axiom (I1) (denn zwei verschiedene Großkreise haben immer zwei Punkte gemeinsam).

**Beispiel V.1.5.** Die Inzidenzstruktur der hyperbolischen Ebene ist gegeben durch:  $P := \mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}^2$ . Die Menge der Geraden ist die Menge alle  $g_b = \{(b, y) \in P \mid y > 0\}$  mit  $b \in \mathbb{R}$  und aller  $h_{x_0, r} = \{(x, y) \in P \mid (x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $r > 0$ . Dies gibt eine Inzidenzgeometrie.

## V.2. Parallelität und affine Ebenen

Ein weiteres wichtiges Axiom der euklidischen Ebene wird das Parallelenaxiom sein.

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

**Definition V.2.1.** Geraden  $g$  und  $h$  sind *parallel* (Bezeichnung  $g \parallel h$ ), wenn  $g$  und  $h$  keinen gemeinsamen Punkt haben oder  $g = h$  gilt.

**Bemerkung V.2.2.** Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es schon einen Begriff von Parallelität (unabhängig von der Inzidenzstruktur): Zwei Geraden im  $\mathbb{R}^n$  werden normalerweise parallel genannt, wenn sie den gleichen Richtungsvektor besitzen. Betrachten wir nun die Inzidenzstruktur auf  $\mathbb{R}^n$ , vgl. Beispiel V.1.1. Dann gibt uns obige Definition einen anderen Begriff von Parallelität. Nur im  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  stimmen diese überein. Im  $\mathbb{R}^3$  gibt es zum Beispiel noch windschiefe Geraden, siehe Bild, die nicht den gleichen Richtungsvektor besitzen, aber auch keinen Punkt gemeinsam haben.

Man kann verschiedene Parallelenaxiome formulieren, z.B.:

- (P) (*Parallelenaxiom*) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es höchstens eine Gerade  $h$  durch  $p$  mit  $g \cap h = \emptyset$
- (PE) (*Strenges Parallelenaxiom*) Für jede Gerade  $h$  und jeden Punkt  $p$  von  $\mathcal{I}$  gibt es genau eine durch  $p$  verlaufende Gerade  $g$ , die parallel zu  $h$  ist.

**Definition V.2.3.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$  heißt *affine Ebene*, wenn sie den Axiomen (I1), (I3) und dem strengen Parallelenaxiom (PE) genügt.

**Bemerkung V.2.4.** Eine affine Ebene ist eine Inzidenzgeometrie, d.h. Axiom (I2) ist auch erfüllt. Weiterhin definiert Parallelität in affinen Ebenen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden, ÜA 28.

Den Begriff des affinen Raumes kennen wir bereits aus der linearen Algebra, zum Beispiel ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ein affiner Raum. Insbesondere definiert die kartesische Ebene  $\mathbb{K}^2$  über  $\mathbb{K}$  eine affine Ebene. Es gibt aber auch affine Ebenen, die nicht isomorph zu kartesischen Ebenen sind, z.B. die Moulton-Ebene\*.

**Beispiel V.2.5.**  $\mathbb{H}$  ist keine affine Ebene. Es gilt noch nicht mal (P), vgl. Abbildung IV.1.

## V.3. Angeordnete Inzidenzgeometrien

In diesem Abschnitt soll es um Lagebeziehungen von Punkten bzw. Geraden gehen. Solche Beziehungen werden noch nicht durch eine Inzidenzgeometrie gegeben, weshalb wir zusätzliche Daten brauchen.

**Definition V.3.1.** Eine *Anordnung* auf einer Inzidenzgeometrie  $\mathcal{I}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{A} \subset P \times P \times P$  zusammen mit einer Wahl einer totalen Ordnung<sup>†</sup>  $\leq_g$  auf  $g$  für alle

\*<https://de.wikipedia.org/wiki/Moulton-Ebene>

<sup>†</sup>Eine Relation  $\leq$  auf einer Menge  $M$  ist eine *Ordnung*, falls für alle  $x, y, z \in M$  gilt:

- $x \leq x$  (reflexiv)
- Aus  $x \leq y$  und  $y \leq x$  folgt  $x = y$ . (antisymmetrisch)
- Aus  $x \leq y$  und  $y \leq z$  folgt  $x \leq z$ . (transitiv)

Die Ordnung heißt *total*, wenn für alle  $x, y \in M$   $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt (also alle Elemente von  $M$  bzgl. der Relation vergleichbar sind).



$g \in G$ , so dass  $(p, q, r) \in \mathcal{A}$  genau dann gilt, wenn die Punkte  $p$ ,  $q$  und  $r$  paarweise verschieden sind und entweder  $p \leq_g q \leq_g r$  oder  $r \leq_g q \leq_g p$  gilt. Ist  $(p, q, r) \in \mathcal{A}$ , dann sagen wir, dass  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt. Die Strecke von  $p \in P$  und  $r \in P$  ist definiert als

$$\overline{pr} = \{q \in P \mid q = p, q = r, \text{ oder } (p, q, r) \in \mathcal{A}\}.$$

Die Definition gibt mit der 'Zwischenrelation' erst einmal nur die Lagebeziehungen von Punkten auf einer Geraden untereinander. Das folgende Axiom ist eine Aussage über Geraden 'durch Dreiecke'. Der Anschauung nach, vgl. Abbildung, besagt es: 'Jede Gerade, die in ein Dreieck hineingeht, muss auch wieder heraus kommen'.

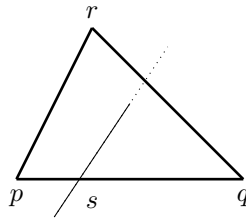


Abb. V.2.: Axiom (A) von Pasch

### Anordnungsaxiom von Pasch.

- (A) Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte und  $g$  eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  schneidet (d.h. es gibt einen Punkt  $s$  auf  $g$ , der zwischen  $p$  und  $q$  liegt), dann schneidet  $g$  auch genau eine der beiden Strecken  $\overline{pr}$ ,  $\overline{qr}$ .

Eine Inzidenzgeometrie mit einer Anordnung, die (A) erfüllt, nennen wir *angeordnete Inzidenzgeometrie*.

**Beispiel V.3.2.** Sei die Inzidenzgeometrie  $\mathbb{K}^n$ , wie in Beispiel V.1.1, gegeben, mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Q}$ . Dann erhalten wir eine Anordnung durch:

$r$  liegt genau dann zwischen  $p$  und  $q$ , wenn  $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$  für ein  $\lambda \in (0, 1)$  ist.

(Die Wahl der totalen Ordnung kann dabei wie folgt erfolgen: Für  $g \in G$  seien  $p, q \in g$  mit  $p \neq q$  gewählt. Dann ist  $g = \{tp + (1 - t)q \in \mathbb{K}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Sei  $a, b \in g$ . Dann ist  $a = t_a p + (1 - t_a)q$  und  $b = t_b p + (1 - t_b)q$  für eindeutige  $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ . Wir setzen  $a \leq_g b$  falls  $t_a \leq t_b$  gilt.)

Für  $n = 2$ , also für  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{Q}^2$ , gilt das Anordnungsaxiom von Pasch\*. Für  $n \geq 3$  nicht, vgl. Abb. V.3.

\*Für  $\mathbb{Q}^2$  folgt (A), da Geraden mit rationalen Steigungen auch immer rationale Schnittpunkte haben

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

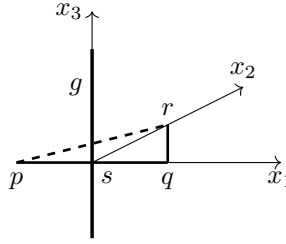


Abb. V.3.: (A) ist nicht erfüllt für  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{Q}^3$

**Beispiel V.3.3.** Eine Anordnung auf  $\mathbb{H}$  (vgl. Beispiel V.1.5) erhalten wir, in dem wir auf Geraden der Form  $g_b$  die Anordnung wie in der euklidischen Ebene verwenden und Geraden der Form  $h_{x_0, r}$  mittels des (euklidischen) Kreiswinkels durch das Intervall  $(0, \pi)$  parametrisieren (also z.B.  $\alpha \mapsto (r \cos \alpha + x_0, r \sin \alpha)$ ) und dort die (euklidische) Anordnung verwenden. Damit wird  $\mathbb{H}$  auch zur angeordneten Inzidenzgeometrie.

