

Florian Berchtold

Geometrie

Von Euklid bis zur hyperbolischen
Geometrie mit Ausblick auf
angrenzende Gebiete



Springer Spektrum

Geometrie

Florian Berchtold

Geometrie

Von Euklid bis zur hyperbolischen
Geometrie mit Ausblick auf
angrenzende Gebiete

Florian Berchtold
Fachbereich Mathematik und Statistik
Universität Konstanz
Konstanz, Deutschland

ISBN 978-3-662-49953-5 ISBN 978-3-662-49954-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-49954-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Germany

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Geometrie ist neben der Arithmetik wohl das älteste Teilgebiet der Mathematik und als solches immer noch zentraler Bestandteil der mathematischen Grundbildung in allen Schulformen. Sie eignet sich ganz besonders dazu, die Besonderheiten des mathematischen Arbeitens darzustellen. Gerade Kompetenzen wie Analysefähigkeit oder Entwicklung von Problemlösestrategien lassen sich an geometrischen Fragestellungen hervorragend vermitteln. Aber auch die Verwendung von Fachsprache oder die Durchführung elementarer Beweistechniken lassen sich in der Geometrie anhand konkret vorstellbarer Figuren exemplarisch und auf auch für jüngere Schüler nachvollziehbarem Niveau darstellen. Leider kam und kommt die klassische Geometrie in den üblichen Studienplänen, auch denen zukünftiger Lehrer, in relativ geringem Umfang vor, was sicherlich auch der rasanten Entwicklung modernerer Gebiete wie algebraischer oder algorithmischer Geometrie geschuldet ist. Aus Sicht des Autors sollten aber besonders Lehramtsstudierende ein fundiertes Grundlagenwissen im Bereich der Geometrie besitzen und mit grundlegenden geometrischen Vorgehensweisen vertraut sein.

Auch aus mathematikhistorischer Sicht spielt die Geometrie eine zentrale Rolle. Das Ringen um die Lösung der berühmten antiken Konstruktionsprobleme, wie die Würfelverdopplung oder die schon sprichwörtlich gewordene „Quadratur des Kreises“ hat über Jahrtausende hinweg hochrangige Wissenschaftler und mathematische Laien in großem Umfang beschäftigt. Viele dieser Probleme konnten erst in den letzten 200 Jahren vollständig gelöst werden. Eine ähnliche Rolle spielte das euklidische Parallelenpostulat, welches über 2000 Jahre hinweg die Menschheit beschäftigte, bis in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die nicht euklidischen Geometrien erfunden wurden, in denen das Parallelenpostulat eben nicht gilt.

Aus Anwendungssicht war die Geometrie ursprünglich ganz im Sinne ihres Namens γεωμετρία (*geometria*: Erdvermessung) entwickelt worden, um Längen zu messen und Flächen zu vergleichen. Noch Gauß hat viel Zeit damit zugebracht, das Gebiet des Königreichs Hannover mithilfe einer Triangulierung (also durch Dreiecksmessung) exakt zu kartografieren. In Schiff- und Luftfahrt spielte und spielt die Geometrie der Erdoberfläche eine zentrale Rolle.

In moderner Zeit war die Entwicklung der Minkowski'schen Geometrie wichtige Voraussetzung für die bahnbrechenden Entdeckungen, die Einstein schließlich zu seiner berühmten Relativitätstheorie führten, die eine wesentliche Grundlage der heutigen Physik und damit unseres Weltverständnisses ist.

Viele Erkenntnisse auch in nichtmathematischen Disziplinen gehen ebenfalls auf geometrische Aussagen zurück. Dazu gehören etwa wirtschaftswissenschaftliche Methoden wie die lineare Optimierung, die ganz entscheidend auf der Konvexgeometrie basiert. Der aus dem Film *A beautiful Mind* bekannte Mathematiker John Nash erhielt seinen Nobelpreis im Bereich der Wirtschaftswissenschaften für seine Beiträge zur Spieltheorie, bei der er als entscheidendes Hilfsmittel den Fixpunktsatz von Brouwer verwendete, der ein Ergebnis aus dem Bereich der geometrischen Topologie ist.

Die Reihe der Beispiele für geometrische Fragestellungen oder Anwendungen, die auch über die Mathematik hinaus Beachtung gefunden haben, ließe sich wohl nahezu endlos fortsetzen, die erwähnten Ergebnisse mögen an dieser Stelle jedoch genügen. Ziel dieses Buches ist es, die Grundlagen zum Verständnis der geometrischen Teilgebiete zu legen, die den Lernenden befähigen, die Rolle der Geometrie innerhalb der Mathematik zu erkennen und deren Methoden selbst anwenden zu können. Dabei wird besonderer Wert auf die Vermittlung der Grundkenntnisse gelegt, welche ein angehender Mathematiklehrer in der Geometrie haben sollte. Damit richtet sich das Buch an angehende Mathematiklehrer, an mathematisch interessierte Laien, aber auch an Fachmathematiker, die einen Überblick über die Geometrie gewinnen wollen.

Entstanden ist dieses Buch auf Grundlage einer zweisemestrigen Vorlesung zur Einführung in die Geometrie für angehende Lehrer, die ich an der Universität Konstanz gehalten habe. Ziel war es, zukünftigen Gymnasiallehrern des Fachs Mathematik fachwissenschaftliche Grundlagen speziell für den Geometrieunterricht zu geben. Einerseits sollte dabei der Zielsetzung, angehende Lehrer direkt auf den Unterricht vorzubereiten, Rechnung getragen werden, andererseits sollte der geradezu sprichwörtliche „Blick über den Tellerrand“ auch nicht vernachlässigt werden. Dies führte zur Zweiteilung des Buches, wobei im ersten Teil die klassische Ebene (euklidische und nicht euklidische) Geometrie im Fokus des Interesses steht. Im zweiten Teil wird auf geometrische Fragestellungen eingegangen, die zu Anknüpfungen an verwandte mathematische Fachgebiete führen.

Im ersten Teil wird zunächst ein Einblick in die Axiomatik der ebenen Geometrie gegeben, deren Entstehung bis in die Antike zurückreicht. Da die Zielgruppe des Buches nicht zuletzt aus zukünftigen Mathematiklehrern besteht, wird die Geometrie aber nicht in erster Linie auf axiomatischer Grundlage aufgebaut (sogenannte synthetische Geometrie). Vielmehr werden die grundlegenden Ergebnisse der euklidischen Geometrie im zweiten Kapitel des Buches auf Grundlage eines analytischen Modells gewonnen, welches aufbauend auf Kenntnissen aus dem ersten Studienjahr eines Mathematikstudiums relativ einfach entwickelt werden kann. Dieses Vorgehen erlaubt es, schnell zu zentralen geometrischen Aussagen zu kommen, von denen viele auch im üblichen Schulunterricht eine Rolle spielen.

Das dritte und vierte Kapitel des Buches sind nicht euklidischen Geometrien gewidmet: Im dritten Kapitel werden Geometrien betrachtet, in denen je zwei Geraden stets einen Schnittpunkt besitzen: Beispiele dafür sind die sphärische Geometrie, die aufgrund ihrer Wichtigkeit für See- und Luftfahrt aus meiner Sicht einen Platz in der Schule verdient hätte, sowie die projektive Geometrie, die ihren Ursprung in der Theorie der Perspektivität hat und deshalb für die Kunstwissenschaften sehr wichtig ist. Als Gegenstück zu diesen Geometrien wird im vierten Kapitel die hyperbolische Geometrie vorgestellt, deren Entdeckung durch Bolyai und Lobachewski zu Beginn des 19. Jahrhunderts den jahrtausende langen Streit um das euklidische Parallelenpostulat beendete: Die hyperbolische Geometrie ist eine in sich konsistente Geometrie, in der das Parallelenpostulat eben nicht erfüllt ist.

Das fünfte und letzte Kapitel im Rahmen der ebenen Geometrien befasst sich mit den zu Beginn erwähnten Konstruktionsproblemen und gibt auf die klassischen antiken Fragestellungen aus diesem Bereich definitive Antworten.

Im zweiten Teil des Buches stehen Teilgebiete der Mathematik im Fokus, die sich teilweise aus der Geometrie entwickelt haben oder nahe mit dieser verwandt sind. Ein Beispiel dafür sind die im sechsten Kapitel betrachteten Objekte der Konvexgeometrie wie Polytope, welche Verallgemeinerungen der bekannten Vielecke in höheren Dimensionen sind. Der diskreten Geometrie zuzuordnen ist die Graphentheorie, innerhalb der einige berühmte Probleme der Mathematik entwickelt wurden, die ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Die Theorie der Bilinearformen, die das Thema des siebten Kapitels sind, setzt die Untersuchung von linearen Objekten wie Strecken und Geraden auf natürliche Weise fort und führt zu Objekten, deren definierende Gleichungen quadratisch sind. Geometrisch können diese als Kegelschnitte interpretiert werden; auf der anderen Seite basiert die für die Relativitätstheorie grundlegende Minkowskigeometrie auf einer speziellen Bilinearform.

Das achte und letzte Kapitel dieses Buches ist der geometrischen Topologie gewidmet. Die Topologie, ursprünglich *geometria situs* genannt, beschäftigt sich weniger mit den metrischen Eigenschaften eines Objekts als vielmehr mit seiner qualitativen Form. Dabei ändern Deformationen geometrischer Objekte deren qualitative Eigenschaften nicht. In diesen Zusammenhang gehören auch Gruppenoperationen auf topologischen Räumen und dabei besonders spezielle Transformationen geometrischer Objekte.

In den Text eingestreut findet der Leser einige Aufgaben, die dazu dienen sollen, die behandelten Konzepte einzuüben und dadurch ein besseres Verständnis des Inhalts zu gewinnen. Dabei variiert der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Aufgaben zum Teil deutlich. Einfache Aufgaben sind dafür gedacht, das Gelesene mehr oder weniger zu rekapitulieren; schwierigere Aufgaben animieren zum Weiterdenken und Einarbeiten in neue Themengebiete.

Ein Geometriebuch ohne Grafiken ist wohl weder denkbar noch sinnvoll. Zur Veranschaulichung und Fundgrube für Ideen sind passende Visualisierungen gerade in der Geometrie ein nicht zu unterschätzendes Hilfsmittel. Die

Zeichnungen in diesem Buch wurden mithilfe des freien Programms *geogebra* (siehe www.geogebra.org) erstellt, eine dynamische Geometriesoftware, die sich auch gut für den Einsatz in Schule und Hochschule anbietet. Es wird dem Leser dringend empfohlen, zum besseren Verständnis der diversen geometrischen Sachverhalte, die in diesem Buch behandelt werden, zu diesen eine Umsetzung in *geogebra* zu erstellen.

Am Ende des Buches findet der Leser eine Liste mit Literatur zum Thema Geometrie. Darunter finden sich sowohl klassische Lehrbücher als auch weiterführende Literatur zu einzelnen geometrischen Teilaspekten. Jede Literaturangabe enthält einen kurzen Kommentar, um dem Leser eine grobe Einordnung der Zielgruppe und des Schwierigkeitsgrads des entsprechenden Werkes zu geben.

Wenn es durch dieses Buch gelingen sollte, dem Leser die Schönheit der Geometrie so nahezubringen, dass das Interesse geweckt wird, sich eingehender damit zu beschäftigen, so wäre das aus Sicht des Autors ein großer Erfolg. Sollte auch der Stellenwert der Geometrie in den Bildungsplänen der Schulen wieder gestärkt werden, hat dieses Buch seinen Zweck mehr als erfüllt.

Die Erstellung eines Lehrwerks wie das vorliegende ist ohne ausreichende Unterstützung von verschiedenen Seiten nicht möglich. Dank möchte ich allen Studierenden sagen, die mit dem Vorläuferskript gearbeitet und mich auf zahlreiche Fehler und Ungenauigkeiten hingewiesen haben. Großen Dank schulde ich Herrn Dr. Michael Dreher, der eine ähnliche Vorlesung durchgeführt hatte und von dessen Skript ich einige Ideen übernommen habe (vgl. Dreher 2014). Besonderer Dank geht an Frau Diana Bühler, Frau Tamara Gämderinger und Herrn Christoph Klockewitz, die mich bei den Übungen zu dieser Vorlesung unterstützt haben. Weiter möchte ich Herrn Michael Arendt danken, der einige Ideen insbesondere zur Möglichkeit, hyperbolische Geometrie im Unterricht einzusetzen, beigesteuert hat.

Meine Abordnung an den Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz wurde im Rahmen des vom Fachbereich Physik in Kooperation mit der Pädagogischen Hochschule Freiburg ins Leben gerufenen Modellstudiengangs „Master of Education“ durch das Land Baden-Württemberg finanziert, wofür ich allen Beteiligten herzlichen Dank schulde. Besonderer Dank geht in diesem Zusammenhang an das Friedrich-Wöhler-Gymnasium Singen in Person von Herr OStD Scheu, der diese Abordnung stets sehr offen und unbürokratisch unterstützt hat.

Dem Springer-Verlag, namentlich Herrn Andreas Rüdinger und Frau Meike Barth, danke ich für die unkomplizierte und produktive Zusammenarbeit, die die Umsetzung dieses Werkes überhaupt erst ermöglicht hat.

Mein größter Dank geht schließlich an meine Familie, die zu oft ein körperlich oder auch geistig abwesendes Familienmitglied ertragen musste und mich dennoch immer in der Arbeit an diesem Buch kräftig bestärkt hat.

Inhaltsverzeichnis

Teil I Klassische ebene Geometrie

1 Axiomatik – synthetische Geometrie	3
1.1 Axiomensystem von Euklid	4
1.2 Axiomensystem von Hilbert	6
2 Klassische euklidische Geometrie	17
2.1 Modellierung der euklidischen Geometrie	17
2.2 Grundlegende Aussagen der Mittelstufengeometrie	25
2.3 Abbildungen	30
2.4 Sätze über Polygone am Kreis	34
2.5 Besondere Punkte im Dreieck	41
2.6 Weitere Sätze am Dreieck	47
3 Sphärische und projektive Geometrien	53
3.1 Grundlagen der sphärischen Geometrie	53
3.2 Dreiecke in der sphärischen Geometrie	58
3.3 Axiomatik der projektiven Geometrie	67
3.4 Analytische projektive Geometrie	71
3.5 Projektive Transformationen	77
4 Hyperbolische Geometrie	81
4.1 Geometrie in der komplexen Zahlenebene	81
4.2 Abstand in der hyperbolischen Geometrie	87
4.3 Oberes Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene	93
4.4 Hyperbolische Trigonometrie	98
4.5 Hyperbolische Parallelen und Abstände	105
4.6 Alternative Modelle für hyperbolische Geometrien	111

5	Konstruierbarkeit	115
5.1	Konstruierbare Zahlen	116
5.2	Quadratwurzeltürme	119
5.3	Regelmäßige Vielecke	122
 Teil II Ausblicke		
6	Kombinatorische Geometrie	129
6.1	Konvexität	130
6.2	Polytope	134
6.3	Graphen von Polytopen und Eulersche Polyederformel	144
6.4	Reguläre Polytope	150
6.5	Ergänzungen zur Graphentheorie	154
 7	 Bilinearformen und Kegelschnitte	 159
7.1	Bilinearformen	160
7.2	Kegelschnitte	163
7.3	Eigenschaften von Kegelschnitten	169
 8	 Geometrische Topologie und Transformationen	 173
8.1	Topologie	173
8.2	Gruppenoperationen	176
8.3	Mannigfaltigkeiten	179
8.4	Fundamentalgruppe topologischer Räume	184
8.5	Gruppenoperationen auf dem \mathbb{R}^n	192
8.6	Symmetriegruppen von Polytopen	195
8.7	Untergruppen der speziellen linearen Gruppe	198
 Literaturverzeichnis		 203
 Sachverzeichnis		 207

Teil I
Klassische ebene Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1.1	Axiomensystem von Euklid	4
1.2	Axiomensystem von Hilbert	6
1.2.1	Axiome der Verknüpfung (Inzidenz)	6
1.2.2	Axiome der Anordnung	8
1.2.3	Kongruenz	10
1.2.4	Parallelität	14
1.2.5	Vollständigkeit	15

Geometrische Fragestellungen lassen sich in der Geschichte der Mathematik bis weit in die frühesten menschlichen Kulturüberlieferungen zurückverfolgen. Bereits in alten ägyptischen Aufzeichnungen (Papyrus *Rhind*, ca. 1650 v. Chr., wahrscheinlich eine Abschrift eines 200 Jahre älteren Papyrus, vgl. Boyer und Merzbach 1989, 2.3, zur Geometrie in Ägypten auch ebd., 2.7) werden Fragen zu Dreiecken und Kreisen behandelt. Mit dem Einsetzen der griechischen Mathematik findet sich eine entscheidende Zäsur: Im Vordergrund steht nicht mehr die Frage, wie etwas geht, sondern warum und welche Grundlagen man voraussetzen kann. Es wurde das erste *Axiomensystem* für Geometrie geschaffen. Aufbauend auf diesen Axiomen wurden alle weiteren geometrischen Aussagen deduktiv abgeleitet. Diesen Zugang – man spricht auch von synthetischer Geometrie – stellen wir in diesem Kapitel vor. Dazu betrachten wir zunächst das erste (überlieferte) Axiomensystem der Antike, bevor wir dann ein moderneres, nämlich das vor etwa 100 Jahren von David Hilbert entwickelte Axiomensystem ausführlicher vorstellen und aus diesem einige erste Aussagen gewinnen.

1.1 Axiomensystem von Euklid

Etwa 300 v. Chr. fasste der in Alexandria lebende griechische Mathematiker Euklid die damals bekannte Mathematik in 13 Büchern zusammen, denen er den Namen *Die Elemente* ($\tau\alpha\ \sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$) gab. In diesen Büchern versuchte er, die gesamte Geometrie aus einigen anschaulich evidenten Grundaussagen – den Axiomen – zu entwickeln. Damit schuf er das erste in sich konsistente Axiomensystem der Mathematikgeschichte. Im Folgenden stellen wir einen Teil dieser Grundaussagen Euklids vor. Wir formulieren zunächst seine Definitionen, die wir sowohl im Wortlaut als auch in der Schreibweise (Euclides 1991), I. Buch, entnehmen.

Euklids Definitionen

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat,
2. Eine Linie breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

[...]

8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die einen Winkel umfassenden Linien gerade sind, so heißt der Winkel geradlinig.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu (Lot auf) der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. Spitz, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.

Wir brechen hier ab: Euklid definiert dann noch Kreise, Dreiecke und Vierecke als spezielle Figuren und nennt abschließend zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien als parallel, falls sie, wenn man sie nach beiden Seiten unendlich verlängert, auf keiner Seite einander treffen.

Im nächsten Schritt formuliert Euklid Postulate (vgl. wieder Euclides 1991), also Forderungen:

Euklids Postulate

Gefordert soll sein,

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,

4. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Euklid unterscheidet zwischen Postulaten und Axiomen; in anderen Quellen werden dann auch manche Postulate zu den Axiomen gezählt. Mit den folgenden Axiomen ist das Grundgerüst der euklidischen Geometrie dann vollständig:

Euklids Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
6. Die Halben von demselben sind einander gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Die *Elemente* Euklids und damit sein Axiomensystem haben über 2000 Jahre das geometrische Denken entscheidend geprägt, obwohl an vielen Stellen Kritik geübt wurde. Üblicherweise erwartet man von einem Axiomensystem, dass es in sich widerspruchsfrei ist und die einzelnen Axiome unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 1.1.1 *Man untersuche die Axiome Euklids auf Unabhängigkeit.*

Besondere Kritikpunkte waren zum einen, dass die Formulierungen keiner heutigen Strenge genügen. So werden Begriffe durch andere unbekannte Begriffe definiert oder vage sprachliche Aussagen gemacht, die keine präzise Bedeutung haben. Zum anderen entzündete sich die meiste Kritik an Euklids wohl größter Leistung, dem Postulat 5 (in anderen Quellen Axiom 11, auch als Parallelenpostulat bezeichnet): Generationen von Mathematikern versuchten, dieses Axiom aus den anderen zu folgern und damit zu zeigen, dass es nicht unabhängig von diesen ist. Erst im 19. Jahrhundert gelang es N. Lobatschewski und J. Bolyai unabhängig voneinander, mit der Entdeckung der sogenannten nicht euklidischen Geometrien nachzuweisen, dass das Parallelenaxiom sich in der Tat nicht aus den anderen Axiomen ableiten lässt. In einer modernen Form kann man das Parallelenaxiom auch einfacher formulieren:

Axiom 1.1.2 Zu einem Punkt außerhalb einer Gerade gibt es genau eine Gerade durch diesen Punkt, die die gegebene Gerade nicht schneidet.

1.2 Axiomensystem von Hilbert

Die Unzufriedenheit mit den euklidischen Axiomen führte zu vielen Versuchen, eine neue befriedigendere Axiomatik für die Geometrie aufzustellen. David Hilbert (1862–1943) hatte schließlich die grundlegende Idee, die Axiome losgelöst von realen Objekten zu formulieren: Vielmehr stellte er, wie es typisch für moderne Mathematik ist, die Beziehungen zwischen den Objekten ins Zentrum der Betrachtung. Die Art der Objekte spielte also keine Rolle mehr, sondern nur ihr Verhältnis zueinander. Hilbert selbst soll das so formuliert haben: Man müsse statt „Punkte, Geraden und Ebenen“ jederzeit auch „Tische, Stühle und Bierseidel“ sagen können; es komme nur darauf an, dass die Axiome erfüllt sind (vgl. Blumenthal 1935).

Hilberts Axiomensystem besteht aus fünf Axiomengruppen, den Inzidenzaxiomen, den Axiomen der Lage, den Kongruenzaxiomen, dem Parallelnaxiom sowie den Vollständigkeitsaxiomen, die wir in diesem Kapitel einführen werden. Die Grundobjekte sind dabei zwei Mengen \mathbb{P} und \mathbb{G} , deren Elemente wir als „Punkte“ und „Geraden“ bezeichnen werden, wobei diese ganz im Sinne Hilbert lediglich Bezeichnungen sind und keinerlei reale Anschauung wiedergeben müssen.

1.2.1 Axiome der Verknüpfung (Inzidenz)

Die erste Axiomengruppe befasst sich mit grundlegenden Beziehungen zwischen den Elementen der Mengen \mathbb{P} (Punkte) und \mathbb{G} (Geraden). Aus mathematischer Perspektive betrachtet man damit eine Relation \mathcal{R} , also eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G}$, und sagt, dass ein Punkt P zu g gehört, falls $(P, g) \in \mathcal{R}$ ist. Diese Relation braucht keine mengentheoretische Enthaltensbeziehung zu sein. In dem wohl allen vertrauten Geometrieunterricht der Schule beschreibt die Relation \mathcal{R} natürlich genau die Situation, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt. Wir schreiben daher auch einfach kurz $P \in g$, falls $(P, g) \in \mathcal{R} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ gilt, weisen aber noch einmal darauf hin, dass auch andere Möglichkeiten einer Relation \mathcal{R} möglich und sinnvoll sein können (in der Aufgabe 1.2.3 findet man ein Beispiel). Für diese Relation fordern wir

- Axiom 1.2.1**
1. Zu zwei verschiedenen Punkten $A, B \in \mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{G}$, sodass A und B zu g gehören: $A, B \in g$. Für diese Gerade schreiben wir oft kurz $g = AB$.
 2. Zu jeder Gerade gehören mindestens zwei Punkte.
 3. Es gibt drei Punkte, die nicht zu einer Geraden gehören, d. h., es gibt drei Punkte und eine Gerade, die nicht alle diese Punkte enthält.

Ein Paar (\mathbb{P}, \mathbb{G}) zusammen mit einer Inzidenzrelation, sodass diese drei Eigenschaften erfüllt sind, nennen wir auch einen linearen Raum.

Das erste Inzidenzaxiom spiegelt die anschaulich einleuchtende Vorstellung wider, dass es zu je zwei Punkten immer genau eine Gerade gibt, die diese beiden Punkte verbindet. Das zweite Axiom schließt entartete einpunktige Geraden aus.

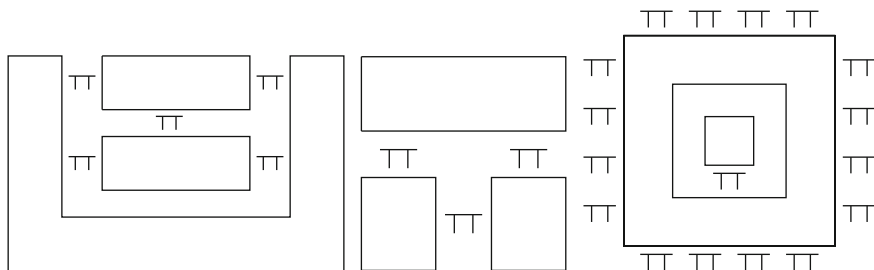


Abb. 1.1 Drei Stuhl-Tisch-Situationen

Die anschauliche Bedeutung des dritten Verknüpfungsaxioms liegt darin, dass es sicherstellt, dass die geforderte Geometrie mindestens zweidimensional ist.

Aufgabe 1.2.2 Es sei (\mathbb{P}, \mathbb{G}) ein linearer Raum. Man zeige:

1. Ist $g \in \mathbb{G}$ eine Gerade, so gibt es einen Punkt $P \in \mathbb{P}$, der nicht zu g gehört.
2. Zu jedem $P \in \mathbb{P}$ gibt es mindestens zwei Geraden $g_1 \neq g_2$, zu denen P gehört.

Ganz im Sinne Hilberts lassen sich die geforderten Axiome auch für Tische und Stühle sinnvoll interpretieren:

Aufgabe 1.2.3 In der Abb. 1.1 sind drei Stuhl-Tisch-Situationen dargestellt. Dabei entsprechen die Stühle den Punkten und die Tische den Geraden. Ein Stuhl gehöre zu einem Tisch, wenn er an einer Seite des Tisches angrenzt. Man zeige, dass nur das mittlere Bild die Inzidenzaxiome 1.2.1 erfüllt und gebe an, welche Axiome in den anderen beiden Bildern verletzt werden.

Ist im Fall eines linearen Raumes (\mathbb{P}, \mathbb{G}) die Menge \mathbb{P} endlich, so nennt man den Raum einen endlichen linearen Raum. Zu welchen Mengen \mathbb{P} und \mathbb{G} derartige Räume existieren, ist ein aktuelles Forschungsthema. Die folgende Aufgabe liefert ein Resultat in diesem Zusammenhang. In Abschn. 3.3 über die Axiomatik projektiver Geometrien finden sich weitere Ergebnisse zu dieser Problematik, für mehr Informationen zu dieser Fragestellung verweisen wir auf (Batten und Beutelspacher 1993).

Aufgabe 1.2.4 Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Man zeige, dass es dann Mengen \mathbb{P} und \mathbb{G} mit $|\mathbb{P}| = n$ gibt, die die Inzidenzaxiome 2.2.1 erfüllen. Was lässt sich über die Mächtigkeit von \mathbb{G} aussagen?

1.2.2 Axiome der Anordnung

Die zweite Axiomengruppe befasst sich mit den Anordnungsaxiomen. Dazu betrachtet man eine weitere (dreistellige) Relation $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, die „Zwischen“-Relation. Man sagt dann, dass ein Punkt P zwischen zwei Punkten A und B liegt, falls $(A, P, B) \in \mathcal{Z}$ gilt. Dafür schreibt man oft einfach auch $P \in \overline{AB}$ und definiert:

Definition 1.2.5 Sind $A, B \in \mathbb{P}$, so versteht man unter der Strecke \overline{AB} alle Punkte, die zwischen A und B liegen.

Man fordert nun

- Axiom 1.2.6**
1. Liegt C zwischen A und B ($C \in \overline{AB}$), so sind A, B und C drei verschiedene Punkte einer Geraden und C liegt dann auch zwischen B und A ($C \in \overline{BA}$).
 2. Zu zwei verschiedenen Punkten A und C gibt es einen Punkt B auf der Geraden AC , sodass C zwischen A und B liegt.
 3. Sind drei Punkte einer Geraden gegeben, so liegt höchstens einer davon zwischen den beiden anderen.

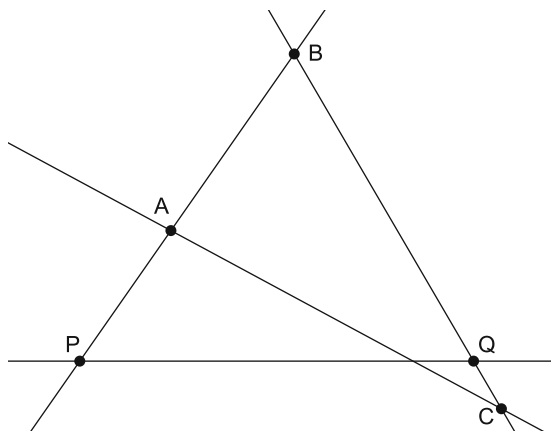
Man beachte, dass nach Axiom 1.2.6 1. die Strecken \overline{AB} und \overline{BA} übereinstimmen; weiter liegen alle Punkte der Strecke \overline{AB} auf der Geraden AB . Die zweite und dritte Forderung in Axiom 1.2.6 spiegeln unter anderem anschaulich wider, dass sich Strecken beliebig verlängern lassen.

Das erste etwas kompliziertere Axiom ist das Axiom von Pasch, welches im Wesentlichen besagt, dass die betrachtete Geometrie nicht mehr als zwei Dimensionen besitzt, also eine ebene Geometrie ist.

Axiom 1.2.7 Es seien A, B und C drei Punkte, die nicht zu einer Geraden gehören, und g eine Gerade, zu der keiner der drei Punkte A, B und C gehört und die durch einen Punkt der Strecke \overline{AB} geht. Dann geht g entweder durch einen Punkt der Strecke \overline{AC} oder durch einen Punkt der Strecke \overline{BC} .

Man mache sich klar, dass dieses Axiom in einer räumlichen Geometrie nicht erfüllt ist. Anschaulich besagt dieses Axiom, dass eine Gerade, die ein Dreieck betritt, dieses auch wieder verlassen muss. Wir fordern hier (wie Hilbert in seiner Urfassung, vgl. Hilbert 1913 und demgegenüber die Version in Hilbert 1972, jeweils §3, II.4) explizit, dass die Gerade g nur (also genau) eine der beiden verbliebenen Dreiecksseiten schneidet. Diese Forderung kann man dahin gehend abschwächen, dass sie mindestens eine schneidet. Man kann dann zeigen, dass sie die andere nicht schneiden kann (für Details vgl. Hilbert 1972, Supplement I).

Abb. 1.2 Zum Beweis des Streckensatzes 1.2.8



Mithilfe dieser Axiome können nun einige Folgerungen über die Beziehungen zwischen Punkten und Geraden abgeleitet werden. Exemplarisch zeigen wir, dass Strecken nie leer sind, oder, anders ausgedrückt, dass zwischen zwei Punkten einer Geraden immer ein dritter liegt.

Satz 1.2.8 Es seien $P, Q \in \mathbb{P}$. Dann gibt es ein $S \in \mathbb{P}$, welches zwischen P und Q liegt.

Beweis Es sei A ein Punkt, der nicht auf der Geraden PQ liegt. Nach Axiom 1.2.6.2. gibt es einen Punkt B , sodass A zwischen P und B liegt. Zu B und Q gibt es ebenso einen Punkt C , sodass Q zwischen B und C liegt (zur Veranschaulichung vgl. man die Abb. 1.2). Wir betrachten nun die Gerade AC . Diese kann B nicht enthalten, da sie sonst auch P und Q enthalten würde und dann A auf PQ läge, was nicht sein kann. Ebenso sieht man, dass AC weder P noch Q enthält. Also erfüllen die Konfiguration P, Q, B und die Gerade AC die Voraussetzung des Axioms von Pasch. Daher schneidet sie entweder \overline{BQ} oder \overline{PQ} . Angenommen, sie schneidet \overline{BQ} in X . Gilt nun $X \neq C$, so folgt $AC = XC = QB$, was aber, wie oben gesehen, nicht sein kann. Im Fall $X = C$ liegt aber X einerseits zwischen Q und B und andererseits Q zwischen $X = C$ und B , was einen Widerspruch zur dritten Forderung von Axiom 1.2.6 darstellt. Also schneidet AC die Seite PQ in einem Punkt S zwischen P und Q . \square

Aufgabe 1.2.9 Man zeige: Sind A, B und C drei Punkte einer Geraden g , so liegt einer der Punkte zwischen den beiden anderen.

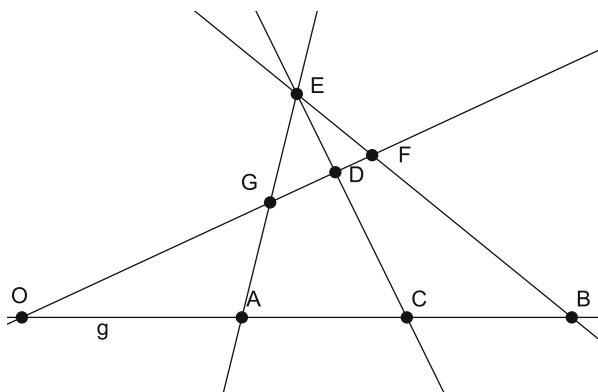


Abb. 1.3 Transitivität der Seitenbeziehung

1.2.3 Kongruenz

Um Kongruenz zu definieren, benötigen wir noch den Begriff der „gleichen Seite“.

Definition 1.2.10 Es seien A , O und B drei Punkte einer Geraden mit $A, B \neq O$. Wir sagen, dass B auf der gleichen Seite von O wie A liegt, falls O nicht zwischen A und B liegt. Unter dem Halbstrahl \overrightarrow{OA} verstehen wir die Menge aller Punkte auf $g = AB$, die auf der gleichen Seite von O wie A liegen.

Lemma 1.2.11 Es seien O ein Punkt einer Geraden g und $g \setminus O$ die Menge der Punkte, die zu g gehören, mit Ausnahme von O . Dann definiert die Relation „ A liegt auf der gleichen Seite wie B “ eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus O$.

Beweis Reflexivität: Es sei $A \in g$. Offenbar liegt O nicht zwischen A und A , also liegt A auf der gleichen Seite von O wie A .

Symmetrie: Es liege B auf der gleichen Seite wie A , d.h., O liegt nicht zwischen A und B . Dann liegt wegen Axiom 1.2.6 1. O auch nicht zwischen B und A , d.h., A liegt auf der gleichen Seite wie B .

Transitivität: Es liege A auf der gleichen Seite wie B und B auf der gleichen Seite wie C , d.h. O liegt nicht zwischen A und B und O liegt nicht zwischen B und C (vgl. Abb. 1.3). Wir wählen einen Punkt D außerhalb von g . Dann gibt es einen Punkt E , sodass D zwischen E und C liegt. Betrachte die Gerade OD . Offenbar enthält diese keinen der Punkte A , B oder C , da sie sonst mit g übereinstimmen würde, im Widerspruch dazu, dass D nicht auf g liegt. Wir betrachten nun die Konfiguration B, C, E und OD . Da nach Voraussetzung O nicht zwischen B und C liegt, schneidet OD nach dem Axiom von Pasch die Strecke \overline{BE} , etwa in F . Wendet man nun das Axiom von Pasch auf die Konfiguration A, B, E und OD an, so erhält man, dass OD entweder \overline{AB} oder \overline{AE} schneidet. Da O nicht zwischen A und B liegt, liegt der zweite Fall vor, d.h., OD schneidet \overline{AE} in einem Punkt, etwa G . Also schneidet die

Gerade OD in der Konfiguration A, C, E die Strecken \overline{EC} und \overline{AE} (nämlich in D bzw. G). Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Axioms von Pasch schneidet OD daher die Strecke \overline{AC} nicht, also liegt O nicht zwischen A und C . \square

Man kann sogar zeigen, dass die in Definition 1.2.10 eingeführte Äquivalenzrelation die Menge $g \setminus O$ in genau zwei Äquivalenzklassen unterteilt (vgl. Hilbert 1972, §4, Satz 5).

Auf der Menge aller Strecken möge es eine weitere Relation \equiv („Kongruenz“) mit folgenden Eigenschaften geben.

- Axiom 1.2.12**
1. Sind A, B zwei Punkte einer Geraden g und A' ein Punkt einer weiteren (nicht notwendig verschiedenen) Geraden g' , so gibt es auf einer gegebenen Seite der Geraden g' von A' genau einen Punkt B' , sodass die Strecke \overline{AB} kongruent zur Strecke $\overline{A'B'}$ ist.
 2. Die Kongruenzrelation ist transitiv, genauer gilt, sind zwei Strecken zu einer dritten kongruent, so sind sie selbst kongruent.
 3. Gehören die Punkte A, B, C zu einer Geraden g , die Punkte A', B', C' zu einer Geraden g' , wobei \overline{AB} und \overline{BC} bzw. $\overline{A'B'}$ und $\overline{B'C'}$ keine gemeinsamen Punkte haben, und gilt weiter $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ sowie $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, so gilt auch $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Die erste Forderung von Axiom 1.2.12 ist das extrem wichtige Streckenabtragungsaxiom; die dritte Forderung besagt, dass beim sukzessiven Abtragen zweier kongruenter Strecken die Gesamtstrecken ebenfalls kongruent sind.

Aufgabe 1.2.13 *Man zeige, dass die Kongruenz von Strecken eine Äquivalenzrelation ist (es macht also Sinn, von kongruenten Strecken zu sprechen).*

Die zweite Kongruenzgruppe befasst sich mit Winkeln. Dazu müssen wir zunächst definieren, was ein Winkel ist.

Definition 1.2.14 Unter einem Winkel versteht man ein System bestehend aus zwei Halbstrahlen h und k , die von einem gemeinsamen Punkt O aus starten. Der Punkt O heißt auch Scheitel, und h, k heißen die Schenkel des Winkels. Für einen Winkel schreiben wir $\angle(h, k)$.

