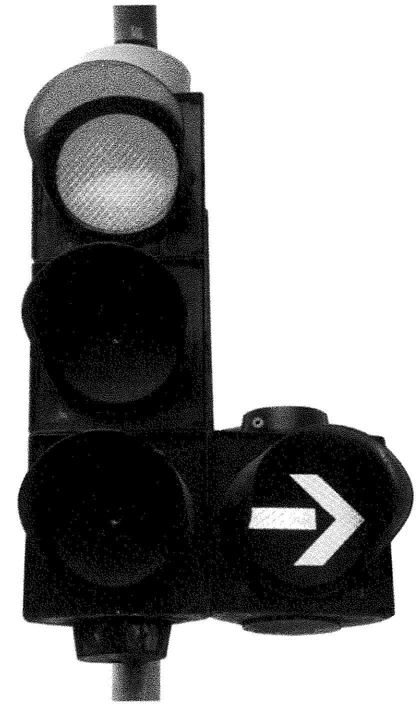


Foto: bilderbox

■ SEKUNDARSTUFE I/II
9.–13. Schuljahr

Schwierigkeiten mit Vektoren

Vektoren scheinen für uns Lehrerinnen und Lehrer eine klare Sache zu sein. Aber was stellen sich die Schülerinnen und Schüler darunter vor?

Günther Malle

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Wien
E-Mail: guenther.malle@univie.ac.at

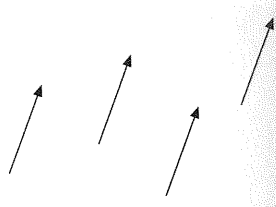
Mit dem Ziel, die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu Vektoren und zur Analytischen Geometrie zu erforschen, haben wir im letzten Jahrzehnt zahlreiche schriftliche Befragungen und mündliche Interviews an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien durchgeführt. (Insgesamt wurden ca. 700 Schülerinnen und Schüler erfasst, die Ergebnisse liegen in Form von Diplomarbeiten vor.) Dabei wurden einerseits ziemlich unerwartete Vorstellungen der Befragten sichtbar, andererseits ließen sich aber auch die Auswirkungen eines undurchdachten Vektorkonzepts und anderer unterrichtlicher Mängel erkennen. Von der Fülle der Resultate kann hier klarerweise nur ein winziger Ausschnitt wiedergegeben werden. Ich möchte damit erreichen, Sie als Leserinnen und Leser für solche Fragen zu sensibilisieren und Sie anzuregen, derartige Befragungen vielleicht auch in den eigenen Klassen durchzuführen.

Die im Folgenden vorgestellten Ausschnitte stammen aus Interviews mit 15-jährigen Schülerinnen und Schülern der Gymnasien. Man beachte dabei, dass in Österreich die Vektorrechnung und Analytische Geometrie in den Klassenstufen 9 bis 12 unterrichtet wird. Alle interviewten Schülerinnen und Schüler hatten die untersuchten Inhalte im Unterricht bereits kennen gelernt. Vektoren wurden dabei als Pfeilklassen eingeführt, gearbeitet wurde anschließend jedoch vorwiegend mit Zahlenpaaren, Zahlentripeln usw., die ebenfalls als „Vektoren" bezeichnet wurden.

Schwierigkeiten mit Pfeilklassen

Die Probleme der Schülerinnen und Schüler liegen im Allgemeinen in dem unaufgeklärten Widerspruch, dass Vektoren im Unterricht als Pfeilklassen eingeführt wurden, beim praktischen Gebrauch jedoch als Einzelpfeile aufgefasst werden. Betrachten wir dazu den folgenden Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra (15):

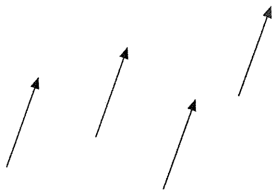
I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?
A: Einen Pfeil in einem Raum.
I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile." Was sagst du dazu?



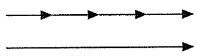
A: Stimmt nicht!
I: Warum?
A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.
I: Was ist für dich ein Vektor?
A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?
A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Ein ähnlicher Ausschnitt aus dem Interview mit Richard (15):

I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile." Was sagst du dazu?

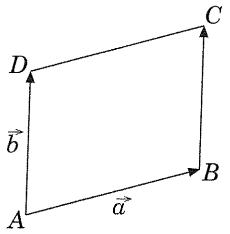


R: Diese vier Vektoren kann man aneinander reihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.
I: Bitte zeichne das auf!
R (fertigt eine Zeichnung an);



Alle befragten Schülerinnen und Schüler zeigten eine deutliche Aversion gegen Pfeilklassen. Bei manchen hatte man den Eindruck, dass sie sich eine solche Klasse als Denkobjekt, mit dem man operieren kann, gar nicht vorstellen konnten, weil ihnen das zu abstrakt war.