**Beispiel V.3.4.** Für die Inzidenzgeometrie aus Beispiel V.1.2 suggeriert die Abbildung V.1 rechts eine Anordnung:

$$\mathcal{A} = \{(A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), (B, C, D), \\ (C, B, A), (D, B, A), (D, C, A), (D, C, B)\}.$$

Bei jeder Gerade mit mindestens drei Elementen hat man Wahlen, obiges ist nur ein Beispiel.

Die Anordnungen erlauben es auch Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden zu spezifizieren:

**Definition V.3.5.** Sei  $g$  eine Gerade und  $p, q, r$  Punkte auf  $g$ . Wir sagen, dass  $q$  und  $r$  auf der *derselben Seite von  $p$  auf  $g$*  liegen, wenn  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Sei  $g \in G$  und  $p \in P$ . Dann nennen wir die beiden Mengen  $H_1 = \{q \in P \mid p \leq_g q\}$  und  $H_2 = \{q \in P \mid q \leq_g p\}$  *Halbgeraden* auf  $g$  von  $p$  aus. Weiterhin sei der *Strahl* von  $p$  in Richtung von  $q \neq p$  definiert als

$$S(p, q) = \{r \in P \mid r \in \{p, q\} \text{ oder } (p, q, r) \in \mathcal{A} \text{ oder } (p, r, q) \in \mathcal{A}\}.$$

Ist  $g$  eine Gerade und sind  $p, q$  Punkte, die nicht auf  $g$  liegen, dann liegen  $p$  und  $q$  auf *derselben Seite von  $g$* , wenn  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  nicht schneidet.

Der Strahl  $S(p, q)$  ist damit insbesondere eine Halbgerade auf  $g$  von  $p$  aus.

**Bemerkung V.3.6.** Die Bezeichnung auf derselben Seite einer Geraden zu liegen kommt, wie alles andere auch, aus der ebenen Geometrie. Für  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 3$  kann man die Definition auch anwenden, ist allerdings dort nicht sonderlich hilfreich. Dort liegen zwei Punkte  $p, q$  z.B. automatisch auf der selben Seite einer Geraden  $g$ , falls  $p, q, g$  nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

#### V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen

Mit der Anordnung kann man nun auch definieren, wann zwei Punkte einer Geraden bzgl. eines dritten (verschiedenen) Punktes dieser Gerade auf der gleichen Seite liegen:

**Lemma V.3.7.** *Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie gegeben. Sei  $g$  eine Gerade darin und  $p$  ein Punkt auf  $g$ . Seien  $q, r \in g \setminus \{p\}$ . Sei  $q \sim_{p,g} r$  genau dann wenn,  $q$  und  $r$  auf derselben Seite von  $p$  auf  $g$  liegen. Dann ist  $\sim_{p,g}$  eine Äquivalenzrelation mit höchstens zwei Äquivalenzklassen, die jeweils ein von  $p$  ausgehender Strahl ohne den Punkt  $p$  ist.*

Da jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält, muss  $g \setminus \{p\}$  mindestens einen Punkt enthalten und damit muss es (wenn man einmal gezeigt hat, dass  $\sim_{p,g}$  eine Äquivalenzrelation ist) mindestens eine Äquivalenzklasse geben. Wenn alle Punkte der Geraden auf einer Seite von  $g$  bzgl.  $p$  liegen (z.B. wenn es nur zwei Punkte auf der Geraden gibt. Da besteht dann die eine Halbgerade nur aus dem Punkt  $p$  und die andere aus beiden Punkten der Geraden.), dann gibt es auch nur genau eine Äquivalenzklasse.

*Beweis.* ÜA 29A □

Ähnlich können wie mit der Relation 'auf derselben Seite einer Geraden'-liegen eine Äquivalenzrelation bilden und damit Halbebenen definieren. Hier wird das Anordnungsaxiom von Pasch eingehen:

**Lemma V.3.8.** *Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie gegeben. Sei  $g$  eine Gerade darin. Seien  $q, r \in P \setminus g$ . Sei  $q \sim_g r$  genau dann wenn,  $q$  und  $r$  auf derselben Seite von  $g$  liegen. Dann ist  $\sim_g$  eine Äquivalenzrelation mit höchstens zwei Äquivalenzklassen. Diese Äquivalenzklassen nennt man Halbebenen zu  $g$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\sim_g$  eine Äquivalenzrelation ist: Reflexiv und symmetrisch folgt direkt aus der Definition von 'auf derselben Seite von  $g$  liegen'. Es bleibt die Transitivität: Dazu sei  $p \sim_g q$  und  $q \sim_g r$ . D.h.  $\overline{pq}$  und  $\overline{qr}$  schneiden  $g$  nicht. Angenommen  $\overline{pr}$  schneidet  $g$ . Dann folgt aus dem Anordnungsaxiom von Pasch (da keiner der Punkte  $p, q$  und  $r$  auf  $g$  liegt), dass  $g$  doch eine der Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{qr}$  schneiden müsste, was den Widerspruch gibt. Also muss auch  $p \sim_g r$  sein.

Da es in einer Inzidenzgeometrie drei nicht kollineare Punkte gibt, gibt es einen Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Somit gibt es mindestens eine Äquivalenzklasse. Wir müssen noch zeigen, dass es nicht mehr als zwei Äquivalenzklassen geben kann: Angenommen  $p$  und  $q$  bzw.  $q$  und  $r$  liegen in unterschiedlichen Äquivalenzklassen, d.h.  $\overline{pq}$  bzw.  $\overline{qr}$  schneidet  $g$ . Dann folgt aus dem Anordnungsaxiom von Pasch, dass  $\overline{pr}$  dann  $g$  nicht schneidet, also dass  $p \sim_g r$  gelten muss. □

### V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen

Wir wollen in diesem Abschnitt Symmetrien/Kongruenzen für die eine angeordnete Inzidenzgeometrie einführen. Dazu brauchen wir zunächst den Begriff eines Isomorphismus einer angeordneten Inzidenzgeometrie:

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

**Definition V.4.1.** Seien  $(P, G, \mathcal{A})$ ,  $(P', G', \mathcal{A}')$  angeordnete Inzidenzgeometrien (d.h. es gibt jeweils auch totale Ordnungen  $\leq_g$  auf Geraden  $g \in G$  und  $\leq_{g'}$  auf Geraden  $g' \in G'$ ). Eine *Isomorphismus von angeordneten Inzidenzgeometrien* ist eine bijektive Abbildung  $\Phi: P \rightarrow P'$ , so dass  $\Phi(p) \leq_g \Phi(q) \leq_g \Phi(r)$  genau dann gilt, wenn  $p \leq_g q \leq_g r$  oder  $r \leq_g q \leq_g p$  gilt.

Damit bilden Isomorphismen von angeordneten Inzidenzgeometrien insbesondere Geraden in Geraden, Strecken in Strecken, Halbebenen in Halbebenen und Halbgeraden in Halbgeraden ab.

**Lemma V.4.2.** Sei  $(P, G, \mathcal{A})$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie. Die Menge der Isomorphismen von  $(P, G, \mathcal{A})$  auf sich selbst ist eine Gruppe (mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation).