Man beachte, dass dabei kein Unterschied zwischen den Winkeln $\angle(h, k)$ und $\angle(k, h)$ gemacht wird. Um wie bei Strecken ein eindeutiges Winkelabtragungsaxiom formulieren zu können, benötigen wir noch den Begriff der Halbebene:

Definition 1.2.15 Es sei g eine Gerade und P ein Punkt nicht auf g . Ein Punkt Q liegt auf der gleichen Seite von g wie P , falls die Strecke \overline{PQ} die Gerade g nicht schneidet.

Unter einer durch g definierten Halbebene verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Punkten, die auf der gleichen Seite von g liegen.

Aufgabe 1.2.16 Es sei g eine Gerade. Man zeige, dass die Relation „liegt auf der gleichen Seite wie“ eine Äquivalenzrelation ist, die die Menge aller Punkte außerhalb von g in genau zwei Äquivalenzklassen unterteilt.

Damit können wir die Axiome der Kongruenz von Winkeln formulieren:

- Axiom 1.2.17** 1. Es seien $\angle(h, k)$ ein Winkel sowie g' eine Gerade mit einem Punkt O' und einem von O' ausgehenden Halbstrahl h' . Dann gibt es auf einer festgelegten Seite von g' genau einen von O' ausgehenden Halbstrahl k' , sodass der Winkel $\angle(h, k)$ kongruent zum Winkel $\angle(h', k')$ ist.
2. Die Kongruenzrelation für Winkel ist reflexiv: Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent.

Das folgende letzte Kongruenzaxiom ist für den Schulunterricht besonders interessant: Im Unterricht der Mittelstufe spielen die Kongruenzsätze für Dreiecke eine besondere Rolle. Hilbert hat festgestellt, dass sich diese nicht aus den Axiomen Euklids herleiten lassen. Man muss also mindestens einen Kongruenzsatz fordern; dieser ist der Satz „sws“. Wir definieren zunächst den Begriff des Dreiecks.

Definition 1.2.18 Es seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann definieren diese drei Punkte ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{AC} und den Innenwinkeln

$$\angle BAC := \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \angle CBA := \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \text{ und } \angle ACB := \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

In manchen Situationen betrachtet man auch Dreiecke, bei denen die „Ecken“ A, B und C auf einer Geraden liegen, und spricht dann von „entarteten Dreiecken“. Wir werden, wenn es nicht explizit vermerkt ist, immer unsere Definition verwenden.

Axiom 1.2.19 Gelten für zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Kongruenzen $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, so gilt auch $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$.

Aufgabe 1.2.20 Man zeige, dass in der Situation von Axiom 1.2.19 auch $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ sowie $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ gelten.

Ähnlich wie bei Strecken kann man zeigen, dass die Kongruenz von Winkeln eine Äquivalenzrelation ist. Daher macht es Sinn, von kongruenten Winkeln zu sprechen.

Mithilfe der bisherigen Axiome lassen sich die aus der Schule vertrauten Aussagen wie die Kongruenz von Neben- und Gegenwinkeln (Scheitelwinkeln) beweisen. Diese werden im Schulunterricht üblicherweise als anschaulich evidente Aussagen formuliert. Hier können wir sie aber als Folgerungen aus unseren Axiomen formulieren.

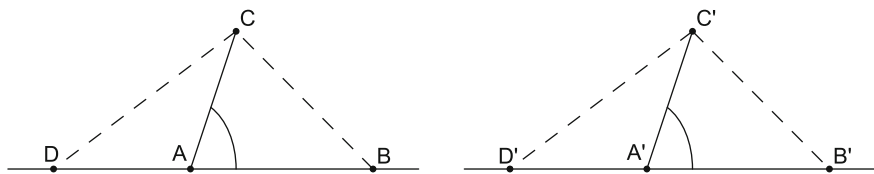


Abb. 1.4 Zum Beweis des Nebenwinkelsatzes 1.2.22

Definition 1.2.21 Es seien A und B Punkte auf einer Geraden g sowie C ein Punkt außerhalb von g . Weiter seien D ein Punkt auf g nicht auf der gleichen Seite von A wie B sowie E ein Punkt auf $h := \overrightarrow{AC}$ nicht auf der gleichen Seite von A wie C . Dann heißen die Winkel $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ und $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ Nebenwinkel bzw. Gegenwinkel des Winkels $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Satz 1.2.22 Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent.

Beweis Es seien A, B und D drei Punkte auf einer Geraden, sodass A zwischen B und D liegt, und C ein Punkt außerhalb von AB . Ebenso seien A', B' und D' drei Punkte auf einer Geraden, sodass A' zwischen B' und D' liege. Weiter sei C' außerhalb von $A'B'$, sodass die Winkel $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ und $\angle(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ kongruent sind. Dann ist zu zeigen, dass auch die Winkel $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ und $\angle(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'})$ kongruent sind (vgl. Abb. 1.4).

Aufgrund der Möglichkeit, auf einem gegebenen Halbstrahl Strecken abtragen zu können, können wir annehmen, dass folgende Streckenkongruenzen erfüllt sind:

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad \overline{AD} \equiv \overline{A'D'}.$$

Wendet man nun die Aufgabe 1.2.20 auf die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ an, so erhält man die Kongruenzen $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ und $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Weiter sind aufgrund von Axiom 1.2.12 3. die Strecken \overline{DB} und $\overline{D'B'}$ kongruent. Eine erneute Anwendung der Aufgabe 1.2.20 auf die beiden Dreiecke DBC und $D'B'C'$ liefert die Kongruenzen

$$\angle CDA \equiv \angle C'D'A' \quad \text{und} \quad \overline{DC} \equiv \overline{D'C'}.$$

Schließlich folgt nun mithilfe des Axioms 1.2.19, angewendet auf die Dreiecke DAC und $D'A'C'$ die behauptete Kongruenz der Nebenwinkel. \square

Korollar 1.2.23 (Gegenwinkelsatz oder Scheitelwinkelsatz) Ein Winkel und sein Gegenwinkel sind kongruent.

Beweis Dies folgt direkt aus Satz 1.2.22, da Winkel und Gegenwinkel Nebenwinkel des gleichen Winkels (nämlich des Nebenwinkels des ursprünglichen Winkels) sind. \square

1.2.4 Parallelität

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem, wie erwähnt, umstrittensten euklidischen Axiom (bzw. Postulat), nämlich dem Parallelenpostulat von Euklid. Bevor wir das Hilbert'sche Analogon formulieren, beweisen wir, dass Parallelen im Hilbert'schen System existieren. Dazu definieren wir zunächst den Begriff der Parallelität.

Definition 1.2.24 Zwei Geraden heißen parallel, falls sie keinen gemeinsamen Punkt haben.

Satz 1.2.25 Es sei g eine Gerade sowie P ein Punkt, der nicht zu g gehört. Dann gibt es eine Gerade h , die P enthält und parallel zu g ist.

Beweis Es seien Q, R zwei verschiedene Punkte von g sowie ℓ die Gerade durch P und Q . Dann lässt sich der Winkel $\angle RQP$ auf der Geraden ℓ in P abtragen: Es gibt also einen Punkt U auf ℓ sowie einen Punkt T , der auf der gleichen Seite von ℓ wie R liegt, sodass der Winkel $\angle PQR$ kongruent zum Winkel $\angle UPT$ ist. Wir behaupten, dass die Gerade $h := PT$ parallel zu g ist. Angenommen, g und h schneiden sich in einem Punkt S . Wir beschränken uns auf den Fall, dass S und R auf der gleichen Seite von Q liegen (vgl. Abb. 1.5, die andere Situation geht analog und wird dem Leser überlassen).

Dann tragen wir die Strecke \overline{SQ} ausgehend von P auf h ab, aber nicht auf der gleichen Seite wie S . Es gibt also einen Punkt W auf h mit $\overline{SQ} \equiv \overline{PW}$, und P liegt zwischen S und W .

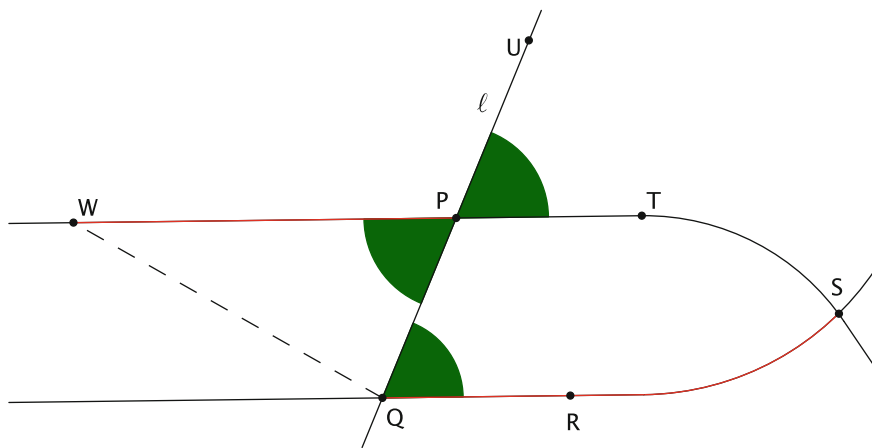


Abb. 1.5 Existenz von Parallelen

Aufgrund der Kongruenz von Winkel und Gegenwinkel von Korollar 1.2.23 sind die Winkel $\angle SQP = \angle RQP \equiv \angle TPU$ und $\angle WPQ$ kongruent. Wendet man das Kongruenzaxiom 1.2.19 auf die Dreiecke $\triangle SQP$ und $\triangle QPW$ an, so folgt $\angle PQW \equiv \angle QPS$. Der letzte Winkel ist Nebenwinkel des Winkels $\angle QPW$, und wegen der Kongruenz der Nebenwinkel von Satz 1.2.22 ist daher $\angle PQW$ zum Nebenwinkel von $\angle SQP$ kongruent. Die Eindeutigkeit der Winkelabtragung impliziert nun, dass W zu g gehört, was offenbar unmöglich ist. \square

Es gibt somit im Hilbert'schen Axiomensystem immer Parallelen. Die entscheidende Forderung, die unsere anschauliche Vorstellung von Parallelen widerspiegelt, ist also, dass es maximal eine Parallele gibt. Dass man dies in der Tat nicht aus den anderen Axiomen ableiten kann, werden wir in Kap. 4 über hyperbolische Geometrie speziell in Beispiel 4.3.11 sehen.

Axiom 1.2.26 Es sei P ein Punkt außerhalb einer Geraden g . Dann gibt es maximal eine parallele Gerade zu g durch P .

1.2.5 Vollständigkeit

Die beiden Axiome, die wir in diesem Abschnitt vorstellen, erlauben, die euklidische Geometrie eindeutig festzulegen. Damit ist das Hilbert'sche Axiomensystem vollständig. Das erste der beiden Axiome, auch als archimedisches Streckenaxiom bezeichnet, beschreibt dabei die in gewissem Sinne beliebige Verlängerbarkeit von Strecken und entspricht im Prinzip dem archimedischen Axiom der reellen Zahlen:

Axiom 1.2.27 Sind \overline{AB} und \overline{CD} zwei Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so, dass das n -malige Abtragen von \overline{CD} vom Punkt A auf dem Halbstrahl \overrightarrow{AB} die Strecke \overline{AB} umfasst.

Zum Abschluss fordert man nun noch, dass die euklidische Geometrie vollständig ist, d. h., es gibt keine echte Erweiterung des bisher konstruierten Systems.

Axiom 1.2.28 Es sei \mathbb{P}' und \mathbb{G}' ein System von Punkten mit $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}'$ und $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}'$ zusammen mit Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzrelationen, die die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzrelationen auf \mathbb{P} und \mathbb{G} fortsetzen. Dann gilt $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ und $\mathbb{G} = \mathbb{G}'$. Man sagt auch, dass das ursprüngliche System maximal ist.

Man kann die gesamte Geometrie nun ausgehend von den vorgestellten Axiomen aufbauen (vgl. Moise 1974 oder Kunz 1976). Da dies aber sehr mühsam ist, gehen wir einen einfacheren Weg und definieren ein Modell der euklidischen Geometrie, welches die Axiome erfüllt, und arbeiten dann damit. Dies ist keine wesentliche Einschränkung. Man kann nämlich zeigen, dass es bis auf einen geeigneten Isomorphie-

begriff genau ein System von Punkten und Geraden zusammen mit den zugehörigen Relationen gibt, welches alle aufgeführten Hilbertschen Axiome erfüllt.

In der sogenannten absoluten Geometrie arbeitet man lediglich mit den Axiomen der Verknüpfung (Axiom 1.2.1), den Axiomen der Anordnung (Axiom 1.2.6, 1.2.7) und den Axiomen der Vollständigkeit. Die Axiome der Kongruenz werden durch etwas schwächere Axiome (der Bewegung) ersetzt (vgl. Klotzek 2001 oder als weiterführendes Werk auch Klotzek und Quaisser 1978). Dadurch wird erreicht, dass es absolute Geometrien gibt, in denen keine Parallelen existieren (im Gegensatz zu Satz 1.2.25). Auf das Parallelenaxiom wird in der absoluten Geometrie vollständig verzichtet. Ersetzt man dieses durch die Forderung, dass es keine Parallelen gibt, so erhält man die elliptischen Geometrien; fordert man die Existenz mindestens zweier Parallelen, so erhält man die hyperbolische Geometrie (all diese Geometrien kann man als spezielle ebene Cayley-Klein-Geometrien interpretieren, vgl. Kowol 2009).

Inhaltsverzeichnis

2.1 Modellierung der euklidischen Geometrie	17
2.2 Grundlegende Aussagen der Mittelstufengeometrie	25
2.3 Abbildungen	30
2.4 Sätze über Polygone am Kreis	34
2.5 Besondere Punkte im Dreieck	41
2.6 Weitere Sätze am Dreieck	47

Die klassischen Ergebnisse der euklidischen Geometrie sind das zentrale Thema des Geometrieunterrichts in der Unter- und Mittelstufe des allgemeinbildenden Gymnasiums. Naturgemäß sind Schüler dieser Altersstufe nicht in der Lage, einen deduktiven Theorieaufbau verstehen zu können. Vielmehr muss man an Alltagserfahrungen sowie -anschauungen anknüpfen und ausgehend von (mehr oder weniger) evidenten Sachverhalten die Geometrie entwickeln. Wir wollen hier einerseits keine „Larifari“-Mathematik betreiben, andererseits aber auch nicht zu viel Zeit auf eine theoretische Fundierung verschwenden. Daher stellen wir ein auf Grundlage analytischer Vorkenntnisse gewonnenes Modell der euklidischen Geometrie vor, auf dessen Basis wir dann die Elementargeometrie entlang der in der Schule üblichen und möglichen Wege entwickeln werden.

2.1 Modellierung der euklidischen Geometrie

In diesem Abschnitt führen wir ein System von Punkten und Geraden zusammen mit den für das Hilbert'sche Axiomensystem notwendigen Relationen ein und zeigen, dass dieses alle Hilbert'schen Axiome erfüllt. Dabei erhalten wir nebenbei einige grundlegende geometrische Aussagen, die man in der Schule üblicherweise als anschaulich gegeben voraussetzt.

Definition 2.1.1 Unter der euklidischen Ebene $\mathbb{E} := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ verstehen wir den reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 , ausgestattet mit einem Skalarprodukt (als Messinstrument). Die Punkte dieser Geometrie sind die Elemente von \mathbb{R}^2 . Wir schreiben für einen Punkt A von \mathbb{E} oft einfach $A \in \mathbb{E}$. Weiter ist für $A \in \mathbb{E}$ und $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Menge

$$g := A + \mathbb{R}v := \{A + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade in \mathbb{E} . Ein Punkt P gehört zu g , falls $P \in g$ gilt, d.h. wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $P = A + tv$ gilt.

Durch Wahl einer Orthonormalbasis kann man bekanntlich immer annehmen, dass das gewählte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^2 ist. Dies werden wir im Folgendem oft stillschweigend ausnützen, zumal dies das auch im Schulunterricht gewöhnlich verwendete Skalarprodukt ist.

Unser Ziel ist es nun, zu überprüfen, dass unser Modell das Axiomensystem von Hilbert erfüllt. Bei einigen Axiomen ist dies mehr oder weniger offensichtlich; wir werden daher den Nachweis lediglich an einigen ausgewählten Axiomen explizit durchführen. Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, zeigen wir exemplarisch das erste Inzidenzaxiom:

Lemma 2.1.2 Es seien $A, B \in \mathbb{E}$ mit $A \neq B$. Dann gibt es genau eine Gerade AB , zu der A und B gehören.

Beweis Existenz: Mit $v := B - A$ gilt für $g := A + \mathbb{R}v$ offenbar $A, B \in g$.

Eindeutigkeit: Es sei $k := C + \mathbb{R}u$ eine weitere Gerade mit $A, B \in k$. Dann gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $C + su = A$ und $C + tu = B$, d.h. $(t - s)u = B - A$. Es sei nun $X \in g$. Dann gilt $X = A + r(B - A)$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$X = C + su + r(t - s)u = C + (s + rt - rs)u \in k,$$

also $g \subset k$. Analog zeigt man $k \subset g$, also die Eindeutigkeit. \square

Als Übung empfehlen wir, auch die anderen Inzidenzaxiome nachzuweisen.

Die Zwischenbeziehung definieren wir in naheliegender Weise:

Definition 2.1.3 Es seien $A \neq B \in \mathbb{E}$ und $g := A + \mathbb{R}(B - A)$ sei die eindeutig bestimmte Gerade durch A und B . Ist nun $C \in g$, dann gibt es genau ein $t \in \mathbb{R}$ mit $C = A + t(B - A)$. Dann liegt C zwischen A und B , falls $0 < t < 1$, gilt und die Strecke \overline{AB} ist definiert durch $\overline{AB} := \{A + t(B - A), t \in]0, 1[\}$.

Die Anordnungsaxiome aus Axiom 1.2.6 sind mit dieser Definition relativ einfach nachzuweisen. Mehr Probleme bereitet das Axiom von Pasch (Axiom 1.2.7), für dessen Nachweis wir eine einfache Charakterisierung dafür einführen, dass zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Geraden liegen.

Definition 2.1.4 Es sei $g := A + \mathbb{R}v$ eine Gerade. Ein Vektor $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ heißt Normalenvektor von g , falls $\langle v, n \rangle = 0$ gilt. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wie erwähnt, ein Skalarprodukt im \mathbb{R}^2 .

Wie man sich schnell überzeugt, unterscheiden sich zwei Normalenvektoren einer Geraden allenfalls um ein skalares Vielfaches; damit ist ein Normalenvektor einer Geraden im Wesentlichen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2.1.5 Es sei $g := A + \mathbb{R}v$ eine Gerade und n ein Normalenvektor von g . Man zeige

$$g = \{P \in \mathbb{R}^2; \langle P - A, n \rangle = 0\}.$$

Lemma 2.1.6 Es sei g eine Gerade mit $A \in g$ und Normalenvektor n . Dann liegen $P, Q \in \mathbb{E} \setminus g$ genau dann auf der gleichen Seite von g , wenn $p := \langle P - A, n \rangle$ und $q := \langle Q - A, n \rangle$ das gleiche Vorzeichen haben.

Beweis Es gilt $\overline{PQ} = \{P + t(Q - P); t \in]0, 1[\} = \{tQ + (1 - t)P; t \in]0, 1[\}$. Für $X = t_X Q + (1 - t_X)P \in \overline{PQ}$ hat man also

$$\langle X - A, n \rangle = t_X \langle Q - A, n \rangle + (1 - t_X) \langle P - A, n \rangle = qt_X + p(1 - t_X) =: f(t_X).$$

Offenbar ist f eine stetige, monotone (entweder wachsende oder fallende) Funktion, und es gilt $f(0) = p$ und $f(1) = q$. Weiter liegt nach Aufgabe 2.1.5 X genau dann auf g , wenn $f(t_X) = 0$ gilt. Als stetige, monotone Funktion hat f aber genau dann eine Nullstelle in $]0, 1[$, wenn q und p verschiedenes Vorzeichen haben, woraus die Behauptung folgt. \square

Damit können wir nun das Axiom von Pasch beweisen:

Satz 2.1.7 Es seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Weiter sei g eine Gerade, die keinen der drei Punkte A, B, C enthalte sowie die Strecke \overline{AB} schneide. Dann schneidet g auch \overline{BC} oder \overline{AC} .

Beweis Es sei S der Schnittpunkt von g mit \overline{AB} sowie n ein Normalenvektor von g . Gemäß Lemma 2.1.6 können wir (sonst ersetze man n durch $-n$) annehmen, dass $\langle A - S, n \rangle < 0$ und $\langle B - S, n \rangle > 0$ gilt. Weiter gilt nach Voraussetzung $\langle C - S, n \rangle \neq 0$.

Im ersten Fall sei $\langle C - S, n \rangle > 0$. Wieder aufgrund von Lemma 2.1.6 liegen dann C und A auf verschiedenen Seiten von g , d. h., g schneidet \overline{AC} . Der andere Fall geht analog. \square

Der Begriff des Halbstrahls übersetzt sich folgendermaßen:

Definition 2.1.8 Es seien $A, B \in \mathbb{E}$ mit $A \neq B$. Dann heißt

$$\overrightarrow{AB} := \{A + t(B - A), t > 0\}$$

der Halbstrahl von A in Richtung B .

Aufgabe 2.1.9 Man zeige: Sind $A, B, C \in \mathbb{E}$ mit $B, C \neq A$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
2. Es gibt ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $C - A = s(B - A)$.
3. A, B und C liegen auf einer Geraden und B und C liegen auf der gleichen Seite von A .

Um die metrischen Größen in \mathbb{E} , nämlich Streckenlängen und Winkel, einführen zu können, benötigen wir das Skalarprodukt als Messinstrument. Damit können wir die Länge einer Strecke wie gewohnt definieren.

Definition 2.1.10 1. Es seien $A, B \in \mathbb{E}$. Die Länge der Strecke \overline{AB} ist definiert durch

$$|AB| := \sqrt{\langle B - A, B - A \rangle}.$$

2. Zwei Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind kongruent, falls $|AB| = |CD|$ gilt.

Es ist eine einfache Übung nachzurechnen, dass mit dieser Definition die Kongruenzaxiome für Strecken von Axiom 1.2.12 erfüllt sind. Mithilfe des Längenbegriffs lässt sich auch die Zwischenbeziehung einfach charakterisieren:

Aufgabe 2.1.11 Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Punkt C liegt zwischen A und B .
2. Es gelten $|AC| < |AB|$ und $|BC| < |AB|$.
3. Es gilt $|AB| = |AC| + |BC|$.

Ebenso lässt sich jedem Winkel mithilfe des Skalarprodukts und der bekannten trigonometrischen Funktionen eine reelle Zahl, seine Größe, zuordnen. Dazu bezeichnen wir mit \arccos den Hauptwert des Arkuskosinus.

Definition 2.1.12 1. Sind \overrightarrow{AB} sowie \overrightarrow{AC} zwei Halbstrahlen mit gleichem Anfangspunkt A , so ist der Winkelwert des durch diese Halbstrahlen definierten Winkels $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ definiert durch

$$\sphericalangle BAC := \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) := \arccos \left(\frac{\langle B - A, C - A \rangle}{|AB| \cdot |AC|} \right).$$

2. Zwei Winkel $\angle(\underline{AB}, \underline{AC})$ und $\angle(\underline{A'B'}, \underline{A'C'})$ sind kongruent, wenn

$$\sphericalangle(\underline{AB}, \underline{AC}) = \sphericalangle(\underline{A'B'}, \underline{A'C'})$$

gilt.

Im strengen Sinne sind damit der Winkel $\angle(\underline{AB}, \underline{AC})$ und sein Winkelwert $\sphericalangle(\underline{AB}, \underline{AC})$ zu unterscheiden; oft werden aber diese beiden Objekte der Einfachheit halber identifiziert (man sollte sich allerdings der verschiedenen Bedeutungen durchaus bewusst sein!).

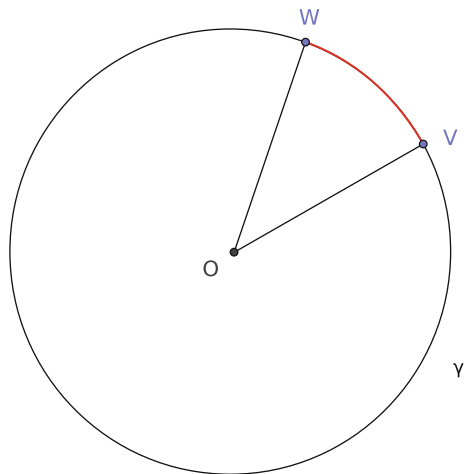
Aufgabe 2.1.13 *Man zeige, dass die Definition des Winkelwerts wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Punkte B und C auf den Halbstrahlen (den Schenkeln) abhängt.*

Mithilfe von etwas Analysis können wir zeigen, dass die Definition des Winkelwerts mit unserer intuitiven Vorstellung übereinstimmt:

Lemma 2.1.14 (Zirkellemma) Es sei $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, die übliche Parametrisierung des Einheitskreises, sowie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t_2 - t_1 \leq \pi$. Weiter seien $V := \gamma(t_1)$, $W := \gamma(t_2)$ und $O := (0; 0)$ der Mittelpunkt des Kreises. Dann gilt (vgl. Abb. 2.1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \sphericalangle VOW$$

Abb. 2.1 Zirkellemma



Beweis Offenbar gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = t_2 - t_1.$$

Wegen $|OV| = |OW| = 1$ liefert das Additionstheorem des Kosinus nun die Behauptung, wenn man zudem beachtet, dass $0 \leq t_2 - t_1 \leq \pi$ gilt. \square

Anschaulich zeigt dieses Lemma, dass der Winkelwert des durch den Kreismittelpunkt M und die Punkte V und W bestimmten Winkels genau der Länge des zugehörigen Kreisbogens auf dem Einheitskreis entspricht. Des Weiteren folgt daraus offenbar die Additivität nebeneinanderliegender Winkel. Mithilfe dieser Charakterisierung ist es nun nicht schwierig, die Axiome 1.2.17 nachzuweisen.

Aufgabe 2.1.15 Es sei $X \in \mathbb{E}$ ein Punkt mit $\|X\| = 1$. Man zeige, dass es dann genau ein $t \in [0; 2\pi[$ gibt mit $(\cos(t), \sin(t)) = X$.

Aufgabe 2.1.16 Man zeige, dass sich in der euklidischen Ebene Winkel im Sinn von Axiom 1.2.17 eindeutig abtragen lassen.

Interessanter wird es mit dem Kongruenzsatz „sws“ 1.2.19, für den wir nun in unserem Modell einen Beweis geben:

Satz 2.1.17 Es seien $\triangle ABC$ sowie $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke mit $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Dann gilt auch $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$.

Beweis Zunächst sieht man

$$\begin{aligned} \langle C - A, A - B \rangle &= -\cos(\sphericalangle BAC) \cdot |AC| \cdot |AB| \\ &= -\cos(\sphericalangle B'A'C') \cdot |A'C'| \cdot |A'B'| = \langle C' - A', A' - B' \rangle. \end{aligned}$$

Daher hat man auch

$$|BC| = |C - A + A - B| = \sqrt{|AC|^2 + 2\langle C - A, A - B \rangle + |AB|^2} = |B'C'|.$$

Somit folgt nun

$$\cos \sphericalangle CBA = \frac{\langle C - B, A - B \rangle}{|BC| \cdot |AB|} = \frac{\langle C - A, A - B \rangle}{|BC| \cdot |AB|} + \frac{|AB|}{|BC|} = \cos \sphericalangle C'B'A'$$

und daraus die Behauptung. \square

Die Axiomengruppe Parallelität besteht lediglich aus einem einzigen Axiom, nämlich dem Parallelenaxiom, dessen Nachweis in unserem Modell nicht allzu schwierig ist. Wir erweitern die Definition einer Parallelen geringfügig, um Parallelität zu einer Äquivalenzrelation zu machen:

Definition 2.1.18 Zwei Geraden g und h sind parallel, falls sie keinen Schnittpunkt haben oder $g = h$ gilt.

Parallelität erlaubt eine einfache Charakterisierung, mit deren Hilfe sich das Parallelenaxiom unmittelbar ergibt:

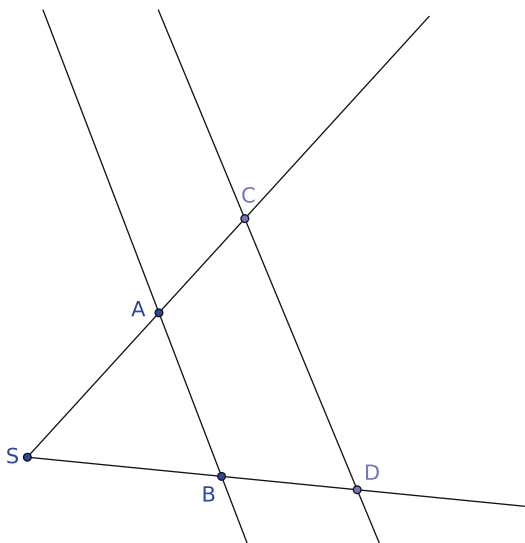
- Aufgabe 2.1.19**
1. Es seien $g = A + \mathbb{R}v$ und $k = B + \mathbb{R}u$ zwei Geraden. Man zeige, dass g und k genau dann parallel sind, wenn $v = tu$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{R}$ gilt.
 2. Man zeige das Parallelenaxiom 1.2.26: Ist g eine Gerade und $P \in \mathbb{E}$ ein Punkt, so gibt es maximal eine zu g parallele Gerade durch P .
 3. Sind g und h zwei Geraden und n ein Normalenvektor von g . Dann sind g und h genau dann parallel, wenn n auch ein Normalenvektor von h ist.

Eine weitere Anwendung der in Aufgabe 2.1.19 gegebenen Charakterisierung von Parallelität ist der Strahlensatz:

Satz 2.1.20 (Strahlensatz, vgl. Abb. 2.2) Es seien g, h zwei unterschiedliche Geraden, die einen gemeinsamen Punkt S besitzen, und von zwei verschiedenen parallelen Geraden (nicht durch S) in A und B bzw. C und D geschnitten werden (d. h. $AB \parallel CD$). Dann gilt

$$\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}.$$

Abb. 2.2 Strahlensatz



Beweis Nach Voraussetzung gelten $(C - S) = \alpha(A - S)$ und $D - S = \beta(B - S)$ sowie nach Aufgabe 2.1.9 wegen der Parallelität $D - C = \gamma(B - A)$ für geeignete $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt

$$\gamma(B - S + S - A) = \gamma(B - A) = D - C = D - S + S - C = \beta(B - S) - \alpha(A - S).$$

Daraus erhält man $(\beta - \gamma)(B - S) + (\gamma - \alpha)(A - S) = 0$. Da g und h nicht die gleiche Gerade sind, sind $B - S$ und $A - S$ linear unabhängige Vektoren, also folgt $\alpha = \gamma = \beta$ und damit die Behauptung. \square

Aufgabe 2.1.21 Man zeige die Umkehrung des Strahlensatzes: Werden zwei Strahlen, die von einem gemeinsamen Punkt S ausgehen, von zwei Geraden in A und B bzw. C und D geschnitten, sodass

$$\frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}$$

gilt, dann sind AB und CD parallel.

Das Axiom von Archimedes (Axiom 1.2.27) nachzuweisen, ist ebenfalls nicht weiter schwierig und bleibt dem Leser zur Übung überlassen. Etwas aufwendiger ist der Nachweis des Vollständigkeitsaxioms 1.2.28.

Satz 2.1.22 Es seien \mathbb{P}' Punkte und \mathbb{G}' Geraden eines Systems, welches die Axiome einer ebenen euklidischen Geometrie erfüllt mit $\mathbb{P} := \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}'$ und $\mathbb{G} := \{AB; A, B \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{G}'$, sodass die Relationen im System $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ die Relationen in \mathbb{E} fortsetzen. Dann gilt $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ und $\mathbb{G} = \mathbb{G}'$.

Beweis Wir zeigen dies in drei Schritten: Zunächst sei $P \in \mathbb{P}'$ ein Punkt, der zu der Geraden $AB \in \mathbb{G}$ mit $A, B \in \mathbb{P}$ gehört. Dann legen wir gemäß dem archimedischen Axiom die Strecke \overline{AB} so oft an A in Richtung P an, bis die Strecke $n\overline{AB}$ den Punkt P enthält. Den Endpunkt der Strecke $n\overline{AB}$ bezeichnen wir mit C . Offenbar gilt $C \in \mathbb{P}$. Daher lässt sich AB in der Form $A + \mathbb{R}(C - A)$ schreiben, und es gilt $C = A + 1(C - A)$. Es sei nun

$$T := \{t \in \mathbb{R}; A + t(C - A) \text{ liegt auf der gleichen Seite von } P \text{ wie } A\}.$$

Dann gilt $T \neq \emptyset$, da $0 \in T$. Weiter gilt offenbar $T < 1$, also ist T beschränkt. Es sei nun $s = \sup T$ und $Q := A + s(C - A) \in \mathbb{P}$. Die Idee des Beweises besteht nun darin, zu zeigen, dass $P = Q$ gilt.

Andernfalls liegt Q entweder auf der gleichen Seite wie A von P oder nicht. Im ersten Fall, d. h., Q ist auf der gleichen Seite wie A von P , gibt es wie oben ein k , sodass das k -fache Abtragen der Strecke \overline{QP} von Q aus den Punkt C enthält. Wir setzen nun $s' := s + \frac{1-s}{k}$ und $Q' := A + s'(C - A)$. Trägt man nun die Strecke $\overline{QQ'}$ genau k -mal von Q aus ab, so erhält man die Strecke \overline{QC} . Insbesondere gilt $s' > s$. Weil die Strecke \overline{QC} aber in der k -mal abgetragenen Strecke \overline{QP} enthalten ist, ist auch die Strecke $\overline{QQ'}$ in \overline{QP} enthalten. Daher liegt Q' auf der gleichen Seite von P wie Q , was der Wahl von s als Supremum von T widerspricht.

Analog zeigt man, dass Q auch nicht auf der anderen Seite von P liegen kann, was schließlich impliziert, dass $P = Q \in \mathbb{P}$ gilt.

Es sei nun $P \in \mathbb{P}'$ ein beliebiger Punkt. Dann wählen wir einen Punkt $S \in \mathbb{P}$ und betrachten die Gerade SP . Weiter wählen wir drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{P}$, sodass A, S, B auf einer Geraden liegen, S zwischen A und B liegt und $C \notin AB$ liegt. Nach dem Axiom 1.2.7 von Pasch schneidet dann SP entweder AC oder AB in X . Nach dem ersten Teil des Beweises ist $X \in \mathbb{P}$, und die Gerade SP stimmt mit SX überein. Wieder nach dem ersten Teil gilt dann auch $P \in \mathbb{P}$.

Der Abschluss des Beweises ist nun einfach: Es sei $\Gamma \in \mathbb{G}'$ eine Gerade. Diese enthält zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{P}' = \mathbb{P}$. Daher gilt $\Gamma = PQ \in \mathbb{G}$. \square

2.2 Grundlegende Aussagen der Mittelstufengeometrie

In diesem Abschnitt wiederholen wir die grundlegenden Aussagen der klassischen euklidischen Geometrie, wie sie so auch üblicherweise in der Schulmathematik besprochen werden. Wir werden in Bezug auf die Reihenfolge der Ergebnisse uns an den in der Schule üblichen Wegen orientieren. Die Aussagen jedoch, von denen viele in der Schule aus der unmittelbaren Anschauung gewonnen werden, weisen wir mit unseren Methoden nach und legen diese dann für die weitere Entwicklung zugrunde.

Als erstes Ergebnis zeigen wir, wie man den in Abschn. 1.2.3 aus den Axiomen abgeleiteten Nebenwinkelsatz 1.2.22 alternativ mit analytischen Methoden in unserem Modell erhalten kann und dabei eine quantitative Aussage erhält.

Satz 2.2.1 (Nebenwinkelsatz) Es seien $A, B, D \in \mathbb{E}$ drei Punkte auf einer Geraden g mit A zwischen B und D . Weiter sei $C \in \mathbb{E}$ ein Punkt nicht auf g . Dann gilt

$$\sphericalangle CAD = \pi - \sphericalangle BAC.$$

Beweis Da A zwischen B und D liegt, gilt $A = B + t(D - B)$ für ein $t \in]0, 1[$. Dies impliziert $t(D - A) = (t - 1)(B - A)$, also $D - A = s(B - A)$ für ein $s < 0$. Daher gilt

$$\frac{\langle D - A, C - A \rangle}{|AD| \cdot |AC|} = \frac{s \langle B - A, C - A \rangle}{|s| |AB| \cdot |AC|} = - \frac{\langle B - A, C - A \rangle}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Für $x \in [0, \pi]$ gilt $-\cos(x) = \cos(\pi - x)$, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir verwenden bereits im nächsten Satz das Parallelenaxiom. In den Kap. 3 und 4, speziell im Abschn. 4.5, werden wir dementsprechend sehen, dass der folgende Satz in Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist, nicht gilt (bzw. nicht sinnvoll formuliert werden kann).

Satz 2.2.2 (Stufenwinkelsatz bzw. Wechselwinkelsatz) Es seien g, g' ein Paar verschiedener paralleler Geraden sowie h eine Gerade, die g und g' in S und S' schneide. Es seien A und A' Punkte auf g und g' , die auf der gleichen Seite von h liegen. Weiter sei B ein Punkt auf h , sodass S und S' auf der gleichen Seite von B liegen. Dann gilt

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'SB.$$

Den Beweis dieses Satzes überlassen wir dem Leser zur Übung (dieser folgt im Übrigen auch aus dem Beweis des Satzes 1.2.25 zusammen mit dem Parallelenaxiom 1.2.26). Eine erste, etwas interessantere Folgerung ist der Satz über die Winkelsumme im Dreieck.

