Blatt 04

Hannes Rall

Albert-Ludwigs-University

21. Mai 2025

Aufgabe 11

(i)

Sei pqr ein Dreieck mit $\angle pqr = \frac{\pi}{2}$. Seien $\vec{a} = r - q$, $\vec{b} = r - p$ und $\vec{c} = q - p$.

(a)

Nach der Definition für Winkel, ist $\angle qpr = \arccos\left(\frac{\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}\right) \Leftrightarrow \cos(\angle qpr) = \frac{\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$
Es gilt $\vec{a} + \vec{c} = r - q + q - p = r - p = \vec{b}$.
Nun folgt

$$\begin{aligned}
\cos(\angle qpr) &= \frac{\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{\langle\vec{b},\vec{c}\rangle^2}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{\langle\vec{a}+\vec{c},\vec{c}\rangle^2}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} \\
&= \frac{\sqrt{(\langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{c},\vec{c}\rangle)^2}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{\langle\vec{c},\vec{c}\rangle^2}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{|\vec{c}|}^2}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{|\vec{c}|^2}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|} \\
&= \frac{d(p,q)}{d(p,r)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
d(p,r)^2 &= \langle\vec{b},\vec{b}\rangle = \langle\vec{a}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{a}\rangle + 2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{c},\vec{c}\rangle \\
&= \langle\vec{a},\vec{a}\rangle + \langle\vec{c},\vec{c}\rangle = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}^2 + \sqrt{\langle\vec{c},\vec{c}\rangle}^2 \\
&= d(p,q)^2 + d(q,r)^2
\end{aligned}$$

(c)

Wir wissen, dass $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$
und somit $\sin(x) = \pm\sqrt{(1 - \cos(x)^2}$. Nun nutzen wir (a):

$$\begin{aligned}
\sin(\angle qpr) &= \pm\sqrt{1 - \cos(\angle qpr)^2} = \pm\sqrt{\frac{d(p,r)^2}{d(p,r)^2} - \frac{d(p,q)^2}{d(p,r)^2}} = \pm\sqrt{\frac{d(r,q)^2}{d(p,r)^2}} \\
&= \pm\frac{d(r,q)}{d(p,r)}
\end{aligned}$$

(ii)

Gegeben seien zwei Strahlen durch einen Punkt Z, die die Geraden g_1 und g_2 in den Punkten A, B bzw. C, D schneiden. Es gelte:

$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZC|}{|ZD|}$$

Zu zeigen: $g_1 \parallel g_2$.
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, g_1 und g_2 sind *nicht* parallel. Dann gibt es durch C eine Parallele h zu g_1, die den zweiten Strahl in einem Punkt D' schneidet. Nach dem ersten Strahlensatz gilt für diese Parallele:

$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZC|}{|ZD'|}$$

Wegen der Voraussetzung gilt aber auch:

$$\frac{|ZA|}{|ZB|} = \frac{|ZC|}{|ZD|}$$

Also ist $|ZD| = |ZD'|$, d. h. $D = D'$. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass g_2 und h verschieden sind.

Folgerung: Die Annahme war falsch, also sind g_1 und g_2 parallel.

Aufgabe 12

(i)

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$, dann gilt der Satz des Pythagoras, also $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$. Nun ist

$$\begin{aligned}
|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 &\Leftrightarrow \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \vec{b}, \vec{b} - \vec{a} \rangle + \langle -\vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - 2 \cdot \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\
&\Leftrightarrow -2 \cdot \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0
\end{aligned}$$

Wenn also $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq 0$, dann ist $\vec{a}$ nicht senkrecht zu $\vec{b}$.

(ii)

Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

mit $k \in \mathbb{R}$.
Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \cdot (ka_1) + a_2 \cdot (ka_2) + a_3 \cdot (ka_3) \\
&= k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
&= k\,(\vec{a} \cdot \vec{a}) \\
&= k\,|\vec{a}|^2
\end{aligned}$$

Längen der Vektoren:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2} = |k|\,|\vec{a}|$$

Produkt der Längen:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |k|\,|\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|^2$$

Somit ist für $k > 0$ das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich dem Produkt ihrer Längen. Für $k < 0$ ist das Skalarprodukt plus das Produkt ihrer Längen gleich 0.

(ii)

Ich begründe auf Schulniveau, da man es ja Schülern erklären soll.

(a)

Wenn man den Vektor $\vec{b}_{\parallel}$ nach oben verschiebt, so sieht man, dass $\vec{b} = \vec{b}_{\perp} + \vec{b}_{\parallel}$. Setz man nun für $\vec{b}$ ein, erhält man: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}_{\perp} + \vec{b}_{\parallel})$

(a)

Das ist die Begründung warum das Skalarprodukt distributiv ist:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

Und somit ist $\vec{a} \cdot (\vec{b}_{\perp} + \vec{b}_{\parallel}) = \vec{a} \cdot \vec{b}_{\perp} + \vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel}$

(b)

Hab keine Zeit mehr...

(c)

Das Skalarprodukt gibt die Maßzahl des Flächeninhalts eines Rechtecks an, dessen Seitenlängen die Länge eines Vektors und die Länge der Projektion des anderen Vektors sind