*Beweis.* Ein Isomorphismus  $\Phi$  von  $(P, G, \mathcal{A})$  auf sich selbst ist insbesondere eine bijektive Abbildung von  $P$  nach  $P$ . Damit ist die Menge der Isomorphismen von  $(P, G, \mathcal{A})$  eine Teilmenge der bijektiven Abbildung von  $P$  nach  $P$ . Letzteres ist mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe. Wir müssen also überprüfen, dass die Isomorphismen von  $(P, G, \mathcal{A})$  eine Untergruppe bilden. Das stimmt, da die Teilmenge der Isomorphismen von angeordneten Inzidenzgeometrien abgeschlossen unter der Hintereinanderausführung und unter Inversenbildung ist.  $\square$

Kommen wir zu den Kongruenzen:

**Definition V.4.3.** Sei  $(P, G, \mathcal{A})$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie. Ein *Kongruenzgruppe* ist eine Untergruppe  $K$  der Gruppe der Isomorphismen von  $(P, G, \mathcal{A})$ , so dass es für je zwei verschiedene Halbgeraden genau zwei Elemente von  $K$  gibt, die den eine Halbgerade in die andere überführen. Die Elemente von  $K$  nennen wir *Kongruenzen* oder *Kongruenzabbildungen*. Das Tupel  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  ist eine *angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen*.

Als Untergruppe der Isomorphismengruppe enthält  $K$  insbesondere immer die Identität.

**Beispiel V.4.4.** Für die euklidische Ebene ist die Menge der Kongruenzabbildungen, vgl. Abschnitt III.1, eine Kongruenzgruppe: Zu zwei gegebenen Halbgeraden  $S(p, q) \subset g \in G$  und  $S(t, s) \subset h \in G$  sind diese zwei Elemente aus  $K$  wie folgt gegeben:  $r_{t,\alpha} v_{pr}$  und  $s_h r_{t,\alpha} v_{pt}$  (Hier ist  $\alpha$  der Winkel, so dass  $r_{t,\alpha}(v_{pt}(S(p, q))) = S(t, s)$  ist.).\*

**Beispiel V.4.5.** Für  $\mathbb{D}$  ist die Menge der Kongruenzabbildungen, vgl. Abschnitt IV.1.3, eine Kongruenzgruppe: Für  $S(p, q)$  und  $S(0, s \in (0, 1))$  haben wir eine solche Kongruenzabbildung in ÜA 23(i) gefunden. Die andere erhalten wir durch Spiegeln an der  $x$ -Achse. Der allgemeine Fall kann auf obigen zurückgeführt werden.

Während es noch angeordnete Inzidenzgeometrien gab, wo jede Gerade nur endlich viele Punkte hatte, ist dies mit Kongruenzen nicht mehr so:

\*Das entspricht dem, was wir in Lemma III.1.3 gemacht hatten.

#### V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen

**Lemma V.4.6** (Unendlich viele Punkte in Halbgeraden). *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzgruppe. Dann besteht jede Halbgerade aus unendlich vielen Punkten und jede Kongruenz, die eine Halbgerade bijektiv auf sich selber abbildet, hält diese Halbgerade auch punktweise fest.*

Insbesondere gibt es nun auch immer genau zwei Äquivalenzklassen bzgl. der Relationen  $\sim_{p,g}$  bzw.  $\sim_g$  aus Lemma V.3.7 bzw. V.3.8.

*Beweis.* Da es eine Inzidenzgeometrie ist, gibt es eine Gerade mit mindestens zwei Punkten. Damit gibt es auch eine Halbgerade mit mindestens zwei Punkten. Da es immer eine Kongruenz gibt, die diese Halbgerade bijektiv in eine andere Halbgerade abbildet, hat jede Halbgerade mindestens zwei Punkte. Betrachten wir die Halbgerade  $H = \{q \in P \mid p \leq_g q\}$  für ein  $g \in G$  und ein  $p \in g$ . Es ist  $p \in H$ . Es gibt  $r \in H$  mit  $r \neq p$ . Dann ist  $H' := \{q \in P \mid r \leq_g q\}$ . Dann ist  $H' \subsetneq H$ . Da es wieder eine Kongruenz gibt, die  $H$  bijektiv auf  $H'$  abbildet, müssen beide unendlich viele Punkte haben.

Sei nun  $H$  eine Halbgerade. O.B.d.A. habe diese die Form  $H = \{q \in P \mid q \leq_g p\}$ . Dann gibt es genau zwei Isomorphismen, die  $H$  in sich selbst überführen. Einer davon ist die Identität, den anderen nennen wir  $k$ . Damit ist  $k^2 = \text{id}$ . Wir wollen zeigen, dass für alle  $r \in H$  dann  $k(r) = r$  gilt: Wir betrachten den Fall  $k(r) \leq_g r$  – der andere Fall geht analog. Dann ist  $k(r) \leq_g r \leq_g p$  und damit  $r = k^2(r) \leq_g k(r) \leq_g p$ . Damit ist  $k(r) = r$ .  $\square$

**Bemerkung V.4.7** (Existenz von Spiegelungen). Sei  $H$  eine Halbgerade in einer angeordneten Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Dann gibt es insbesondere zwei Kongruenzen, die  $H$  auf sich selbst abbilden. Eine davon ist die Identität, die andere heiße  $s_H$  – die *Spiegelung an  $H$* . Da  $\{\text{id}, s_H\}$ , die einzig beiden Kongruenzen sind, die  $H$  erhalten, muss dies eine zwei elementige Untergruppe von  $K$  sein und damit  $s_H \circ s_H = \text{id}$ . Sei  $g$  die Gerade zur Halbgeraden  $H$  und  $H'$  die zu  $H$  gehörige zweite Halbgerade zu  $g$ . Dann ist  $s_H(H') = H'$ , da Kongruenzen Geraden bijektiv auf Geraden abbilden. Damit ist  $s_H = s_{H'}$ . Nach Lemma V.4.6 hält  $s_H = s_{H'}$  die Halbgeraden  $H$  und  $H'$  und damit ganz  $g$  sogar punktweise fest. Damit gilt für jede Halbgerade  $H''$  von  $g$ , dass  $s_{H''} = s_H$  ist. Diese Spiegelung hängt in Wirklichkeit also nur von  $g$  ab. Deshalb schreiben wir  $s_g := s_H$  und nennen diese Abbildung *Spiegelung an  $g$* .

**Lemma V.4.8** (Unendlich viele Punkte in Strecken). *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Sei  $p, q \in P$  mit  $p \neq q$ . Dann gibt es ein  $r \in P$  welches zwischen  $p$  und  $q$  liegt. Insbesondere enthält  $\overline{pq}$  unendlich viele Punkte.*

*Beweis.* ÜA 31  $\square$

Im Folgenden sammeln wir weitere Eigenschaften von Spiegelungen.

**Lemma V.4.9.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Seien  $H$  und  $H'$  zwei Halbgeraden mit  $H \subset g \in G$  und  $H' \subset h \in G$ . Seien  $k_{\pm}$  die beiden Kongruenzen, die  $H$  auf  $H'$  abbilden. Dann gilt  $k_+ = k_- s_g = s_h k_-$ . Insbesondere werden zwei Punkte  $p, q$  die auf derselben Halbebene von  $g$  in dieselbe Halbebene von  $h$  abgebildet.*

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

*Beweis.* Da  $s_g$  die Gerade  $g$  punktweise festhält, wird  $H$  durch  $k_-s_g$  auf  $H'$  abgebildet. Also muss  $k_-s_g \in \{k_\pm\}$  sein. Da  $s_g$  nicht die Identität ist, muss  $k_+ = k_-s_g$  sein. Die andere Gleichheit erhält man analog.