Satz 2.2.3 (Winkelsummensatz) Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Dann gilt

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = \pi.$$

Beweis Es sei g eine (die) Parallele zu AB durch C sowie A' und B' Punkte auf AB mit C zwischen A' und C' . Dann gilt aufgrund des Stufenwinkelsatzes 2.2.2 (vgl. Abb. 2.3)

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = \sphericalangle B'CA' = \pi. \quad \square$$

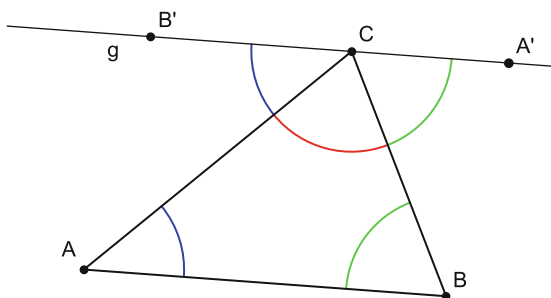
Eine unmittelbare Folgerung des Winkelsummensatzes ist der Satz vom Außenwinkel.

Definition 2.2.4 In einem Dreieck heißen die Nebenwinkel der Innenwinkel die Außenwinkel des Dreiecks.

Korollar 2.2.5 (Satz vom Außenwinkel) In einem Dreieck entspricht der Wert eines jeden Außenwinkels der Summe der Winkelwerte der beiden nicht anliegenden Innenwinkel; insbesondere ist jeder Außenwinkel größer als die beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Einer der grundlegenden Sätze der klassischen Schulgeometrie ist der Basiswinkelsatz:

Abb. 2.3 Zum Beweis des Winkelsummensatzes 2.2.3



Satz 2.2.6 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$. Dann gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA.$$

Beweis Dies ist eine direkte Anwendung des Axioms 1.2.19 bzw. des Kongruenzsatzes sws 2.1.17 auf die Dreiecke ABC und BAC . \square

Korollar 2.2.7 In jedem Dreieck liegt der größere Winkel der größeren Seite gegenüber: In einem Dreieck ABC gilt genau dann die Ungleichung $\sphericalangle BAC < \sphericalangle CBA$, wenn $|BC| < |AC|$ gilt.

Beweis Für „ \Leftarrow “ zeigen wir die Negierung der Aussage, d.h., wir gehen von der Ungleichung $|BC| \geq |AC|$ aus. Dann gibt es einen Punkt A' auf \overline{CB} mit $|A'C| = |AC|$ (vgl. Abb. 2.4). Anwendung des Außenwinkelsatzes 2.2.5 auf das Dreieck ABA' liefert $\sphericalangle CA'A \geq \sphericalangle CBA$. Mit dem Basiswinkelsatz folgt schließlich

$$\sphericalangle BAC \geq \sphericalangle A'AC = \sphericalangle CA'A \geq \sphericalangle CBA.$$

Die umgekehrte Richtung geht analog. \square

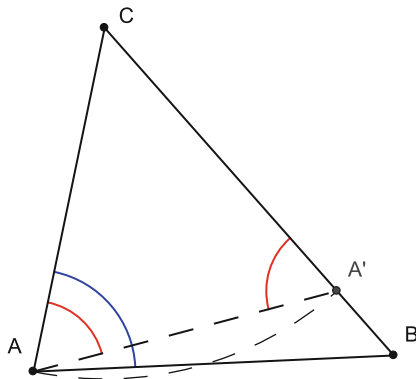
Eine unmittelbare Folgerung ist die Umkehrung des Basiswinkelsatzes.

Korollar 2.2.8 Es sei ABC ein Dreieck, in dem zwei Winkel übereinstimmen. Dann stimmen auch zwei Seiten überein.

In vielen Anwendungen spielt der sogenannte rechte Winkel eine fundamentale Rolle:

Definition 2.2.9 Ein Winkel mit dem Winkelwert $\frac{\pi}{2}$ heißt rechter (oder orthogonaler) Winkel.

Abb. 2.4 Zum Beweis von 2.2.7



Satz 2.2.10 Es seien g eine Gerade mit drei Punkten A, O, B , sodass O zwischen A und B liegt, sowie C ein Punkt nicht auf g . Dann sind äquivalent:

1. $\angle AOC$ ist ein rechter Winkel;
2. $\angle BOC$ ist ein rechter Winkel;
3. $\langle A - O, C - O \rangle = 0$;
4. $\langle B - O, C - O \rangle = 0$.

Beweis Die Äquivalenz von 1. und 2. ist eine direkte Folgerung aus dem analytischen Nebenwinkelsatz 2.2.1; die Äquivalenzen von 1. und 3. bzw. 2. und 4. folgen sofort aus der Definition 2.1.12 des Winkelwerts. \square

Ein zentrales Thema im Schulunterricht sind die Kongruenzsätze, denen wir uns im Folgenden zuwenden.

Definition 2.2.11 Zwei Dreiecke heißen kongruent, falls es eine Eckenbenennung ABC bzw. $A'B'C'$ gibt, sodass

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|, |BC| = |B'C'|$$

sowie

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C', \sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A' \text{ und } \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$$

gelten.

Zwei Dreiecke sind demnach kongruent, wenn sie in entsprechenden Seiten und entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Um einzusehen, dass zwei Dreiecke kongruent sind, reicht es oft, nur von einem Teil dieser Größen zu wissen, dass sie übereinstimmen. Die Kongruenzsätze liefern Aussagen darüber, welche Größen dies sein müssen, um bereits auf Kongruenz schließen zu können. Wir werden zum Beweis dieser Sätze verschiedene Methoden – sowohl elementargeometrisch als auch analytisch – verwenden, um die Vielfalt dieser Möglichkeiten aufzuzeigen. Es ist eine gute Übung, sich für die einzelnen Aussagen alternative Beweisideen zu überlegen.

Satz 2.2.12 (wsw) Es seien ABC und $A'B'C'$ Dreiecke mit $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Dann sind ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Beweis Für diese Aussage (vgl. Abb. 2.5) geben wir einen elementargeometrischen Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $|BC| \leq |B'C'|$ ist. Trägt man nun die Strecke $|BC|$ von B' ausgehend auf $\overline{B'C'}$ ab, so sei C'' der Endpunkt dieser Strecke: Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C''$ nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent. Daher gilt

$$\sphericalangle B'A'C'' = \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

Dies impliziert aber $C'' = C'$ und damit die Behauptung. \square

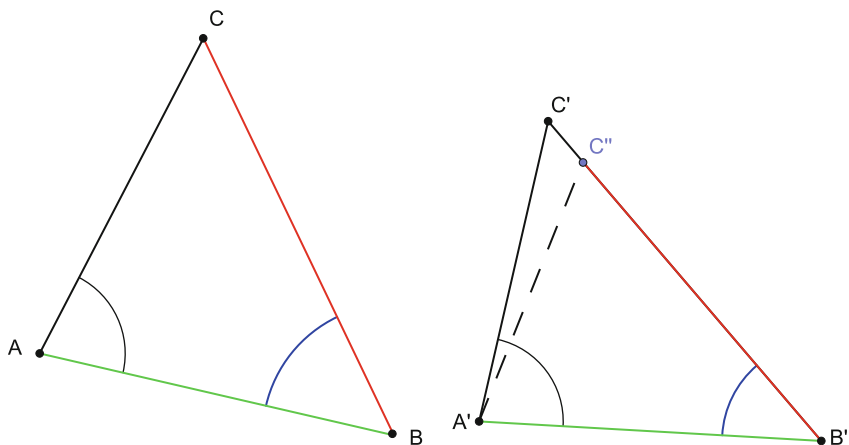


Abb. 2.5 Kongruenzsatz wsw

Satz 2.2.13 (sss) Es seien ABC und $A'B'C'$ Dreiecke mit $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ und $|BC| = |B'C'|$. Dann sind ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Beweis Dies beweisen wir mit analytischen Methoden: Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt die Identität (Polaritätsformel)

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (|v|^2 + |w|^2 - |v - w|^2). \quad (2.1)$$

Mit $v := B - A$, $w := C - A$ sowie $v' := B' - A'$ und $w' := C' - A'$ zeigt (2.1), dass die Winkelwerte $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'C'$ übereinstimmen. Dann folgt die Behauptung wieder aus Satz 2.1.17. \square

Satz 2.2.14 (ssW, oft auch Ssw) Es seien ABC und $A'B'C'$ Dreiecke mit

$$|AB| = |A'B'| \geq |AC| = |A'C'| \text{ und } \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'.$$

Dann sind ABC und $A'B'C'$ kongruent.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $|CB| = |C'B'|$ ist. Andernfalls können wir $|CB| < |C'B'|$ annehmen (vgl. Abb. 2.6). Dann gibt es einen Punkt B'' auf der Strecke $C'B'$, sodass $|C'B''| = |CB|$ gilt. Somit sind die Dreiecke ABC und $A'B''C'$ kongruent. Insbesondere gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B''A'$ und $|B''A| = |AB| = |A'B'|$. Nach dem Basiswinkelsatz gilt daher $\sphericalangle A'B'B'' = \sphericalangle A'B''B'$. Daher ist $\angle C'B''A'$ zum Außenwinkel von $\angle A'B'C' = \angle A'B'B''$ kongruent. Daher hat man

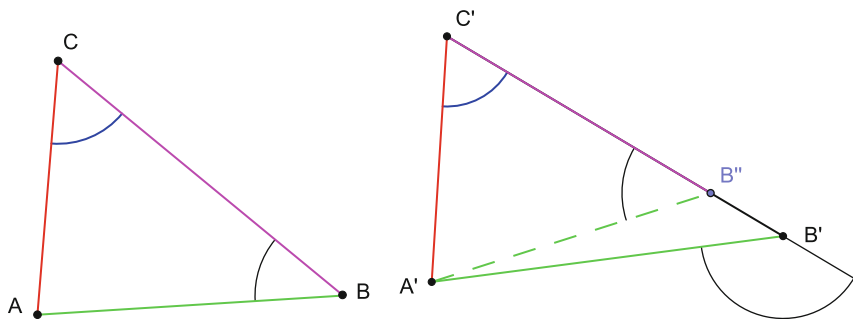


Abb. 2.6 Der Kongruenzsatz ssW

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B''A' > \sphericalangle A'C'B'' = \sphericalangle ACB.$$

Nach Korollar 2.2.7 folgt daraus aber $|AC| > |AB|$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Aufgabe 2.2.15 Man zeige, dass im Satz 2.2.14 (mit der dort verwendeten Notation) die Voraussetzung $|AB| \geq |AC|$ notwendig ist.

2.3 Abbildungen

Wie in den meisten mathematischen Disziplinen spielen Abbildungen – typischerweise strukturverträgliche – auch in der Geometrie eine entscheidende Rolle. Beispielsweise wird in der Schule die Kongruenz von Dreiecken oftmals über Kongruenzabbildungen eingeführt. Dabei versteht man unter einer Kongruenzabbildung eine aus Translationen (Verschiebungen), Rotationen (Drehungen) und Spiegelungen zusammengesetzte Abbildung. Wir werden in diesem Abschnitt diese und allgemeinere Abbildungen untersuchen.

Definition 2.3.1 Eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn f geraden- und verhältnistreu ist, d. h., für alle $A, B, C, D \in \mathbb{E}$ und jede Gerade $g \in \mathbb{G}$ gilt

- (i) $f(g) \in \mathbb{G}$ (Geradentreue),
- (ii) $|f(A)f(B)| \cdot |CD| = |f(C)f(D)| \cdot |AB|$ (Verhältnistreue).

Offenbar ist eine Abbildung genau dann verhältnistreu, wenn es eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$ für alle $A, B \in \mathbb{E}$. Man nennt dieses λ auch den Streckfaktor von f .

- Aufgabe 2.3.2** 1. Man zeige, dass die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen zusammen mit der üblichen Verkettung von Abbildungen eine Gruppe ist.
2. Es seien $Z \in \mathbb{E}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine Abbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ der Form $X \mapsto \lambda(X - Z) + Z$ heißt *zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor λ* . Man zeige, dass zentrische Streckungen Ähnlichkeitsabbildungen sind. Gibt es weitere Ähnlichkeitsabbildungen?

Als erste Beobachtung stellen wir fest, dass Ähnlichkeitsabbildungen die Zwischenrelation respektieren.

Lemma 2.3.3 Es seien $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung und $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei Punkte auf einer Geraden mit B zwischen A und C . Dann liegt auch $f(B)$ zwischen $f(A)$ und $f(C)$.

Beweis Angenommen, $f(B)$ liegt nicht zwischen $f(A)$ und $f(C)$. Dann kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $f(A)$ zwischen $f(B)$ und $f(C)$ liegt. Mithilfe von Aufgabe 2.1.11 erhält man

$$1 < \frac{|f(B)f(C)|}{|f(A)f(C)|} = \frac{|BC|}{|AC|} < 1,$$

was einen Widerspruch darstellt. \square

Satz 2.3.4 Jede Ähnlichkeitsabbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$ lässt sich als lineare Abbildung des \mathbb{R}^2 auffassen.

Beweis Es seien $U \in \mathbb{R}^2$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann liegen die Punkte 0 , U und αU auf einer Geraden. Wir betrachten nur den Fall $\alpha > 1$ (die anderen Fälle gehen analog), d. h., U liegt zwischen 0 und αU . Da $|0(\alpha U)| = \alpha|0U|$ gilt, liefert die Verhältnistreue sofort $|0f(\alpha U)| = \alpha|0f(U)|$. Weil f geradentreu ist, liegen 0 , $f(U)$ und $f(\alpha U)$ auch auf einer Geraden, und aufgrund des letzten Lemmas liegt $f(U)$ zwischen 0 und $f(\alpha U)$. Insgesamt folgt $f(\alpha U) = \alpha f(U)$.

Es sei nun auch $W \in \mathbb{R}^2$. Dann liegen U , W und $V := \frac{1}{2}(U + W)$ auf einer Geraden, und es gilt $|UV| = |WV|$. Die Verhältnistreue und die Geradentreue liefern einerseits $|f(U)f(V)| = |f(W)f(V)|$ und andererseits, dass $f(U)$, $f(W)$ und $f(V)$ auf einer Geraden liegen. Wegen Lemma 2.3.3 liegt zudem $f(V)$ zwischen $f(U)$ und $f(W)$. Dies impliziert

$$\frac{1}{2}(f(U) + f(W)) = f(V) = f\left(\frac{1}{2}(U + W)\right) = \frac{1}{2}f(U + W),$$

wobei die letzte Umformung aus dem ersten Teil des Beweises folgt. Dies impliziert unmittelbar $f(U + W) = f(U) + f(W)$. \square

Korollar 2.3.5 Jede Ähnlichkeitsabbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ lässt sich in der Form $f(x) = Ax + b$ mit $b \in \mathbb{E}$ und einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ darstellen.

Beweis Die Abbildung $g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, $x \mapsto f(x) - f(0)$, erfüllt die Voraussetzung von 2.3.4, d. h., es gilt $g(x) = Ax$ für eine geeignete Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Setzt man $b := f(0)$, so erhält man $f(x) = Ax + b$. \square

Aufgabe 2.3.6 Man zeige, dass Ähnlichkeitsabbildungen winkeltreu sind, d. h., sind $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung und $A, B, C \in \mathbb{E}$, so gilt

$$\sphericalangle f(B)f(A)f(C) = \sphericalangle BAC.$$

Ähnlichkeitsabbildungen kann man, wie bereits direkt nach Definition 2.3.1 bemerkt, dadurch charakterisieren, dass $|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$ mit einem geeigneten $\lambda > 0$ gilt. Ein Spezialfall liegt vor, falls dieses λ den Wert eins annimmt.

Definition 2.3.7 Eine Ähnlichkeitsabbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine Kongruenzabbildung, falls f längentreu ist, d. h.

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

für alle $A, B \in \mathbb{E}$ gilt.

Bemerkung 2.3.8 Ist $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Streckfaktor λ , so ist $\frac{1}{\lambda}f$ eine Kongruenzabbildung.

Lemma 2.3.9 Ist $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Kongruenzabbildung mit $f(0) = 0$, so ist die zu f gemäß Satz 2.3.4 gehörende Matrix A orthogonal, d. h. $A \in O_2(\mathbb{R})$ (es gilt $A^{-1} = A^T$).

Beweis Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 2.3.4 und der Gl. (2.1), die bereits im Beweis des Satzes 2.2.13 verwendet wurde. \square

Korollar 2.3.10 1. Jede Kongruenzabbildung f ist von der Form $f(x) = Ax + b$ mit einer orthogonalen Matrix $A \in O_2(\mathbb{R})$.

2. Jede Ähnlichkeitsabbildung f ist von der Form $f(x) = \lambda Ax + b$ mit einer orthogonalen Matrix $A \in O_2(\mathbb{R})$ und einem $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. \square

Dass die von uns definierten Kongruenzabbildungen gerade die in der Schule betrachteten Drehungen, Spiegelungen und Translationen sind, ist die wesentliche Aussage des folgenden Satzes:

Satz 2.3.11 Jede Kongruenzabbildung mit $f(0) = 0$ ist entweder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden oder eine Drehung um den Ursprung.

Beweis Nach Lemma 2.3.4 ist f von der Form $f(x) = Ax$ mit einer nach Lemma 2.3.9 orthogonalen Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Insbesondere bedeutet das $\det(A) = \pm 1$. Weiter gilt für orthogonale Matrizen bekanntlich

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^\top = A^{-1} = \pm 1 \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Im Fall von $\det(A) = 1$ impliziert das

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(A) = a^2 + b^2 = 1.$$

Daher gibt es dann ein $\alpha \in [0; 2\pi[$ mit $a = \cos(\alpha)$ und $b = \sin(\alpha)$, und A ist die Drehmatrix zum Winkel α

$$A = D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Im Fall $\det(A) = -1$ erhält man

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad -\det(A) = a^2 + b^2 = 1.$$

Man rechnet dann schnell nach, dass A genau die zwei Eigenwerte 1 und -1 besitzt und $v := (b, 1 - a)$ und $w := (a - 1, b)$ zugehörige orthogonale Eigenvektoren sind. Also ist A Spiegelungsmatrix zur Spiegelung an $g := \mathbb{R}v$. \square

Aufgabe 2.3.12 Man zeige, dass sich jede Drehung um den Ursprung als Komposition von Spiegelungen an Ursprungsgeraden schreiben lässt.

Satz 2.3.13 Zwei (nicht entartete) Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind genau dann kongruent (in dieser Bezeichnung), wenn es eine Kongruenzabbildung $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ gibt mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$.

Beweis „ \Leftarrow “ Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition einer Kongruenzabbildung und z. B. dem Kongruenzsatz 2.2.13 oder der Aufgabe 2.3.6.

„ \Rightarrow “ Weil das Dreieck ABC nicht entartet ist, sind die Vektoren $v := B - A$ und $w := C - A$ linear unabhängig, also eine Basis des \mathbb{R}^2 . Die lineare Abbildung $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $h(v) := v' := B' - A'$ und $h(w) := w' := C' - A'$.

Es sei nun $u \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor. Dieser besitzt eine Darstellung $u = \alpha v + \beta w$, und es gilt

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \alpha^2 \|v\|^2 + \beta^2 \|w\|^2 + 2\alpha\beta \langle v, w \rangle.$$

Auf der anderen Seite gilt $h(u) = \alpha v' + \beta w'$ und damit

$$\|h(u)\|^2 = \langle h(u), h(u) \rangle = \alpha^2 \|v'\|^2 + \beta^2 \|w'\|^2 + 2\alpha\beta \langle v', w' \rangle.$$

Die Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ impliziert aber $\|v\| = \|v'\|$, $\|w\| = \|w'\|$ sowie $\langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle$. Ein Vergleich der beiden obigen Gleichungen für die Skalarprodukte zeigt nun $\|u\| = \|h(u)\|$; somit ist h längentreu. Setzt man nun

$$f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, x \mapsto h(x - A) + A',$$

so ist f eine Kongruenzabbildung und erfüllt $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ sowie $f(C) = C'$. \square

In vielen Lehrbüchern wird die Kongruenz von zwei Dreiecken nicht wie in Definition 2.2.11 definiert, sondern über die Existenz einer Kongruenzabbildung zwischen den beiden Dreiecken (vgl. z.B. Müller-Philipp und Gorski 2012, Kap. 4, Definition 11). Die Bedeutung des Satzes 2.3.13 liegt darin, dass er aussagt, dass beide Definitionen äquivalent sind.

Aufgabe 2.3.14 *Man nennt zwei Dreiecke ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die beiden Dreiecke ineinander überführt. Man zeige, dass zwei Dreiecke genau dann ähnlich sind, wenn sie in entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Trifft dies auch auf Vierecke zu?*

2.4 Sätze über Polygone am Kreis

In diesem Abschnitt besprechen wir einige Sätze, die (derzeit leider) nicht mehr verbindlich im Lehrplan der Mittelstufe verankert sind. Wir beginnen mit dem Peripheriewinkelsatz, der eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes des Thales darstellt.

Definition 2.4.1 Es sei $M \in \mathbb{E}$ ein Punkt und $r > 0$. Dann heißt

$$K(M; r) := \{X \in \mathbb{E}; |XM| = r\}$$

euklidischer Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r .

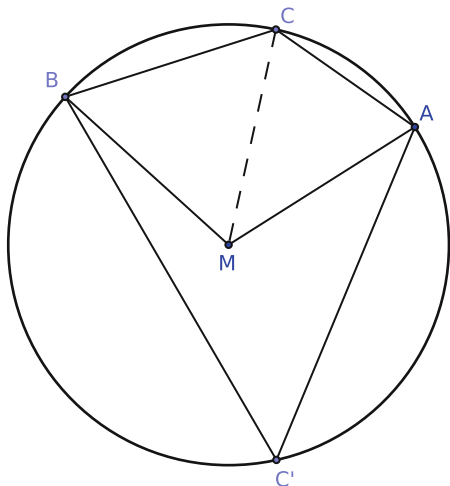
Bemerkung 2.4.2 Bekanntlich ist $K(M; r)$ das Bild der Abbildung

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}; t \mapsto M + r(\cos(t), \sin(t)).$$

Wir führen noch einige Begriffe ein: Sind A, B zwei Punkte auf einem Kreis $K(M; r)$, so heißt die Strecke \overline{AB} eine Kreissehne. Enthält diese den Mittelpunkt M des Kreises, so spricht man von einem Durchmesser des Kreises. Dieser teilt den Kreis in zwei Halbkreise.

Abb. 2.7

Peripheriewinkelsatz



Satz 2.4.3 (Peripheriewinkelsatz) Es sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M sowie $A, B, C, C' \in K$, wobei C auf der anderen Seite von AB wie M liege, C' aber auf der gleichen Seite (vgl. Abb. 2.7). Dann gelten

$$\sphericalangle BCA = \pi - \frac{\sphericalangle AMB}{2} \text{ sowie } \sphericalangle AC'B = \frac{\sphericalangle AMB}{2}.$$

Beweis Wir beweisen nur die erste Aussage und überlassen die zweite dem Leser. Dazu setze man $\alpha := \sphericalangle AMC$ und $\beta := \sphericalangle CMB$. Weil die Dreiecke MAC und MCB gleichschenkelig sind, gelten aufgrund des Basiswinkelsatzes 2.2.6 und des Winkelsummensatzes 2.2.3

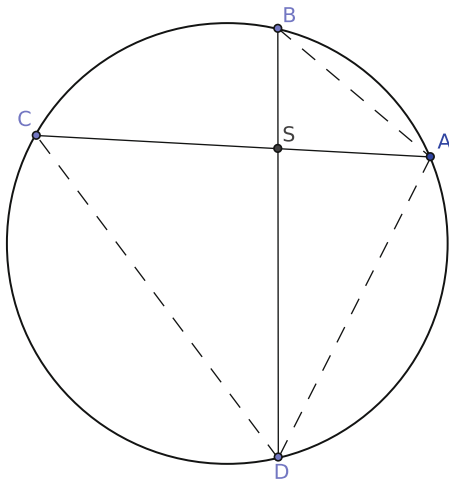
$$\sphericalangle MCA = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \text{ und } \sphericalangle BCM = \frac{1}{2}(\pi - \beta).$$

Addition liefert die Behauptung. □

Eine etwas vereinfachte, für viele Anwendungen aber ausreichende Form des Peripheriewinkelsatzes, der manchmal auch Umfangswinkelsatz genannt wird, ist offenbar, dass alle Winkel eines Kreisbogens über einer Sehne gleich sind. Ist die Sehne ein Durchmesser, so erhält man den Satz des Thales, dessen Beweis identisch zum Beweis des Peripheriewinkelsatzes ist.

Satz 2.4.4 (Satz des Thales) Sind $A, B \in K(M; r)$, sodass $M \in AB$ gilt (d. h. \overline{AB} ist ein Kreisdurchmesser), und ist $C \in K(M; r)$, so gilt $\sphericalangle BCA = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2.4.5 Man zeige die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (und des Satzes des Thales): Ist ABC ein Dreieck und $K(M; r)$ ein Kreis mit $A, B \in K(M; r)$,

Abb. 2.8 Sehnensatz

sodass C nicht auf der gleichen Seite von AB wie M liegt und $\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\sphericalangle BMA}{2}$ gilt, dann liegt C auf dem Kreisbogen: $C \in K(M; r)$.

Es gibt eine Vielzahl weiterer Aussagen über Punkte auf einem Kreis, die sich aus dem (oder ähnlich wie der) Peripheriewinkelsatz ableiten lassen. Wir stellen beispielhaft eine weitere davon vor und animieren den Leser dazu, sich weitere Aussagen selbst zu überlegen oder in der Literatur nachzulesen (vgl. Agricola und Friedrich 2001, Abschn. 2.3).

Satz 2.4.6 (Sehnensatz, vgl. Abb. 2.8) Es seien $K(M; r)$ ein Kreis und $A, B, C, D \in K(M; r)$ paarweise verschieden, sodass $S := \overline{AC} \cap \overline{BD}$ im Inneren des Kreises liege. Dann gilt $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$.

Beweis Mit dem Peripheriewinkelsatz 2.4.3 hat man $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Ferner gilt wegen des Scheitelwinkelsatzes 1.2.23 $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$. Somit sind aufgrund Aufgabe 2.3.14 die Dreiecke ABS und DSC ähnlich, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. \square

Aufgabe 2.4.7 (Sekantensatz) Es seien $K(M; r)$ ein Kreis und $A, B, C, D \in K(M; r)$ paarweise verschieden, sodass der Schnittpunkt $S = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ der Geraden AC und BD außerhalb von K liege. Dann gilt $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$.

Für Dreiecke, die den Satz des Thales erfüllen, folgt, dass alle Eckpunkte des Dreiecks auf einem Kreis liegen. Diese Aussage gilt jedoch in der euklidischen Geometrie immer.

Definition 2.4.8 Es sei \overline{AB} eine Strecke mit Mittelpunkt M . Eine Gerade m mit $M \in m$, die orthogonal zu AB ist, heißt Mittelsenkrechte von \overline{AB} .

Dass die Mittelsenkrechte einer Strecke eindeutig bestimmt ist, folgt aus folgendem Lemma.

Lemma 2.4.9 Es sei m eine Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Dann gilt

$$m = \{P \in \mathbb{E}; |AP| = |BP|\}.$$

Beweis Zunächst sei M der Mittelpunkt von \overline{AB} .

„ \Leftarrow “: Es sei $P \in m$. Im Fall $P = M$ ist die Aussage klar. Gilt $P \neq M$, so sind die Dreiecke AMP und PMB nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent, woraus die Behauptung folgt.

„ \Rightarrow “: Es sei P mit $|AP| = |BP|$. Dann sind die Dreiecke AMP und MBP nach dem Kongruenzsatz 2.2.13 kongruent, also sind die Nebenwinkel $\angle PMA$ und $\angle BMP$ gleich groß. Damit folgt die Behauptung aus dem Nebenwinkelsatz 2.2.1. \square

Als unmittelbare Folgerung erhält man

Satz-Definition 2.4.10 Die Mittelsenkrechten des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der von allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat. Dieser heißt *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks.

Beweis Der Beweis ist eine direkte Folgerung aus der Transitivität der Gleichheitsrelation und Lemma 2.4.9. Die Tatsache, dass sich je zwei Mittelsenkrechten eines euklidischen Dreiecks immer schneiden, folgt aus dem Parallelenaxiom, und der Beweis bleibt dem Leser überlassen. \square

Der Peripheriewinkelsatz hilft auch bei der Frage, wann ein Viereck einen Umkreis besitzt. In unserer Notation ist ein Viereck $ABCD$ ein konvexes n -Eck mit vier Eckpunkten A, B, C und D , sodass die Strecken (Seiten) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und \overline{DA} sich nicht schneiden, die *Diagonalen* \overline{AC} und \overline{BD} dagegen einen gemeinsamen Punkt besitzen. Vierecke, die einen Umkreis besitzen, nennen wir *Sehnnvierecke*. Wir werden die Ecken eines Vierecks immer positiv orientiert bezeichnen: Für ein Sehnnviereck heißt das, dass es vier Zahlen $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ mit $t_4 - t_1 < 2\pi$ gibt, sodass $A = \gamma(t_1)$, $B = \gamma(t_2)$, $C = \gamma(t_3)$ und $D = \gamma(t_4)$ gelten, wobei γ die Abbildung aus 2.4.2 ist.

Satz 2.4.11 Ein Viereck ist genau dann ein Sehnnviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu π ergänzen.

Beweis Die Richtung „ \Rightarrow “ ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 2.4.3. Für die umgekehrte Richtung stellt man zunächst fest, dass drei der vier Eckpunkte wegen

Satz 2.4.10 auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dass auch der vierte Eckpunkt auf diesem Kreis liegt, folgt dann aus der Umkehrung des Peripheriwinkelsatzes 2.4.5. \square

Für Sehnenvierecke ergibt sich ein interessanter Zusammenhang zwischen den Seitenlängen und den Diagonalenlängen eines solchen Vierecks.

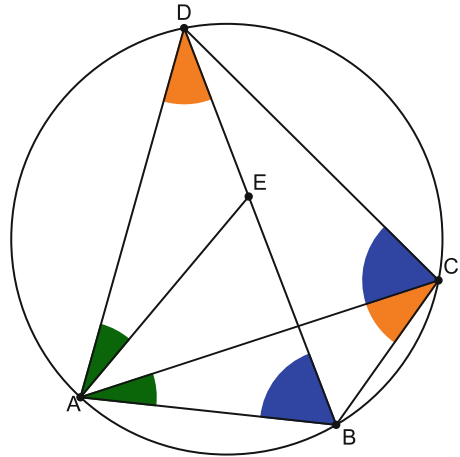
Satz 2.4.12 (Satz von Ptolemäus) Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck in positiver Orientierung, so gilt

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

Beweis Wir wählen einen Punkt $E \in |BD|$, sodass $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAC$ gilt (dies geht wegen der Möglichkeit, Winkel abzutragen). Wir beschränken uns nun auf den in Abb. 2.9 dargestellten Fall, dass $2 \cdot \sphericalangle BAC < \sphericalangle BAD$ gilt, und überlassen die (analog zu behandelnden) anderen Fälle dem Leser. Wegen des Peripheriwinkelsatzes 2.4.3 gilt dann $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB$, weil beides Winkel über der Sehne \overline{AB} sind. Da die beiden Dreiecke ABC und AED nach Konstruktion zudem in den Winkeln bei A übereinstimmen, sind sie nach Aufgabe 2.3.14 ähnlich. Daher gilt

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \text{ also } |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |DE|.$$

Abb. 2.9 Satz von Ptolemäus



Weiter gelten $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$ sowie $\sphericalangle DCA = \sphericalangle EBA$ (Ersteres nach Wahl von E , Letzteres wieder nach Satz 2.4.3). Somit sind auch die Dreiecke ABE und ACD ähnlich, d. h.

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \text{ also } |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BE|.$$

Addition der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. \square

Im Folgenden betrachten wir noch Kreistangenten.

Definition 2.4.13 Eine Gerade g heißt Tangente an den Kreis $K(M; r)$, wenn die Menge $g \cap K(M; r)$ aus genau einem Punkt besteht.

Bemerkung 2.4.14 Es sei g eine Gerade, $K(M; r)$ ein Kreis sowie $B \in K(M; r) \cap g$. Dann ist g genau dann Tangente an $K(M; r)$, falls $g \perp MB$ (d. h., g und MB sind orthogonal) gilt.

Beweis Man kann g in der Form $g = B + \mathbb{R}v$ mit $v \neq 0$ schreiben; insbesondere hat man $|BM| = r$. Im Folgenden wenden wir 2.2.10 an:

„ \implies “ Ist $\langle v, B - M \rangle \neq 0$, so hat man auch

$$s := -\frac{2\langle B - M, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \neq 0.$$

Nachrechnen zeigt, dass für $B' := B + sv \in g$ ebenfalls $|B'M| = r$ gilt. Nun gilt offenbar dann $B' \neq B$, somit besitzt $K(M; r) \cap g$ mindestens zwei Elemente, also ist g dann keine Tangente.

„ \impliedby “ Im Fall $\langle v, B - M \rangle = 0$ gilt für jedes $t \neq 0$ offenbar

$$|B + tv - M|^2 = |B - M|^2 + t^2|v|^2 > r^2,$$

somit haben g und $K(M; r)$ dann außer B keine weiteren gemeinsamen Punkte, also ist g dann Tangente an $K(M; r)$. \square

Aufgabe 2.4.15 Es sei K ein Kreis in der euklidischen Ebene sowie $A, B, C \in K$ paarweise verschieden. Weiter seien t_A die Tangente an K in A sowie $S := BC \cap t_A$, wobei S auf der anderen Seite von AB wie C liege. Man zeige

a) (Satz vom Sehnentangentenwinkel) $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ACB$.

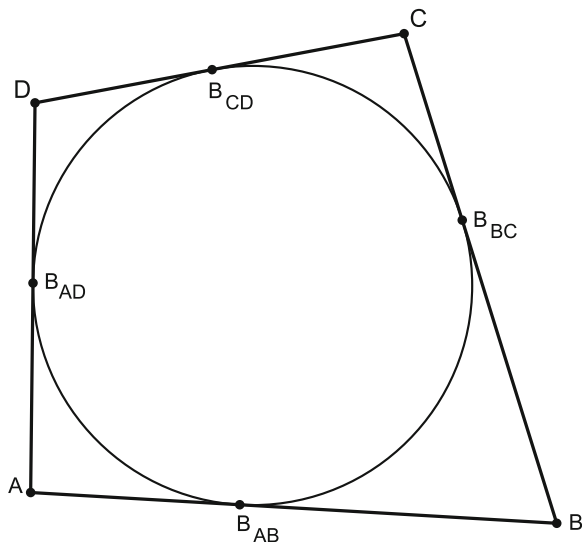
b) (Sehnentangentensatz) $|BS| \cdot |CS| = |AS|^2$.

Lemma 2.4.16 (Kreistangentensatz) Es sei K ein Kreis und t_1 bzw. t_2 Tangenten an K in den Punkten B_1 und B_2 . Weiter sei $S := t_1 \cap t_2$ der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Dann gilt $|B_1S| = |B_2S|$.

Beweis Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Kongruenzsatzes ssW 2.2.14. \square

Abb. 2.10

Tangentenviereck



Definition 2.4.17 Ein Viereck $ABCD$ heißt ein Tangentenviereck (vgl. Abb. 2.10), wenn es einen Kreis K gibt, sodass alle Seiten AB , BC , CD und AD Tangenten an K sind.

Satz 2.4.18 Ist das Viereck $ABCD$ ein Tangentenviereck, dann gilt für die Viereckseiten $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Beweis Es seien B_{AB} , B_{BC} , B_{CD} und B_{AD} die Berührungspunkte der entsprechenden Viereckseiten. Wegen des Kreistangentensatzes gelten dann

$$|AB_{AB}| = |AB_{AD}|, |BB_{AB}| = |BB_{BC}|, |CB_{BC}| = |CB_{CD}|, |DB_{CD}| = |DB_{AD}|.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AB_{AB}| + |BB_{AB}| + |CB_{CD}| + |DB_{CD}| \\ &= |AB_{AD}| + |BB_{BC}| + |CB_{BC}| + |DB_{AD}| = |AD| + |BC|. \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4.19 (Fermat-Torricelli-Punkt) Es sei ABC ein Dreieck derart, dass jeder Innenwinkel kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ sei. Die Punkte A' , B' und C' seien außerhalb des Dreiecks ABC so gewählt, dass $A'BC$, $AC'B$ und $CB'A$ gleichseitige Dreiecke sind. Man zeige:

- Die Umkreise der Dreiecke $A'BC$, $AC'B$ und $CB'A$ schneiden sich in einem Punkt F mit $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = \frac{2\pi}{3}$.
- Es gilt $F = AA' \cap BB' \cap CC'$.
- Für jeden weiteren Punkt F' gilt

$$|AF| + |BF| + |CF| \leq |AF'| + |BF'| + |CF'|.$$

2.5 Besondere Punkte im Dreieck

In Dreiecken gibt es einige besonders ausgezeichnete Punkte, denen wir uns in diesem Abschnitt zuwenden wollen. Zunächst gehen wir auf zwei Sätze ein, die besondere Lagen in einem Dreieck kennzeichnen.

Definition 2.5.1 Es sei $P \in AB \setminus \{A, B\}$ ein Punkt auf der Geraden AB . Dann lässt sich P schreiben als $P = \tau A + (1 - \tau)B$ für ein $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Der Quotient $[P; A, B] := \frac{1 - \tau}{\tau}$ heißt dann das Teilverhältnis von P bzgl. des (geordneten) Paares (A, B) .

