Blatt 06

Hannes Rall

Albert-Ludwigs-University

3. Juni 2025

Aufgabe 17

Sei ABCD ein Viereck (Punkte gegen den Uhrzeigersinn benannt) mit |AB| = |CD|. Sei E bzw. F der Mittelpunkt von AD bzw. BC. Die Geraden g_{CD} und g_{FE} schneiden sich in G und g_{AB} und g_{FE} in H.

Gegeben seien die Ortsvektoren der Punkte:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{OD}$$

Die Mittelpunkte:

$$\vec{e} = \overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}, \qquad \vec{f} = \overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

Zuerst zeige ich zwei Dinge, das macht den Beweis später übersichtlicher.
(1) Die Bedingung $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{d}-\vec{c}|^2$ liefert:

$$\begin{aligned} &(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = (\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c}) \\ \Leftrightarrow\ & \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{d}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{d}\cdot\vec{d} + 2\vec{c}\cdot\vec{d} - \vec{c}\cdot\vec{c} = 0 \end{aligned}$$

(2) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ mit:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{f} - \vec{e} \\ \vec{v} &= \vec{f} - \vec{c} - \vec{e} + \vec{d} \end{aligned}$$

Berechne zunächst $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{d}}{2}$$

Berechne $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{c}\right) - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \vec{d} \\ &= \frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \vec{d} \\ &= \frac{\vec{b}-\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + \vec{d} \\ &= \frac{\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}-\vec{d}+2\vec{d}}{2} \\ &= \frac{\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{d}}{2} \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \left\langle \frac{\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{d}}{2}, \frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{d}}{2} \right\rangle = \frac{1}{4}\langle \vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{d},\ \vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{d} \rangle$$

Setze $X = \vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{d}$ und $Y = \vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{d}$, dann:

$$
\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &= (\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{d})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{d}) \\
&= \vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{d} \\
&\quad -\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{d} \\
&\quad -\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{d} \\
&\quad +\vec{d}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{a}-\vec{d}\cdot\vec{d}
\end{aligned}
$$

Fasse gleichartige Terme zusammen:

$$
\begin{aligned}
&\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{d}\cdot\vec{d} \\
&-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{c}\cdot\vec{d})
\end{aligned}
$$

Umgestellt und (1) verwenden:

$$\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}=0$$

Das ist genau der Ausdruck für das Skalarprodukt $\langle X, Y\rangle$.
Also:

$$\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

$$\langle \vec{f}-\vec{c}-\vec{e}+\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle = 0$$

Nun zum eigentlichen Beweis. Ich verwende, dass $\angle BHF$ der Winkel ist, der von den Geraden g_{AB} und g_{FE} eingeschlossen wird (analog $\angle CGF$) und so können wir über die Richtungsvektoren der Geraden die Winkel bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\cos(\angle BHF) &= \frac{\langle \vec{b}-\vec{a}, \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}+2(\vec{f}-\vec{e})-(\vec{d}+2(\vec{e}-\vec{d})), \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}+2(\vec{f}-\vec{c})-2(\vec{e}-\vec{d}), \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle + \langle 2(\vec{f}-\vec{c})-2(\vec{e}-\vec{d}), \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle + 2\langle (\vec{f}-\vec{c})-(\vec{e}-\vec{d}), \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle + 2\langle \vec{f}-\vec{c}-\vec{e}+\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{b}-\vec{a}||\vec{f}-\vec{e}|} = \frac{\langle \vec{c}-\vec{d}, \vec{f}-\vec{e}\rangle}{|\vec{c}-\vec{d}||\vec{f}-\vec{e}|} = \cos(\angle CGF)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 18

(i)

Günther Malle beschreibt verschiedene Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schüler beim Erlernen des Vektorbegriffs zeigen:

- **Identifikation von Vektoren mit Pfeilen:** Viele Lernende setzen Vektoren mit konkreten Pfeilen gleich. Sie erkennen nicht, dass ein Vektor unabhängig vom Ort des Pfeils im Raum ist, sondern betrachten Pfeile an verschiedenen Orten als unterschiedliche Objekte.
- **Geometrische statt algebraische Sichtweise:** Vektoren werden überwiegend als geometrische Objekte (Pfeile) verstanden und weniger als abstrakte Zahlenpaare oder -tripel, was zu Unsicherheiten bei algebraischen Operationen führt.
- **Probleme mit dem Nullvektor:** Der Nullvektor wird oft nur als Punkt (z. B. Ursprung) interpretiert und nicht als Pfeil mit der Länge Null.
- **Formalisierung von Sachproblemen:** Während Standardrechenverfahren meist beherrscht werden, fällt es schwer, reale Problemsituationen eigenständig vektoriell zu modellieren.

Genannte Gründe:

- Der Unterricht orientiert sich häufig am Pfeilklassenmodell, das Vektoren als Äquivalenzklassen paralleler, gleichlanger und gleich orientierter Pfeile definiert. Diese Abstraktion ist für viele Lernende schwer zugänglich.
- Es fehlt oft eine klare Unterscheidung zwischen Punkten (Ortsvektoren) und Richtungsvektoren, was zu Missverständnissen und fehlerhaften Schreibweisen führt.

(ii)

Definition der Äquivalenzrelation:
Wir betrachten die Menge aller geordneten Punktpaare (A, B) einer Ebene.
Zwei Punktpaare (A, B) und (C, D) heißen zueinander *äquivalent*, wenn gilt:

1. Die Strecken AB und CD sind parallel,
2. $|AB| = |CD|$ (gleiche Länge),
3. Die Orientierung von AB und CD ist gleich (d. h. die Pfeile zeigen in die gleiche Richtung).

Beweis, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt:

- **Reflexivität:** Für jedes Punktpaar (A, B) gilt offensichtlich $(A, B) \sim (A, B)$.
- **Symmetrie:** Gilt $(A, B) \sim (C, D)$, so sind AB und CD parallel, gleich lang und gleich orientiert; somit gilt auch $(C, D) \sim (A, B)$.
- **Transitivität:** Gilt $(A, B) \sim (C, D)$ und $(C, D) \sim (E, F)$, so sind AB, CD und EF alle parallel, gleich lang und gleich orientiert, also $(A, B) \sim (E, F)$.

Definition der Pfeilklasse:
Die *Pfeilklasse* eines Punktpaares (A, B) ist die Menge aller Punktpaare (X, Y), für die $(A, B) \sim (X, Y)$ gilt. Formal:

$$[(A, B)] := \{(X, Y) \mid (A, B) \sim (X, Y)\}$$