Seien nun  $p, q$  Punkte, die auf derselben Seite von  $g$  liegen. Angenommen  $k_+(p)$  und  $k_+(q)$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $h$ . Dann gibt es  $z \in \overline{k_+(p)k_+(q)} \cap h$ . Damit muss  $k_+^{-1}(z) \in \overline{pq} \cap k_+^{-1}(h) = \overline{pq} \cap g$ . Diesen Punkt gibt es aber nicht, da  $p$  und  $q$  auf derselben Seite von  $g$  liegen. Also bilden  $k_\pm$  Halbebenen von  $g$  auf Halbebenen von  $h$  ab.  $\square$

**Lemma V.4.10.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Sei  $g \in G$  und  $k \in K$ . Dann gilt  $ks_gk^{-1} = s_{k(g)}$ .*

*Beweis.* Sei  $x \in g$ . Dann ist  $ks_gk^{-1}(k(x)) = k(x)$ . Also bildet  $ks_gk^{-1}$  die Gerade  $k(g)$  wieder auf  $k(g)$  ab und hält dabei die Punkte fest, also auch jede Halbgerade von  $k(g)$  fest. Da  $ks_gk^{-1} \neq \text{id}$  ist (da  $s_g \neq \text{id}$  ist), muss damit  $ks_gk^{-1} = s_{k(g)}$  sein.  $\square$

**Lemma V.4.11** (Spiegelungen vertauschen Halbebenen). *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Sei  $g \in G$ . Dann vertauscht die Spiegelung  $s_g$  die beiden Halbebenen zu  $g$ . Damit ist insbesondere die Spiegelungsgerade  $g$  die Menge der Fixpunkte  $s_g$ .*

*Beweis.* Angenommen die Spiegelung  $s_g$  vertauscht nicht die zu  $g$  gehörigen Halbebenen. Dann gibt es  $p \in P \setminus g$ , so dass  $\overline{pq}$  mit  $q = s_g(p)$  nicht  $g$  schneidet. Sei  $h = g_{pq}$ . Angenommen  $s \in h \cap g$ . Dann liegen  $s, p$  und  $q$  auf  $h$  und einer der drei Punkte muss zwischen den anderen beiden liegen. Die Spiegelung  $s_g$  hält  $s$  fest und vertauscht  $p$  und  $q$  und kann damit diese Zwischenrelation nicht beibehalten, was den Widerspruch gibt. Also müssen  $g$  und  $h$  parallel sein, vgl. Abbildung V.4. Insbesondere liegt  $h$  (bzw.  $g$ ) damit vollständig in einer Halbebene von  $g$  (bzw.  $h$ ). Sei  $u \in g$  und  $v \in g \setminus \{u\}$ , so dass  $v$  und  $p$  auf verschiedenen Seiten von  $g_{uq}$  liegen. Damit schneidet  $\overline{pv}$  die Gerade  $g_{uq}$  in einem Punkt  $z$ . Dieser liegt auf  $S(u, q)$ . Also muss  $s_g(z) \in s_g(\overline{pv}) \cap s_g(S(u, q)) = \overline{qv} \cap S(u, p)$  sein. Diese Menge ist jedoch leer, da  $p$  und  $v$  auf verschiedenen Seiten von  $g_{uq}$  liegen.  $\square$

Mit Hilfe der Spiegelungen kann man 'senkrecht sein' definieren und die Existenz von Loten/Senkrechten zeigen:

**Definition V.4.12.** Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Seien  $g, h \in G$ . Die Gerade  $h$  steht senkrecht auf  $g$  ( $h \perp g$ ), falls  $g \neq h$  und  $s_g(h) = h$  gilt.

Da Spiegelungen Halbebenen vertauschen, müssen sich die Geraden  $g, h$  dann schneiden. Da  $g \neq h$  ist, ist dieser Schnittpunkt eindeutig und wir nennen ihn *Fußpunkt* des Lotes.

**Lemma V.4.13** (Senkrechte Geraden/Lote). *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Dann gilt:*

- (i) *Sei  $g \in G$  und  $p \in P$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $h$  durch  $p$ , welche senkrecht auf  $g$  steht – das Lot zu  $g$  durch  $p$ .*

#### V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen

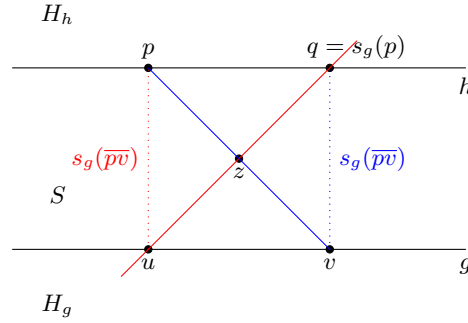


Abb. V.4.: Beweisfigur zu Lemma V.4.11

- (ii) Für zwei verschiedene Geraden  $g, h \in G$  gilt genau dann  $h \perp g$ , wenn  $s_h s_g = s_g s_h$  gilt (also die zugehörigen Spiegelungen kommutieren).
- (iii) Es ist  $g \perp h$  genau dann, wenn  $h \perp g$  gilt.
- (iv) Seien  $g \in G$  und  $p, q \in g$  mit  $p \neq q$ . Sei  $h$  das Lot zu  $g$  durch  $p$  und  $\ell$  das Lot zu  $g$  durch  $q$ . Dann sind  $h$  und  $\ell$  parallel und verschieden.

*Beweis.* (i) Sei zunächst  $p \notin g$ . Dann ist  $s_g(p) \neq p$ , da  $s_g$  nur  $g$  als Fixpunktmenge hat. Außerdem liegen diese beiden Punkte auf verschiedenen Seiten von  $g$ , da Spiegelungen Halbebenen vertauschen. Sei  $h$  die eindeutige Gerade durch  $p$  und  $s_g(p)$ . Dann ist  $s_g(h)$  eine Gerade, die  $s_g(p)$  und  $s_g^2(p) = p$  enthält – also  $s_g(h) = h$ . Wegen  $p \notin g$  ist  $g \neq h$ . Also ist  $h \perp g$ .

Sei nun  $p \in g$ . Da es einen Punkt  $q \notin g$  geben muss, kann man wie eben das Lot  $\ell$  zu  $g$  durch  $q$  finden. Sei  $r$  der Schnittpunkt von  $g$  mit  $\ell$ . Sei  $H_1 = \{s \in P \mid s \leq_g r\}$  und  $H_2 = \{s \in P \mid s \leq_g p\}$ . Dann gibt es genau zwei Kongruenzen  $k_{\pm}$ , die  $H_1$  auf  $H_2$  abbildet. Dann bilden auch die Kongruenzen  $k_+ s_g$  und  $s_g k_+$   $H_1$  auf  $H_2$  ab und müssen damit gleich  $k_-$  sein. Sei  $h := k_+(\ell)$ . Dann ist  $s_g(h) = s_g(k_+(\ell)) = k_+(s_g(\ell)) = k_+(\ell) = h$  und  $h \neq g$ . Damit ist  $h$  eine Gerade senkrecht zu  $g$ , die durch  $p$  geht.

(ii) Sei zunächst  $g \perp h$ . Dann gibt es genau ein  $p \in g \cap h$ . Sei  $H_1 = \{s \in P \mid s \leq_h p\}$  und  $H_2 = \{s \in P \mid p \leq_g s\}$  die beiden Halbgeraden zu  $h$  von  $p$  aus. Dann bildet die Kongruenz  $s_g$   $H_1$  nach  $H_2$  ab, weil  $h \perp g$  ist und Spiegelungen Halbebenen vertauscht. Damit ist  $s_g s_h s_g(H_1) = H_1$ . Da  $s_g s_h s_g$  die Halbebenen zu  $h$  vertauscht, ist es nicht die Identität sondern muss gleich  $s_h$  sein. Damit ist  $s_h s_g = (s_g s_h s_g) s_g = s_g s_h$ .

Sei andererseits  $s_g s_h = s_h s_g$ . Dann ist  $s_g(h) = s_g(s_h(h)) = s_h(s_g(h))$  und damit  $s_g(h) = h$ . Da  $h \neq g$  vorausgesetzt war, ist also  $h \perp g$ .

(iii) folgt direkt aus (ii)

(iv) Angenommen  $r \in h \cap \ell$ . Dann ist  $s_g(r) \in h \cap \ell$ . Wäre  $s_g(r) = r$ , dann wäre  $r = p = q$ , was ausgeschlossen wurde. Also ist  $s_g(r) \neq r$ . Dann muss  $h = \ell$  sein, was wieder  $p = q$  implizieren würde. Damit kann es  $r$  nicht geben.  $\square$

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

**Folgerung V.4.14.** Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Dann existiert zu jeder Geraden  $g \in G$  und zu jedem Punkt  $p \in P$  eine Parallele zu  $g$  durch  $p$ .