Das Teilverhältnis trägt seinen Namen zurecht, wie folgende Aufgabe zeigt:

Aufgabe 2.5.2 Es seien A, B und P drei Punkte auf einer Geraden. Man zeige:

1. Ist $[P; A, B]$ das Teilverhältnis von P bzgl. (A, B) , so ist $\frac{1}{[P; A, B]}$ das Teilverhältnis von P bzgl. (B, A) .
2. Der Punkt P liegt genau dann zwischen A und B , wenn $[P; A, B] > 0$ gilt.
3. Ist $[P; A, B]$ das Teilverhältnis von P bzgl. (A, B) , so gilt

$$\frac{|AP|}{|BP|} = |[P; A, B]|.$$

Satz 2.5.3 (Satz von Menelaos) Es seien ABC ein Dreieck, $A' \in BC \setminus \{B, C\}$, $B' \in CA \setminus \{C, A\}$, $C' \in AB \setminus \{A, B\}$ sowie α, β und γ so gewählt, dass,

$$A' = \alpha B + (1 - \alpha)C, \quad B' = \beta C + (1 - \beta)A \quad \text{und} \quad C' = \gamma A + (1 - \gamma)B$$

gilt. Dann liegen die Punkte A', B' und C' genau dann auf einer Geraden, wenn für das Produkt der Teilverhältnisse

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} = -1$$

gilt (vgl. Abb. 2.11).

Beweis Es gelten

$$A' - B' = (1 - \beta)(C - A) + \alpha(B - C) = (1 - \beta - \alpha)(C - A) + \alpha(B - A)$$

und

$$A' - C' = (1 - \alpha)(C - B) + \gamma(B - A) = (1 - \alpha)(C - A) + (\alpha + \gamma - 1)(B - A).$$

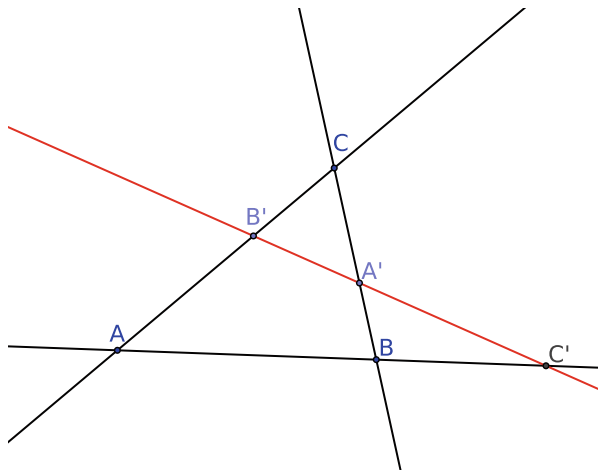


Abb. 2.11 Satz von Menelaos

Die Punkte A' , B' und C' liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $A' - B'$ und $A' - C'$ linear abhängig sind. Da die Vektoren $C - A$ und $B - A$ eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden, ist dies genau dann der Fall, wenn die Matrix $M := \begin{pmatrix} 1 - \beta - \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha + \gamma - 1 \end{pmatrix}$ singulär ist, also

$0 = \det(M) = (1 - \beta - \alpha)(\alpha + \gamma - 1) - \alpha(1 - \alpha) = -1 + \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma$ gilt. Addition von $\alpha\beta\gamma$ und Division durch $-\alpha\beta\gamma$ liefert die Behauptung. \square

Satz 2.5.4 (Satz von Ceva) Es seien ABC ein Dreieck sowie $A' \in BC \setminus \{B, C\}$, $B' \in CA \setminus \{C, A\}$ und $C' \in AB \setminus \{A, B\}$ mit

$$A' = \alpha B + (1 - \alpha)C, \quad B' = \beta C + (1 - \beta)A \quad \text{und} \quad C' = \gamma A + (1 - \gamma)B.$$

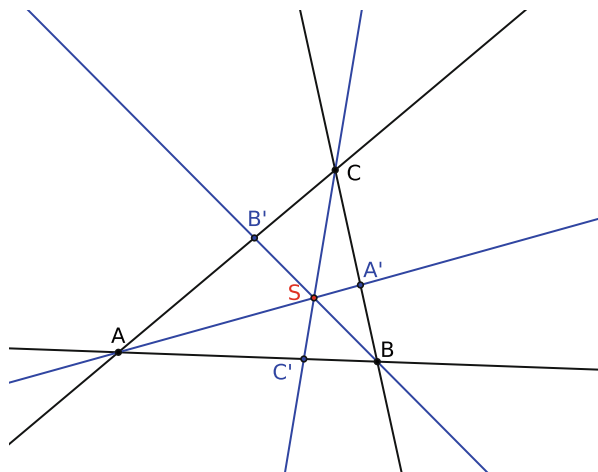
Dann schneiden sich die Geraden AA' , BB' und CC' genau dann in einem Punkt S , wenn

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} = 1$$

gilt (vgl. Abb. 2.12).

Beweis Wir zeigen nur „ \Rightarrow “ und überlassen die andere Richtung dem Leser. Es sei $S = \sigma A' + (1 - \sigma)A$. Aus $A' = \alpha B + (1 - \alpha)C$ erhält man

$$C = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} B + \frac{1}{1 - \alpha} A' \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\alpha} A' + \frac{\alpha - 1}{\alpha} C.$$

**Abb. 2.12** Satz von Ceva

Wendet man nun den Satz von Menelaos 2.5.3 einmal auf das Dreieck ABA' und die Gerade CC' und ein weiteres Mal auf das Dreieck $A'CA$ und die Gerade CC' an, so erhält man

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = -1.$$

Multiplikation der zwei Gleichungen liefert die Behauptung. \square

Definition 2.5.5 Es sei ABC ein (nicht entartetes) Dreieck.

1. Die Gerade, die den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert, heißt Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$. Die Gerade durch A und den Mittelpunkt von \overline{BC} heißt Seitenhalbierende von \overline{BC} . Die zu BC orthogonale Gerade durch A heißt Höhe von \overline{BC} (analog für die anderen Winkel und Seiten).
2. Der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden heißt Inkreismittelpunkt, der Schnittpunkt H der Höhen Höhenschnittpunkt und der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden Schwerpunkt des Dreiecks ABC (vgl. Abb. 2.13).

Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, dass die Schnittpunkte aus Definition 2.5.5 wohldefiniert sind, sich also die entsprechenden Geradentripel tatsächlich jeweils in einem gemeinsamen Punkt schneiden (Hinweise: Satz von Ceva sowie die nachfolgenden Ergebnisse).

Im Allgemeinen sind alle diese vier Punkte paarweise verschieden; in einem regelmäßigen Dreieck (mit drei gleich langen Seiten) fallen alle vier zusammen. Je nach Blickwinkel könnte man jeden als eine Art Mittelpunkt betrachten, wobei dabei Vorsicht angesagt ist: Der Höhenschnittpunkt etwa braucht im Allgemeinen nicht im

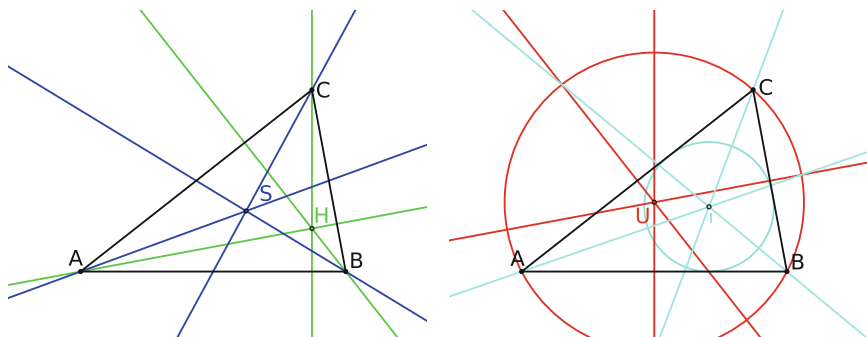


Abb. 2.13 „Mittelpunkte“ eines Dreiecks

Inneren des Dreiecks zu liegen! Die Wahl des Namens Inkreismittelpunkts für den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden wird durch folgende Aufgabe klar:

Aufgabe 2.5.6 Es sei ABC ein (nicht entartetes) Dreieck sowie I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Weiter seien L_a, L_b, L_c die Lotfußpunkte von I auf die Dreiecksseiten BC, AC bzw. AB . Man zeige:

- $|L_a I| = |L_b I| = |L_c I| =: \rho$, d.h., die Dreiecksseiten sind Tangenten des Kreises $K(I, \rho)$,
- die Geraden AL_a, BL_b und CL_c schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

Definition 2.5.7 Sind ABC ein Dreieck und h_A, h_B und h_C die Höhen zu den Seiten $\overline{BC}, \overline{AC}$ bzw. \overline{AB} , so heißen die Schnittpunkte

$$H_A := h_A \cap BC, \quad H_B := h_B \cap AC \quad \text{und} \quad H_C := h_C \cap AB$$

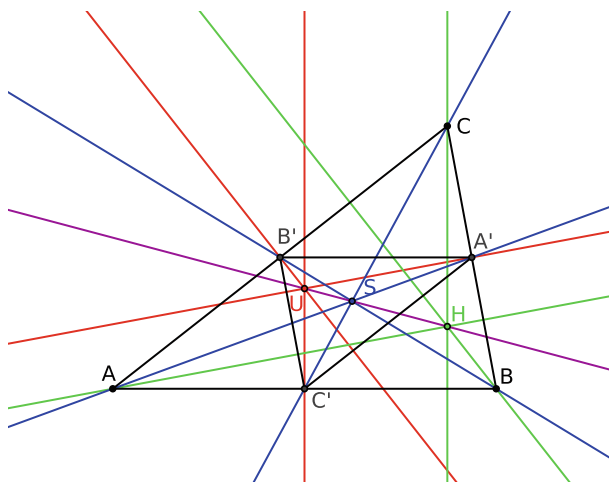
die Höhenfußpunkte des Dreiecks ABC . Die Längen der Strecken $h_a := |AH_A|$, $h_b := |AH_B|$ und $h_c := |CH_C|$ werden als Höhenlängen (oft einfach auch nur ebenfalls als Höhen) des Dreiecks ABC bezeichnet.

Lemma 2.5.8 Es sei ABC ein Dreieck mit Höhenfußpunkten H_A, H_B und Höhenschnittpunkt H .

- Für die Höhenabschnitte gilt $|H_A H| \cdot |HA| = |H_b H| \cdot |HB|$,
- für die Höhen- und Seitenlängen gilt $|AH_A| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BH_B|$.

Analoge Aussagen gelten entsprechend für den Höhenfußpunkt H_C .

Beweis a) Die Dreiecke ABH_A und ABH_B sind rechtwinklig, also liegen H_A und H_B nach der Umkehrung des Satzes des Thales 2.4.5 auf dem Thales-Kreis über \overline{AB} . Damit folgt die Aussage direkt aus dem Sehensatz 2.4.6.

**Abb. 2.14** Euler'sche Gerade

- b) Die Dreiecke $AH_A C$ und $H_B BC$ stimmen in den rechten Winkeln $\angle CH_A A$ und $\angle BH_B C$ sowie im gemeinsamen Winkel bei C überein, woraus man sofort die Behauptung erhält. \square

Aufgabe 2.5.9 Es seien ABC ein nicht entartetes Dreieck, w_α die Winkelhalbierende des Winkels bei A und I Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Weiter sei $W_A := w_\alpha \cap BC$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α mit der Dreiecksseite BC . Dann gelten

- a) $\frac{|BW_A|}{|CW_A|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ (eine Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten),
 b) $\frac{|AI|}{|IW_A|} = \frac{|AB| + |AC|}{|BC|}$.

Für den Höhenschnittpunkt, den Umkreismittelpunkt und den Schwerpunkt eines Dreiecks gilt eine erstaunliche Aussage:

Satz 2.5.10 (Euler'sche Gerade, vgl. Abb. 2.14) In jedem euklidischen Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt U , der Höhenschnittpunkt H und der Schwerpunkt S auf einer Geraden. Weiter gilt $|SH| = 2|SU|$.

Beweis Es seien A', B', C' die Seitenmitten der Seiten a, b, c und $A'B'C'$ das resultierende Mittendreieck des Dreiecks ABC . Wegen der Umkehrung des Strahlensatzes 2.1.21 sind dabei die Seiten von ABC und entsprechende Seiten von $A'B'C'$ parallel und halb so lang. Weil A und A' sowie B und B' und auch C und C' auf Gera-

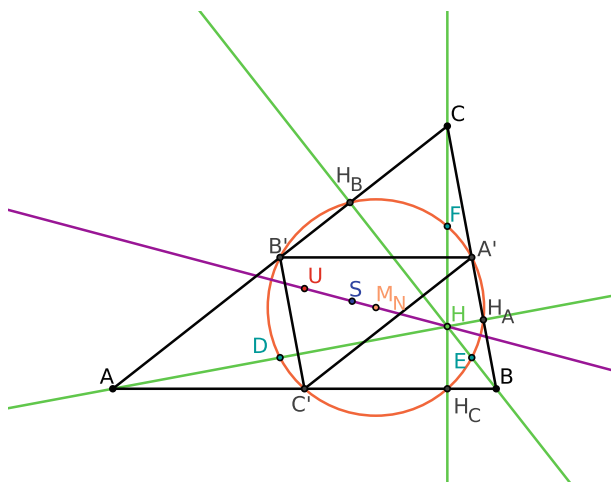


Abb. 2.15 Neunpunktekreis

den durch S liegen, entsteht $A'B'C'$ somit aus ABC durch eine zentrische Streckung mit Streckfaktor $\lambda = -\frac{1}{2}$ und Zentrum S . Dabei wird die Höhe h_C auf die Höhe $h_{C'}$ abgebildet, d. h. auf die Mittelsenkrechte von $c = |AB|$. Analoge Aussagen gelten ebenso für die anderen Höhen. Dies impliziert, dass U das Bild von H unter dieser zentrischen Streckung ist, also liegen U , S und H auf einer Geraden, und es gilt $|SH| = 2|SU|$. \square

Satz 2.5.11 (Neunpunktekreis, vgl. Abb. 2.15) In jedem Dreieck ABC liegen die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die Höhenabschnittsmitten auf einem Kreis.

Die Höhenabschnittsmitte der Höhe zu \overline{BC} ist dabei der Mittelpunkt der Strecke \overline{AH} .

Beweis Wir bezeichnen die Seitenmitten wieder mit A' , B' und C' , die Höhenfußpunkte mit H_A , H_B und H_C sowie die Höhenabschnittsmitten mit D , E und F . Die Dreiecke $B'A'C$, $A'B'C'$ sowie $A'B'H_C$ sind jeweils paarweise kongruent, damit folgt

$$\sphericalangle A'H_C B' = \sphericalangle B' C A'.$$

Damit liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes 2.4.5 die Punkte H_C , A' , B' und C' auf einem Kreis, der zwangsläufig der Umkreis des Dreiecks A' , B' , C' sein muss. Analog sieht man, dass auch H_A und H_B auf diesem Kreis liegen. Die Punkte H_A , H_B und H_C können auch als Höhenfußpunkte des Dreiecks ABH angesehen werden. Sie liegen also auch auf dem Umkreis des Seitenmittendreiecks des Dreiecks ABH . Da Kreise durch drei Punkte eindeutig festgelegt sind, stimmt dieser somit mit dem Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$ überein. Somit liegen auch die

Seitenmitten des Dreiecks ABH auf diesem Kreis, also speziell die Punkte D und E . Analog zeigt man schließlich, dass auch F darauf liegt. \square

Aufgabe 2.5.12 Man zeige, dass der Mittelpunkt des Neunpunktekreises auf der Euler-Geraden liegt und (in den Bezeichnungen von Definition 2.5.5) mit dem Mittelpunkt der Strecke \overline{UH} übereinstimmt.

2.6 Weitere Sätze am Dreieck

In diesem Abschnitt ergänzen wir einige weitere Ergebnisse über Dreiecke, unter anderem den wohl berühmtesten mathematischen Satz, den Satz des Pythagoras, von dem wir mehrere Beweisvarianten vorstellen wollen.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras, dem Kosinussatz, der sich praktisch direkt aus unserer Definition des Winkelwertes ergibt.

Satz 2.6.1 (Kosinussatz) Es sei ABC ein nicht entartetes Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$ sowie Innenwinkelwerten $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ und $\gamma = \sphericalangle ACB$. Dann gilt (entsprechend für die anderen Winkel)

$$2ab \cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2.$$

Beweis Sind $v := B - C$ und $w := A - C$, so gilt

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Eine unmittelbare Folgerung ist der erwähnte Satz des Pythagoras:

Korollar 2.6.2 (Satz des Pythagoras) Ist ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel bei C und Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Satz 2.6.3 (Sinussatz) Ist ABC ein Dreieck wie in Satz 2.6.1, so gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Beweis Quadriert man die Gleichung des Kosinussatzes, so erhält man

$$4a^2b^2 \cos^2(\gamma) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2.$$

Beachtet man $\cos^2(\gamma) = 1 - \sin^2(\gamma)$, erhält man damit

$$-4a^2b^2 \sin^2(\gamma) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

In dieser Gleichung ist die rechte Seite invariant unter Permutationen von a , b und c , also muss auch die linke invariant sein: Es gilt also

$$-4a^2b^2 \sin^2(\gamma) = -4c^2a^2 \sin^2(\beta) = 4b^2c^2 \sin^2(\alpha).$$

Offenbar impliziert dies

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{a^2} = \frac{\sin^2(\beta)}{b^2} = \frac{\sin^2(\gamma)}{c^2};$$

da in einem Dreieck alle Sinuswerte der Winkel und alle Seitenlängen positiv sind, ergibt sich die Behauptung. \square

- Aufgabe 2.6.4** 1. Man begründe, dass Sinus- und Kosinussatz auch als analytische Versionen der Kongruenzsätze angesehen werden können.
2. Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C sowie Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$ sowie Innenwinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$, so zeige man

$$b = c \cos(\alpha) \text{ und } a = c \sin(\alpha) = b \tan(\alpha).$$

Aufgrund der zentralen Rolle des Satzes des Pythagoras geben wir im Folgenden mehrere Beweisvarianten für diesen an. Wir verwenden dabei naiv den Begriff des Flächeninhalts (eine systematische Behandlung des Flächeninhalts findet man im fünften Kapitel von Hartshorne 2000) und benutzen ebenso ohne Beweis die Beobachtung, dass zerlegungsgleiche Figuren den gleichen Flächeninhalt besitzen. Insbesondere verwenden wir, dass ein Rechteck mit Seitenlängen a und b den Inhalt ab besitzt.

Beweis (Variante 1) Dieser Beweis findet sich bereits in Werken der indischen und chinesischen Mathematik und wird dort oftmals nur als Zeichnung (vgl. Abb. 2.16) angegeben. Die Details überlassen wir dem Leser. \square

Abb. 2.16 Beweisvariante des Satzes des Pythagoras

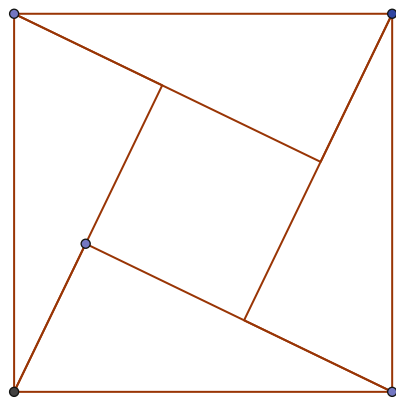
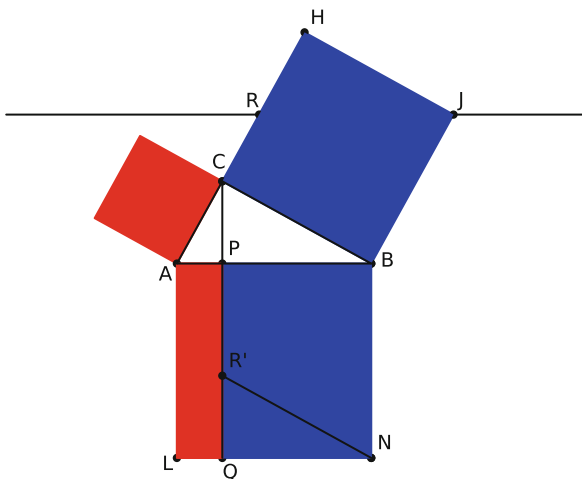


Abb. 2.17 Satz des Euklid

Der wohl älteste bekannte Beweis geht auf Euklid zurück und zeigt eine exakte Flächenzerlegung.

Beweis (Variante 2) Man errichte über den Seiten des Dreiecks ABC jeweils die Quadrate und benenne die Eckpunkte des Quadrats über der Seite CB mit J und H . Weiter seien L und N die weiteren Eckpunkte des Quadrats über AB . Es sei h die Höhe zu AB (d. h. die zu AB senkrechte Gerade durch C), welche AB in P und LN in Q schneide. Die Gerade g sei parallel zu AB und enthalte J . Der Schnittpunkt von CH mit g sei R . Zur Veranschaulichung betrachte man Abb. 2.17.

Dann gilt: Das Dreieck ABC und das Dreieck RHJ sind nach dem Stufenwinkelsatz 2.2.2 und dem Kongruenzsatz 2.2.12 kongruent, also sind das Quadrat $CBJH$ und das Parallelogramm $ABJR$ flächengleich. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um B mit Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann gelten $f(J) = C$, $f(R) = R' (\in \overline{CQ} - \text{warum?})$, $f(A) = N$ sowie $f(B) = B$, insbesondere sind auch $BJHC$ und $BCR'N$ flächengleich. Die Dreiecke $NR'Q$ und BCP sind nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent, da $|R'C| = |QP|$ gilt. Somit sind $BJHC$ und $QNBP$ flächengleich. Analog zeigt man die Flächengleichheit des Quadrats über AC mit dem Viereck $LQPA$, woraus man die Behauptung erhält. \square

Im Beweis von Euklid wurde genauer sogar folgende Aussage gezeigt, die daher auch als Satz des Euklid (oder Kathetensatz) bezeichnet wird:

Korollar 2.6.5 In den Bezeichnungen des letzten Beweises gelten $|BC|^2 = |BP| \cdot |AB|$ und $|AC|^2 = |AP| \cdot |AB|$.

Aufgabe 2.6.6 Man zeige den Höhensatz: In obiger Situation gilt $|PC|^2 = |AP| \cdot |BP|$.

Wir geben noch eine sehr einfache Beweisvariante, die auf die Ähnlichkeit der Dreiecke in der Abb. 2.17 zurückgeht.

Beweis (Variante 3) Wir verwenden die Bezeichnungen der Abb. 2.17. Das Dreieck BCP und das Dreieck ABC sind ähnlich (vgl. Aufgabe 2.3.14), daher gilt

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BP|}{|BC|},$$

also $|BC|^2 = |BP| \cdot |AB|$, also genau die erste Aussage des Satzes des Euklid. Analog sieht man die zweite Aussage ein und erhält wie im euklidischen Beweis des Satzes des Pythagoras daraus die Behauptung. \square

Abschließend geben wir noch eine etwas ausgefallenerere Variante (in Winter 2005 findet der Leser eine Reihe weiterer Beweisvarianten), die den Satz des Ptolemäus 2.4.12 verwendet:

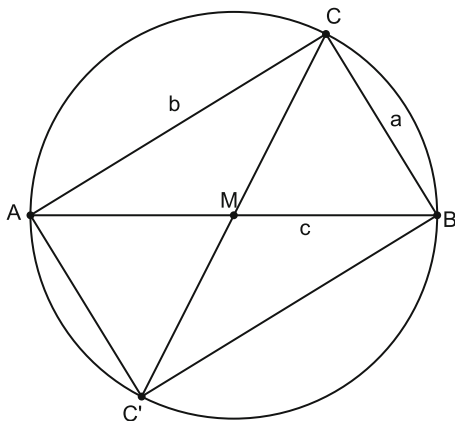
Beweis (Variante 4) Es sei $K := K(M, r)$ der Umkreis des Dreiecks ABC sowie C' der zweite Schnittpunkt von CM mit K (vgl. Abb. 2.18). Nach der Umkehrung (vgl. Aufgabe 2.4.5) des Satzes des Thales gilt $M \in \overline{AB}$. Weiter ist das Viereck $AC'BC$ nach dem Satz des Thales 2.4.4 ein Rechteck. Insbesondere gelten $c = |AB| = |CC'|$, $a = |BC| = |AC'|$ und $b = |AC| = |BC'|$. Der Satz des Ptolemäus 2.4.12 liefert nun

$$c^2 = |AB| \cdot |CC'| = |AC'| \cdot |BC| + |BC'| \cdot |AC| = a^2 + b^2,$$

also die Behauptung. \square

Aufgabe 2.6.7 Man zeige die Umkehrung des Satzes 2.4.18 vom Tangentenviereck: Gilt in einem positiv orientierten Viereck $ABCD$ die Identität $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, so ist $ABCD$ ein Tangentenviereck.

Abb. 2.18 Anwendung des Satzes von Ptolemäus



Aufgabe 2.6.8 Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck sowie H_A der Höhenfußpunkt der Höhe zu BC und H der Höhenschnittpunkt. Weiter seien α , β und γ die Innenwinkelwerte des Dreiecks ABC in üblicher Notation. Man zeige:

$$\frac{|AH|}{|HH_A|} = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}{\tan(\alpha)}.$$

Bereits in der Antike wurde auch die Umkehrung des Satzes des Pythagoras verwendet, die sich offenbar ebenfalls unmittelbar aus Satz 2.6.1 ergibt: Gilt in einem Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig. Man kann sich fragen, wann in dieser Gleichung die Größen a , b und c ganzzahlig sind.

Definition 2.6.9 Ein ganzzahliges Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ heißt primitives pythagoräisches Tripel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt und a , b , c nur die gemeinsamen Teiler -1 und 1 besitzt.

Lemma 2.6.10 Ist (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Tripel, so ist genau eine der Zahlen a und b gerade, und c ist ungerade.

Beweis Angenommen, c ist gerade. Dann ist c^2 durch 4 teilbar. Reduziert man die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ modulo 4, so erhält man

$$a^2 + b^2 \equiv_4 0.$$

Da nicht sowohl a als auch b gerade sein können (sonst wäre 2 gemeinsamer Teiler von a , b , c), kann man ohne Einschränkung $a^2 \equiv_4 1$ annehmen. Daraus folgt der Widerspruch $b^2 \equiv_4 3$. Daher ist c ungerade und damit zwangsläufig genau einer der Zahlen a und b gerade. \square

Satz 2.6.11 Ein Tripel (a, b, c) ist genau dann ein primitives pythagoräisches Tripel mit geradem b , wenn es teilerfremde Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ gibt, von denen genau eine gerade ist, mit $n^2 - m^2 = a$, $2nm = b$ und $c = n^2 + m^2$.

Beweis Die Richtung „ \Leftarrow “ ist offenbar richtig. Es bleibt zu zeigen, dass jedes primitive pythagoräische Tripel in der angegebenen Form dargestellt werden kann.

Weil a und c nach Lemma 2.6.10 beide ungerade sind, sind beide Zahlen $c + a$ und $c - a$ durch 2 teilbar. Damit erhält man

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} = \frac{c^2 - a^2}{4} = \underbrace{\frac{c+a}{2}}_{=:r} \underbrace{\frac{c-a}{2}}_{=:s}.$$

Es sei nun p eine Primzahl, die r teilt. Dann teilt p auch $\frac{b}{2}$, also teilt eine gerade Potenz von p die linke und damit auch die rechte Seite der Gleichung. Würde p auch s teilen, dann würde

$$p|c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} \text{ und } p|a = \frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2}$$

folgen, was ein Widerspruch zur Primitivität des Tripels ist. Somit sind $\frac{c+a}{2}$ und analog $\frac{c-a}{2}$ selbst Quadratzahlen. Es gilt also etwa $c + a = 2n^2$ und $c - a = 2m^2$. Daraus folgt direkt $c = n^2 + m^2$, $a = n^2 - m^2$ und $b = \pm 2nm$, und es folgt (ggf. durch Ersetzen von n durch $-n$) die Behauptung. Die Aussagen über die Teilbarkeitsbeziehungen zwischen n und m bleiben dem Leser überlassen. \square

Inhaltsverzeichnis

3.1 Grundlagen der sphärischen Geometrie	53
3.2 Dreiecke in der sphärischen Geometrie	58
3.3 Axiomatik der projektiven Geometrie	67
3.4 Analytische projektive Geometrie	71
3.5 Projektive Transformationen	77

In den Kap. 3 und 4 wenden wir uns Geometrien zu, in denen das Parallelenaxiom 1.1.2 nicht erfüllt ist. Als Beispiele von Geometrien, in der es überhaupt keine Parallelen gibt, betrachten wir in diesem Kapitel die sphärische oder Kugelgeometrie sowie die projektiven Geometrien. In Kap. 4 stellen wir dann ein Beispiel einer Geometrie vor, in der es mehrere Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden gibt.

3.1 Grundlagen der sphärischen Geometrie

Die sphärische Geometrie ist aus einem konkreten Anwendungsbezug entstanden: Sie beschreibt die Geometrie der Erdoberfläche, also die Geometrie der Kugeloberfläche (vgl. auch Bigalke 1984). Für See- und Luftfahrt war die sphärische Geometrie das Grundwerkzeug, um Positionen, Entfernungen und Winkel auf der Erdoberfläche bestimmen zu können. In diesem Abschnitt definieren wir die Grundobjekte dieser Geometrie wie Punkte, Geraden, Abstände und Winkel.

Definition 3.1.1 Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^3 sowie $\| \cdot \|$ die zugehörige Norm. Mit $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$ bezeichnen wir die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 (auch Einheitssphäre).

1. Die Punkte der sphärischen Geometrie sind die Elemente von S^2 .
2. Unter Geraden in der sphärischen Geometrie verstehen wir Großkreise auf S^2 , also den Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung.

Zur konkreten Rechnung werden wir den \mathbb{R}^3 mit einer Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 ausstatten und die Koordinaten von Punkten auf S^2 immer in Bezug auf diese Basis angeben.

Man beachte, dass zu einem Punkt $P \in S^2$ auch der Punkt $-P$ auf S^2 liegt. Man nennt das Paar $(P, -P)$ auch ein Antipodenpaar.

Bemerkung 3.1.2 Ist K ein Großkreis, so wird K durch genau eine Ursprungsebene definiert. Es gibt dann also einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$E := E(u) := \{x \in \mathbb{R}^3; \langle u, x \rangle = 0\} \quad \text{und} \quad K = E \cap S^2.$$

Dabei ist der Vektor u bis auf skalare Vielfache (ungleich null) eindeutig bestimmt. Er wird auch als ein *Normalenvektor* von E bezeichnet. Wir werden in diesem Zusammenhang oft eine Gerade der sphärischen Geometrie mit einem ihrer Normalenvektoren identifizieren.

Oftmals ist es für das konkrete Arbeiten nützlicher, wenn man mit „Kugelkoordinaten“ arbeitet:

Lemma 3.1.3 Die Abbildung

$$\Psi:]-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow S^2 \setminus \{\pm e_3\}, \quad (\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$$

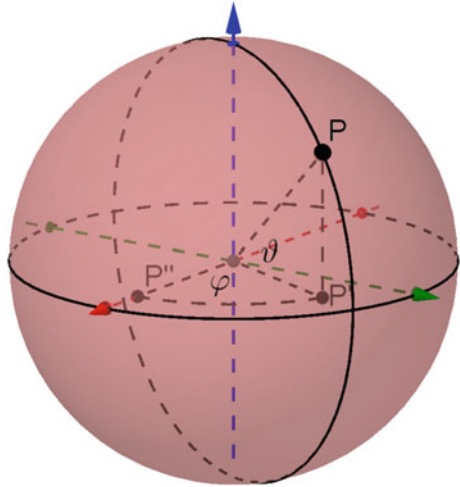
ist bijektiv.

Den Beweis dieses Lemmas bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Definition 3.1.4 Die Kugelkoordinaten (vgl. Abb. 3.1) eines Punktes $x \in S^2 \setminus \{\pm e_3\}$ sind das gemäß Lemma 3.1.3 eindeutig bestimmte Paar $(\varphi, \vartheta) \in]-\pi, \pi] \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $\Psi(\varphi, \vartheta) = x$.

In der Literatur wird statt ϑ manchmal auch $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ gewählt. Wir haben uns für die obige Definition entschieden, um die Analogie zu den Breitenkreisen der Erdkugel passender zu machen. Im Folgenden schreiben wir bei gegebenem $x \in S^2 \setminus \{\pm e_3\}$ oft φ_x und ϑ_x , wenn $\Psi(\varphi_x, \vartheta_x) = x$.

Um Abstände auf der Kugeloberfläche zu messen, benötigen wir eine Metrik. Die anschauliche Idee der folgenden Definition ist, dass der Abstand zweier Punkte der Bogenlänge des die Punkte verbindenden Kreisbogens, also dem zugehörigen Zentriwinkel, entspricht. Mithilfe des Satzes 3.1.9 werden wir sehen, dass diese anschauliche Idee auch mathematisch belegbar ist.

Abb. 3.1 Kugelkoordinaten

Definition 3.1.5 Die Abbildung

$$d: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto \arccos(\langle x, y \rangle)$$

heißt Sphärenmetrik.

Lemma 3.1.6 Die Sphärenmetrik d ist eine Metrik.

Beweis Für $x, y \in S^2$ gilt nach Definition $\|x\| = \|y\| = 1$. Daher ist wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung die Sphärenmetrik wohldefiniert und es gilt $d(x, y) \geq 0$. Weiter folgt aus $d(x, y) = 0$, dass in der Ungleichung von Cauchy-Schwarz Gleichheit gilt, was genau dann der Fall ist, wenn $x = \lambda y$ ist. Aufgrund von $\|x\| = \|y\| = 1$ folgt $\lambda = \pm 1$. Im Falle $\lambda = -1$ gilt aber $x = -y$ und daher $d(x, y) = \pi \neq 0$. Somit gilt $d(x, y) = 0$ nur für $x = y$.

Die Symmetrie ist offensichtlich. Es bleibt, die Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in S^2,$$

zu zeigen. Dazu drehen wir die Kugel (Anwenden einer orthogonalen Transformation) so, dass $x = (1, 0, 0)$, $y = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ und schließlich $z = (\cos(\alpha) \cos(\vartheta), \sin(\alpha) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ (gemäß Lemma 3.1.3) gelten. Offenbar ist dies immer möglich. Da der Arkuskosinus monoton fallend ist, gelten in dieser Situation

$$d(x, y) = \varphi \text{ und } d(x, z) = \arccos(\cos(\alpha) \cos(\vartheta)) \geq \arccos(\cos(\alpha)) = \alpha.$$

Ist also $\alpha \geq \varphi$, ergibt sich hieraus bereits die Behauptung. Im anderen Fall ($\alpha < \varphi$), hat man mithilfe des Additionstheorems für den Kosinus

$$\begin{aligned} d(z, y) &= \arccos(\cos(\varphi) \cos(\alpha) \cos(\vartheta) + \sin(\varphi) \sin(\alpha) \cos(\vartheta)) \\ &\geq \arccos(\cos(\varphi) \cos(\alpha) + \sin(\varphi) \sin(\alpha)) = \varphi - \alpha, \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich

$$d(x, y) = \alpha + \varphi - \alpha \leq d(x, z) + d(z, y).$$

□

Für Anwendungen ist es oft wichtig, den Abstand zweier Punkte mithilfe von Kugelkoordinaten berechnen zu können. Auf der Erde erlaubt dies, den Abstand zweier Orte basierend auf deren geografischen Koordinaten zu bestimmen.

Bemerkung 3.1.7 Es seien $x = (\cos(\varphi_1) \cos(\vartheta_1), \sin(\varphi_1) \cos(\vartheta_1), \sin(\vartheta_1))$ und $y = (\cos(\varphi_2) \cos(\vartheta_2), \sin(\varphi_2) \cos(\vartheta_2), \sin(\vartheta_2))$ zwei Punkte auf der Sphäre S^2 . Dann gilt

$$\cos(d(x, y)) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) + \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2).$$

Die folgende Aufgabe gibt einen Zusammenhang zwischen dem sphärischen und dem (direkten) räumlichen Abstand zweier Punkte an:

Aufgabe 3.1.8 Für $x, y \in S^2$ zeige man:

$$\sin\left(\frac{d(x, y)}{2}\right) = \frac{\|x - y\|}{2}.$$

Satz 3.1.9 Ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^2$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) =: x$ und $\gamma(1) =: y$, so gilt

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \geq d(x, y).$$

Beweis Ohne Einschränkung können wir durch Drehung der Kugel annehmen, dass $\varphi_x = \varphi_y$ gilt, d. h., x und y liegen anschaulich auf dem gleichen Großkreis durch $(0, 0, 1)$ (Längengrad). Gemäß Bemerkung 3.1.7 gilt dann $d(x, y) = |\vartheta_x - \vartheta_y|$. Wir schreiben γ in der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass sowohl φ als auch ϑ stückweise stetig differenzierbar sind. Dann gilt

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) \cos(\vartheta(t)) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \vartheta'(t) \begin{pmatrix} -\cos(\varphi(t)) \sin(\vartheta(t)) \\ -\sin(\varphi(t)) \sin(\vartheta(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (\varphi'(t))^2 \cos^2(\vartheta(t)) + (\vartheta'(t))^2 \geq (\vartheta'(t))^2$$

und daher

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \geq \int_0^1 |\vartheta'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 \vartheta'(t) dt \right| = d(x, y).$$

□

Aufgabe 3.1.10 *Man zeige, dass in Satz 3.1.9 genau dann Gleichheit gilt, wenn γ längs des kürzeren Großkreisbogens von x nach y verläuft.*

Satz 3.1.9 rechtfertigt zum einen die Definition 3.1.5 des Abstands zweier Punkte auf der Einheitssphäre. Zum anderen besagt er in Verbindung mit Aufgabe 3.1.10 anschaulich, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche genau durch einen Großkreis gegeben ist, was exakt die Idee der Geraden wiedergibt.