Die Identifikation eines Vektors mit einem Einzelpfeil zieht nun einige Folgeprobleme nach sich. Wenn wir in einem Parallelogramm $ABCD$ die Gleichung $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ anschreiben, ergibt sich das Problem, wieso zwei offenkundig verschiedene Pfeile einander gleich sind. Dazu ein weiterer Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra:



A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ … Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?

A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

Merken Sie den Widerspruch in diesem Interviewausschnitt? Einerseits sagt Alexandra, dass $\overrightarrow{BC}$ eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$ ist, andererseits sagt sie, dass man nicht $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ setzen kann. Dieser Widerspruch wurde für Alexandra vermutlich nie aufgeklärt; sie muss damit leben. Angesichts solcher begrifflicher Verwirrungen darf man sich aber auch über die folgende Antwort von Michaela (15) nicht wundern:

I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

M: Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

Die algebraische Auffassung von Vektoren

Die Identifikation eines Vektors mit einem Pfeil sitzt bei manchen Schülern so tief, dass sie diese Assoziation auch dann heranziehen, wenn sie absolut nicht passend ist. Kommt in einer Aufgabe das Wort „Vektor“ vor, wird sozusagen der Knopf auf „Geometrie“ gestellt und gar nicht mehr gefragt, ob dies auch sinnvoll ist.

Wir haben beispielsweise gefragt, ob die Vektoren (150|70) und (70|150) gleich oder verschieden sind. Kaum jemand hat mit der paarweisen Übereinstimmung der Koordinaten argumentiert. Die meisten haben die Vektoren aufgezeichnet und erst nach Fertigstellung der Zeichnung geantwortet, dass die beiden Vektoren verschieden seien. Dazu ein bezeichnender Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra (15):

1

Welche Vorstellung haben die Lernenden von Vektoren?

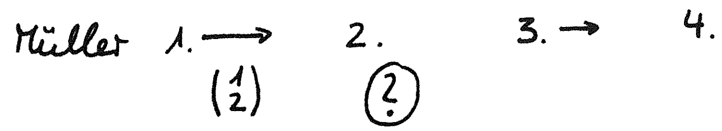
▶ **Aufgabe**
Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)
4. Spiel: Kaiser (4)

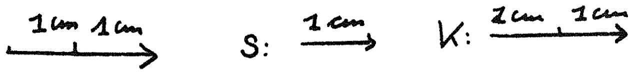
Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Einige Lösungsbeispiele

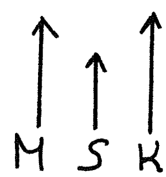
Richard (15)



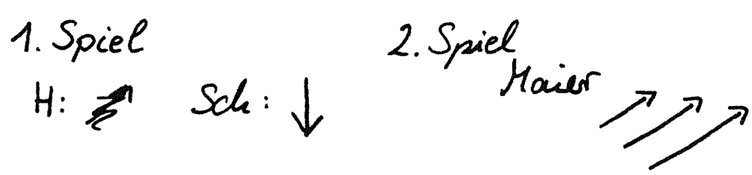
Alexandra (15)



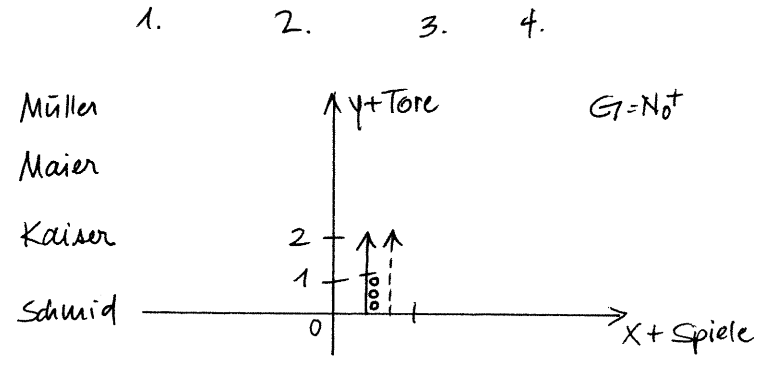
Sandra (15)

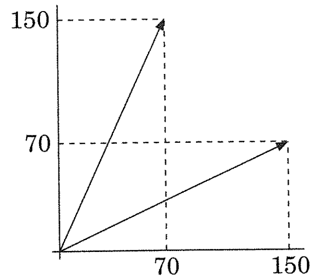


Natascha (15)



Christian (15)





I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du dies auch ohne Zeichnung begründen?
A: Nein!

Einige der Befragten haben zunächst behauptet, dass die Vektoren gleich wären, weil sie die gleichen Zahlen beinhalten. Nach Anfertigung einer Zeichnung behaupteten sie jedoch das Gegenteil.