Das gibt die Existenz von Parallelen, doch diese muss nicht eindeutig sein. Der hyperbolische Raum erfüllt ja noch alle Voraussetzungen der letzten Folgerung.

*Beweis.* Ist  $p \in g$ , dann ist  $g$  selbst die gesuchte Parallele. Sei nun  $p \notin g$ . Sei  $h$  das Lot zu  $g$  durch  $p$ . Sei  $\ell$  das Lot zu  $h$  durch  $p$ . Dann ist nach letztem Lemma  $h \parallel g$ .  $\square$

Bis jetzt haben wir gesehen, dass es in angeordneten Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen es immer Isomorphismen gibt, die Spiegelungen genannt werden, weil sie sich verhalten, wie die Spiegelungen der euklidischen Ebene. Insbesondere implizieren sie die Existenz von Senkrechten/Loten.

Als nächstes wollen wir uns darum kümmern, ob wir auch schon Kongruenzen haben, welche sich wie Verschiebungen verhalten:

**Definition V.4.15.** Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen. Sei  $g \in G$ . Sei  $K_g$  die Untergruppe von  $K$ , welche aus allen Kongruenzen  $k \in K$  besteht, welche  $g$  auf  $g$  abbilden und die Halbebenen von  $g$  erhalten. Sei  $V_g \subset K_g$  zusätzlich die Teilmenge aller  $k \in K_g$ , für welche  $k(p) \leq_g k(q)$  aus  $p \leq_g q$  folgt. Die Elemente aus  $V_g$  heißen *Verschiebungen längs  $g$* .

**Notation  $v_{pq}$ :** Seien  $p, q \in g$  mit  $p \neq q$ . Sei  $H$  die Halbgerade in  $g$  von  $q$  aus, in der nicht  $p$  liegt. Sei  $v_{pq}$  die eindeutige Kongruenz, die die Halbebenen von  $g$  erhält, und  $S(p, q)$  auf  $H$  abbildet (Die andere Kongruenz, die  $S(p, q)$  auf  $H$  abbildet, ist  $v_{pq}s_g$  und vertauscht dann die Halbebenen von  $g$ ).

**Bemerkung V.4.16.** Hat  $v \in V_g$  einen Fixpunkt auf  $g$ , dann ist es schon die Identität: Sei  $x \in g$  ein Fixpunkt von  $v$  und  $y \in g$  mit  $x \neq y$ . O.B.d.A. sei  $x \leq_g y$ . Da Kongruenzen Halbgeraden erhalten, bildet  $v$   $S(p, q)$  auf  $S(p = v(p), v(q))$  ab. Da  $v$  eine Verschiebung ist, ist  $p = v(p) \leq_g v(q)$  und damit  $S(p = v(p), v(q)) = S(p, q)$ . Es gibt nur zwei Kongruenzen, die das erfüllen:  $\text{id}$  und  $s_g$ . Da  $v$  die Halbebenen von  $g$  erhält, muss  $v = \text{id}$  sein.

Um i.A. mehr auch über Verschiebungen zu sagen und am Ende ein Axiomensystem zu haben, was die euklidische Ebene eindeutig beschreibt, brauchen wir noch mehr Axiome im folgenden Abschnitt.

Was wir mit Kongruenzen aber schon einführen können, ist ein Kongruenzbegriff für Strecken und Winkel:

**Definition V.4.17.** Sei eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzgruppe gegeben.

Wir nennen zwei Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{rs}$  *kongruent*, wenn es eine Kongruenz gibt, die  $p$  in  $r$  und  $q$  in  $s$  abbildet.



#### V.4. Angeordnete Inzidenzgeometrien mit Kongruenzen

Sei ein Punkt  $s$  und zwei verschiedene Halbgeraden  $H_1$  und  $H_2$ , die in  $s$  starten, gegeben. Der Winkel  $\sphericalangle(H_1, H_2)$  zwischen diesen beiden Halbgeraden sei die Menge  $\{p \in P \mid \exists q, r \in H_1 \cup H_2 : p \in \overline{qr}\}^*$ .

Wir nennen zwei Winkel  $\sphericalangle(H_1, H_2)$  und  $\sphericalangle(L_1, L_2)$  kongruent, wenn es eine Kongruenz  $k$  gibt, so dass  $k(\sphericalangle(H_1, H_2)) = \sphericalangle(L_1, L_2)$  ist.

Wir nennen zwei Dreiecke (gegeben durch drei nicht kollineare Punkte) *kongruent*, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die die Eckpunkte des einen Dreiecks in die des anderen überführt.

Sind zwei Dreiecke kongruent, dann nach Definition automatisch jede Kante des einen Dreiecks zu einer des anderen kongruent und analog bei den Winkeln. Man fragt sich, ob daraus schon (einige) der Kongruenzsätze folgen, die man so kennt.

Zuvor halten wir noch fest, dass die 'Symmetriebrechung' der Punkte in der Definition der Kongruenz von Strecken ist in Wirklichkeit keine ist (insbesondere ist Kongruenz von Strecken eine Äquivalenzrelation):

**Folgerung V.4.18.** *Zwei Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{rs}$  sind genau dann, wenn es eine Kongruenz gibt, die  $p$  in  $s$  und  $q$  in  $r$ .*

*Beweis.* Sind die Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{rs}$  kongruent, gibt es nach Definition eine Kongruenzabbildung mit  $k(p) = r$  und  $k(q) = s$ .

Sei  $k_1$  eine Kongruenzabbildung mit  $k_1(S(s, r)) = S(r, s)$ , also insbesondere  $k_1(s) = r$  erfüllt. Wegen  $k_1^2 = \text{id}$ , folgt  $k_1(r) = s$  und damit ist  $k_1 k$  eine Kongruenzabbildung, die  $p$  in  $s$  und  $q$  in  $r$  abbildet. Die andere Richtung folgt analog durch Umbenennung der Punkte.  $\square$

**Lemma V.4.19.** *Für angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen gilt der Kongruenzsatz (SWS) (wie in Satz I.4.1).*

*Beweis.* Seien  $pqr$  und  $stu$  zwei Dreiecke, so dass  $\overline{pq}$  kongruent zu  $\overline{st}$  ist,  $\overline{rq}$  kongruent zu  $\overline{ut}$  ist und  $\sphericalangle pqr$  kongruent zu  $\sphericalangle stu$  ist. D.h. es gibt eine Kongruenzabbildung  $k$ , die die Winkel aufeinander abbilden, also o.B.d.A.  $k(S(q, p)) = k(S(t, s))$  und  $k(S(q, r)) = k(S(t, u))$ . Weiterhin muss es eine Kongruenzabbildung  $k_1$  mit  $k_1(p) = s$  und  $k_1(q) = t$ . Da Kongruenzabbildungen Halbgeraden auf Halbgeraden abbilden, ist  $k_1(S(q, p)) = k_1(S(t, s))$ , wie schon  $k$ . Also ist  $k = k_1$  oder  $k = s_{g_{ts}} k_1$ . Da Spiegelungen die Spiegelungsgerade punktweise erhalten, bildet schon  $k \overline{pq}$  auf  $\overline{st}$  ab. Analog sieht man auch, dass  $k \overline{rq}$  auf  $\overline{ut}$  abbildet. Also ist  $k$  schon die Kongruenzabbildung, die  $pqr$  auf  $stu$  abbildet.  $\square$

Relativ analog folgt (WSW) – ÜA 32. Auch für (SSS) kann man den Beweis aus dem euklidischen übernehmen, sofern man ein Analogon von Lemma I.4.2 hat. Das machen wir in ÜA 33.