Als nächste metrische Größe führen wir Winkel ein. Dazu ist zu beachten, dass eine einfache Definition einer Zwischenbeziehung in der sphärischen Geometrie und daher auch die Definition eines Halbstrahls nicht ohne Weiteres möglich ist. Wir definieren daher zunächst etwas spezieller den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, also zwei Großkreisen.

Definition 3.1.11 Es seien K_1 und K_2 zwei Großkreise.

1. Sind K_1 und K_2 durch Schnitt von S^2 mit den Ursprungsebenen E_1 und E_2 entstanden, so heißt

$$\angle(K_1, K_2) := \arccos \left(\frac{|\langle n_{E_1}, n_{E_2} \rangle|}{\|n_{E_1}\| \cdot \|n_{E_2}\|} \right)$$

der sphärische Winkelwert zwischen K_1 und K_2 , wobei n_{E_1} und n_{E_2} jeweils gemäß Bemerkung 3.1.2 zu E_1 bzw. E_2 gehörende Normalenvektoren sind.

2. Zwei Großkreise heißen orthogonal, wenn für ihren Winkelwert $\angle(K_1, K_2) = \frac{\pi}{2}$ gilt.

Man beachte, dass nach Definition der Schnittwinkel zweier Geraden maximal den Wert $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann. Zu einer Geraden orthogonale Geraden haben eine besondere Eigenschaft:

Satz-Definition 3.1.12 *Es sei K ein Großkreis. Dann schneiden sich alle zu K orthogonalen Großkreise in einem Antipodenpaar, welches als das Polpaar (oder Pole) von K bezeichnet wird.*

Beweis Es sei E die durch K definierte Ebene mit Normalenvektor n . Ohne Einschränkung können wir $|n| = 1$ annehmen. Ist nun K' ein zu K orthogonaler Großkreis mit Normalenvektor n' , so gilt $\langle n', n \rangle = 0$, daher folgt $\{n, -n\} \subset K' \cap S^2$. Offenbar schneiden sich je zwei Großkreise genau in zwei gegenüberliegenden Punkten, woraus man die Behauptung erhält. \square

Allgemein gibt es in der sphärischen Geometrie eine einfache Möglichkeit, Schnittpunkte zweier Geraden sowie die Gerade durch zwei Punkte zu ermitteln.

Lemma 3.1.13 1. Es seien $A, B \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $A \neq \pm B$. Dann ist $A \times B$ ein Normalenvektor der die Gerade durch A und B definierenden Ursprungsebene.

2. Sind K_1 und K_2 zwei verschiedene Großkreise mit zugehörigen Normalenvektoren n_1 und n_2 , so sind die beiden (gegenüberliegenden) Schnittpunkte von K_1 und K_2 durch

$$P_{1/2} := \pm \frac{1}{\|n_1 \times n_2\|} n_1 \times n_2$$

gegeben.

Beweis Wir beweisen nur 1. und überlassen den Beweis der zweiten Aussage dem Leser. Da A und B keine Vielfache voneinander sind, gilt $n := A \times B \neq 0$. Weiter gilt bekanntlich

$$\langle n, A \rangle = \langle n, B \rangle = 0.$$

Damit definiert n einen Großkreis, der sowohl A als auch B enthält. Weiter ist n durch diese Eigenschaft bis auf Vielfache eindeutig bestimmt, woraus man die Behauptung erhält. \square

3.2 Dreiecke in der sphärischen Geometrie

Wir wenden uns in diesem Abschnitt noch Polygonen in der sphärischen Geometrie zu, beschränken uns dabei allerdings auf Zwei- und Dreiecke, wobei wir Dreiecke ausführlicher diskutieren werden. Insbesondere formulieren wir die sphärischen Sinus- und Kosinussätze (vgl. Abschn. 2.6) und gehen abschließend noch auf den Winkelsummensatz ein.

Definition 3.2.1 Ein sphärisches Zweieck ist ein durch zwei Großkreise K und K' begrenztes Gebiet \mathcal{Z} . Man nennt $\angle(\mathcal{Z}) := \angle(K, K')$ den Winkel des Zweiecks.

Man beachte, dass nach Definition der Winkel eines Zweiecks maximal den Wert $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann. Wir setzen im Folgenden als bekannt voraus, dass der Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel den Wert 4π besitzt (vgl. z. B. Strampp 2015, Übung 10.3). Damit ergibt sich sofort der Inhalt eines Zweiecks:

Bemerkung 3.2.2 Zwei verschiedene Großkreise begrenzen immer vier Gebiete, von denen jeweils zwei den gleichen Inhalt haben. Für den Inhalt der beiden kleineren dieser Gebiete gilt dabei $F_1(\mathcal{Z}) = 2\angle(\mathcal{Z})$, die größeren haben den Inhalt $F_2(\mathcal{Z}) = 2(\pi - \angle(\mathcal{Z}))$.

Wählt man drei (nicht antipodale) Punkte auf S^2 , so definieren je zwei davon einen Großkreis. Fordert man, dass die drei Punkte nicht auf einem gemeinsamen Großkreis liegen, so erhält man insgesamt drei Großkreise, die S^2 in acht Gebiete unterteilen. Ein derartiges Gebiet nennt man ein sphärisches Dreieck. Üblicherweise interessiert man sich dabei nur für die Dreiecke, bei denen die Seitenlängen kleiner als π sind, bei

denen also Punkte und Seiten vollständig auf einer offenen Halbkugel liegen. Zudem werden wir die Eckpunkte eines derartigen Dreiecks immer in positiver Orientierung notieren.

Definition 3.2.3 Ein sphärisches Dreieck ABC heißt Euler'sches Dreieck, falls $\det(A, B, C) > 0$ gilt.

Im Folgenden verwenden wir immer folgende Konvention: Wir bezeichnen mit $a := \overline{BC}$ die A , mit $b := \overline{AC}$ die B sowie mit $c := \overline{AB}$ die C gegenüberliegende Seite. Anschaulich ist etwa \overline{BC} der kürzere der beiden Abschnitte des Großkreises durch B und C , in die B und C diesen Großkreis teilen. Für die Seitenlängen, die man (etwas nachlässig) oft auch mit a, b und c bezeichnet, gilt dann nach Definition:

Bemerkung 3.2.4 Es seien $A, B, C \in S^2$ die Ecken eines Eulerschen Dreiecks und a, b sowie c die Längen der A, B bzw. C gegenüberliegenden Seite. Dann gelten

$$a = d(B, C) = \arccos(\langle B, C \rangle), \quad b = d(A, C) = \arccos(\langle A, C \rangle) \\ \text{und } c = d(A, B) = \arccos(\langle A, B \rangle).$$

Die Winkel eines Eulerschen Dreiecks sind etwas schwieriger zu definieren, da man hierbei nicht den Winkel zwischen den Großkreisen nehmen kann, sondern je nach Lage des Dreiecks auch stumpfe Winkel zulassen möchte. Wir verwenden dazu die Beschreibung der zwei Punkte verbindenden Geraden aus Lemma 3.1.13, wobei wir aber auf die „richtige“ Orientierung der zugehörigen Normalenvektoren achten.

Definition 3.2.5 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck. Dann sind die Werte α, β, γ der Innenwinkel bei A, B bzw. C definiert durch

$$\alpha := \arccos\left(\frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|}\right), \quad \beta := \arccos\left(\frac{\langle B \times C, B \times A \rangle}{\|B \times C\| \cdot \|B \times A\|}\right), \\ \gamma := \arccos\left(\frac{\langle C \times B, C \times A \rangle}{\|C \times B\| \cdot \|C \times A\|}\right).$$

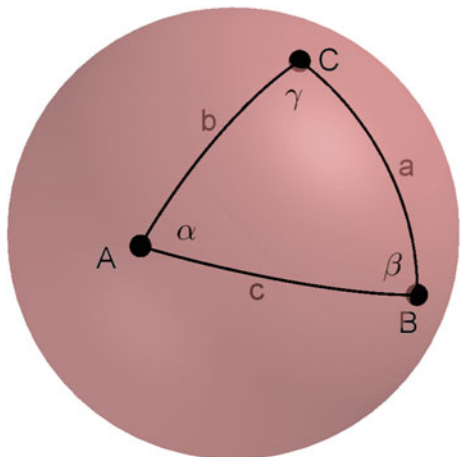
Die anschauliche Idee dabei ist, dass die Innenwinkel gerade die Winkel zwischen den Tangentialvektoren an die Kugel an der entsprechenden Ecke in Richtung der anderen Ecken sind, wie die folgende Aufgabe 3.2.6 zeigt (vgl. auch Abb. 3.2).

Aufgabe 3.2.6 Es seien $A, B, C \in S^2$.

- a) Man zeige: $(A \times B) \times A = B - \langle A, B \rangle A$.
- b) Man erläutere die Aussage: „ $(A \times B) \times A$ ist der Tangentialvektor an die Einheitskugel, welcher von A in Richtung B zeigt.“
- c) Man zeige:

$$\frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|} = \frac{\langle (A \times B) \times A, (A \times C) \times A \rangle}{\|(A \times B) \times A\| \cdot \|(A \times C) \times A\|}.$$

Abb. 3.2 Eulersches
Dreieck



Um manche Rechnung übersichtlicher zu gestalten, benötigen wir einige wohlbekannte Aussagen über das Vektorprodukt.

Lemma 3.2.7 Für alle $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ gelten

1. $\|X \times Y\| = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \sin(d(X, Y))$,
2. $\langle X \times Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z)$,
3. $\langle X \times Y, W \times Z \rangle = \langle X, W \rangle \cdot \langle Y, Z \rangle - \langle W, Y \rangle \cdot \langle X, Z \rangle$,
4. $(X \times Y) \times (W \times Z) = \det(X, W, Z) \cdot Y - \det(Y, W, Z) \cdot X$.

Beweis Für die Aussagen 1. und 2. vgl. etwa Fischer (1997), Bemerkung 5.2.2, für 3. und 4. vgl. die Übungsaufgabe 2 zu 5.2. in Fischer (1997). \square

Als erste Aussage über sphärische Dreiecke zeigen wir den sphärischen Seitenkosinussatz, mit dessen Hilfe man aus den Seitenlängen eines Eulerschen Dreiecks die Winkelwerte berechnen kann.

Satz 3.2.8 (Sphärischer Seitenkosinussatz) Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Dann gilt

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)$$

(ebenso bei entsprechender Vertauschung der Seiten und Winkel).

Beweis Wegen Bemerkung 3.2.4 und Lemma 3.2.7 3. hat man

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \|A \times C\|} = \frac{\langle B, C \rangle - \langle A, B \rangle \cdot \langle A, C \rangle}{\sin(d(A, B)) \sin(d(A, C))} = \frac{\cos(a) - \cos(c) \cos(b)}{\sin(c) \sin(b)},$$

woraus man die Behauptung erhält. \square

Korollar 3.2.9 Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck gilt in der Notation von Satz 3.2.8 im Falle von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ der sphärische Satz des Pythagoras

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c).$$

Lemma 3.2.10 Es seien ABC ein Eulersches Dreieck und α der Wert des Winkels bei A sowie $b = d(A, C)$ und $c = d(A, B)$. Dann gilt (wieder entsprechend für die anderen Seiten und Winkel)

$$\sin(b) \sin(c) \sin(\alpha) = \det(A, B, C).$$

Beweis Mithilfe von Lemma 3.2.7 1. gilt

$$\|(A \times B) \times (A \times C)\| = \sin(\alpha) \|A \times B\| \cdot \|A \times C\|.$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.2.7 4., wenn man noch $\|A\| = 1$ beachtet. \square

Mithilfe der bisherigen Ergebnisse folgt nun die nächste Aussage, der Sinussatz der sphärischen Geometrie:

Satz 3.2.11 (Sphärischer Sinussatz) Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}.$$

Beweis Aus Lemma 3.2.10 folgt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\det(A, B, C)}{\sin(a) \sin(b) \sin(c)}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nicht vom betrachteten Eckpunkt abhängt, muss das auch auf die linke Seite zutreffen. Daher ergeben alle Quotienten den gleichen Wert. \square

Definition 3.2.12 Ist ABC ein Eulersches Dreieck, so heißt das durch die Punkte

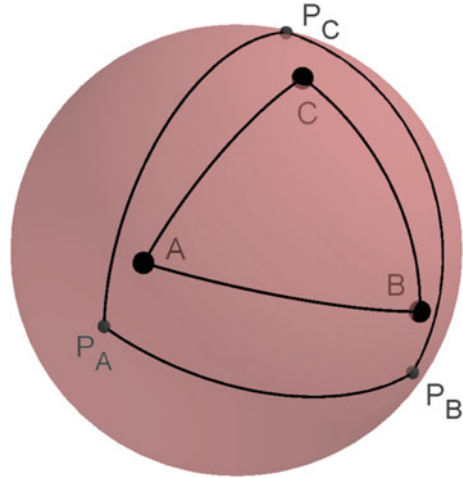
$$P_A := \frac{1}{\|B \times C\|} B \times C, \quad P_B := \frac{1}{\|C \times A\|} C \times A \quad \text{und} \quad P_C := \frac{1}{\|A \times B\|} A \times B$$

definierte Dreieck $P_A P_B P_C$ das Poldreieck zu ABC (vgl. Abb. 3.3).

Man beachte, dass etwa P_A gerade einer der beiden in Definition 3.1.12 eingeführten Pole des durch B und C definierten Großkreises ist; anschaulich liegt er, wenn man diesen Kreis von B in Richtung C durchläuft, auf der linken Seite.

Bemerkung 3.2.13 Das Poldreieck $P_A P_B P_C$ eines Eulerschen Dreiecks ABC ist wieder ein Eulersches Dreieck: Es gilt $\det(P_A, P_B, P_C) > 0$.

Abb. 3.3 Eulersches
Dreieck mit Poldreieck



Beweis Offenbar haben die Determinanten $\det(P_A, P_B, P_C)$ und $\det(B \times C, C \times A, A \times B)$ das gleiche Vorzeichen. Für dieses gilt aber unter Ausnutzung des Lemmas 3.2.7 (die Nummern geben die entsprechende Aussage an)

$$\begin{aligned}
 \det(B \times C, C \times A, A \times B) &= -\det(C \times B, C \times A, A \times B) \\
 &\stackrel{2.}{=} -\langle (C \times B) \times (C \times A), A \times B \rangle \\
 &\stackrel{4.}{=} -\langle \det(C, B, A)C, A \times B \rangle \\
 &= \det(A, B, C) \langle A \times B, C \rangle \\
 &\stackrel{2.}{=} (\det(A, B, C))^2 > 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.14 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck. Dann gelten

$$P_A \times P_B = \sin(\gamma)C, \quad P_B \times P_C = \sin(\alpha)A \quad \text{und} \quad P_C \times P_A = \sin(\beta)B.$$

Beweis Nach Lemma 3.2.7 1. und 4. gilt z. B.

$$P_A \times P_B = \frac{1}{\sin(a)\sin(b)}(B \times C) \times (C \times A) = -\frac{\det(C, B, A)}{\sin(a)\sin(b)}C.$$

Mit Lemma 3.2.10 folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.2.15 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Ferner sei $P_AP_BP_C$ das Poldreieck von ABC .

1. Das Poldreieck von $P_A P_B P_C$ ist das Dreieck ABC .
2. Sind a_P, b_P und c_P die Seitenlängen sowie α_P, β_P und γ_P die Innenwinkel von $P_A P_B P_C$, so gelten

$$a_P = \pi - \alpha, \quad b_P = \pi - \beta, \quad c_P = \pi - \gamma, \quad \alpha_P = \pi - a, \quad \beta_P = \pi - b \quad \text{und} \quad \gamma_P = \pi - c.$$

Beweis 1. Dies folgt aus Lemma 3.2.14, da der Sinus im Intervall $[0, \pi]$ nichtnegativ ist.

2. Aufgrund von Bemerkung 3.2.4 hat man

$$\cos(a_P) = \langle P_B, P_C \rangle = \frac{1}{\|C \times A\|} \cdot \frac{1}{\|A \times B\|} \cdot \langle C \times A, A \times B \rangle = -\cos(\alpha),$$

also die erste Aussage. Die anderen Aussagen ergeben sich ähnlich. \square

Man kann oftmals durch Polarisieren nun weitere Formeln über sphärische Dreiecke erhalten. Als Beispiel zeigen wir die folgende Aussage, welche besonders interessant ist, weil sie zeigt, dass in der sphärischen Geometrie ein Eulersches Dreieck bereits durch die Winkel vollständig bestimmt ist!

Satz 3.2.16 (Winkelkosinussatz) Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Dann gilt (entsprechend für die anderen Winkel und Seiten)

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a).$$

Beweis Die Behauptung folgt durch Anwendung des Seitenkosinussatzes 3.2.8 auf das Poldreieck des Dreiecks ABC zusammen mit dem Lemma 3.2.15. \square

Definition 3.2.17 Zwei Eulersche Dreiecke heißen kongruent, wenn sie in allen Seitenlängen und Winkelwerten übereinstimmen: Es gibt Seitenbenennungen a, b, c und a', b', c' sowie Winkelbenennungen α, β, γ und α', β', γ' gibt mit

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma'.$$

Aufgabe 3.2.18 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck.

- a) Man zeige den sphärischen Basiswinkelsatz: ABC hat genau dann zwei gleich lange Seiten, wenn die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind.
- b) Man finde Kongruenzsätze für Eulersche Dreiecke.

Aufgabe 3.2.19 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit Innenwinkeln α, β und γ sowie $P_A P_B P_C$ das zugehörige Poldreieck. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i) $(P_A, P_B, P_C) = (A, B, C)$,
- ii) $d(A; C) = d(B; C) = d(A; B) = \frac{\pi}{2}$,
- iii) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Im Folgenden untersuchen wir noch die Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden eines Eulerschen Dreiecks.

Definition 3.2.20 Es seien $A, B \in S^2$. Dann ist die (sphärische) Mittelsenkrechte $m_{AB} := E(n) \cap S^2$ der Strecke \overline{AB} durch die Ursprungsebene $E(n)$ mit $n := B - A$ definiert.

Diese Definition macht anschaulich Sinn: Wegen $\langle B - A, B + A \rangle = 0$ liegt der Mittelpunkt von \overline{AB} in $E(B - A)$; des Weiteren gilt $\langle B - A, A \times B \rangle = 0$, also sind (vgl. Lemma 3.1.13) die Geraden AB und m_{AB} orthogonal. Zudem gilt:

Lemma 3.2.21 Für $x \in S^2$ gilt genau dann $d(x, A) = d(x, B)$, wenn $x \in m_{AB}$ gilt.

Beweis Es gilt

$$d(x, A) = d(x, B) \iff \langle x, A \rangle = \langle x, B \rangle \iff \langle x, B - A \rangle = 0 \iff x \in m_{AB}.$$

□

Satz 3.2.22 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck. Dann schneiden sich die Mittelsenkrechten der Seiten von ABC in einem gemeinsamen Punktepaar

$$U_{1/2} = \pm \frac{1}{\|A \times B + B \times C + C \times A\|} (A \times B + B \times C + C \times A).$$

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $A \times B + B \times C + C \times A$ auf den die Mittelsenkrechten definierenden Ebenen liegt: Dazu betrachte man etwa

$$\langle A \times B + B \times C + C \times A, B - A \rangle = \langle C \times A, B \rangle - \langle B \times C, A \rangle$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3.2.7}}{=} \det(C, A, B) - \det(B, C, A) = 0.$$

Analog zeigt man dies für die anderen Mittelsenkrechten. □

Wie in der euklidischen Geometrie werden wir den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auch den sphärischen Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC nennen, wobei wir in Satz 3.2.22 das positive Vorzeichen wählen. Die Bezeichnung Umkreismittelpunkt macht Sinn, da nach Lemma 3.2.21 der Umkreismittelpunkt von allen Eckpunkten des Dreiecks ABC den gleichen Abstand hat.

Definition 3.2.23 Ist ABC ein Eulersches Dreieck, so ist $w_A := S^2 \cap E(n)$ mit $n := P_C - P_B$ die sphärische Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A (analog für die anderen Innenwinkel).

Offenbar macht diese Definition wieder anschaulich Sinn, da $A \in E(n)$ gilt und w_A den Winkel bei A teilt (es gilt $\sphericalangle(E(n), AB) = \sphericalangle(E(n), AC)$, wie man schnell nachrechnen kann).

Damit ist offenbar die Winkelhalbierende eines Innenwinkels eines Eulerschen Dreiecks gleich der Mittelsenkrechten derjenigen Seite des zugehörigen Poldreiecks, welche dem entsprechenden Eckpunkt gegenüberliegt. Dies zeigt sofort:

Satz 3.2.24 Die Winkelhalbierenden eines Eulerschen Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punktpaar

$$I_{1/2} = \pm \frac{1}{\|P_A \times P_B + P_B \times P_C + P_C \times P_A\|} (P_A \times P_B + P_B \times P_C + P_C \times P_A),$$

wobei $P_A P_B P_C$ das Poldreieck von ABC ist.

Ähnlich wie oben bezeichnen wir den Punkt aus Satz 3.2.24 mit positivem Vorzeichen als den Winkelhalbierendenschnittpunkt von ABC . Man erhält damit für den Umkreismittelpunkt und den Winkelhalbierendenschnittpunkt eines Eulerschen Dreiecks sehr ansprechende Darstellungen.

Korollar 3.2.25 1. Der Winkelhalbierendenschnittpunkt eines Eulerschen Dreiecks ABC stimmt mit dem Umkreismittelpunkt seines Poldreiecks $P_A P_B P_C$ und umgekehrt überein.
2. Es gibt Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass für den Umkreismittelpunkt U und den Winkelhalbierendenschnittpunkt I eines Eulerschen Dreiecks ABC gilt:

$$\begin{aligned} U &= \lambda(\sin(a)P_A + \sin(b)P_B + \sin(c)P_C), \\ I &= \mu(\sin(\alpha)A + \sin(\beta)B + \sin(\gamma)C). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2.26 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck. Eine (sphärische) Seitenhalbierende ist eine sphärische Gerade durch einen Eckpunkt sowie den Mittelpunkt der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite. Eine (sphärische) Höhe ist eine sphärische Gerade durch einen Eckpunkt des Dreiecks, die die Gerade, die die gegenüberliegende Seite enthält, orthogonal schneidet. Man zeige:

a) Es gibt ein $\mu > 0$, sodass

$$S := \mu(A + B + C)$$

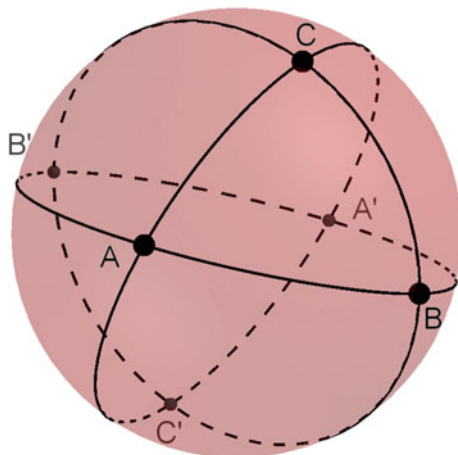
auf allen Seitenhalbierenden liegt.

b) Hat ABC maximal eine Seite der Länge $\frac{\pi}{2}$, so gibt es ein $\lambda > 0$, sodass

$$H := \lambda(\cos(a)\cos(b)A \times B + \cos(b)\cos(c)B \times C + \cos(a)\cos(c)C \times A)$$

auf allen Höhen liegt.

Abb. 3.4 Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Eulerschen Dreiecks



Im Folgenden bestimmen wir noch den Flächeninhalt eines Eulerschen Dreiecks: Die drei Großkreise eines Eulerschen Dreiecks bestimmen drei Paare von Zweiecken \mathcal{Z}_A , \mathcal{Z}_B und \mathcal{Z}_C mit den Winkeln α , β und γ (vgl. Abb. 3.4).

Die Antipodalpunkte A' , B' und C' der Punkte A , B und C bilden dann ein zu ABC kongruentes Eulersches Dreieck. Da die (doppelten) Zweiecke AA' , BB' und CC' die Kugel überdecken, wobei ABC und $A'B'C'$ jeweils dreifach überdeckt wird, gilt für den Flächeninhalt $F(ABC)$ des Dreiecks ABC offenbar

$$2F(\mathcal{Z}_A) + 2F(\mathcal{Z}_B) + 2F(\mathcal{Z}_C) - 4F(ABC) = O(S^2) = 4\pi,$$

wobei $O(S^2)$ die Oberfläche der Einheitskugel bezeichnet. Wendet man nun Bemerkung 3.2.2 an, so folgt

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma - 4\pi = 4F(ABC).$$

Dies zeigt

Satz 3.2.27 In einem Eulerschen Dreieck mit den Innenwinkeln α , β und γ und dem Flächeninhalt $F(ABC)$ gilt

$$F(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Insbesondere zeigt dies, dass in einem sphärischen Dreieck die Winkelsumme immer größer als π und nicht konstant ist, sondern vom Flächeninhalt des Dreiecks abhängt. Neben der Nichtexistenz von Parallelen ist dies einer der fundamentalen Unterschiede zur klassischen euklidischen Geometrie. Dass man durch Messen der Winkelsumme eines Dreiecks Rückschlüsse auf den umgebenden Raum machen kann, wird in dem sehr lesenswerten Buch Burger (2006) (Abschn. III) schön dargestellt.

3.3 Axiomatik der projektiven Geometrie

Die projektive Geometrie ist eng verbunden mit der sphärischen Geometrie. So gibt es in dieser ebenfalls keine Parallelen, da sich je zwei Geraden schneiden. Wie wir in Abschn. 3.4 sehen werden, kann man die sphärische Geometrie praktisch als reell projektive Geometrie interpretieren. Wir beginnen aber mit den Axiomen der projektiven Ebene und betrachten zunächst den Fall endlicher projektiver Ebenen. Wir erinnern dazu an den Begriff des linearen Raumes und an die Inzidenzaxiome 1.2.1.

Definition 3.3.1 Es seien \mathbb{P} und \mathbb{G} Mengen sowie $I \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ eine Inzidenzrelation. Das Tripel $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ heißt projektive Ebene, falls folgende Axiome gelten:

1. Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade durch die beiden Punkte: Für alle $P, Q \in \mathbb{P}$ ($P \neq Q$) gibt es genau ein $PQ := g \in \mathbb{G}$ mit $(P, g), (Q, g) \in I$.
2. Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt: Für alle $g, h \in \mathbb{G}$ ($g \neq h$) gibt es genau ein $P \in \mathbb{P}$ mit $(P, g), (P, h) \in I$.
3. Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}$, sodass die (nach 1. wohldefinierten) sechs Geraden $P_i P_j$ mit $i \neq j$ paarweise verschieden sind.

Wieder bezeichnen wir die Elemente aus \mathbb{P} als „Punkte“ und die Elemente aus \mathbb{G} als „Geraden“ und schreiben meist einfach $p \in g$, falls $(p, g) \in I$ gilt.

In diesem Kontext bedeutet das erste Axiom, dass sich je zwei Punkte durch genau eine Gerade verbinden lassen; umgekehrt schneiden sich laut dem zweiten Axiom je zwei Geraden in genau einem Punkt. Das dritte Axiom liefert eine gewisse Reichhaltigkeit: Es besagt, dass es mindestens vier Punkte gibt, von denen jeweils drei nicht auf einer Geraden liegen („es gibt Vierecke“, vgl. Abb. 3.5).

Abb. 3.5 Drittes Axiom einer projektiven Ebene

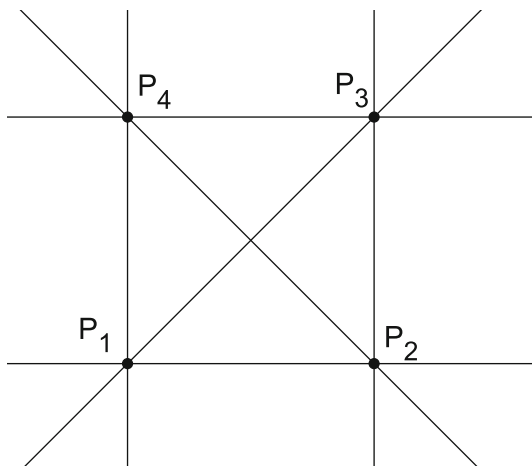
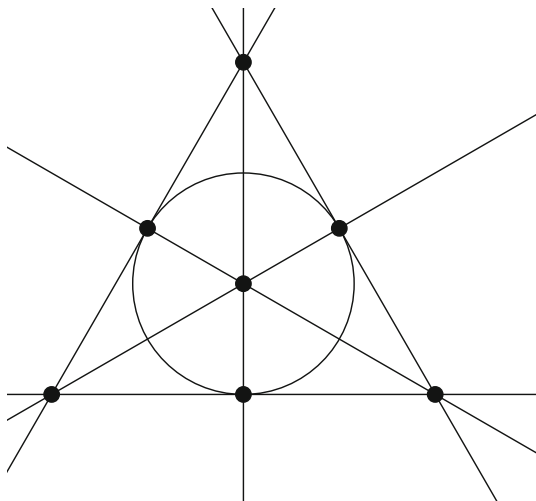


Abb. 3.6 Fano-Ebene

Beispiel 3.3.2 (*Fano-Ebene*) Die Fano-Ebene ist das kleinste Beispiel einer projektiven Ebene: Betrachtet man Abb. 3.5, so erkennt man, dass aufgrund des zweiten Axioms in jedem Fall die Schnittpunkte der Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4 sowie der jeweils gegenüberliegenden Viereckseiten existieren müssen. Diese lassen sich im minimalen Fall durch eine einzige Gerade verbinden. Man erhält dann beispielsweise die in Abb. 3.6 dargestellte, aus sieben Punkten und sieben Geraden bestehende, Konfiguration. Man beachte dabei, dass hier auch der Kreis als Gerade gilt!

- Aufgabe 3.3.3**
1. Man zeige, dass in einer projektiven Ebene alle Hilbertschen Inzidenzaxiome 1.2.1 erfüllt sind.
 2. Man überprüfe mit Beweis, welche der Axiome einer projektiven Ebene sich aus den Hilbertschen Inzidenzaxiomen ableiten lassen.

Im Folgenden betrachten wir endliche projektive Ebenen. Eine projektive Ebene heißt dabei endlich, wenn die Menge \mathbb{P} endlich ist.

Lemma 3.3.4 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine projektive Ebene mit $|\mathbb{P}| = n$. Dann ist auch \mathbb{G} endlich.

Beweis Nach Aufgabe 3.3.3 enthält jede Gerade $g \in \mathbb{G}$ mindestens zwei Punkte und ist durch diese zwei Punkte eindeutig bestimmt. Daher gibt es höchstens $\binom{n}{2}$ viele Geraden. \square

Aufgabe 3.3.5 Es seien $K(M; r)$ ein Kreis in der Euklidischen Ebene und E_1, \dots, E_n Punkte auf dem Kreisrand (in dieser Reihenfolge).

- a) Man zeige, dass es genau $\binom{n}{2}$ euklidische Verbindungslinien $\overline{E_i E_j}$ für $1 \leq i < j \leq n$ gibt.
- b) Die Kreisbögen $\widehat{E_i E_{i+1}}$, $\widehat{E_1 E_n}$ und die Verbindungslinien $\overline{E_i E_j}$ unterteilen den Kreis in g_n Gebiete. Man untersuche, wie groß g_n maximal werden kann.

Im Folgenden untersuchen wir die möglichen Anzahlen an Punkten und Geraden in einer endlichen projektiven Ebene. Dazu bestimmen wir zunächst die Anzahl der Punkte auf einer projektiven Geraden.

Lemma 3.3.6 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine endliche projektive Ebene.

1. Dann liegt auf jeder Geraden die gleiche Anzahl an Punkten.
2. Durch jeden Punkt geht genau die gleiche Anzahl an Geraden.

Beweis Wir beweisen nur die erste Aussage und überlassen den (praktisch identischen – man vertausche Punkte und Gerade) Nachweis der zweiten Aussage dem Leser. Es sei g eine Gerade mit m paarweise verschiedenen Punkten P_1, \dots, P_m sowie h eine weitere Gerade. Dann wähle man einen Punkt Q , der weder auf g noch auf h liegt (diesen gibt es wegen des dritten Axioms aus Definition 3.3.1). Die m Geraden QP_i , $1 \leq i \leq m$, sind paarweise verschieden, da sonst Q auf g läge. Wegen des zweiten Axioms aus Definition 3.3.1 schneidet für jedes i , $1 \leq i \leq m$, die Gerade QP_i die Gerade h in einem Punkt S_i . Somit enthält h mindestens m Punkte. Einen weiteren Punkt S kann es auf h aber nicht geben, da die Gerade SQ die Gerade g in einem Punkt, etwa P_j , schneiden muss. Dann gilt aber $QP_j = QS$ und damit $S = QP_j \cap h = S_j$. \square

Damit können wir nun einen zentralen Satz über endliche projektive Ebenen beweisen.

Satz 3.3.7 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine endliche projektive Ebene mit $|\mathbb{P}| = n$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass durch jeden Punkt genau m Geraden verlaufen und auf jeder Geraden genau m Punkte liegen. Zudem gilt $n = |\mathbb{P}| = |\mathbb{G}| = m^2 - m + 1$.

Beweis Es sei $P \in \mathbb{P}$. Dann gibt es ein m , sodass durch P genau m Geraden g_1, \dots, g_m verlaufen. Weiter sei g eine Gerade, die P nicht enthält. Die m Schnittpunkte $S_i := g_i \cap g$ sind alle paarweise verschieden und liegen alle auf g . Wie oben kann g keinen weiteren Punkt P' enthalten, da sonst die Gerade $P'P$ mit einer Geraden g_j identisch wäre und damit $P' = S_j$ gelten würde. Also enthält g genau m Punkte. Da nach Lemma 3.3.6 durch alle Punkte die gleiche Anzahl Geraden verläuft und auf jeder Geraden die gleiche Anzahl Punkte liegt, erhält man die erste Aussage.

Für den Zusatz betrachte man zwei verschiedene Geraden g und h , die sich im Punkt $Q = g \cap h$ schneiden. Die weiteren Punkte auf g seien mit P_1, \dots, P_{m-1} und die auf h mit Q_1, \dots, Q_{m-1} bezeichnet. Da jede weitere Gerade $k \in \mathbb{G}$ sowohl g als auch h schneidet, ist jede Gerade entweder von der Form $Q_i P_j$, $1 \leq i, j \leq m-1$

oder verläuft durch P . Da durch P genau m Geraden verlaufen, gibt es insgesamt $(m-1)^2 + m = m^2 - m + 1$ viele Geraden. Vertauscht man in dieser Argumentation wieder die Begriffe Punkte und Geraden sinngemäß, so sieht man, dass es ebenfalls genau $n = m^2 - m + 1$ viele Punkte gibt. \square

Definition 3.3.8 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine endliche projektive Ebene mit $|\mathbb{P}| = m^2 - m + 1$. Dann heißt die Zahl $d := m - 1$ Ordnung von $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$.

Bemerkung 3.3.9 Aus Satz 3.3.7 folgt, dass eine projektive Ebene der Ordnung d immer genau $d^2 + d + 1$ viele Elemente enthält. Beispielsweise gibt es keine projektiven Ebenen mit zehn Elementen. Zu welchen Ordnungen projektive Ebenen existieren, ist eine nicht vollständig gelöste Frage. In Definition 3.4.8 werden wir sehen, dass im Fall, dass d eine Primzahlpotenz ist, es eine projektive Ebene der Ordnung d gibt. Weitere Informationen zu dieser Fragestellung findet man z.B. in Beutelspacher und Rosenbaum (2004) oder Richter-Gebert (2011).

In den Beweisen etwa von Lemma 3.3.6 oder Satz 3.3.7 haben wir bereits festgestellt, dass man in den Aussagen über projektive Ebenen die Begriffe Punkte und Geraden vertauschen kann. Dies nennt man Dualisieren einer Aussage und ist darauf zurückzuführen, dass in den jeweiligen Axiomen die Begriffe Punkt und Gerade sinngemäß vertauscht werden können. Offensichtlich sind nämlich die ersten beiden Axiome in diesem Sinn dual zueinander. Ebenso gilt in jeder projektiven Ebene die duale Version des dritten Axioms.

Lemma 3.3.10 Ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine projektive Ebene, so gibt es vier paarweise verschiedene Geraden $g_1, \dots, g_4 \in \mathbb{G}$, sodass die sechs Schnittpunkte $S_{ij} := g_i \cap g_j$, $i < j$, paarweise verschieden sind.

Beweis Man wähle die gemäß dem dritten Axiom aus Definition 3.3.1 existierenden vier Punkte $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}$ und setze $g_1 := P_1 P_2$, $g_2 := P_2 P_3$, $g_3 := P_3 P_4$ und $g_4 := P_1 P_4$. Diese sind nach diesem Axiom paarweise verschieden, und man hat (vgl. Abb. 3.5)

$$S_{12} = g_1 \cap g_2 = P_2, \quad S_{23} = g_2 \cap g_3 = P_3, \quad S_{34} = g_3 \cap g_4 = P_4 \quad \text{und} \quad S_{14} = g_1 \cap g_4 = P_1.$$

Die zwei weiteren Schnittpunkte S_{24} und S_{13} stimmen mit keinem der bisherigen Punkte überein: Wäre etwa $S_{24} = S_{12} = P_2$, so würde P_2 auf der Geraden $g_4 = P_1 P_4$ liegen und man hätte $g_4 = P_1 P_2 = g_1$ im Widerspruch zum dritten Axiom aus Definition 3.3.1. Ebenso sind S_{24} und S_{13} verschieden: Sonst läge $X = S_{24} = S_{13}$ sowohl auf $g_1 = P_1 P_2$ als auch auf $g_2 = P_2 P_3$ und dann hätte man $g_1 = P_2 X = g_2$. \square

Aufgabe 3.3.11 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ ein System, in dem die ersten beiden Axiome aus Axiom 3.3.1 sowie die Aussage des Lemmas 3.3.10 erfüllt sind. Man zeige, dass in einem solchen System auch das dritte Axiom aus Axiom 3.3.1 gilt.