Schlimmer noch waren die Ergebnisse bei der Aufgabe in **Kasten 1**, Seite 17. Mag sein, dass diese Aufgabe etwas gekünstelt wirkt (eine Tabelle wäre hier wahrscheinlich eine angemessenere Darstellung). Aber darum geht es hier nicht. Die Aufgabe sollte dazu dienen, festzustellen, ob die befragten Schülerinnen und Schüler mit dem Wort „Vektor" eher etwas Algebraisches oder eher etwas Geometrisches verbinden.

Die Ergebnisse waren überraschend. Obwohl alle Befragten im Unterricht ausgiebig mit Zahlenquadrupeln gearbeitet hatten und diese Objekte beim praktischen Arbeiten auch immer wieder als „Vektoren" bezeichnet wurden, hat kein einziger ein Quadrupel von Zahlen hingeschrieben, sondern alle haben versucht, den einzelnen Fußballern irgendwelche Pfeile zuzuordnen (s. Kasten 1). Christians Darstellung soll wohl eine Art Stabdiagramm sein.

Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

Wenn sie danach gefragt wurden konnten die meisten Schülerinnen und Schüler ein Zahlenpaar als Punkt deuten. Forderte man sie jedoch auf, ein Zahlenpaar als Pfeil zu deuten, gab es manchmal Schwierigkeiten. Dazu ein Ausschnitt aus dem Interview mit Natascha (15):

N: (3|4) sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.
I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?
N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

Natascha ist offensichtlich der Meinung, dass man einen Pfeil nur durch Angabe der Koordinaten seines Anfangs- und Endpunktes angeben könne.

Ein Ausschnitt aus dem Interview mit Christian (15):

I: Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?
Ch: So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil.
Wenn (3|4) da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Dies haben wir des Öfteren beobachtet. Wurde es möglicherweise so unterrichtet? (Wenn dies da und dort üblich sein sollte, dann sollte man dieses nicht sinnvolle Vorgehen überdenken.)

Schwierigkeiten mit dem Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Grenzfall eines Vektors. Er entspricht einem entarteten Pfeil der Länge 0. Aber ein Pfeil der Länge 0 ist kein Pfeil mehr, sondern ein Punkt. Weil viele Schülerinnen und Schüler einen Vektor mit einem Pfeil identifizieren, ist somit der Nullvektor kein Vektor. Dazu zunächst ein Ausschnitt aus dem Interview mit Kathi (15):

Kathi schreibt: $0 \cdot \vec{a} = \binom{0}{0}$.
K: Dann ist es ein Punkt.
I: Dann ist es ein Punkt?
K: Ja, der Nullpunkt.
I: Kann es auch ein Pfeil sein?
K: Nein!
I: Warum nicht?
K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.
I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann.
K: Ja.

Ein Ausschnitt aus dem Interview mit Daniel und Christoph (beide 15), in dem es um den Vektor $r \cdot \vec{a}$ geht:

I: Und wenn $r = 0$?
D: Dann gibt's den Vektor nicht.
Ch: Es ist der Nullpunkt.
I: Es ist der Nullpunkt?
Ch: Ja.
D: … Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor!!!! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft … Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

Daniel ist ganz verwirrt. Liegt der Nullvektor jetzt im Ursprung oder kann er auch woanders liegen? Er schwankt zwischen diesen beiden Auffassungen hin und her. Sein Problem kann man prägnant so beschreiben: Der Nullvektor (0|0) ist ein zur Länge 0 entarteter Pfeil, also ein Punkt. Der Punkt (0|0) liegt aber im Ursprung. Wie kann er da woanders liegen?

Learning without Understanding

Dieses geflügelte Wort stammt aus der Didaktik der elementaren Algebra und geht auf P. C. Rosnick und J. Clement zurück. Diese haben als erste nachgewiesen, dass viele Menschen Variablen benutzen, ohne zu verstehen, wie diese in der Mathematik verwendet werden. Diese Beobachtung im Eindimensionalen lässt sich nahtlos im Zweidimensionalen fortsetzen. Viele Schülerinnen und Schüler gebrauchen Vektoren ohne zu verstehen, was sie tun. Dies demonstrieren die folgenden Beispiele zur Parameterdarstellung einer Geraden. Viele der hier vorgestellten Schülerinnen und Schüler konnten die schulüblichen Grundaufgaben zur Parameterdarstellung einer Geraden so recht und schlecht lösen. Doch sehen wir uns an, wie viel Verständnis dahinter liegt.

Ausschnitt aus dem Interview mit Michaela (15):

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?
M: Ja! (sie schreibt:)
$$g = \binom{2}{4} + \lambda\binom{5}{6}$$
Das ist zum Beispiel irgendein Punkt, zum Beispiel (2|4) plus Lambda mal (5|6) ist gleich die Gerade g.
I: Warum stellt das eine Gerade dar?
M: Weiß ich nicht!