---

\*Das wäre wie ein Winkel, der im Euklidischen  $\leq \pi$  wäre

## V.5. Fast-euklidische Geometrie

Das nächste Axiom wird dazu führen, dass jede Gerade im geeigneten Sinne isomorph zur additiven Gruppe  $\mathbb{R}$  ist. Es ist das Analogon zu Supremumsaxiom bei der Konstruktion der reellen Zahlen.

**Definition V.5.1.** Eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  erfüllt die *Supremumseigenschaft*, wenn für jede Gerade  $g$  mit der zugehörigen Ordnung  $\leq_g$  jede nichtleere beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt; d.h. also für alle  $g \in G$  und  $\emptyset \neq A \subset G$ , für die es  $p, q \in g$  mit  $A \subset \overline{pq}$  gibt (= beschränkt sein), gibt es ein  $b \in g$  mit  $A \subset \overline{pb}$ , so dass für alle  $c \leq_g b$  mit  $b \neq c$   $A \not\subset \overline{pc}$  ist. Wir schreiben  $\sup A = b$ .

Eine angeordnete Inzidenzgeometrie mit Kongruenzen, in der die Supremumseigenschaft erfüllt ist, nennen wir eine *fasteuklidische Geometrie*.

**Lemma V.5.2** (Existenz von Spiegelung, die zwei Punkte vertauschen, und von Mittelpunkten von Strecken.). *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine fasteuklidische Geometrie. Sei  $p, q \in P$  mit  $p \neq q$ . Dann gibt es*

- (i) *genau Gerade  $h \in G$  mit  $s_h(p) = q$ . Insbesondere ist  $h$  das Lot zu  $g$  durch  $r$ .*
- (ii) *genau einen Punkt  $r \in g$  mit  $v_{pr}^2 = v_{pq}$ . Insbesondere gilt dann  $v_{rq} = v_{pr}$ .*

*Beweis.* (i) Sei  $g$  die Gerade durch  $p$  und  $q$ . Sei  $k$  die Kongruenz, die die Halbgerade  $S(p, q)$  auf die Halbgerade  $S(q, p)$  abbildet und die Halbebenen von  $g$  erhält. Es ist  $k^2 = \text{id}$ .

Wir werden zeigen, dass es einen Fixpunkt  $r$  für  $k$  gibt. Angenommen, wir haben das gezeigt, dann wollen wir  $h$  als das Lot zu  $g$  durch  $r$  setzen (Existiert nach Lemma V.4.13). Da  $k$  die Gerade  $g_{pq}$  erhält und Kongruenzabbildungen Winkel erhalten, ist auch  $k(h)$  ein Lot zu  $g$  durch  $k(r) = r$ . Wegen Eindeutigkeit des Lotes (auch Lemma V.4.13) folgt  $k(h) = h$ . Sei  $s \in g \cap h$  der Fußpunkt des Lotes. Dann ist auch  $k(s) \in k(g) \cap k(h) = g \cap h$  und damit  $k(s) = s$  ein Fixpunkt. Da  $k$  die Halbebenen von  $g$  erhält, ist  $k$  die eindeutige Kongruenzabbildung, die eine Halbgerade von  $k$  von  $s$  aus auf sich selbst abbildet und die Halbebenen von  $k$  vertauscht. Damit ist  $k = s_h$  und (i) wäre gezeigt.

Wir müssen also nur noch die Existenz eines Fixpunkt  $r$  von  $k$  zeigen: Dazu sei  $z \notin g$ . Ist  $z$  schon Fixpunkt sind wir fertig, sei also  $z \neq k(z)$ . Schneidet  $g_{zk(z)}$  die Gerade  $g$ , dann ist dieser Schnittpunkt ein Fixpunkt, da  $k(g) = g$  und  $k(g_{zk(z)}) = g_{zk(z)}$  ist. Es bleibt also der Fall, dass diese beiden Geraden parallel sind. In diesem Fall erhält man mit einer sehr ähnlichen Argumentation wie bei Lemma V.4.11/Abb. V.4 einen Fixpunkt.

(ii) Sei  $r$  der Schnittpunkt aus (i). Wir werden zeigen, dass  $v_{pr}^2 = v_{pq}$  gilt: Sei  $s$  die Spiegelung, die  $p$  und  $q$  vertauscht (und damit nach (i)  $r$  als Fixpunkt hat), und sei  $\sigma$  die Spiegelung, die  $p$  und  $r$  vertauscht. Dann ist  $s\sigma$  eine Kongruenz, die  $g$  auf  $g$  abbildet, die Halbebenen von  $g$  enthält und die Ordnung auf  $g$  erhält (da  $s$  und  $\sigma$  diese jeweils umdrehen). Also ist  $s\sigma$  eine Verschiebung, die  $p$  auf  $r$  und  $r$  auf  $q$  abbildet. Also ist  $v_{pr} = v_{rq}$  und damit ist  $v_{pr}^2$  eine Abbildung, die  $p$  auf  $q$  abbildet. Da die Verschiebungen entlang  $g$  eine Gruppe bilden, muss damit  $v_{pr}^2 = v_{pq}$  sein.  $\square$

Damit können wir Aussagen zu Elementen in  $K_g$  (vgl. Definition V.4.15) ohne die Verschiebungen  $V_g$  machen:

**Folgerung V.5.3.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine fasteuklidische Geometrie. Alle Elemente in  $k \in K_g \setminus V_g$  sind Spiegelungen an einer Geraden senkrecht zur Geraden  $g$ .*

*Beweis.* Sei  $x \in g$  mit  $k(x) \neq x$ . Wegen  $k \in K_g \setminus V_g$  ist  $k$  die eindeutige Kongruenzabbildung, die  $S(x, k(x))$  auf  $S(k(x), x)$  abbildet und die Halbebenen von  $g$  erhält. Also ist nach letztem Lemma  $k$  die Spiegelung am Lot zu  $g$  durch den Mittelpunkt von  $xk(x)$ .  $\square$

Wählt man  $p \in g$ . Dann erhält man mittels

$$v \leq_{V_g} w \text{ für } v, w \in V_g \text{ genau dann, wenn } v(p) \leq_g w(p)$$

eine totale Ordnung auf  $V_g$ .

**Folgerung V.5.4.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine fasteuklidische Geometrie. Sei  $v \in V_g$ . Dann gibt es zwei Geraden  $h_1, h_2 \in G$  mit  $h_1 \perp g$  und  $h_2 \perp g$  und  $v = s_{h_2} s_{h_1}$ .*

*Beweis.* Ist  $v = \text{id}$ , kann man  $h_1 = h_2 \perp g$  beliebig wählen. Sei nun  $v = v_{pq}$  für  $p, q \in g$  und  $p \neq q$ . Sei  $h_1$  die zu  $g$  senkrechte Gerade aus Lemma V.5.2, so dass  $s_{h_1}$  den Punkt  $p$  auf  $q$  abbildet. Sei  $h_2$  das Lot zu  $g$  durch  $q$ . Dann ist  $s_{h_2} s_{h_1}(g) = g$ ,  $s_{h_2} s_{h_1}(p) = q$ ,  $s_{h_2} s_{h_1}$  erhält die Halbebenen von  $g$  und die Ordnungsrelation  $\leq_g$ . Also muss  $s_{h_2} s_{h_1} = v_{pq}$  sein.  $\square$

**Lemma V.5.5.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine fasteuklidische Geometrie. Sei  $g \in G$ . Dann ist die Gruppe  $V_g$  der Verschiebungen längs  $g$  isomorph zu  $\mathbb{R}$  als Gruppe mit der Addition.*

*Beweis.* Wir konstruieren schrittweise einen solchen Isomorphismus  $\Phi: g \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieser Isomorphismus wird am Ende nicht eindeutig sein – die Freiheit besteht darin, dass man einer Verschiebung (die nicht die Identität ist), den Wert 1 zuordnet.

Sei  $v \in V_g$  mit  $v \neq \text{id}$ . Da  $v$  die Halbebenen von  $g$  erhält, gibt damit ein  $p \in g$  mit  $v(p) \neq p$ . O.B.d.A. sei  $p \leq_g v(p)$  für  $p \in g$  Setze  $\Phi(v) := 1$ .