Mithilfe der letzten beiden Aussagen können wir nun projektive Ebenen dualisieren.

Definition 3.3.12 Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine projektive Ebene. Dann heißt das System $(\mathbb{P}^*, \mathbb{G}^*, I^*)$ mit $\mathbb{P}^* := \mathbb{G}$, $\mathbb{G}^* := \mathbb{P}$ und

$$(g, p) \in I^* : \iff (p, g) \in I$$

die zu $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ duale projektive Ebene.

Für Anwendungen bedeutet die Idee der dualen projektiven Ebene, dass sich jede Aussage über Punkte und Geraden einer projektiven Ebene in eine duale Aussage übersetzen lässt.

3.4 Analytische projektive Geometrie

In diesem Abschnitt definieren wir die reell projektive Ebene mithilfe sogenannter homogener Koordinaten. Dazu definieren wir auf dem $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y : \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } x = \lambda y. \quad (3.1)$$

Offenbar ist dies eine Äquivalenzrelation. Den zugehörigen Raum der Äquivalenzklassen

$$\mathbb{RP}_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$$

bezeichnen wir als die reell projektive Ebene.

Ist $[p] \in \mathbb{RP}_2$ die Äquivalenzklasse eines Punktes $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so nennen wir wie üblich p einen Repräsentanten von $[p]$. Nach Definition unterscheiden sich zwei Repräsentanten nur um ein skalares Vielfaches ungleich null. Man nennt dann die Koordinaten von p auch die homogenen Koordinaten von $[p]$.

Es sei nun $p = (p_1, p_2, p_3)$ ein Repräsentant der Klasse von $[p]$. Gilt dann $p_3 \neq 0$, so hat man

$$p = (p_1, p_2, p_3) \sim \left(\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}, 1 \right),$$

sodass wir eine Einbettung von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{RP}_2$ erhalten. Anschaulich kann man sich diese Punkte als die „endlichen Punkte“ von \mathbb{RP}_2 vorstellen (vgl. Abb. 3.7).

Wandert nun ein Punkt p_t auf einer Geraden in dieser Ebene, etwa auf $(t, mt + b, 1) \sim (1, m + \frac{b}{t}, \frac{1}{t})$, gegen unendlich, d. h. $t \rightarrow \infty$, so nähert er sich dem Punkt $(1, m, 0)$ an. Man betrachtet daher die Punkte (p_1, p_2, p_3) mit $p_3 = 0$ als die unendlich fernen Punkte und spricht von der unendlich fernen Gerade. Wie man sieht, liefert jede parallele Gerade dabei den gleichen unendlich fernen Grenzpunkt, sodass sich parallele Geraden in einem gemeinsamen Grenzpunkt schneiden.

Um nachzuweisen, dass unsere Definition der reell projektiven Ebene die Axiome aus Definition 3.3.1 erfüllt, müssen wir definieren, was Geraden in der reell projektiven Ebene sein sollen und wie die Inzidenzrelation aussieht.

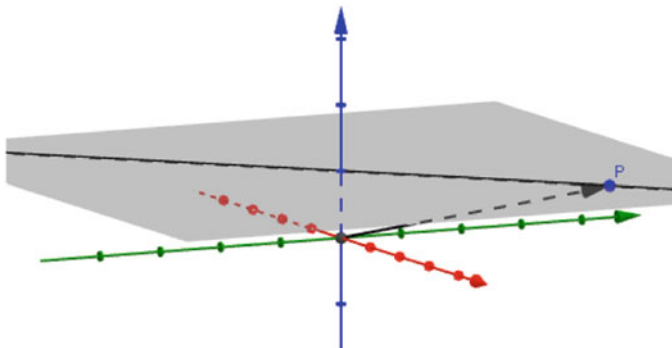


Abb. 3.7 Reell projektive Ebene

Definition 3.4.1 Der Raum der Äquivalenzklassen der in Gl. (3.1) definierten Äquivalenzrelation heißt reell projektive Ebene. Dabei seien

$$\mathbb{P} := \{[p]; p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\} \text{ und } \mathbb{G} := \{[g]; g \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$$

die Mengen der Punkte bzw. der Geraden. Für $[p] \in \mathbb{P}$ und $[g] \in \mathbb{G}$ sei $[p] \in [g]$, falls $\langle p, g \rangle = 0$ gilt.

Formal stimmen die Mengen \mathbb{P} und \mathbb{G} also überein. Als zugrundeliegende Idee unterscheidet man diese Mengen aber sehr wohl: Punkte fasst man als projizierte Ursprungsgeraden des \mathbb{R}^3 auf, Geraden sind aber projizierte Ursprungsebenen, die im \mathbb{R}^3 durch ihren Normalenvektor beschrieben werden, der ja auch nur bis auf ein skalares Vielfaches bestimmt wird. Daher macht es Sinn, die Inzidenzrelation wie in Definition 3.4.1 zu definieren. Offenbar hängt diese Definition nicht von den gewählten Repräsentanten ab.

Satz 3.4.2 Die in Definition 3.4.1 eingeführten Mengen \mathbb{P} und \mathbb{G} erfüllen zusammen mit der dort definierten Inzidenzrelation die Axiome aus Definition 3.3.1 einer projektiven Ebene.

Beweis Es seien $[p], [q] \in \mathbb{P}$ mit $[p] \neq [q]$. Dann sind die Repräsentanten p und q linear unabhängig, und somit ist das Kreuzprodukt $g := p \times q$ nicht der Nullvektor. Weiter hat man bekanntlich

$$\langle p, g \rangle = 0 = \langle q, g \rangle.$$

Also gelten für $[g] \in \mathbb{G}$ die Beziehungen $p, q \in [g]$. Ferner ist $[g]$ offenbar eindeutig bestimmt.

Analog definiert man zu zwei Geraden $[g], [h] \in \mathbb{G}$ den Schnittpunkt $[p]$ durch $p := g \times h$.

Um nachzuweisen, dass das dritte Axiom erfüllt ist, reicht es, die Existenz von vier Punkten, die ein wie dort gefordertes Viereck bilden, nachzuweisen. Wie man

schnell überprüft, erfüllen

$$[(0, 0, 1)], [(1, 0, 1)], [(0, 1, 1)] \text{ und } [(1, 1, 1)]$$

diese Behauptung. \square

Die Ähnlichkeit zur sphärischen Geometrie und insbesondere zum Lemma 3.1.13 ist nicht zufällig. Alternativ kann man nämlich auch einfach auf der Sphäre zwei jeweilige Antipodenpunkte identifizieren:

Definition 3.4.3 Auf S^2 sei die Äquivalenzrelation $x \sim y$ definiert durch

$$x \sim y: \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Bemerkung 3.4.4 Die Einbettung $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ induziert durch Einschränkung in kanonischer Weise eine Identifikation der Menge $\mathbb{P}_2 := S^2 / \sim$ der Äquivalenzklassen der in Definition 3.4.3 eingeführten Äquivalenzrelation mit der projektiven Ebene \mathbb{RP}_2 .

Wir zeigen, dass auch die Definition der Geraden der projektiven Ebene sich aus der sphärischen Geometrie ableiten lässt. Dazu sei $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ die Äquivalenzklassenabbildung. Es gilt dann

Bemerkung 3.4.5 Ist $[g] \in \mathbb{G}$ eine projektive Gerade, und

$$\text{Supp}([g]) := \{[p] \in \mathbb{RP}_2; \langle g, p \rangle = 0\}$$

die Menge der zu g gehörenden Punkte, so ist $\pi^{-1}(\text{Supp}[g])$ ein Großkreis auf S^2 .

Beweis Es sei E die durch den Normalenvektor g definierte Ursprungsebene und $K := E \cap S^2$. Wir behaupten $\pi^{-1}(\text{Supp}[g]) = K$:

Für „ \subset “ sei $x \in \pi^{-1}(\text{Supp}[g])$, d.h. $\pi(x) \in \text{Supp}([g])$. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $p = \lambda x$ für ein $\lambda \neq 0$ und $\langle g, p \rangle = 0$. Damit folgt offenbar auch $x \in E \cap S^2 = K$.

Umgekehrt gilt für $x \in K$ offensichtlich $\langle x, g \rangle = 0$, also $\pi(x) = [x] \in \text{Supp}([g])$. \square

Wir merken an, dass man in der Konstruktion aus Definition 3.4.1 der reell projektiven Ebene die reellen Zahlen durch einen beliebigen Körper ersetzen kann:

Definition 3.4.6 Ist \mathbb{F} ein Körper, so wird auf $\mathbb{F}^3 \setminus \{0\}$ durch $x \sim y: \Leftrightarrow x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{F}^*$ eine Äquivalenzrelation definiert. Der Raum

$$\mathbb{FP}_2 := \mathbb{F}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{F}^*$$

heißt dann projektive Ebene über \mathbb{F} . Die Punkte sind Elemente von \mathbb{FP}_2 , die Geraden entsprechen Äquivalenzklassen von Ursprungsebenen. Ein Punkt gehört zu einer Geraden, wenn einer (und damit alle) seiner Repräsentanten in der zugehörigen Ursprungsebene liegt.

Aufgabe 3.4.7 Man zeige, dass \mathbb{FP}_2 für jeden Körper \mathbb{F} die Axiome einer projektiven Ebene erfüllt.

Aufgabe 3.4.8 Es sei \mathbb{F} ein endlicher Körper mit $|\mathbb{F}| = q$. Man zeige:

- a) Im Fall $q = 2$ erhält man die Fano-Ebene aus Beispiel 3.3.2.
- b) Die Ordnung von \mathbb{FP}_2 ist q .

Nach diesem Exkurs in allgemeine projektive Ebenen über Körpern wenden wir uns wieder der reell projektiven Ebene zu. In Definition 3.4.1 wurden Geraden durch ihren Normalenvektor definiert. Wir nützen dies aus, um zu sehen, wann drei Punkte $P = [p]$, $Q = [q]$, $R = [r] \in \mathbb{RP}_2$ auf einer Geraden liegen. Zu dieser Notation eine kurze Anmerkung: Im Folgenden werden wir Punkte der reell projektiven Ebene mit Großbuchstaben und (ohne dies explizit zu erwähnen) Repräsentanten eines solchen Punktes $P = [p] \in \mathbb{RP}_2$ (also der Äquivalenzklasse von $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben p notieren.

Definition 3.4.9 Es seien $p, q, r \in \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir mit

$$[p, q, r] := \det(p, q, r)$$

die Determinante der Matrix, deren Spalten die Vektoren p, q, r sind.

Mit dieser Notation (die wir aus Richter-Gebert 2011; Richter-Gebert und Orendt 2009 übernehmen) gilt

Lemma 3.4.10 Für $P, Q, R \in \mathbb{RP}_2$ (mit Repräsentanten $p, q, r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) gilt:

$$P, Q, R \text{ liegen auf einer Geraden} \iff [p, q, r] = 0.$$

Beweis Die Punkte P, Q, R liegen genau dann auf einer Geraden, wenn es ein $g \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$\langle g, p \rangle = \langle g, q \rangle = \langle g, r \rangle = 0$$

gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn p, q, r im Kern der linearen Abbildung

$$\varphi_g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle g, x \rangle$$

enthalten sind. Da g nicht der Nullvektor ist, ist das Bild einer solchen Abbildung φ_g eindimensional, der Kern also zweidimensional. Daher gibt es ein solches g genau dann, wenn p, q, r linear abhängig sind, also deren Determinante gleich null ist. \square

Anstelle mithilfe des Kreuzprodukts kann man den Schnittpunkt zweier projektiver Geraden auch mithilfe von Determinanten bestimmen:

Lemma 3.4.11 Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{RP}_2$. Ein Repräsentant s für den Schnittpunkt S der Geraden AB und CD ist gegeben durch

$$s = [a, c, d]b - [b, c, d]a.$$

Beweis Wie wir im Beweis von 3.4.2 gesehen haben, werden die Geraden AB und CD durch die Normalenvektoren $a \times b$ bzw. $c \times d$ definiert. Ein Repräsentant für den Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist daher durch $(a \times b) \times (c \times d)$ gegeben. Damit erhält man die Behauptung aus der vierten Eigenschaft von Lemma 3.2.7. \square

Die Darstellung aus Lemma 3.4.11 des Schnittpunkts zweier Geraden liefert eine einfache Formel, mit deren Hilfe man entscheiden kann, ob drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Lemma 3.4.12 Es seien $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{RP}_2$ sechs Punkte. Dann treffen sich die Geraden AB, CD und EF genau dann in einem Punkt, wenn

$$[a, c, d] \cdot [b, e, f] = [b, c, d] \cdot [a, e, f]$$

gilt.

Beweis Die Geraden AB, CD und EF treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn der Schnittpunkt S von AB und CD auf EF liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $[s, e, f] = 0$ gilt. Setzt man die Formel aus Lemma 3.4.11 hier ein, sieht man, dass die Aussage äquivalent ist zu

$$0 = [[a, c, d]b - [b, c, d]a, e, f] = [a, c, d] \cdot [b, e, f] - [b, c, d] \cdot [a, e, f]. \quad \square$$

Um einen Einblick in die Schönheit der projektiven Geometrie zu erhalten, wenden wir uns zwei zentralen Sätzen der projektiven Geometrie zu, nämlich dem Satz von Pappos (Satz 3.4.13) sowie dem Satz von Desargues (Satz 3.5.6). Wie es typisch für die projektive Geometrie ist, liefern beide Sätze Aussagen darüber, wann gewisse Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sowohl der Satz von Pappos als auch der Satz von Desargues gelten in allen projektiven Ebenen, die wie in Definition 3.4.6 über Körpern definiert werden. Genauer werden diese Ebenen sogar durch die Gültigkeit dieser Sätze charakterisiert (vgl. Beutelspacher und Rosenbaum 2004, Sätze 2.2.1, 2.2.2 und 3.4.2). Wir beschränken uns aber auf den Fall der reell projektiven Ebene (vgl. auch Coxeter 1955).

Satz 3.4.13 (Satz von Pappos, vgl. Abb. 3.8) Es seien P_1, P_2, P_3 Punkte auf einer Geraden g sowie Q_1, Q_2, Q_3 Punkte auf einer Geraden h der reell projektiven Ebene. Weiter seien $X := P_1Q_2 \cap P_2Q_1$, $Y := P_1Q_3 \cap P_3Q_1$ und $Z := P_2Q_3 \cap P_3Q_2$. Dann liegen X, Y und Z auf einer Geraden.

Beweis Nach Voraussetzung schneiden sich die Geraden $g = P_2P_3, YQ_3$ und XQ_2 in einem Punkt (nämlich P_1). Ebenso schneiden sich $h = Q_2Q_3, YP_3$ und XP_2 in einem Punkt (nämlich Q_1). Mit Lemma 3.4.12 übersetzt sich das zu

$$\begin{aligned} [p_2, y, q_3] \cdot [p_3, x, q_2] &= [p_3, y, q_3] \cdot [p_2, x, q_2] \text{ bzw.} \\ [q_3, y, p_3] \cdot [q_2, x, p_2] &= [q_2, y, p_3] \cdot [q_3, x, p_2]. \end{aligned}$$

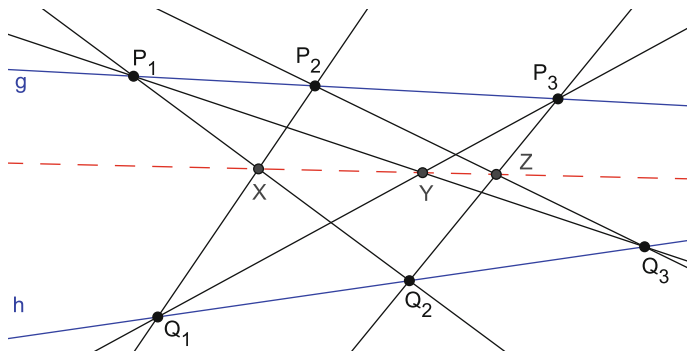


Abb. 3.8 Satz von Pappos

Offenbar stimmt die rechte Seite der ersten Gleichung mit der linken Seite der zweiten überein. Es folgt daher

$$[p_2, y, q_3] \cdot [p_3, x, q_2] = [q_2, y, p_3] \cdot [q_3, x, p_2]$$

oder umgeformt

$$[y, q_3, p_2] \cdot [x, q_2, p_3] = [x, q_3, p_2] \cdot [y, q_2, p_3].$$

Mit Lemma 3.4.12 bedeutet das, dass sich XY , Q_3P_2 und Q_2P_3 in einem Punkt schneiden. Daher liegt der Schnittpunkt Z von P_2Q_3 und P_3Q_2 in der Tat auf der Geraden XY . \square

Aufgabe 3.4.14 Es seien g_1, g_2 und g_3 sowie h_1, h_2 und h_3 sechs Geraden der reell projektiven Ebene, wobei die Geraden g_i , $1 \leq i \leq 3$ durch den gemeinsamen Punkt P und die Geraden h_j , $1 \leq j \leq 3$ durch den gemeinsamen Punkt Q gehen. Ferner seien $S_{ij} := g_i \cap h_j$ die Schnittpunkte von g_i mit h_j , $i \neq j$. Man zeige (dualer Satz von Pappos), dass die Geraden $S_{12}S_{21}$, $S_{13}S_{31}$ und $S_{23}S_{32}$ durch einen gemeinsamen Punkt Z gehen.

Wir merken noch an, dass der projektive Satz von Pappos gleich mehrere euklidische Sätze liefert. Dazu beachte man, dass die Abbildung

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, (x, y) \mapsto (x, y, 1)$$

eine Einbettung der euklidischen Ebene \mathbb{E} in die reell projektive Ebene induziert. Damit erhält man

Satz 3.4.15 (Satz von Pappos – euklidische Versionen) Es seien P_1, P_2, P_3 Punkte auf einer Geraden g sowie Q_1, Q_2, Q_3 Punkte auf einer Geraden h der reell projektiven Ebene. Weiter seien $X := P_1Q_2 \cap P_2Q_1$, $Y := P_1Q_3 \cap P_3Q_1$ und $Z := P_2Q_3 \cap P_3Q_2$. Dann gilt:

1. Wenn die Schnittpunkte $X := P_1 Q_2 \cap P_2 Q_1$, $Y := P_1 Q_3 \cap P_3 Q_1$ und $Z := P_2 Q_3 \cap P_3 Q_2$, existieren, so liegen sie auf einer Geraden.
2. Sind beide Geradenpaare $P_1 Q_2$ und $P_2 Q_1$ sowie $P_1 Q_3$ und $P_3 Q_2$ parallel, so sind auch $P_2 Q_3$ und $P_3 Q_1$ parallel.

Zum Beweis beachte man lediglich, dass im zweiten Fall die Schnittpunkte der (im Euklidischen) parallelen Geraden in der projektiven Ebene auf der (durch den Normalenvektor $\ell = (0, 0, 1)$ definierten unendlich fernen Geraden liegen. Man sieht, dass durch den Übergang zur projektiven Geometrie viele im Euklidischen nötige Fallunterscheidungen überflüssig werden.

3.5 Projektive Transformationen

In diesem Abschnitt gehen wir noch kurz auf Selbstabbildungen der projektiven Ebene ein. Auch hier sucht man strukturverträgliche Abbildungen, die sich wie im euklidischen Fall durch Matrizen beschreiben lassen. Diese werden als projektive Transformationen bezeichnet. Zur Illustration geben wir eine Beweisvariante des Satzes von Desargues, die auf der Anwendung einer projektiven Transformation beruht.

Ist $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(M) \neq 0$, so wird durch

$$[M]: \mathbb{RP}_2 \rightarrow \mathbb{RP}_2, \quad [v] \mapsto [Mv]$$

offenbar eine wohldefinierte Abbildung des \mathbb{RP}_2 in sich definiert. Diese Beobachtung nehmen wir als Grundlage unserer Definition projektiver Transformationen.

Definition 3.5.1 Eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{RP}_2 \rightarrow \mathbb{RP}_2$ heißt projektive Transformation, falls f von der Form $f = [M]$ mit einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\det(M) \neq 0$ ist.

Bemerkung 3.5.2 1. Offenbar ist die Umkehrabbildung zu der projektiven Transformation $[M]$ durch $[M^{-1}]$ gegeben.

2. Die Matrix M in Definition 3.5.1 ist offenbar nur bis auf einen skalaren Faktor $\lambda \in \mathbb{R}^*$ bestimmt. Daher kann man die Menge der projektiven Transformationen als Quotient der allgemeinen linearen Gruppe nach \mathbb{R}^* auffassen:

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}) := \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^*.$$

Wie bei Punkten werden wir daher meist nicht scharf zwischen einer Matrix M und der zugehörigen projektiven Transformation $f = [M]$ unterscheiden.

Projektive Transformationen sind verträglich mit den Grundbegriffen der projektiven Geometrie. So bilden sie Geraden auf Geraden ab:

Lemma 3.5.3 Es seien f eine projektive Transformation sowie $P, Q, R \in \mathbb{RP}_2$ kollinear (d.h. sie liegen auf einer Geraden). Dann liegen $f(P)$, $f(Q)$ und $f(R)$ ebenfalls auf einer Geraden.

Beweis Wegen Lemma 3.4.10 gilt $[p, q, r] = 0$. Ist M eine f repräsentierende Matrix, so erhält man

$$[Mp, Mq, Mr] = [M \cdot (p, q, r)] = \det(M) \cdot [p, q, r] = 0.$$

Also folgt die Behauptung wieder aus Lemma 3.4.10. \square

Man kann zeigen, dass die Umkehrung von Lemma 3.5.3 im Wesentlichen ebenfalls zutrifft. Genauer gilt (vgl. Richter-Gebert 2011, Theorem 3.3): Ist $f: \mathbb{RP}_2 \rightarrow \mathbb{RP}_2$ bijektiv und geradentreu, so ist f eine projektive Transformation.

Interessant ist die Beobachtung, dass projektive Transformationen sich über die Bilder von vier Punkten definieren lassen:

Satz 3.5.4 Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{RP}_2$, sodass jeweils nicht mehr als zwei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Ferner seien $A', B', C', D' \in \mathbb{RP}_2$ mit derselben Eigenschaft. Dann gibt es genau eine projektive Transformation f mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ und $f(D) = D'$.

Beweis Wir betrachten zunächst den Fall $a = e_1, b = e_2, c = e_3$ und $d = (1, 1, 1)$ und machen den Ansatz $M := (\lambda a', \mu b', \nu c')$ für beliebige $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^*$. Dann sind die ersten drei behaupteten Identitäten nach Definition der homogenen Koordinaten offenbar erfüllt. Es sind nun also λ, μ, ν so zu bestimmen, dass

$$d' = Md = \lambda a' + \mu b' + \nu c' = (a', b', c') \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

gilt. Dazu fassen wir diese Gleichung als Gleichungssystem in λ, μ und ν mit Koeffizientenmatrix $A' := (a', b', c')$ auf. Da A', B' und C' nicht auf einer Geraden liegen, gilt gemäß Lemma 3.4.10 $\det(A') \neq 0$, und daher ist das zugehörige lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Beim Übergang zu den Klassen sieht man nun, dass die Matrix M bis auf ein skalares Vielfaches, also $f = [M]$, eindeutig bestimmt ist.

Im allgemeinen Fall bestimmen wir zunächst f mit

$$f(e_1) = A, \quad f(e_2) = B, \quad f(e_3) = C, \quad \text{und} \quad f([1, 1, 1]) = D$$

sowie f' mit

$$f'(e_1) = A', \quad f'(e_2) = B', \quad f'(e_3) = C' \quad \text{und} \quad f'([1, 1, 1]) = D'.$$

Dann erfüllt offenbar $f' \circ f^{-1}$ die Behauptung. Die Eindeutigkeit überlassen wir dem Leser zur Übung. \square

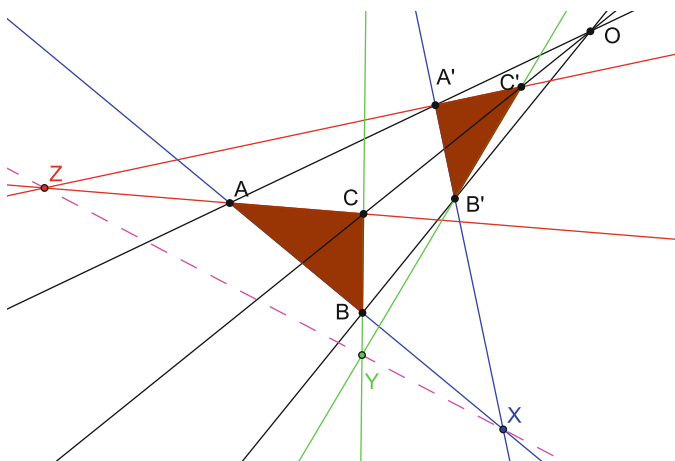


Abb. 3.9 Satz von Desargues

Aufgabe 3.5.5 Eine Abbildung $f: S^2 \rightarrow S^2$ heißt *sphärische Kongruenzabbildung*, wenn f Einschränkung eines orthogonalen Endomorphismus $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist. Man zeige, dass zwei sphärische Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (d. h. bis auf Umbenennung eulersche Dreiecke) genau dann kongruent sind (im Sinne von Definition 3.2.17), wenn es (bis auf Umbenennung) eine sphärische Kongruenzabbildung f mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$ gibt.

Als beispielhafte Anwendung für projektive Transformationen beweisen wir den Satz von Desargues.

Satz 3.5.6 (Satz von Desargues, vgl. Abb. 3.9) Es seien A, B, C , sowie A', B' und C' sechs Punkte der reellen projektiven Ebene, sodass die Geraden AA' , BB' und CC' durch einen gemeinsamen Punkt O gehen und weder A, B, C noch A', B', C' kollinear sind. Dann liegen die Punkte

$$X := AB \cap A'B', \quad Y := BC \cap B'C' \quad \text{und} \quad Z := AC \cap A'C'$$

auf einer gemeinsamen Geraden.

Beweis Die Aussage des Satzes von Desargues ist wegen Lemma 3.5.3 invariant unter projektiven Transformationen. Da die Punkte A', B' und C' nicht auf einer Geraden liegen, können wir nach Satz 3.5.4 annehmen, dass $a' = e_1$, $b' = e_2$ und $c' = e_3$ gelten. Weiter hat man nach Lemma 3.4.11

$$x = [a, a', b']b - [b, a', b']a, \quad y = [b, b', c']c - [c, b', c']b \quad \text{und} \quad z = [a, a', c']c - [c, a', c']a.$$

Mithilfe der Multilinearität der Determinante erhält man (nachrechnen!)

$$[x, y, z] = ([b, a', b'] [c, b', c'] [a, a', c'] - [a, a', b'] [b, b', c'] [c, a', c']) [a, b, c].$$

Schreibt man $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ und $c = (c_1, c_2, c_3)$ und nutzt $a' = e_1$, $b' = e_2$ und $c' = e_3$ aus, so erhält man

$$[x, y, z] = (-b_3c_1a_2 + a_3b_1c_2)[a, b, c]. \quad (3.2)$$

Nach Voraussetzung und Lemma 3.4.12 gilt $[a, b, b'] \cdot [a', c, c'] = [a', b, b'] \cdot [a, c, c']$, was zeigt, dass der Term in Klammern in (3.2) den Wert null ergibt, also gilt $[x, y, z] = 0$. Nach Lemma 3.4.10 liegen damit die drei Punkte X , Y und Z auf einer gemeinsamen Geraden. \square

Aufgabe 3.5.7 1. *Man formuliere und beweise die duale Version des Satzes von Desargues.*

2. *Man formuliere und beweise euklidische Versionen des Satzes von Desargues.*

Inhaltsverzeichnis

4.1 Geometrie in der komplexen Zahlenebene	81
4.2 Abstand in der hyperbolischen Geometrie	87
4.3 Oberes Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene	93
4.4 Hyperbolische Trigonometrie	98
4.5 Hyperbolische Parallelen und Abstände	105
4.6 Alternative Modelle für hyperbolische Geometrien	111

In diesem Kapitel wenden wir uns der hyperbolischen Geometrie zu, die im gewissen Sinn das Gegenstück zur sphärischen Geometrie darstellt. Hier gibt es zu einem Punkt außerhalb einer Geraden nicht nur eine, sondern unendlich viele Geraden, die diese nicht schneiden, also parallel zu ihr verlaufen. Wir werden sehen, dass in der hyperbolischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms 1.1.2 alle anderen Hilbertschen Axiome erfüllt sind. Dies zeigt, dass das Parallelenaxiom in der Tat unabhängig von den anderen Axiomen ist, sich also nicht aus diesen ableiten lässt.

4.1 Geometrie in der komplexen Zahlenebene

Als Grundlage für ein einfaches Beispiel einer hyperbolischen Geometrie unternehmen wir kurz einen Exkurs in die komplex projektive Geometrie, zumal diese durchaus auch einige eigene für sich selbst interessante Resultate liefert.

Definition 4.1.1 Auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ sei eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$(z, w) \sim (z', w') : \Leftrightarrow \text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } (z, w) = \lambda(z', w').$$

Die Menge der Äquivalenzklassen, die komplex projektive Gerade, sei mit $\hat{\mathbb{C}}$ bezeichnet und die Äquivalenzklassenabbildung mit $\pi_{\mathbb{C}}$. Sind keine Missverständnisse zu befürchten, schreiben wir einfach nur π .

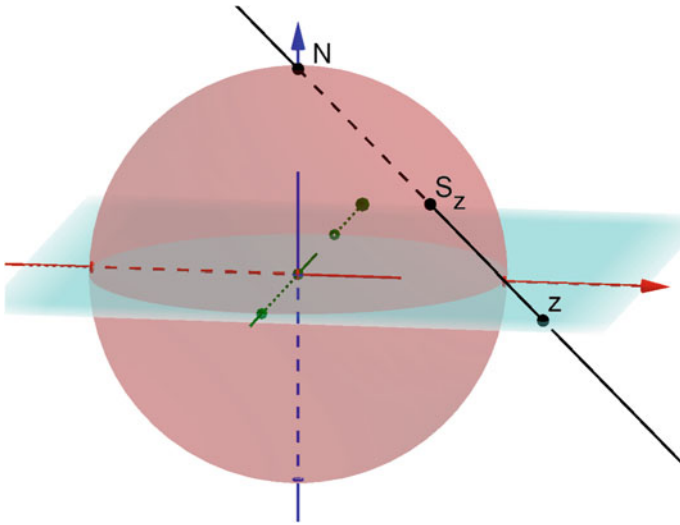


Abb. 4.1 Riemannsche Zahlenkugel

In Analogie zur Konstruktion der reell projektiven Ebene kann man sich $\hat{\mathbb{C}}$ als Menge vorstellen als die komplexe Ebene \mathbb{C} erweitert um einen unendlich fernen Punkt ∞ , d.h. $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Offenbar ist nämlich jeder Punkt (z, w) mit $w \neq 0$ äquivalent zu $(\frac{z}{w}, 1)$, und daher kann $\pi(z, w)$ mit $\frac{z}{w}$ identifiziert werden. Die einzige andere Äquivalenzklasse besteht aus Punkten $(z, 0)$ mit $z \neq 0$, und diese identifiziert man dann mit dem unendlich fernen Punkt ∞ .

Eine andere Vorstellung von $\hat{\mathbb{C}}$ liefert das Modell der Riemannschen Zahlenkugel (Abb. 4.1).

Lemma 4.1.2 Es sei wieder $S^2 := \{P \in \mathbb{R}^3; \|P\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel und $\iota: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die kanonische Einbettung, d.h. $\iota(a + ib) = (a; b; 0)$. Für $z \in \mathbb{C}$ sei ferner g_z die Gerade durch $N := (0; 0; 1)$ und $\iota(z)$. Dann gibt es genau einen von N verschiedenen Schnittpunkt S_z von g_z mit S^2 und es gilt

$$S_z = \frac{1}{1 + |z|^2} (2a; 2b; |z|^2 - 1).$$

Beweis Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. □

In der Notation von Lemma 4.1.2 erhält man durch die Abbildung

$$S: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2, z \mapsto \begin{cases} S_z, & z \in \mathbb{C} \\ N, & z = \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

eine Bijektion. Man kann damit den Raum $\hat{\mathbb{C}}$ sogar metrisieren, indem man für $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ die sogenannte Sehnenmetrik

$$\sigma(z, w) := \|\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(w)\|$$

mit der Standardnorm auf \mathbb{R}^3 definiert.

Aufgabe 4.1.3 In der Notation von Lemma 4.1.2 und Gl. (4.1) zeige man:

1. Die Umkehrabbildung von \mathcal{S} ist gegeben durch

$$\mathcal{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, P = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2), & P \neq N \\ \infty, & P = N \end{cases}.$$

2. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{und} \quad \sigma(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Definition 4.1.4 Eine Möbiustransformation ist eine Abbildung

$$M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0.$$

Dabei setzen wir $f(-\frac{d}{c}) := \infty$ und $f(\infty) := \frac{a}{c}$, falls $c \neq 0$ ist. Im Fall $c = 0$ definiert man $f(\infty) := \infty$.

Möbiustransformationen entsprechen gerade der Gruppe

$$\text{PGL}_2(\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}; \det(A) = 1\} / \pm I_2,$$

wie folgende Bemerkung zeigt (man vergleiche auch die Definition projektiver Transformationen in Definition 3.5.1):

Bemerkung 4.1.5 1. Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $\det(A) \neq 0$ sowie M_A die durch $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ definierte Möbiustransformation. Ist $z = \pi(u, v)$ wie in Definition 4.1.1, dann gilt

$$M_A(z) = \pi \left(A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right),$$

d. h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{M_A} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

ist kommutativ.

2. Zwei Matrizen $A, A' \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit nicht verschwindender Determinante definieren genau dann die gleiche Möbiustransformation, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit $A = \lambda A'$.
3. Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit nicht verschwindender Determinante und die zugehörigen Möbiustransformationen gilt $M_{AB} = M_A \circ M_B$.

Die in Bemerkung 4.1.5 dargestellte Sichtweise von Möbiustransformationen ist oftmals sehr praktisch: Beispielsweise lässt sich damit die Umkehrabbildung einer Möbiustransformation sofort angeben.

Lemma 4.1.6 Die Menge der Möbiustransformationen bildet eine Gruppe bzgl. der Verkettung der Abbildungen, insbesondere sind Möbiustransformationen bijektiv.

Beweis Wir zeigen nur die Bijektivität und überlassen den Rest dem Leser: Wir definieren die Umkehrabbildung von $M: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ entsprechend dem Inversen der M zugeordneten Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wegen Bemerkung 4.1.5 2. brauchen wir den Vorfaktor (Kehrwert der Determinante) nicht zu berücksichtigen. Damit erhält man

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad \square$$

Der nächste Satz ist das Analogon zum Satz 3.5.4 über projektive Transformationen der reell projektiven Ebene und lässt sich dementsprechend auch sehr ähnlich beweisen.

Satz 4.1.7 Es seien $a, b, c, a', b', c' \in \hat{\mathbb{C}}$, wobei die Punkte a, b, c sowie a', b' und c' paarweise verschieden seien. Dann gibt es genau eine Möbiustransformation M mit $M(a) = a', M(b) = b'$ und $M(c) = c'$.

Beweis Für die Existenz seien zunächst $a' = 0, b' = \infty$ und $c' = 1$. Dann setzen wir

$$M(z) := \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}.$$

Dann gilt offenbar $M(a) = 0, M(b) = \infty$ und $M(c) = 1$.

Im allgemeinen Fall gibt es nach dem ersten Teil des Beweises Möbiustransformationen T und S mit $T(a) = 0, T(b) = \infty, T(c) = 1$ sowie $S(a') = 0, S(b') = \infty$ und $S(c') = 1$. Offenbar leistet dann $M := S^{-1} \circ T$ das Gewünschte.

Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen, dass eine Möbiustransformation M mit $M(0) = 0, M(1) = 1$ und $M(\infty) = \infty$ die Identität ist. Dies überlassen wir dem Leser. \square

Ein oftmals sehr nützliches Hilfsmittel der komplexen Geometrie ist das Doppelverhältnis von vier Punkten.

Definition 4.1.8 Es seien $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann ist das Doppelverhältnis dieser vier Punkte im Fall, dass alle endlich sind, definiert durch:

$$[a, b; c, d] := \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}.$$

Ist einer der Punkte unendlich, so definiert man das Doppelverhältnis sinngemäß: Gilt etwa $c = \infty$, so setzt man

$$[a, b; \infty, d] := \frac{b - d}{a - d}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt sofort

Bemerkung 4.1.9 Es sei $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ die Projektion (vgl. Definition 4.1.1) mit $\pi(A) = a, \pi(B) = b, \pi(C) = c$ und $\pi(D) = d$. Dann gilt

$$[a, b; c, d] = \frac{\det(A, C) \cdot \det(B, D)}{\det(A, D) \cdot \det(B, C)}.$$

Die zweite Beschreibung des Doppelverhältnisses zeigt mithilfe der Multiplikativität der Determinante und der Beobachtung 4.1.5 die Invarianz des Doppelverhältnisses unter Möbiustransformationen:

Satz 4.1.10 Ist $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation und sind $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$, so gilt

$$[M(a), M(b); M(c), M(d)] = [a, b; c, d].$$

Definition 4.1.11 Eine reelle Gerade in \mathbb{C} ist eine Menge der Form $z + \mathbb{R}w, z, w \in \mathbb{C}$. Unter einem Kreis verstehen wir eine Menge der Form $K(z; r) := \{w \in \mathbb{C}; |w - z| = r\}$.