2

Wie stellt man eine Formel mit Vektoren auf?

▶ **Aufgabe**
Stelle eine Formel für den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf.

Einige Lösungsbeispiele
Alle Befragten gingen von derselben Skizze aus, schrieben jedoch Unterschiedliches an.

A *M* *B*

Izabela (15): $\frac{A+E}{2}=M$

Florian (15): $M=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Martin (15): $M=\frac{A+\overrightarrow{AB}}{2}$

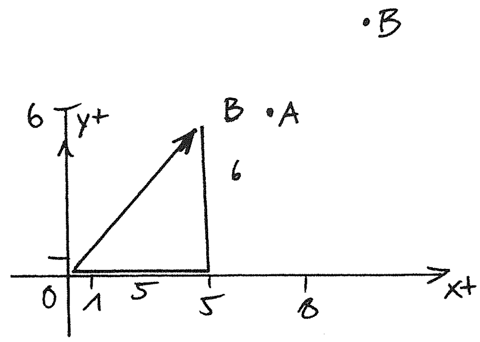
Karin (15): $M=\frac{A-B}{2}$

3

Umgang mit Ortsvektoren

▶ **Aufgabe**
Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $A=(8|7)$, $B=(13|12)$.

Ein Lösungsbeispiel
Christian rechnet richtig: $B-A=(5|6)$. Er zeichnet die Punkte *A* und *B* einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein, stellt aber dann den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Ortspfeil dar:



I: Was bedeutet (5|6)? Ist das auch ein Punkt?
M: Das ist der Parameter.
I: Was ist das Lambda?
M: Das Lambda gehört eben dazu. Da gibt es auch eine Normalform. Die ist halt ohne Lambda.
I: Aber warum stellt das eine Gerade dar?
M: Ich weiß es nicht!

Ausschnitt aus dem Interview mit Florian (15):

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?
F: Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen *X* zu tun. X ist gleich irgendeinem Punkt *A* plus *t* mal $\overrightarrow{AB}$. (Er schreibt:)
$X=A+t\overrightarrow{AB}$
I: Warum stellt das eine Gerade dar?
F: Für *t* kann man auch Lambda schreiben.
I: Warum stellt das eine Gerade dar?
F: Weiß ich nicht.

Vektorformeln aufstellen

Auch die aus der eindimensionalen Algebra bekannten Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Aufstellen von Formeln finden sich im Zweidimensionalen wieder, wie man am Beispiel in **Kasten 2** sieht.

Das Problem der Schülerinnen und Schüler liegt nicht darin, dass sie falsch gedacht hätten. Man spürt, dass sie alle im Prinzip so gedacht haben: „Ich gehe von *A* aus, gebe die Hälfte von $\overrightarrow{AB}$ dazu und komme zu *M*". Sie wissen jedoch nicht, wie sie ihren Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik anschreiben sollen (ein Phänomen, das in analoger Form aus der elementaren Algebra bekannt ist). Allerdings spricht aus den angebotenen Schreibweisen auch ein gewisses Unverständnis des Vektorbegriffs. Wer einigermaßen verstanden hat, was ein Vektor ist und wie man die Addition von Vektoren geometrisch deuten kann, muss bei diesen Schreibweisen stutzig werden. Es fehlt hier etwas, was man mit der „Dimensionskontrolle" der Physiker vergleichen könnte. Zum Beispiel stellt bei Florian die linke Seite einen Punkt, die rechte einen Pfeil dar, das müsste ihn doch stören.

Problem: Ortsvektoren

Die verbreitete Verwendung von „Ortsvektoren" im Unterricht (siehe auch S. 12) hat sich an vielen Interviewstellen schädlich ausgewirkt. Ein Beispiel ist der Lösung der Aufgabe in **Kasten 3**.

Die nächstliegende Veranschaulichung wäre hier wohl gewesen, einen Pfeil von *A* nach *B* zu zeichnen. Dies tut Christian jedoch erst, nachdem ihn der Interviewer dazu auffordert. Offensichtlich schlägt bei ihm in einem unpassenden Moment die im Unterricht praktizierte Gepflogenheit durch, Vektoren als Ortspfeile mit dem Anfangspunkt im Ursprung darzustellen.

Literatur
Hartmann, K.: *Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren*. Diplomarbeit, Universität Wien 1993.
Jarmer, M.: *Empirische Untersuchungen zur Vektorrechnung in der Schule*. Diplomarbeit, Universität Wien, 1995.
Waldmann, A: *Vektoren im Mathematikunterricht – Grundlegendes Wissen*. Diplomarbeit, Universität Wien, 1994.