Es ist  $v^n \mapsto n \in \mathbb{Z}$  eine Gruppenisomorphismus von  $\{v^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  mit  $\mathbb{Z}$ : Man muss Wohldefiniertheit überprüfen. Dann folgt der Rest direkt. Dazu sei  $v^n = v^m$ , o.B.d.A.  $n > m$ , und damit  $v^{n-m} = \text{id}$ . Es ist  $p \leq_g v(p) \leq_g v^2(p) \leq_g \dots \leq_g v^{n-m}(p) = p$ . D.h. es musste schon Gleichheit und damit  $p = v(p)$  gelten, was den Widerspruch gibt.

Wir setzen  $\Phi(v^n) := n$ .

Nach Lemma V.5.2 gibt es eine Verschiebung  $\tau$  längs  $g$  mit  $\tau^2 = v$ . Wir betrachten die Untergruppe  $U = \{\rho \in V_g \mid \exists n, m \in \mathbb{N} : \rho^{2^m} = v^n\}$  von  $K_g$ . Es ist  $v^n \in U$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Auf diesen Elementen haben wir  $\Phi$  schon definiert und  $\Phi$  setzt sich nun die Forderung  $\Phi(\rho) = n 2^{-m}$  eindeutig auf  $U$  zu einem Gruppenhomomorphismus fort. das Bild  $\Phi(U)$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ .

Wir wollen nun  $\Phi$  auf ganz  $V_g$  fortsetzen. Dazu sei  $w \in V_g \setminus U$ . Wir betrachten  $U_w = \{u \in U \mid u(p) \leq_g w(p)\}$ . (Dann ist  $u(q) \leq_g w(q)$  für alle  $q \in g$ .) Da  $g$

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

die Supremumseigenschaft hat, hat auch die induzierte totale Ordnung auf  $V_g$  die Supremumseigenschaft und existiert  $\sup \Phi(\tilde{U})$ . Wir setzen  $\Phi(w) = \sup \Phi(U_w)$ . Damit erhält  $\Phi$  auch die Ordnung und ist surjektiv, da  $\{n2^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$  in  $\mathbb{R}$  dicht liegt. Es bleibt noch zu überprüfen, dass  $\Phi$  die Gruppenwirkungen erhält und damit ein Gruppenhomomorphismus ist: Sei  $w, z \in V_g$ . Dann ist  $U_w U_z = U_{wz} \subset$  folgt durch: Sei  $u \in U_w$  und  $r \in U_z$ . Dann ist  $u(v(p)) \leq_g w(v(p)) \leq_g w(z(p))$ .  $\sup$  folgt durch: Sei  $u \in U_{wz}$  und  $r \in U_w$ . Dann gilt  $r^{-1}u(p) \leq_g r^{-1}(w(z(p))) \leq_g z(p)$ , also  $r^{-1}u \in U_z$ . Aus  $U_w U_z = U_{wz}$  und  $\Phi$  Gruppenhomomorphismus auf  $U$  folgt somit  $\Phi(wz) = \sup \Phi(U_w U_z) = \sup \Phi(U_w) \Phi(U_z) = \Phi(w) \Phi(z)$ .  $\square$

Da die letzte Konstruktion eindeutig war bis auf Wahl von  $\Phi^{-1}(1)$ , erhalten wir direkt:

**Folgerung V.5.6.** *Sei  $(P, G, \mathcal{A}, K)$  eine fasteuklidische Geometrie. Sei  $g \in G$  und  $x_0 \in g$ . Sei  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $V_g$  zu  $\mathbb{R}$  wie im letzten Lemma. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V_g &\rightarrow V_g \\ (\lambda, v) &\mapsto \Phi^{-1}(\lambda \Phi(v)) \end{aligned}$$

*unabhängig von der Wahl von  $\Phi$  und wird skalare Multiplikation genannt.*

Für festes  $p \in g$  ist durch die Abbildung  $V_g \rightarrow g$ ,  $v \mapsto v(p)$ , damit auch  $g$  isomorph zu  $\mathbb{R}$  mit  $p = \text{id}(p)$  als neutrales Element der Addition.

## V.6. Euklidische Ebene

Wir wollen nun im gesamten Abschnitt fasteuklidische Geometrien mit dem Parallelaxiom (P), vgl. Abschnitt V.2, betrachten. Dies sei die Voraussetzung für alle folgenden Sätze. Ziel wird es sein, so sehen, dass wir dann schon die euklidische Ebene haben. Durch (P) ist das der Punkt, wo die hyperbolische Ebene hier ausgeschlossen wird.

Zuerst halten wir fest: Zwar sagt (P) nur, dass es zur einer Geraden und einen Punkt höchstens eine parallele Gerade durch diesen Punkt gibt. Aber nach Lemma V.4.13.iv wissen wir, dass es mindestens eine solche Parallele gibt. D.h. es gilt dann automatisch schon das strenge Parallelenaxiom (PE).

**Lemma V.6.1.** *Ist  $g \parallel h$ , dann ist  $V_g = V_h$  und die skalare Multiplikation aus Folgerung V.5.6 ist auf  $V_g$  und  $V_h$  die gleiche Abbildung.*

*Beweis.* Da Parallelität symmetrisch ist, reicht es  $V_g \subset V_h$  zu zeigen: Sei  $v \in V_g$ . Dann ist nach Folgerung V.5.4  $v = s_{h_2} s_{h_1}$  für  $h_i \perp g$ . Sei  $p = h_1 \cap h$ . Dann ist das Lot zu  $h_1$  durch  $p$  parallel zu  $g$  nach Lemma V.4.13.iv. Nach dem Parallelenaxiom muss dieses Lot schon  $h$  sein. Also ist  $h_1 \perp h$ . Analog sieht man  $h_2 \perp h$ . Damit ist  $v = s_{h_2} s_{h_1} \in V_h$  und somit  $V_g \subset V_h$ .  $\square$

Dass die skalare Multiplikation von Folgerung V.5.6 auch unabhängig von der Wahl der Parallelen ist, folgt über die Isomorphie  $V_g \rightarrow g$ .

**Folgerung V.6.2.** *Verschiebungen (die nicht schon die Identität sind) haben keine Fixpunkte. Außerdem bildet eine Verschiebung jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade ab.*

*Beweis.* Sei  $v \in V_g$  für ein  $g \in G$ . Sei  $y \in P$ . Dann gibt es eine Gerade  $h$  durch  $y$ , die parallel zu  $g$  ist. Nach letztem Lemma ist dann  $v \in V_h$ . Nach Bemerkung V.4.16 kann  $v$  auf  $h$  aber keine Fixpunkte haben, also ist  $y$  kein Fixpunkt. Da  $y$  beliebig war, folgt die erste Behauptung.

Sei nun  $h \in G$  und  $w \in V_g$  eine Verschiebung (für ein  $g \in G$ ). Ist  $w$  die Identität, dann ist  $w(h) = h$  und damit insbesondere parallel zu  $h$ . Sei nun  $w \neq \text{id}$ . Angenommen  $w(h) \not\parallel h$ . Dann gibt es  $y \in w(h) \cap h$ . Sei  $\ell$  die Parallele zu  $g$  durch  $y$ . Dann ist insbesondere  $w \in V_\ell$ . Da Kongruenzabbildungen Geraden erhalten, muss  $w(y) \in \ell \cap w(h)$  sein. Da schon  $y \in w(h)$  ist und  $w(h) \neq \ell$  ist, muss  $y$  ein Fixpunkt von  $w$  sein. Das ist ein Widerspruch zur ersten Aussage dieser Folgerung. Also ist  $w(h) \parallel h$ .  $\square$

**Lemma V.6.3.** *Sei  $\vec{P} \subset K$  die Menge aller Verschiebungen entlang aller Geraden. Dann ist  $\vec{P}$  eine kommutative Untergruppe von  $K$ . Zusammen mit der skalaren Multiplikation aus Folgerung V.5.6 ist  $\vec{P}$  ein zweidimensionaler reeller Vektorraum.*

*Beweisskizze.* Sei  $x \in P$ . Aufgrund des letzten Lemmas und der Existenz einer Parallelen zu irgendeiner Gerade durch  $x$  reicht es sich Verschiebungen entlang Geraden durch  $x$  anzuschauen. Seien  $v$  und  $w$  Verschiebungen entlang zweier Geraden  $g$  bzw.  $h$  durch  $x$ .