In $\hat{\mathbb{C}}$ können wir Geraden als Kreise, die den Punkt ∞ enthalten, auffassen. Man fasst daher auch Kreise und Geraden unter dem Begriff verallgemeinerte Kreise zusammen.

Beispiel 4.1.12 1. Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ heißt Inversion. Sie bildet verallgemeinerte Kreise wieder auf verallgemeinerte Kreise ab und ist winkeltreu.
2. Die Abbildung

$$C : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

heißt Cayley-Transformation. Sie bildet die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ in das Innere des Einheitskreises ab; weiter ist $C(\mathbb{R}) = S^1 := K(0; 1)$. Die Umkehrabbildung von C ist gegeben durch

$$C^{-1}(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Die Beweise dieser Aussagen bleiben dem Leser zur Übung überlassen.

Satz 4.1.13 Die Gruppe der Möbiustransformationen wird von (reellen) Streckungen, Drehungen, Translationen und der Inversion erzeugt.

Beweis Es sei $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Wir können annehmen, dass $ad - bc = 1$ gilt. Ist $c = 0$, so ist die Behauptung offensichtlich richtig; im Fall $c \neq 0$ gilt

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{cz+d}{cz+d} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

woraus man die Behauptung abliest. \square

Zusammen mit Beispiel 4.1.12 erhält man daraus unmittelbar

Korollar 4.1.14 Ist M eine Möbiustransformation, so ist das Bild eines Kreises oder einer Geraden wieder ein Kreis oder eine Gerade.

Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses und der Tatsache, dass man Möbiustransformationen auf drei Punkten festlegen kann, erhält man nun auch noch

Satz 4.1.15 Das Doppelverhältnis $[a, b; c, d]$ von vier Punkten $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ ist genau dann reell, wenn a, b, c, d auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen.

Beweis Wir zeigen nur „ \Rightarrow “ und überlassen die andere Richtung dem Leser. Nach Satz 4.1.7 gibt es eine Möbiustransformation M mit $M(a) = 0$, $M(b) = 1$ und $M(c) = \infty$. Da nach der Definition des Doppelverhältnisses, Satz 4.1.10 und Voraussetzung

$$\frac{M(d) - 1}{M(d)} = [0, 1; \infty, M(d)] = [M(a), M(b); M(c), M(d)] = [a, b; c, d] \in \mathbb{R}$$

gilt, folgt $M(d) \in \mathbb{R}$. Also liegen $M(a)$, $M(b)$, $M(c)$ und $M(d)$ alle auf der reellen Geraden. Wegen Korollar 4.1.14 liegen dann auch

$$a = M^{-1}(M(a)), \quad b = M^{-1}(M(b)), \quad c = M^{-1}(M(c)) \quad \text{und} \quad d = M^{-1}(M(d))$$

auf einem Kreis oder einer Geraden. \square

Aufgabe 4.1.16 Man zeige, dass Satz 4.1.15 dem Peripheriewinkelsatz entspricht (vgl. Schröder 1991, Satz 2.64).

Definition 4.1.17 Die Abbildung $\iota_E: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, heißt Inversion am Einheitskreis (oder auch Kreisspiegelung).

Bemerkung 4.1.18 Nach Beispiel 4.1.12 ist klar, dass ι_E winkeltreu ist und Kreise bzw. Geraden wieder auf Kreise oder Geraden abbildet. Weiter sind die Punkte 0, z und $\iota_E(z)$ offenbar (reell) kollinear und es gilt $|z| \cdot |\iota_E(z)| = 1$.

Für den nächsten Satz erinnern wir an das Lemma von Schwarz aus der Funktionentheorie:

Lemma 4.1.19 (Lemma von Schwarz) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Ist $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$, dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ sowie $|f'(0)| \leq 1$. Gilt in einer der beiden Ungleichungen Gleichheit für ein $z \in \mathbb{D}$, so folgt $f(z) = e^{i\varphi}z$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf die Literatur (vgl. etwa Freitag und Busam 1993, Lemma III.3.7 oder Ahlfors 1966, 4 Theorem 13).

Satz 4.1.20 Die biholomorphen Abbildungen $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ sind von der Form

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Beweis Den Nachweis, dass Abbildungen von der behaupteten Form in der Tat \mathbb{D} nach \mathbb{D} biholomorph abbilden, überlassen wir dem Leser. Es sei nun $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorph und $a := f^{-1}(0)$. Die Abbildung

$$h := f \circ M^{-1}(z) \text{ mit } M(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas von Schwarz. Daher gilt $|h'(0)| \leq 1$. Ebenso trifft dies auf h^{-1} zu, also gilt auch $|(h^{-1})'(0)| \leq 1$. Dann muss aber in der Tat Gleichheit gelten. Wieder das Lemma von Schwarz liefert dann $h(z) = e^{i\varphi}z$, woraus man die Behauptung direkt ableiten kann. \square

4.2 Abstand in der hyperbolischen Geometrie

Für die hyperbolische Geometrie gibt es verschiedene Modelle. Wir stellen in den nächsten Abschnitten ein Modell vor, das auf Henri Poincaré zurückgeht und als oberes Halbebenenmodell von Poincaré bezeichnet wird. Dieses Modell hat den Vorteil, dass es anschaulich gut greifbar ist und viele Berechnungen besonders einfach sind. In Abschn. 4.6 werden wir einige andere Modelle vorstellen. Im vorliegenden Abschnitt führen wir die hyperbolische Metrik in diesem Poincaré-Modell sowie die bzgl. dieser Metrik isometrischen Abbildungen ein.

Dazu betrachten wir die „obere Halbebene“

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

in \mathbb{C} , d. h. die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil.

Wir zeigen zunächst, dass eine Möbiustransformation, die \mathbb{H} invariant lässt, immer in der Form

$$M: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sowie $\det(M) = ad - bc > 0$ dargestellt werden kann. Dazu benutzen wir folgende Beobachtung:

Lemma 4.2.1 Es sei

$$M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(M(z)) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z).$$

Beweis Dies erfolgt durch direktes Nachrechnen. \square

Satz 4.2.2 Ist $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ biholomorph, so gibt es ein $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $M = M_A$ und $\det(A) > 0$.

Beweis Es sei also $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ biholomorph. Dann ist mit der Cayley-Transformation C aus Beispiel 4.1.12 2. die Abbildung

$$f := CMC^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

eine biholomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe, also nach Satz 4.1.20 eine Möbiustransformation. Dann ist aber auch $M = C^{-1}fC$ als Verkettung von Möbiustransformationen eine Möbiustransformation.

Es bleibt zu zeigen, dass man annehmen kann, dass

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

reelle Koeffizienten hat. Offenbar gilt mit $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (aus Stetigkeitsgründen) $M(\hat{\mathbb{R}}) \subset \hat{\mathbb{R}}$ und $M^{-1}(\hat{\mathbb{R}}) \subset \hat{\mathbb{R}}$. Speziell liefert dies

$$M(0) = \frac{b}{d}, \quad M(\infty) = \frac{a}{c}, \quad M^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dabei nur den Fall $c \neq 0 \neq d$ und überlassen die anderen Fälle dem Leser. In diesem Fall hat man

$$A := \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und $M = M_A$. Wir können also $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ annehmen. Wegen $\operatorname{Im}(M(i)) > 0$ folgt aus Lemma 4.2.1 nun auch die letzte Behauptung. \square

Da das Erweitern des eine Möbiustransformation darstellenden Bruches diese nicht ändert, kann man sogar erreichen, dass die Determinante der zugehörigen Matrix den Wert eins annimmt.

Um in \mathbb{H} messen zu können, werden wir eine Metrik auf \mathbb{H} einführen. Es wird sich herausstellen, dass Möbiustransformationen diese Metrik respektieren, also Isometrien bzgl. dieser Metrik darstellen. Damit übernehmen Möbiustransformationen in der hyperbolischen Geometrie gerade die Rolle der Kongruenzabbildungen der euklidischen Geometrie.

Aufgabe 4.2.3 Man zeige: Sind $u, w \in \mathbb{H}$, so gibt es eine Möbiustransformation $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mit $M(u), M(v) \in i\mathbb{R}$.

Definition 4.2.4 Mit

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H}); \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1, \gamma|_{]t_i, t_{i+1}[} \in \mathcal{C}^1(]t_i, t_{i+1}[)\}$$

bezeichnen wir die stückweise stetig differenzierbaren Wege in \mathbb{H} .

Bemerkung 4.2.5 1. Die stückweise stetig differenzierbaren Wege Γ bilden einen \mathbb{R} -Kegel in $V := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{H})$.

2. Zu $\gamma \in \Gamma$ wird durch $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ der zu γ inverse Weg $\gamma^{-1} \in \Gamma$ definiert. Man hat $\gamma^{-1}(0) = \gamma(1)$, $\gamma^{-1}(1) = \gamma(0)$ und $\gamma^{-1}([0, 1]) = \gamma([0, 1])$.
3. Zu $\gamma, \mu \in \Gamma$ mit $\gamma(1) = \mu(0)$ sei

$$\gamma * \mu: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

die Aneinanderhängung von γ und μ . Dann gilt $\gamma * \mu \in \Gamma$.

Die grundlegende Idee, um das Halbebenenmodell nach Poincaré zu erhalten, ist wohl folgende Definition.

Definition 4.2.6 Es sei $\gamma \in \Gamma$. Dann heißt

$$L(\gamma) := \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt$$

die hyperbolische Länge von γ .

Zunächst beachte man, dass das in der Definition gegebene Integral sicher existiert: Nach Voraussetzung an γ ist der Integrand zunächst eine stückweise stetig differenzierbare Funktion. Da zudem $\gamma([0, 1])$ kompakt ist, existiert $m := \min(\operatorname{Im}(\gamma([0, 1]))) > 0$, und daher kann der Integrand nach oben gegen $|\gamma'(t)|m^{-1}$ abgeschätzt werden. Dass dieses Integral existiert, ist bekannt. Genauer erhält man folgende Beobachtung:

Aufgabe 4.2.7 Man zeige für $\gamma, \mu \in \Gamma$:

1. Gilt $m \leq \operatorname{Im}(\gamma([0, 1])) \leq M$, dann gilt

$$\frac{1}{M} \ell(\gamma) \leq L(\gamma) \leq \frac{1}{m} \ell(\gamma),$$

wobei $\ell(\gamma)$ die euklidische Bogenlänge von γ bezeichnet.

2. $L(\gamma^{-1}) = L(\gamma)$.
3. Im Falle $\gamma(1) = \mu(0)$ gilt $L(\gamma * \mu) = L(\gamma) + L(\mu)$.

Die erste Beobachtung ist, dass die hyperbolische Länge invariant unter Möbiustransformationen ist.

Satz 4.2.8 Es seien $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ eine Möbiustransformation und $\gamma \in \Gamma$. Dann gilt $L(M \circ \gamma) = L(\gamma)$.

Beweis Es gilt

$$M \circ \gamma(t) = \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d} \implies (M \circ \gamma)'(t) = \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t) + d)^2}.$$

Nach Satz 4.2.2 können wir annehmen, dass M reelle Koeffizienten hat. Mit Lemma 4.2.1 ergibt sich dann

$$\frac{|(M \circ \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}(M \circ \gamma(t))} = \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))},$$

woraus man die Behauptung erhält. \square

Definition 4.2.9 Es seien $z, w \in \mathbb{H}$. Dann heißt

$$d(z, w) := \inf\{L(\gamma); \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(0) = z, \gamma(1) = w\}$$

der hyperbolische Abstand von z und w .

Bemerkung 4.2.10 Aus Satz 4.2.8 folgt offenbar $d(z, w) = d(M(z), M(w))$ für jede Möbiustransformation $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.

Offenbar gilt diese Invarianz auch für die Abbildung $z \mapsto -\bar{z}$.

Lemma 4.2.11 Für $z = iy, w = iv \in i\mathbb{R}_{>0}$ mit $y < v$ gilt $d(z, w) = \log\left(\frac{v}{y}\right)$, wobei \log den reellen natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Beweis Es sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(0) = z$ und $\gamma(1) = w$. Um Schreibarbeit zu sparen, nehmen wir an, dass γ stetig differenzierbar ist (sonst muss man das Integral auf entsprechende Teilintervalle aufspalten und dann summieren), und schreiben $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Dann gilt

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log\left(\frac{v}{y}\right).$$

Da sich für $\mu(t) := iy + it(v - y)$ offenbar Gleichheit ergibt, erhält man die Behauptung. \square

Satz 4.2.12 Der hyperbolische Abstand ist eine Metrik auf \mathbb{H} .

Beweis Zunächst gilt offenbar $d(z, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Für $z, w \in \mathbb{H}$ mit $z \neq w$ gibt es aufgrund 4.2.3 (oder wegen des etwas weitergehenden Lemmas 4.2.15 weiter unten) eine Möbiustransformation $M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mit $M(z), M(w) \in i\mathbb{R}$. Wegen Satz 4.2.8 und Lemma 4.2.11 gilt dann $d(z, w) = d(M(z), M(w)) > 0$.

Die Symmetrie folgt offenbar aus Aufgabe 4.2.7 2.

Für die Dreiecksungleichung und $z, u, w \in \mathbb{H}$ wähle man zu $\varepsilon > 0$ Wege $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(0) = z, \gamma(1) = u, \mu(0) = u, \mu(1) = w$ mit

$$L(\gamma) < d(z, u) + \varepsilon \text{ und } L(\mu) < d(u, w) + \varepsilon.$$

Dann gelten für $\nu := \gamma * \mu$ offenbar $\nu(0) = z, \nu(1) = w$ und wegen Bemerkung 4.2.5 3. $L(\nu) = L(\gamma) + L(\mu)$. Dies zeigt

$$d(z, w) \leq L(\nu) < d(z, u) + d(u, w) + 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, erhält man die Dreiecksungleichung. \square

In der Funktionentheorie beweist man, dass die biholomorphen Abbildungen eines Gebietes genau die winkeltreuen und orientierungstreuen (stetigen mit stetigen partiellen Ableitungen) Abbildungen des Gebietes sind (vgl. Behnke und Sommer 1965, IV, §2, speziell Satz 8 und 9). Zusammen mit Satz 4.2.2 und Bemerkung 4.2.10 erhalten wir damit folgenden Satz:

Satz 4.2.13 Die winkeltreuen und längentreuen Selbstabbildungen von \mathbb{H} können beschrieben werden durch

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{oder} \quad z \mapsto \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}, \quad ad - bc > 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dies motiviert folgende Definition:

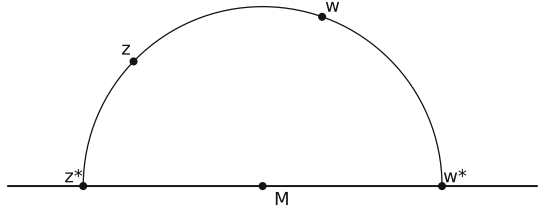
Definition 4.2.14 Eine Abbildung wie in Satz 4.2.13 wird als hyperbolische Kongruenzabbildung bezeichnet. Für die Menge aller hyperbolischen Kongruenzabbildungen schreiben wir $\text{Kong}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H})$.

Eine genauere Analyse des Beweises von Lemma 4.2.11 zeigt, dass in der hyperbolischen Geometrie die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der imaginären Achse in der Tat die (euklidische) Strecke zwischen den Punkten ist. Dies trifft generell für Punkte mit gleichem Realteil zu, da man diese durch eine horizontale Verschiebung auf die imaginäre Achse befördern kann. Für Punkte z, w mit verschiedenem Realteil sei $K(m, r)$ ein Kreis mit $m \in \mathbb{R}$ und $z, w \in K(m, r)$. Wir behaupten, dass dieser die kürzeste Verbindung von z und w beschreibt. Dazu genügt es zu zeigen, dass es eine Möbiustransformation gibt, die diesen Kreis auf die imaginäre Achse abbildet, sodass der positive Halbkreis auf der positiven imaginären Achse landet.

Lemma 4.2.15 Es seien $z, w \in \mathbb{H}$ mit (ohne Einschränkung) $\text{Re}(z) < \text{Re}(w)$. Weiter sei $K(m, r)$ der Kreis mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}$ und $z, w \in K(m, r)$. Ferner seien $z^*, w^* \in \mathbb{R} \cap K(m, r)$ mit $z^* = \text{Re}(z^*) < \text{Re}(w^*) = w^*$ (vgl. Abb. 4.2). Dann gelten für

$$M(\zeta) := \frac{\zeta - z^*}{w^* - \zeta}.$$

Abb. 4.2 Zur Doppelverhältnisformel von Korollar 4.2.16



1. $M \in \text{Kong}_h(\mathbb{H})$.
2. $M(K(m; r) \cap \mathbb{H}) = i\mathbb{R}_{>0}$.

Beweis 1. Die erste Aussage ist wegen $w^* - z^* > 0$ eine direkte Folgerung aus Satz 4.2.13.
 2. Offenbar hat man $M(z^*) = 0$, $M(w^*) = \infty$ und $M(m + ir) = i$ (man beachte, dass $z^* = m - r$ und $w^* = m + r$ gelten). Damit folgt aus der Invarianz verallgemeinerter Kreise (Korollar 4.1.14) unter Möbiustransformationen die Behauptung. \square

Aus dem letztem Lemma ergibt sich eine schöne Formel für den hyperbolischen Abstand zweier Punkte:

Korollar 4.2.16 Für $z, w \in \mathbb{H}$ gelten in der Notation von Lemma 4.2.15

$$d(z, w) = |\log([z, w; z^*, w^*])|,$$

wobei $[z, w; z^*, w^*]$ wieder das Doppelverhältnis bezeichnet.

Beweis In der Bezeichnung von Lemma 4.2.15 hat man wegen Bemerkung 4.2.10 $d(z, w) = d(M(z), M(w)) \stackrel{4.2.11}{=} |\log(\frac{M(z)}{M(w)})|$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} d(z, w) &= \left| \log \left(\frac{z - z^*}{w^* - z} \cdot \frac{w^* - w}{w - z^*} \right) \right| \\ &= \left| \log \left(\frac{z - z^*}{z - w^*} \cdot \frac{w - w^*}{w - z^*} \right) \right| = |\log([z, w; z^*, w^*])|. \end{aligned} \quad \square$$

Es gibt eine Reihe von weiteren Formeln für den hyperbolischen Abstand, von denen wir nur einige vorstellen werden. Die Formel aus Korollar 4.2.16 notieren wir noch explizit. Dazu bezeichnen wir für $z, w \in \mathbb{H}$ mit $\text{Im}(z) \neq \text{Im}(w)$ den reellen Mittelpunkt des Kreises durch z und w mit m . Dieser hat den Radius $|z - m| = |w - m|$. Dann gilt

$$d(z, w) = \log \left| \frac{(z - m + |z - m|)(w - m - |z - m|)}{(z - m - |z - m|)(w - m + |z - m|)} \right|. \quad (4.2)$$

Eine der wohl wichtigsten Darstellungen liefert folgendes Lemma:

Lemma 4.2.17 Es seien $z, w \in \mathbb{H}$. Dann gilt:

1.

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

2.

$$\sinh(d(z, w)) = \frac{|z - w| \cdot |z - \bar{w}|}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

Beweis

1. Wir zeigen die Formel zunächst für $z, w \in i\mathbb{R}$, also $z = iy$ und $w = iv$ mit $y < v$. Dann gilt nach Lemma 4.2.11

$$\cosh(d(x, y)) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{y} + \frac{y}{v} \right) = \frac{v^2 + y^2}{2vy} = 1 + \frac{(v - y)^2}{2vy} = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite invariant unter Möbiustransformationen ist. Dazu sei $M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\operatorname{OE} ad - bc = 1$ eine Möbiustransformation. Dann rechnet man schnell

$$M(z) - M(w) = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}$$

nach. Zusammen mit Lemma 4.2.1 erhält man nun

$$\frac{|M(z) - M(w)|^2}{\operatorname{Im}(M(z))\operatorname{Im}(M(w))} = \frac{|z - w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)},$$

woraus die Behauptung folgt.

2. Diesen Nachweis überlassen wir dem Leser als Übung. □

Für Punkte auf der imaginären Achse gibt es eine einfache, aber oft sehr nützliche Möglichkeit, den hyperbolischen Abstand zu einem Punkt außerhalb der imaginären Achse zu ermitteln:

Aufgabe 4.2.18 Gelten $A = iv \in i\mathbb{R}_{>0}$ und $B \in \mathbb{H}$, so hat man

$$\cosh(d(A, B)) = \frac{|A|^2 + |B|^2}{2\operatorname{Im}(A)\operatorname{Im}(B)}.$$

4.3 Oberes Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene

In diesem Abschnitt definieren wir ein Modell einer hyperbolischen Geometrie, das, wie bereits erwähnt, auf Henri Poincaré zurückgehende Halbebenenmodell, und weisen nach, dass dieses alle Hilbertschen Axiome bis auf das Parallelenaxiom erfüllt. Dies zeigt insbesondere, dass das euklidische/hilbertsche Parallelenaxiom in der Tat unabhängig von den anderen Axiomen ist.

Definition 4.3.1 Unter dem Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene verstehen wir die Menge \mathbb{H} zusammen mit dem hyperbolischen Abstand d . Punkte in \mathbb{H} sind die Elemente von \mathbb{H} , Geraden in \mathbb{H} sind entweder (euklidische) Halbstrahlen $x + i\mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}$, oder Halbkreise $K_+(m; r) := \mathbb{H} \cap K(m; r)$ mit reellem $m \in \mathbb{R}$ und positivem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Bemerkung 4.3.2 Aus dem Lemma 4.2.15 folgt, dass die Gruppe $\text{Kong}_h(\mathbb{H})$ transitiv auf der Menge der Geraden in \mathbb{H} operiert.

Im Folgenden werden wir uns überlegen, dass die hyperbolische Ebene \mathbb{H} das Hilbertsche Axiomensystem außer dem Parallelenaxiom erfüllt. Für die Axiomengruppe der Inzidenz 1.2.1 ist dies ziemlich offensichtlich. Exemplarisch zeigen wir wie im euklidischen Fall das erste Inzidenzaxiom:

Lemma 4.3.3 Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ mit $A \neq B$. Dann gibt es genau eine hyperbolische Gerade g mit $A, B \in g$.

Beweis Zur Existenz: Gilt $\text{Re}(A) = \text{Re}(B) =: x$, so sei $g := x + i\mathbb{R}$. Dann gilt offenbar $A, B \in g$.

Im Fall $\text{Re}(A) \neq \text{Re}(B)$ schneidet die (euklidische) Mittelsenkrechte der (euklidischen) Strecke \overline{AB} die reelle Achse. Dieser Schnittpunkt sei M . Nach Lemma 2.4.9 gilt $|A - M| = |B - M| =: r$. Dann ist $g := K(M; r) \cap \mathbb{H}$ eine hyperbolische Gerade, und es gilt $A, B \in g$.

Dass die jeweilige Geradenkonstruktion die einzig mögliche ist, ist klar. \square

Wir geben an dieser Stelle eine explizite Berechnung des zwei Punkte mit unterschiedlichem Realteil verbindenden Halbkreises an (also der hyperbolischen Geraden durch diese Punkte), die wir später noch öfter verwenden werden.

Lemma 4.3.4 Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ mit $\text{Re}(A) \neq \text{Re}(B)$. Ferner sei $K(M; r)$ ein Kreis mit $M \in \mathbb{R}$ und $A, B \in K(M; r)$. Dann gelten

$$M = \frac{|B|^2 - |A|^2}{2(\text{Re}(B) - \text{Re}(A))} \quad \text{und} \quad r = \frac{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}{2|\text{Re}(B) - \text{Re}(A)|}.$$

Beweis Wir zeigen zunächst die Aussage über den Mittelpunkt: Punkte x auf der euklidischen Mittelsenkrechten von A und B erfüllen die Gleichung

$$(x - A)(\bar{x} - \bar{A}) = |x - A|^2 = |x - B|^2 = (x - B)(\bar{x} - \bar{B}).$$

Ist x reell, so erhält man die Gleichung $-x(A + \bar{A}) + |A|^2 = -x(B + \bar{B}) + |B|^2$, woraus man direkt die behauptete Form für M abliest.

Wir schreiben nun $A = a_1 + ia_2$ und $B = b_1 + ib_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} M &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2}{2(b_1 - a_1)} = \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_2^2 - a_2^2}{2(b_1 - a_1)} \\ \implies B - M &= \frac{(b_1 - a_1)^2 + a_2^2 - b_2^2}{2(b_1 - a_1)} + ib_2. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} |B - M|^2 &= \frac{(b_1 - a_1)^4 + (b_2^2 - a_2^2)^2 + 2(b_1 - a_1)^2(a_2^2 - b_2^2) + 4b_2^2(b_1 - a_1)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\ &= \frac{(b_1 - a_1)^4 + 2(b_1 - a_1)^2(a_2^2 + b_2^2) + (b_2^2 - a_2^2)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\ &= \frac{(b_1 - a_1)^4 + (b_1 - a_1)^2((b_2 + a_2)^2 + (b_2 - a_2)^2) + (b_2 - a_2)^2(b_2 + a_2)^2}{4(b_1 - a_1)^2} \\ &= \frac{((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2)((b_1 - a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2)}{4(b_1 - a_1)^2} \\ &= \frac{|B - A|^2 \cdot |B - \bar{A}|^2}{4(\operatorname{Re}(B) - \operatorname{Re}(A))^2}, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

Für die Anordnungsaxiome definieren wir zunächst eine Zwischenbeziehung:

Definition 4.3.5 Es seien $A, B, C \in \mathbb{H}$ drei verschiedene Punkte einer Geraden. Wir sagen, dass C zwischen A und B liegt, falls

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$$

gilt.

Damit lassen sich auch Begriffe wie Strecke, Seite einer Geraden und Halbstrahl offensichtlich analog zum euklidischen Fall definieren.

Wieder ist es eine einfache Übung, einzusehen, dass die Axiome aus Axiom 1.2.6 bei dieser Definition erfüllt sind. Man beachte dazu, dass man immer ohne Einschränkung $A = iy$, $B = iv$, $C = is \in i\mathbb{R}_{>0}$ mit $y < v$ annehmen kann. Dann liegt C offenbar genau dann zwischen A und B , falls $y < s < v$ gilt. Mit dieser Beobachtung lässt sich auch das Axiom von Pasch mithilfe eines Stetigkeitsarguments relativ einfach nachweisen.

Aufgabe 4.3.6 Man zeige, dass für \mathbb{H} das Axiom von Pasch gilt: Sind $A, B, C \in \mathbb{H}$ nicht alle auf einer Geraden und schneidet die Gerade g die Strecke \overline{AB} zwischen A und B und liegt C nicht auf g , so schneidet g auch eine der beiden Strecken \overline{AC} oder \overline{BC} .

Kongruenz von Strecken definieren wir ebenfalls wie im Euklidischen:

Definition 4.3.7 Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{H}$. Die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} heißen kongruent, falls $d(A, B) = d(C, D)$ gilt.

Wir zeigen von der Axiomengruppe 1.2.12 lediglich das erste Axiom und überlassen die anderen wieder dem Leser:

Lemma 4.3.8 Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ mit $A \neq B$ sowie g die Gerade durch A und B . Weiter sei A' ein Punkt einer weiteren (nicht notwendig von g verschiedenen) Geraden g' , so gibt es auf einer gegebenen Seite der Geraden g' von A' einen Punkt B' , sodass $d(A, B) = d(A', B')$ gilt.

Beweis Es sei $d := d(A, B) > 0$. Durch Anwenden einer geeigneten Möbiustransformation können wir annehmen, dass $g' = i\mathbb{R}_{>0}$ und damit $A' = iy$ mit $y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Die beiden Seiten von A' entsprechen dann den Halbstrahlen $h = \{iv; v > y\}$ bzw. $h' = \{iv; 0 < v < y\}$. Setzt man nun $B'_\pm := iye^{\pm d}$, so liegen B'_+ und B'_- auf verschiedenen Seiten von A' und es gilt $d(A', B'_\pm) = d$. Damit folgt die Behauptung. \square

Winkelgrößen werden auf euklidische Winkelgrößen zurückgeführt:

Definition 4.3.9 Es seien h, h' zwei Halbstrahlen, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen. Der hyperbolische Winkelwert des Winkels $\angle(h, h')$ zwischen diesen Halbstrahlen ist der euklidische Winkelwert zwischen entsprechenden Tangentialvektoren an die Halbstrahlen.

Man beachte, dass die Bestimmung der Tangentialvektoren aufgrund der Definition von Geraden in der hyperbolischen Geometrie sehr einfach ist: Im Fall einer zur imaginären Achse (im euklidischen Sinn) parallelen Geraden entspricht der Halbstrahlenbegriff dem der euklidischen Geometrie. Ist die hyperbolische Gerade ein Halbkreis $K_+(M; r)$, so sind die Tangentialvektoren gerade Richtungsvektoren der Tangente an diesen Halbkreis im Ausgangspunkt der beiden Halbstrahlen.

Eine weitere, oft sehr nützliche Sichtweise der Winkelgröße eines hyperbolischen Winkels liefert folgende Überlegung: Dazu nehmen wir an, dass $A = iy$, $C = iv$ mit $v > y$ sowie $B \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Re}(B) > 0$ gelte (vgl. Abb. 4.4). Weiter sei $M \in \mathbb{R}$ der Mittelpunkt des Halbkreises durch A und B . Sei ferner $O \in \mathbb{C}$ der Nullpunkt, so gilt für den Winkelwert α des Winkels $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ zwischen den hyperbolischen Halbstrahlen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC}

$$\alpha = \sphericalangle AMO \text{ im euklidischen Sinne,}$$

(man beachte, dass nach Bemerkung 2.4.14 Tangenten senkrecht zum Kreisradius sind). Mit dieser Beobachtung überzeugt man sich schnell davon, dass die Axiome

1.2.17 auch für die hyperbolische Ebene erfüllt sind. Wir könnten das letzte Kongruenzaxiom, das Kongruenzaxiom sws 1.2.19 an dieser Stelle beweisen, stellen diesen Beweis aber zurück, da wir ihn später aus dem hyperbolischen Kosinussatz automatisch erhalten werden (vgl. Korollar 4.4.7).

Der Beweis des archimedischen Axioms 1.2.27 folgt nach dem üblichen Muster:

Lemma 4.3.10 Es seien \overline{AB} und \overline{CD} Strecken. Dann gibt es eine natürliche Zahl n , sodass das n -malige Abtragen der Strecke \overline{CD} vom Punkt A aus die Strecke \overline{AB} enthält.

Beweis Wie üblich können wir annehmen, dass $A = ia, B = ib \in i\mathbb{R}$ mit $b > a$ gelten. Es sei $d := d(C, D)$. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ nun $D_n := iae^{nd}$, so hat man $D_0 = A$ und

$$d(D_{n+1}, D_n) = \log \left(\frac{ae^{(n+1)d}}{ae^{nd}} \right) = d.$$

Da der Abstandsbegriff additiv ist, genügt es zu zeigen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $nd > d(A, B)$. Dies ist aber offensichtlich richtig. \square

Auf den Nachweis des Vollständigkeitsaxioms 1.2.28 verzichten wir: Dieser lässt sich ähnlich wie der Beweis des Satzes 2.1.22 im euklidischen Modell bewerkstelligen.

Damit haben wir gezeigt, dass in der Tat alle Hilbertschen Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt sind. Dieses gilt aber nicht! Vielmehr gibt es sogar unendlich viele Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden. Dabei heißen zwei Geraden wieder parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt besitzen (oder identisch sind).

Beispiel 4.3.11 Es seien $g := i\mathbb{R}$ und $P := 1 + i$. Ferner sei $M := 1 + x$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r := \sqrt{1 + x^2}$. Dann gilt $P \in K_+(M; r)$, aber $K_+(M; r) \cap g = \emptyset$.

Beweis Offenbar gilt $|P - M| = \sqrt{1 + x^2}$, also $P \in K(M; r)$. Für $z = iy \in g$ gilt

$$|z - M|^2 = (1 + x)^2 + y^2 > (1 + x)^2 = 1 + x^2 + 2x > 1 + x^2 = r^2,$$

also schneiden sich g und $K_+(M; r)$ nicht. \square

Damit erhalten wir auch, dass das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen Axiomen ist, sich also nicht aus diesen ableiten lässt. Eine derartige Geometrie auch in der Schule vorzustellen, ist sicher reizvoll. Beispielsweise könnte man diese als Wahlthema in der gymnasialen Oberstufe in den Schulunterricht integrieren. Beispielhafte Durchführungen dieser Idee finden sich etwa in Arendt (2011) und Zeitler (1970).

4.4 Hyperbolische Trigonometrie

In diesem Abschnitt untersuchen wir hyperbolische Dreiecke. Dabei formulieren wir die hyperbolischen Analoga zu den euklidischen und sphärischen trigonometrischen Sätzen (vgl. Abschn. 2.6 und 3.2). Im Gegensatz zu sphärischen Dreiecken werden wir feststellen, dass die Winkelsumme in hyperbolischen Dreiecken immer kleiner als π ist. Insgesamt erhalten wir damit die bemerkenswerte Feststellung, dass die drei Typen von Geometrien (sphärisch, euklidisch und hyperbolisch) einerseits durch die Anzahl von Parallelen durch einen Punkt außerhalb einer Geraden (keine, genau eine bzw. unendlich viele) und andererseits durch die Winkelsumme in Dreiecken (größer π , genau π bzw. kleiner π) charakterisiert sind.

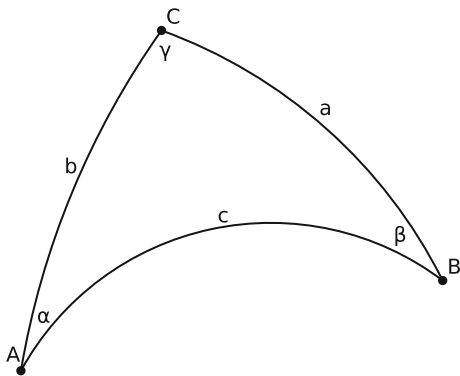
Zunächst wählen wir wieder die üblichen Bezeichnungen:

Definition 4.4.1 Sind A , B und C drei Punkte in \mathbb{H} , die nicht auf einer Geraden liegen, so heißt ABC ein hyperbolisches Dreieck (vgl. Abb. 4.3) mit Seitenlängen $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ sowie $c = d(A, B)$. Die Innenwinkel des Dreiecks sind $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ sowie $\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Um hyperbolische Dreiecke zu untersuchen, bietet es sich an, die Dreiecke in eine günstige Position zu transformieren. Die entscheidende Beweistechnik besteht dabei darin, dass man das Dreieck so legt, dass zwei Punkte auf der imaginären Achse liegen und der dritte Punkt positiven Realteil besitzt. Durch Anwenden einer Möbiustransformation (vgl. Lemma 4.2.15) und ggf. der Abbildung $z \mapsto -\bar{z}$ ist das immer erreichbar, ohne dass Seitenlängen oder Winkelwerte verändert werden.

Definition 4.4.2 Ein hyperbolisches Dreieck ABC ist in kanonischer Lage, falls $A, C \in i\mathbb{R}_{>0}$ mit $\text{Im}(C) > \text{Im}(A)$ und $\text{Re}(B) > 0$ gelten.

Abb. 4.3 Hyperbolisches Dreieck



Lemma 4.4.3 Es sei ABC ein hyperbolisches Dreieck in kanonischer Lage. Ferner seien M_{AB} und M_{BC} die Mittelpunkte der Kreise, auf denen die hyperbolischen Strecken \overline{AB} bzw. \overline{BC} liegen. Für die Innenwinkelwerte α , β und γ gelten dann

$$\alpha = \begin{cases} \angle AM_{AB}O, & \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \angle AM_{AB}O, & \alpha > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \pi - \angle CM_{BC}O, & \gamma \geq \frac{\pi}{2} \\ \angle CM_{BC}O, & \gamma < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\beta = \angle M_{BC}BM_{AB}.$$

Beweis Im Punkt A seien \overrightarrow{AC} der Tangentialvektor der Seite AC sowie \vec{v} der Tangentialvektor zur Seite AB . Dann gelten $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{M_{AB}O}$ und $\vec{v} \perp \overrightarrow{M_{AB}A}$, woraus man die Behauptung über den Winkel α erhält. Die anderen Aussagen sieht man ähnlich ein. \square

Als erstes Ergebnis zeigen wir damit den hyperbolischen Sinussatz.

Satz 4.4.4 (Hyperbolischer Sinussatz) Es sei ABC ein hyperbolisches Dreieck in üblicher Bezeichnung. Dann gelten

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Beweis Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass ABC in kanonischer Lage ist, d. h., es gelten $A = iy$, $C = iv \in i\mathbb{R}_{>0}$, $v > y$ sowie $B = b_1 + ib_2$ mit $b_1 > 0$. Weiter seien M_{AB} und M_{BC} die Mittelpunkte der Kreise durch A und B bzw. B und C . Dann gelten wegen Lemma 4.4.3 und des euklidischen Sinussatzes 2.6.3

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{Im}(A)}{|A - M_{AB}|} \quad \text{und} \quad \sin(\gamma) = \frac{\operatorname{Im}(C)}{|C - M_{BC}|}.$$

Die Gleichung

$$\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)}$$

ist dann aufgrund von Lemma 4.2.17 äquivalent zu

$$\frac{|B - A| \cdot |B - \bar{A}| \cdot |C - M_{BC}|}{2 \operatorname{Im}(A) \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(C)} = \frac{|B - C| \cdot |B - \bar{C}| \cdot |A - M_{AB}|}{2 \operatorname{Im}(A) \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(C)}.$$

Wegen $\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(C) = 0$ zeigt das Lemma 4.3.4 die Richtigkeit dieser letzten Gleichung. Die anderen behaupteten Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung. \square

Das Analogon zum euklidischen Kosinussatz 2.6.1 stellen in der hyperbolischen Geometrie wie in der sphärischen Geometrie (vgl. Satz 3.2.8 und 3.2.16) zwei Sätze dar, von denen wir zunächst den hyperbolischen Seitenkosinussatz betrachten.