Wir zeigen als erstes die Kommutativität, also das  $vw = wv$  gilt: Ist eine der beiden Verschiebungen, die Identität, dann ist diese Gleichheit wahr. Auch wenn  $g = h$  ist, stimmt diese Gleichheit nach Lemma V.5.5. Wir können also annehmen, dass beide nicht die Identität sind (und damit auch keine Fixpunkte besitzen) und dass  $g \neq h$  ist. Sei  $g' := w(g)$ . Nach letztem Lemma gilt  $g' \parallel g$ . Analog ist  $h' := v(h)$  die Parallele zu  $h$  durch  $v(x)$ . Der Bildpunkt  $v(w(x))$  liegt also auf der Geraden  $g' \cap h'$ . Analog liegt  $w(v(x))$  auf  $g'$  und  $h'$ . Wegen  $g \neq h$ , ist  $g' \neq h'$  und damit  $v(w(x)) = w(v(x))$ .

Als nächstes wollen wir sehen, dass  $vw$  selbst wieder eine Verschiebung ist und zwar die Verschiebung  $v_{xy}$  mit  $y = v(w(x)) \in g' \cap h'$ : Sei  $z \in g_{xy}$ . Da wir schon wissen dass Verschiebungen kommutieren, gilt  $v(w(z)) = v(w(v_{xz}(x))) = v_{xz}(v(w(x))) = v_{xz}(y) \in g_{xz} = g_{xy}$ . D.h.  $vw$  erhält  $g_{xy}$ . Ebenso kann man sich überlegen, dass  $vw$  die Halbebenen und die Anordnung von  $g_{xy}$  erhält (führen wir hier nicht aus).

Damit ist  $\vec{P}$  eine kommutative Untergruppe. Die zugehörige Verknüpfung (also die Hintereinanderausführung) wird jetzt im folgenden mit  $+$  (also wie bei den Vektorraumaxiomen bezeichnet), um sie leichter von der skalaren Multiplikation zu unterscheiden.

Für die Vektorraumstruktur, muss nur noch überprüft werden  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $v, w \in \vec{P}$ : Für  $\lambda \in \mathbb{Z}$  folgt, dass direkt da die Verschiebungen eine kommutative Gruppe bilden. Dann geht man ähnlich vor wie in Lemma V.5.5: Man benutzt Lemma V.5.2 und erhält mit der Konstruktion  $z^n = v$  etc. diese Struktur für alle  $\lambda \in n2^{-m}$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ . Der Rest folgt dann wieder über Supremum und der Dichtigkeit dieser  $\lambda$  in ganz  $\mathbb{R}$ .

## V. Axiomatik der euklidischen Geometrie

Damit ist  $\vec{P}$  ein reeller Vektorraum. Die Zweidimensionalität folgt mit Axiom von Pasch, da dieses im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 2$  nicht gilt, und (I3), da dieses für  $\mathbb{R}$  nicht gilt.  $\square$

**Satz V.6.4.** (*Euklidische Ebenen*) Je zwei fasteuklidische Geometrien mit Parallelenaxiom (P) trägt die Struktur eines zweidimensionalen reellen Vektorraums.

*Beweis.* Wir fixieren einen Punkt  $p$  und definieren die Abbildung

$$\Psi: \vec{P} \rightarrow P, \quad v \mapsto v(p).$$

Das ist eine bijektive Abbildung. Damit können wir die Vektorraumstruktur des zweidimensionalen Vektorraums  $\vec{P}$  auf  $P$  übertragen. Nach Konstruktion sind Geraden bzgl. dieser Vektorraumstruktur auch die Geraden in der fasteuklidischen Geometrie, genauso bleibt die Anordnungsstruktur erhalten.  $\square$

Wie schon erwähnt, wurde die Notwendigkeit des Parallelenaxioms für die euklidische Geometrie war lange nicht klar und wurde seit Euklid diskutiert. Es wurden zuerst äquivalente Axiome zum Parallelenaxiom gefunden. D.h. ersetzt man (P) durch ein solches äquivalentes Axiom ist die Geometrie, z.B.:

- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte ( $= 180^\circ$ ).
- Es gibt Rechtecke.
- Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebiger Größe.
- Stufenwinkel an Parallelen sind gleich groß.
- Durch einen Punkt im Inneren eines Winkels gibt es stets eine Gerade, die die beiden Schenkel schneidet.

Die hyperbolische Geometrie ist eine fasteuklidische Geometrie. Auch diese Geometrie lässt sich axiomatisch eindeutig (bis auf Isomorphie) beschreiben, indem man die gleiche Axiomatik wie für die euklidische Ebene verwendet; jedoch wird das Axiom (P) durch das folgende ersetzt:

- (H) (Hyperbolisches Parallelenaxiom) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es mindestens zwei Geraden  $h$  durch  $p$  mit  $g \cap h = \emptyset$ .

		Man kann definieren	und hat (u.a.) die Eigenschaften
<b>Inzidenzgeometrie</b>	$\mathcal{I} = (P, G)$ , $P$ Menge, $G \subset \mathcal{P}(P)$ (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade. (I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte. (I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte		
<b>angeordnete Inz.geo</b>	totalen Ordnung $\leq_g$ für alle $g \in G$ und (A) Axiom von Pasch	Strecke, Strahl/Halbgerade  auf der selben Seite von $p \in g$ auf $g \in G$ liegen auf der selben Seite einer Geraden $g \in G$ liegen	ist eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen ist eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen
+ <b>Kongruenzgruppe</b>	eine Untergruppe $K$ der Gruppe der Isomorphismen von $(P, G, \mathcal{A})$ , so dass es für je zwei Halbgeraden genau zwei Elemente von $K$ gibt, die den eine Halbgerade in die andere überführen.	Spiegelungen  senkrecht stehen /Lote Verschiebungen Kongruenz von Strecken, Winkeln, Dreiecken	-Halbgeraden haben unendliche viele Punkte - Fixpunktmenge v. Spiegelungen ist eine Gerade - Spiegelungen vertauschen Halbebenen - Existenz von Parallelen - Verschiebungen sind Untergruppe der Kongruenzgruppe - (SSS), (SWS), (WSW)
+ <b>Supremumseigenschaft</b> (= fast-euklidische Geometrie)	Jede nichtleere beschränkte Teilmenge einer Gerade $g$ hat ein Supremum bzgl. $\leq_g$		-Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Spiegelung, die beide Punkte vertauscht. - Es gibt Mittelpunkte von Strecken. - Jede Verschiebung ist von der Form $s_h s_g$ mit $h \parallel g$ . - Verschiebungen entlang $g \in G$ bilden additive Gruppe isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ mit einer skalaren Multiplikation.
+ <b>Parallelaxiom</b> (= euklidische Ebene)	(P) Für alle $g \in G, p \notin g$ gibt es höchstens eine zu $g$ parallele Gerade durch $p$		- zweidimensional reeller Vektorraum





# Literaturverzeichnis

- [1] GROSSE, N. Analysis I, Skript, WS 2020/21, Uni Freiburg.  
[https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1\\_WS-2021\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_Skript.pdf)
  
- [2] SOERGEL, W. Elementargeometrie, Skript, Uni Freiburg.  
<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXEL.pdf>,  
Version 25.4.24
  
- [3] HUBER-KLAWITTER, A. Elementargeometrie, Skript SoSe 22, Uni Freiburg.  
<https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss22/elementargeometrie/elgeom22.pdf>, Version 26.7.22