Satz 4.4.5 (Hyperbolischer Seitenkosinussatz) Es sei ABC ein hyperbolisches Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen. Dann gilt

$$\cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) = \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha)$$

und entsprechend für zyklische Vertauschungen.

Beweis Wieder nehmen wir $A = iy$, $C = iv$ mit $v > y > 0$ sowie $\operatorname{Re}(b) > 0$ an. Ist $M \in \mathbb{R}$ der Mittelpunkt des A und B verbindenden Halbkreises, so gilt wieder wegen Lemma 4.4.3 und des euklidischen Kosinussatzes 2.6.1

$$\cos(\alpha) = \frac{M}{|A - M|} \stackrel{4.3.4}{=} \frac{|B|^2 - |A|^2}{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}.$$

Wegen Lemma 4.2.17 2. gelten

$$\sinh(c) = \frac{|B - A| \cdot |B - \bar{A}|}{2 \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(A)} \quad \text{und} \quad \sinh(b) = \frac{(\operatorname{Im}(C))^2 - (\operatorname{Im}(A))^2}{2 \operatorname{Im}(C) \operatorname{Im}(A)}.$$

Mit $\operatorname{Im}(C) = |C|$ und $\operatorname{Im}(A) = |A|$ steht auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung somit der Ausdruck

$$R := \frac{(|C|^2 - |A|^2)(|B|^2 - |A|^2)}{4(\operatorname{Im}(A))^2 \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(C)}.$$

Für den Ausdruck auf der linken Seite erhält man unter Ausnutzung der Aufgabe 4.2.18

$$\begin{aligned} \cosh(b) \cosh(c) - \cosh(a) &= \frac{(|A|^2 + |C|^2)(|B|^2 + |A|^2)}{4(\operatorname{Im}(A))^2 \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(C)} - \frac{|B|^2 + |C|^2}{2 \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(A)} \\ &= \frac{|A|^2 |B|^2 + |C|^2 |B|^2 + |A|^2 |C|^2 + |A|^4 - 2|A|^2 |B|^2 - 2|A|^2 |C|^2}{4(\operatorname{Im}(A))^2 \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(C)}, \end{aligned}$$

was ebenfalls R ergibt, woraus man die Behauptung abliest. \square

Man erhält aus dem Seitenkosinussatz die hyperbolische Variante des Satzes von Pythagoras:

Korollar 4.4.6 (Hyperbolischer Pythagoras) Ist ABC ein rechtwinkliges hyperbolisches Dreieck mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c).$$

Eine weitere Folgerung ist das letzte fehlende Axiom der hyperbolischen Geometrie, die Aussage sws:

Korollar 4.4.7 In der hyperbolischen Geometrie gilt der Kongruenzssatz „sws“: Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel festgelegt.

Ebenfalls unmittelbar erhält man den Basiswinkelsatz, der somit in allen von uns betrachteten metrischen Geometrien erfüllt ist.

Korollar 4.4.8 In der hyperbolischen Geometrie gilt der Basiswinkelsatz samt Umkehrung: Ein Dreieck ist genau dann gleichschenkelig, wenn es zwei gleiche Winkel besitzt.

Die letzte Aussage über Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten eines hyperbolischen Dreiecks, die wir an dieser Stelle vorstellen, ist der hyperbolische Winkelkosinussatz.

Satz 4.4.9 (Hyperbolischer Winkelkosinussatz) Es sei ABC ein hyperbolisches Dreieck in den üblichen Bezeichnungen. Dann gelten

$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cosh(b)$$

und alle entsprechenden zyklischen Vertauschungen.

Beweis Wieder nehmen wir an, dass ABC in kanonischer Lage ist, und bezeichnen die Mittelpunkte der zu \overline{AB} bzw. \overline{BC} gehörenden Kreise mit M_{AB} und M_{BC} und deren Radien mit r_{AB} bzw. r_{BC} . Anwenden des euklidischen Kosinussatzes 2.6.1 auf das Dreieck $M_{AB}BM_{BC}$ liefert zunächst

$$2r_{AB}r_{BC}\cos(\beta) = r_{AB}^2 + r_{BC}^2 - |M_{AB} - M_{BC}|^2.$$

Die Aussage des Winkelkosinussatzes erweist sich mithilfe des Lemmas 4.4.3 und der Aufgabe 4.2.18 äquivalent zu

$$\cos(\beta) = \frac{M_{AB}}{r_{AB}} \cdot \frac{M_{BC}}{r_{BC}} + \frac{\operatorname{Im}(A)}{r_{AB}} \cdot \frac{\operatorname{Im}(C)}{r_{AB}} \cdot \frac{|A|^2 + |C|^2}{2\operatorname{Im}(A) \cdot \operatorname{Im}(C)}.$$

Somit genügt es,

$$r_{AB}^2 + r_{BC}^2 - M_{AB}^2 - M_{BC}^2 = |A|^2 + |C|^2$$

zu zeigen. Die Gleichungen $r_{AB}^2 = M_{AB}^2 + |A|^2$ und $r_{BC}^2 = M_{BC}^2 + |C|^2$ ergeben sich aber gerade aus dem Satz des Pythagoras 2.6.2 angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke AOM_{AB} und COM_{BC} . \square

Aufgabe 4.4.10 Man untersuche, welche der Kongruenzsätze sss, www, sws, wsw, ssw und wws (mit welchen Voraussetzungen) in der hyperbolischen Geometrie gelten.

Wir wenden uns abschließend noch der Berechnung hyperbolischer Flächeninhalte zu.

Definition 4.4.11 Es sei $K \subset \mathbb{H}$ eine messbare Teilmenge. Dann ist der hyperbolische Flächeninhalt F_K von K definiert durch

$$F_K := \int_K \frac{1}{y^2} d(x, y).$$

Aufgabe 4.4.12 1. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet sowie $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter bezeichne man mit $f_{\mathbb{R}}: G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil definierte zugehörige reelle Abbildung. Man zeige

$$\det(f'_{\mathbb{R}}(x, y)) = |f'(z)|^2, \text{ mit } z = x + iy.$$

2. Man folgere für eine Möbiustransformation

$$M: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

die Identität

$$\det(M'_{\mathbb{R}}(x, y)) = \frac{1}{|cz + d|^4}, \quad \text{mit } z = x + iy.$$

Bemerkung 4.4.13 Aus der Aufgabe 4.4.12 und dem Lemma 4.2.1 sowie der Substitutionsregel für mehrdimensionale Integrale (Heuser 1990, 205.2) folgt, dass der hyperbolische Flächeninhalt invariant unter Möbiustransformationen ist.

Satz 4.4.14 Es sei ABC ein Dreieck. Dann gilt

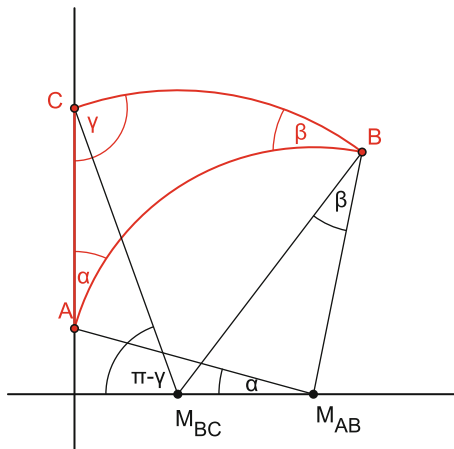
$$F_{ABC} = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Beweis Wegen Bemerkung 4.4.13 können wir annehmen, dass ABC in kanonischer Lage ist. Weiter seien wieder $K_+(M_{AB}, r_{AB})$ und $K_+(M_{BC}, r_{BC})$ die A und B bzw. B und C verbindenden Halbkreise. Wir beschränken uns auf den Fall $0 < M_{BC} < M_{AB} < \operatorname{Re}(B)$ und überlassen die (analog zu behandelnden) anderen Fälle dem Leser (dies entspricht gerade der in Abb. 4.4 dargestellten Situation). Ein $z = x + iy$ mit $x \in [0, \operatorname{Re}(B)]$ liegt dann genau dann im Inneren des Dreiecks ABC , wenn

$$u(x) := \sqrt{r_{AB}^2 - (x - M_{AB})^2} \leq y \leq \sqrt{r_{BC}^2 - (x - M_{BC})^2} =: o(x)$$

gilt. Somit ist ABC ein durch u und o begrenzter Normalbereich bzgl. der x -Achse. Daher gilt (vgl. Heuser 1990, Satz 204.1)

Abb. 4.4 Dreieck in kanonischer Lage



$$\begin{aligned}
 F_{ABC} &= \int_0^{\operatorname{Re}(B)} \left(\int_{u(x)}^{o(x)} \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{\operatorname{Re}(B)} \left(\frac{1}{\sqrt{r_{AB}^2 - (x - M_{AB})^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{BC}^2 - (x - M_{BC})^2}} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Die Aufgabe 4.4.16 zeigt nun

$$\begin{aligned}
 F_{ABC} &= \arcsin \left(\frac{\operatorname{Re}(B) - M_{AB}}{r_{AB}} \right) + \arcsin \left(\frac{M_{AB}}{r_{AB}} \right) \\
 &\quad - \arcsin \left(\frac{\operatorname{Re}(B) - M_{BC}}{r_{BC}} \right) - \arcsin \left(\frac{M_{BC}}{r_{BC}} \right).
 \end{aligned}$$

Setzt man $\delta := \angle(M_{AB} B \operatorname{Re}(B))$ und wendet das Lemma 4.4.3 an, so folgt aufgrund der betrachteten Situation

$$F_{ABC} = (\delta - \beta) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \delta - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \gamma) \right) = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

also die Behauptung. \square

Wir erhalten damit einen hyperbolischen Winkelsummensatz:

Korollar 4.4.15 Für hyperbolische Dreiecke ist die Winkelsumme immer kleiner als π .

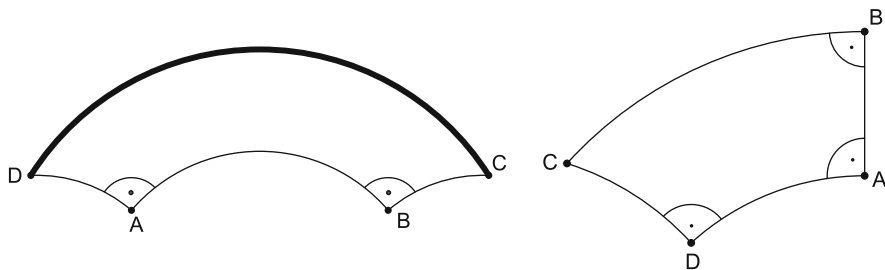


Abb. 4.5 Saccherisches und Lambertsches Viereck

Aufgabe 4.4.16 Für $a, b, z \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(x - b)^2 \leq a^2$ für $0 \leq x \leq z$ zeige man:

$$\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x - b)^2}} = \arcsin\left(\frac{z - b}{a}\right) + \arcsin\left(\frac{b}{a}\right).$$

Abschließend gehen wir noch kurz auf Vierecke ein. Dabei sind Vierecke wieder (im hyperbolischen Sinn!) konvexe Mengen mit genau vier Eckpunkten.

Definition 4.4.17 Ein Viereck $ABCD$ nennt man ein Saccherisches Viereck, falls $AD \perp AB$, $BC \perp AB$ sowie $d(A, D) = d(B, C)$ gelten (vgl. Abb. 4.5 links)

G. G. Saccheri (1667–1733) versuchte das euklidische Parallelenaxiom dadurch zu beweisen, dass er zeigen wollte, dass in einem Saccherischen Viereck auch die beiden anderen Winkel rechtwinklig sind. Wie wir jetzt sehen können, ist das in der hyperbolischen Geometrie falsch.

Lemma 4.4.18 In einem Saccherischen Viereck stimmen die Winkel bei C und D überein und sind (beide) kleiner als $\frac{\pi}{2}$.

Beweis Anwenden des Kongruenzsatzes sws 4.4.7 auf die Dreiecke ABD und ABC zeigt $d(A, C) = d(B, D)$. Wendet man nun den Kongruenzsatz sss (vgl. Aufgabe 4.4.10) auf die Dreiecke BCD und ACD an, so folgt die Winkelgleichheit. Die Tatsache, dass beide kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, folgt aus dem Winkelsummensatz für hyperbolische Dreiecke. \square

Korollar 4.4.19 In der hyperbolischen Geometrie existieren weder Rechtecke noch Quadrate.

Die letzte Aussage ist insbesondere von historischem Interesse. In den vielen Versuchen, das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen abzuleiten, wurde oftmals die Existenz von Rechtecken bzw. Quadraten implizit angenommen. Wie wir anhand

der Aussage 4.4.19 sehen, waren alle diese Versuche zum Scheitern verurteilt. Die Maximalanzahl rechter Winkel in einem Viereck ist eben drei.

Definition 4.4.20 Ein hyperbolisches Viereck mit drei rechten Winkeln heißt Lambertsches Viereck.

Ähnlich wie Saccheri versuchte J.H. Lambert (1728–1777) zu zeigen, dass in einem Lambertschen Viereck der vierte Winkel ein rechter ist, und damit das euklidische Parallelenaxiom abzuleiten. Es gilt aber

Lemma 4.4.21 In einem Lambertschen Viereck ist der vierte Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$, und die beiden an diesem Winkel anliegenden Seiten sind länger als die jeweils gegenüberliegenden Seiten.

Beweis Es sei $ABCD$ ein Lambertsches Viereck (vgl. Abb. 4.5 rechts), wobei der Winkel bei C kein Rechter sei. Dass dieser kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, folgt sofort aus dem Korollar 4.4.15 aus dem hyperbolischen Winkelsummensatz. Um zu zeigen, dass etwa $d(B, C) > d(A, D)$ ist, gehen wir von der Annahme $d(B, C) \leq d(A, D)$ aus. Dann gibt es einen Punkt D' auf der Seite \overline{AD} (evtl. gilt $D = D'$, wir betrachten nur den Fall $D \neq D'$ und überlassen die andere Situation dem Leser) mit $d(A, D') = d(B, C)$. Das Viereck $ABCD'$ ist nach Konstruktion ein Saccherisches Viereck. Der Winkel $\sphericalangle AD'C$ ist dann nach Lemma 4.4.18 kleiner als $\frac{\pi}{2}$, also ist der Winkel $\sphericalangle CD'D$ größer als $\frac{\pi}{2}$. Somit wäre die Winkelsumme im Dreieck $DD'C$ größer als π im Widerspruch zu Korollar 4.4.15. \square

4.5 Hyperbolische Parallelen und Abstände

In diesem Abschnitt stellen wir einige Ergänzungen der hyperbolischen Geometrie zusammen, wobei wir besonders auf Aussagen über parallele Geraden in der hyperbolischen Geometrie eingehen werden. Klassische Aussagen der euklidischen Geometrie sind Nebenwinkel- und Scheitelwinkelsatz sowie Stufen- und Wechselwinkelsatz. Der Nebenwinkel- und der Scheitelwinkelsatz gelten, wie wir in Satz 1.2.22 bzw. Korollar 1.2.23 gesehen haben, unabhängig vom Parallelenaxiom.

Betrachtet man die zwei parallelen hyperbolischen Geraden $g := i\mathbb{R}_{>0}$ und $h := 1 + i\mathbb{R}_{>0}$, so stellt man fest, dass die hyperbolische Gerade $\ell := K_+(0, 2)$ die beiden Geraden g und h unter verschiedenen Winkeln schneidet. Daher gelten Stufen- und Wechselwinkelsatz in der hyperbolischen Geometrie nicht. Wie das vorgestellte Beispiel zeigt, braucht eine Gerade ℓ , die eine Gerade g senkrecht schneidet, eine zu g parallele Gerade h nicht im rechten Winkel zu schneiden. Wie das folgende Lemma zeigt, bleibt eine gewisse Umkehrung dieser Aussage jedoch richtig:

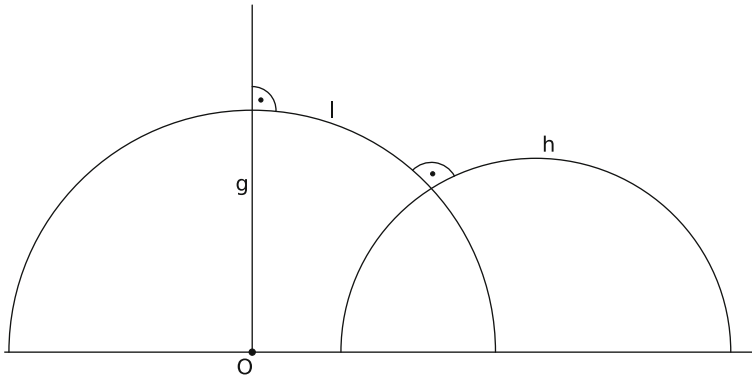


Abb. 4.6 Zwei verbindbare Geraden

Lemma 4.5.1 Es seien g, h zwei hyperbolische Geraden und ℓ eine hyperbolische Gerade, die g und h rechtwinklig schneidet. Dann sind g und h parallel.

Beweis Andernfalls seien $S := g \cap h$, $G := g \cap \ell$ und $H := h \cap \ell$. Dann gilt im Dreieck SGH offenbar $\sigma + \gamma + \eta = \sigma + \pi \geq \pi$ im Widerspruch zum Korollar 4.4.15! \square

Wie wir gesehen haben, schneidet nicht jede Gerade, die von zwei parallelen Geraden eine rechtwinklig schneidet, auch die andere rechtwinklig. Interessant ist die Fragestellung, ob es zu zwei parallelen Geraden überhaupt eine gemeinsame Orthogonale gibt. Wir werden feststellen, dass dies von der Lage der beiden parallelen Geraden abhängt.

Definition 4.5.2 Zwei parallele hyperbolische Geraden g und h heißen verbindbar, wenn es eine Gerade ℓ gibt, die g und h rechtwinklig schneidet (vgl. Abb. 4.6).

Lemma 4.5.3 Es sei g eine hyperbolische Gerade. Dann gibt es zu einem Punkt $P \in \mathbb{H}$ unendlich viele zu g parallele Geraden durch P , die mit g verbindbar sind.

Beweis Ohne Einschränkung können wir $g = i\mathbb{R}_{>0}$ und $\operatorname{Re}(P) > 0$ annehmen. Weiter sei $h := K(M; r) \cap \mathbb{H}$ mit $M \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r < M$ und $P \in h$. Dann sind offenbar g und h parallel. Setzt man nun $\rho := \sqrt{M^2 - r^2}$ und $\ell := K(0; \rho)$ so schneidet ℓ sowohl g als auch h rechtwinklig: Die erste Behauptung ist offenbar richtig. Setzt man nun

$$S := \frac{M^2 - r^2}{M} + i \frac{r}{M} \sqrt{M^2 - r^2},$$

so rechnet man schnell nach, dass $S \in \ell$, $S \in h$ und $S \in K(\frac{M}{2}; \frac{M}{2})$ gilt. Aus den ersten beiden Beobachtungen folgt, dass $S = \ell \cap h$ gilt, aus der letzten Beobachtung

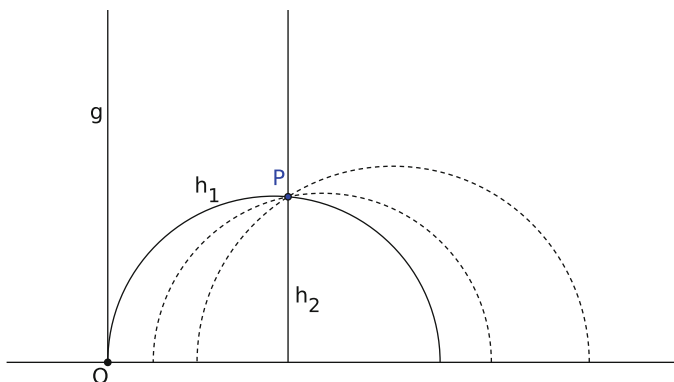


Abb. 4.7 Randparallelen zu g durch P mit weiteren Parallelen

folgt, dass S auf dem (euklidischen) Thales-Kreis über \overline{OM} liegt. Daher schneiden sich h und ℓ in S rechtwinklig. \square

Eine genauere Analyse des letzten Beweises zeigt, dass es genau für die beiden Parallelen $h_1 := K(M; M) \cap \mathbb{H}$ mit $M := \frac{|P|^2}{2\operatorname{Re}(P)}$ und $h_2 := \operatorname{Re}(P) + i\mathbb{R}_{>0}$ keine verbindende Gerade gibt. Dies zeigt den Satz

Satz 4.5.4 Zu einer hyperbolischen Geraden g und $P \notin g$ gibt es unendlich viele parallele Geraden durch P . Davon sind genau zwei nicht mit g verbindbar.

Definition 4.5.5 Es sei g eine Gerade und $P \notin g$. Dann nennt man die beiden zu g parallelen, aber nicht mit g verbindbaren Geraden durch P auch die Randparallelen von g bzgl. P (vgl. Abb. 4.7).

Wir gehen abschließend noch etwas auf Abstände ein.

Definition 4.5.6 Es sei g eine hyperbolische Gerade und $P \in \mathbb{H}$. Dann heißt

$$d(P; g) := \inf\{d(P; G); G \in g\}$$

der Abstand von P zu g .

Beispiel 4.5.7 Es seien $g := i\mathbb{R}_{>0}$ und $h := 1 + i\mathbb{R}_{>0}$. Für $H := 1 + i\eta \in h$ gilt dann

1.

$$d(g, H) = \operatorname{Arcosh} \left(\frac{1}{\eta} \sqrt{\eta^2 + 1} \right).$$

2. Ist $L \in g$ mit $d(L, H) = d(g, H)$, so schneidet LH die Gerade g rechtwinklig.

Beweis Es sei $is \in g$. Dann gilt nach Aufgabe 4.2.18

$$\cosh(d(is, H)) = \frac{s^2 + 1 + \eta^2}{2s\eta} \geq \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta},$$

wobei die Ungleichung gerade die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel mit

$$a := \frac{s}{\eta} \quad \text{und} \quad b := \frac{1 + \eta^2}{s\eta}$$

ist und das Minimum daher genau für $a = b$, d. h. $s = \sqrt{1 + \eta^2} = |H|$ angenommen wird. Damit erhält man beide Behauptungen. \square

Offenbar lässt sich die Aussage des Beispiels 4.5.7 durch Anwendung einer geeigneten Möbiustransformation auf beliebige Geraden übertragen. Dies zeigt, dass man den Abstand wie in der euklidischen Situation immer durch das Fällen des Lotes messen kann.

Man erhält allerdings aus Beispiel 4.5.7 auch einen weiteren fundamentalen Unterschied zur euklidischen Geometrie:

Korollar 4.5.8 Parallele Geraden haben in der hyperbolischen Geometrie keinen festen Abstand, in folgendem Sinne: Es seien g, h zwei parallele hyperbolische Geraden sowie $P, Q \in h$ zwei Punkte auf f . Dann gilt im Allgemeinen $d(P, g) \neq d(Q, g)$.

Natürlich lässt sich dennoch ein Abstand paralleler Geraden in sinnvoller Weise definieren:

Definition 4.5.9 Es seien g und h parallele Geraden. Dann heißt

$$d(g, h) := \inf\{d(P, Q); P \in g, Q \in h\}$$

der Abstand der beiden Geraden g und h .

Man beachte, dass dieser Abstand auch bei verschiedenen parallelen Geraden den Wert null ergeben kann:

Aufgabe 4.5.10 Man zeige: Sind g und h nicht verbindbar, dann gilt

$$d(g, h) = 0.$$

Sind zwei parallele Geraden verbindbar, lässt sich ihr Abstand wieder mithilfe einer gemeinsamen Orthogonalen ermitteln.

Lemma 4.5.11 Es seien g und h durch ℓ verbindbar und $P := \ell \cap g$ sowie $Q := \ell \cap h$. Dann gilt $d(g, h) = d(P, Q)$ und $d(g, h) < d(P', Q')$ für alle Paare $(P', Q') \neq (P, Q) \in g \times h$.

Beweis Es seien $P' \in g$ und $Q' \in h$ mit $(P', Q') \neq (P, Q)$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Im Fall $P' = P$ folgt die Aussage $d(P, Q) < d(P', Q')$ direkt aus Beispiel 4.5.7. Im Fall $P' \neq P$ sei $Q'' \in h$ der Lotfußpunkt von P' auf h , d. h. $P'Q'' \perp h$. Nach Beispiel 4.5.7 gilt dann $d(P', Q'') \leq d(P', Q')$. Wegen $P' \neq P$ sind Q'' und Q verschieden. Das Viereck $PQ Q'' P'$ ist nach Konstruktion ein Lambertsches Viereck und nach Lemma 4.4.21 gilt $d(P, Q) < d(P', Q'')$. Insgesamt erhält man wieder $d(P, Q) < d(P', Q')$. Damit erhält man sowohl den ersten als auch den zweiten Teil der Behauptung. \square

Damit beweist man schnell folgenden Satz:

Satz 4.5.12 Es seien g eine Gerade sowie $P \notin g$. Dann gibt es genau eine Parallele h zu g durch P mit maximalem Abstand. Für diese gilt $d(g, h) = d(g, P)$.

Beweis Ohne Einschränkung nehmen wir wieder $g = i\mathbb{R}_{>0}$ sowie $\operatorname{Re}(P) > 0$ an. Dann setze man $\rho := |P|$, $M := \frac{|P|^2}{\operatorname{Re}(P)}$ sowie $r := \frac{\operatorname{Im}(P)}{\operatorname{Re}(P)}|P|$. Dann sind offenbar g und $h := K(M; r) \cap \mathbb{H}$ durch $\ell := K(0; \rho) \cap \mathbb{H}$ verbindbar. Weiter gilt $\ell \cap h = P$. Daher gilt $d(g, h) = d(g, P)$.

Für jede andere mit g verbindbare Gerade h' mit $P \in h'$ gibt es ein $P \neq S \in h'$ mit

$$d(g, h') = d(g, S) \stackrel{4.5.11}{<} d(g, P) = d(g, h)$$

(vgl. den Beweis von Lemma 4.5.3), was die Behauptung zeigt. \square

Im Folgenden untersuchen wir noch die Existenz von Mittelsenkrechten.

Lemma 4.5.13 Zu je zwei Punkten $A, B \in \mathbb{H}$ mit $A \neq B$ gibt es eine hyperbolische Mittelsenkrechte, d. h., es gibt eine Gerade m_{AB} , sodass für jedes $P \in m_{AB}$ gilt: $d(A, P) = d(B, P)$.

Beweis Wir können wieder ohne Einschränkung $A = ia$, $B = ib \in i\mathbb{R}_{>0}$ annehmen. Es sei dann $r := \sqrt{ab}$ und $M := 0$. Dann setze man $m_{AB} := K_+(M, r)$. Wir behaupten, dass m_{AB} die gesuchte Mittelsenkrechte ist. Für einen Punkt $P = x + iy \in m_{AB}$ gilt dann $x^2 + y^2 = r^2 = ab$. Daher hat man nach 4.2.18

$$\cosh(d(A, P)) = \frac{a + b}{2y} = \cosh(d(B, P)),$$

und daher die Behauptung. \square

Man beachte, dass gemäß des Beweises von Lemma 4.5.13 auch die hyperbolische Mittelsenkrechte von A und B ihren Namen zu recht trägt: Sie ist die eindeutig bestimmte Gerade, die AB im (hyperbolischen) Mittelpunkt von \overline{AB} rechtwinklig schneidet.

Aufgabe 4.5.14 Es seien $A, B \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Re}(A) \neq \operatorname{Re}(B)$ und Mittelsenkrechte m_{AB} . Man zeige:

a) Gilt $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B)$, so ist $m_{AB} = \frac{\operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B)}{2} + i\mathbb{R}$.

b) Für $\operatorname{Im}(A) \neq \operatorname{Im}(B)$ sei h die euklidische Gerade durch A und B sowie $M := h \cap \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass $m_{AB} = K(M, r) \cap \mathbb{H}$ gilt.

Beispiel 4.5.15 Es gibt hyperbolische Dreiecke, bei denen die Mittelsenkrechten der Seiten keinen Schnittpunkt besitzen, die also keinen „Umkreis“ haben.

Beweis Es sei $A := i$, $B := 6 + i$ und $C := 4i$. Dann gilt für die entsprechenden Mittelsenkrechten $m_{AC} = K(0; 2) \cap \mathbb{H}$ und $m_{AB} = 3 + i\mathbb{R}_{>0}$. Offenbar besitzen m_{AB} und m_{AC} keinen Schnittpunkt (vgl. Abb. 4.8). \square

Im letzten Beispiel war vom Umkreis eines Dreiecks die Rede. Eine naheliegende Frage ist, wie hyperbolische Kreise aussehen.

Definition 4.5.16 Ein hyperbolischer Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $M \in \mathbb{H}$ ist die Menge

$$K_h(M; r) := \{z \in \mathbb{H}; d(z, M) = r\}.$$

Satz 4.5.17 Hyperbolische Kreise sind euklidische Kreise.

Beweis Wir nehmen wieder $M = im \in i\mathbb{R}_{>0}$ und $r > 0$ an. Dann liegt $z = x + iy \in \mathbb{H}$ nach Aufgabe 4.2.18 genau dann in $K_h(M; r)$, wenn

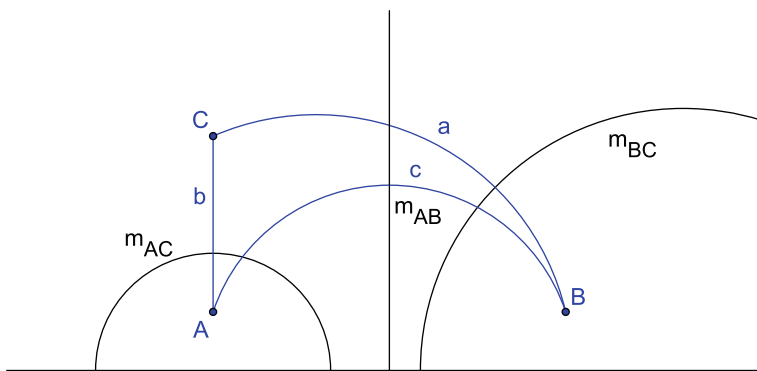


Abb. 4.8 Hyperbolisches Dreieck ohne Umkreis

$$c := \cosh(r) = \cosh(d(z, M)) = \frac{m^2 + |z|^2}{2ym}, \text{ d.h. } x^2 + (y - mc)^2 = m^2(c^2 - 1)$$

gilt. Damit folgt in diesem Fall

$$K_h(M; r) = K(im \cosh(r); m \sinh(r)).$$

□

4.6 Alternative Modelle für hyperbolische Geometrien

Es gibt eine Reihe weiterer Modelle für die hyperbolische Geometrie, auf die wir in diesem Abschnitt noch etwas eingehen wollen.

Die Grundlage unserer Betrachtungen bildet folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.6.1 Es sei $f: \mathbb{H} \rightarrow G \subset \mathbb{C}$ biholomorph. Dann lässt sich auf G vermöge f eine hyperbolische Geometrie definieren, sodass f eine Isometrie der Geometrien induziert.

Beweis Die Punkte der neuen hyperbolischen Geometrie sind die Elemente von G , Geraden sind die Bilder hyperbolischer Geraden in \mathbb{H} unter f . Eine hyperbolische Metrik lässt sich auf G definieren durch

$$d_G(z, w) := d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)), \quad z, w \in G,$$

wobei d die hyperbolische Metrik auf \mathbb{H} bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass sich dann alle Aussagen in analoger Form auf G übertragen lassen. □

Der Riemannsche Abbildungssatz besagt, dass jedes einfach zusammenhängende (vgl. Abschn. 8.4) Gebiet sich damit zu einem Modell einer hyperbolischen Ebene machen lässt (mithilfe des Großen Riemannschen Abbildungssatzes lässt sich dies sogar auf einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen übertragen, vgl. Freitag und Busam 1993).

Das wohl neben der oberen Halbebene wichtigste Beispiel in diesem Zusammenhang ist die Einheitskreisscheibe zusammen mit der Cayley-Transformation aus Beispiel 4.1.12. Nach Konstruktion entsprechen Geraden in diesem Modell gerade Kreisen, die den Einheitskreis senkrecht schneiden, oder Durchmesser des Kreises. Winkel werden wie im oberen Halbebenenmodell euklidisch gemessen, also über die Tangentialvektoren in den entsprechenden Punkten. Man nennt das so erhaltene Modell auch das Einheitskreismodell. Die Formeln für die hyperbolische Länge und die entsprechende Metrik in dieser Situation werden wir im Folgenden explizit formulieren.

Definition 4.6.2 1. Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist die hyperbolische Scheibenlänge von γ definiert durch

$$L_E(\gamma) := L(H(\gamma)),$$

wobei L die hyperbolische Länge und H die Umkehrabbildung der Cayley-Transformation ist.

2. Die hyperbolische Scheibenmetrik ist definiert durch

$$d_E(z, w) := d(H(z), H(w)), \quad z, w \in E,$$

wobei d die hyperbolische Metrik auf \mathbb{H} ist.

Lemma 4.6.3 Es sei $z \in E$ und H die Umkehrabbildung der Cayley-Transformation. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(H(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

Beweis Gemäß Beispiel 4.1.12 gilt

$$H(z) = i \frac{1 + z}{1 - z} = i \frac{1 + z - \bar{z} - |z|^2}{|1 - z|^2} = i \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} - \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|1 - z|^2},$$

woraus man die Behauptung abliest. \square

Damit können wir die entsprechenden Formeln für die hyperbolische Länge und den hyperbolischen Abstand im Modell des Einheitskreises angeben:

Satz 4.6.4 1. Für einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow E$ gilt

$$L_E(\gamma) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

2. Für $z, w \in E$ hat man

$$\cosh(d_E(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Beweis

1. Offenbar gilt mit der Umkehrung H der Cayley-Transformation

$$(H \circ \gamma)'(t) = i \frac{2\gamma'(t)}{(1 - \gamma(t))^2}.$$

Nach Definition der Scheibenlänge folgt daher zusammen mit Lemma 4.6.3 die Behauptung.

2. Für $z, w \in E$ rechnet man schnell

$$H(z) - H(w) = i \frac{2(z - w)}{(1 - z)(1 - w)}$$

nach. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 4.6.3 zusammen mit Lemma 4.2.17. \square

Ohne Beweise geben wir der Vollständigkeit halber noch zwei weitere Modelle für euklidische Geometrien an. Für interessierte Leser verweisen wir auf weiterführende Literatur zur hyperbolischen Geometrie wie z. B. Coxeter (1969), Klein (1928), Benedetti und Petronio (1992), Gans (1973) oder auch Iversen (1992).

Beispiel 4.6.5 1. (*Einschaliger Hyperboloid*) Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

das Minkowski-Produkt auf dem \mathbb{R}^3 . Weiter seien

$$H := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0, \varphi(x, x) = 1\}$$

ein (einschaliger) Hyperboloid sowie $d_H(x, y) := \text{Arcosh}(\varphi(x, y))$. Wählt man dann als Punkte die Elemente von H und als Geraden die bzgl. d_H kürzesten Wege, so liefert dies eine zum Poincaré-Modell isometrische hyperbolische Geometrie.

2. (*Beltrami-Klein-Modell – Bierdeckelgeometrie*) Man betrachte wieder die Einheitskreisscheibe $E := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Wählt man als Punkte die Elemente von E und als Geraden die Sehnen, so erhält man ebenfalls eine (isometrische) hyperbolische Geometrie. Eine Metrik konstruiert man in diesem Fall wie folgt: Sind $z, w \in E$ und s die Sehne durch z, w , so seien z^* und w^* die Schnittpunkte der Sehne mit ∂E (jeweils auf der entsprechenden Seite); man setzt nun

$$d_{BK}(z, w) := \frac{1}{2} \left| \log([z, w; z^*, w^*]) \right| = \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{z - z^*}{z - w^*} \cdot \frac{w - w^*}{w - z^*} \right) \right|.$$

Eine Schwierigkeit in diesem Modell liegt in der Winkelmessung, die hier nicht euklidisch erfolgt: Als Beispiel definieren wir Orthogonalität. Es sei s eine Sehne in E (die kein Durchmesser ist) und $P \in s$ sowie z^*, w^* die Endpunkte von s . Der Schnittpunkt P_s der Tangenten an ∂E in z^* und w^* heißt der Pol von s . Dann ist die Sehne $E \cap P P_s$ die Orthogonale zu s durch P (weiterführende Informationen zum Vergleich des Beltrami-Klein-Modell mit dem Modell von Poincaré findet man z. B. in Kowol 2009, Abschn. 6.1.2)

Inhaltsverzeichnis

5.1	Konstruierbare Zahlen	116
5.2	Quadratwurzeltürme	119
5.3	Regelmäßige Vielecke	122

In diesem Kapitel kehren wir wieder zur euklidischen Geometrie zurück und setzen uns mit Fragen nach der Konstruierbarkeit von geometrischen Größen auseinander. Bereits in der Antike beschäftigte man sich mit dem Problem, ob und wie gewisse Größen nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Vermutlich geht diese Fragestellung auf aus Anwendungen stammende Impulse zurück. Dabei war es typisch für die griechische Mathematik, auch rechnerische Fragestellungen als geometrische Probleme zu behandeln. So war das Konzept eines Flächeninhalts als Maßzahl so nicht direkt vorhanden, vielmehr wurde die Größe einer Fläche durch ein flächengleiches Quadrat angegeben. Um beispielsweise zu entscheiden, welches von zwei Dreiecken größer ist, konstruierte man mit den damals verfügbaren Mitteln (mit einer Schnur konnte man z. B. einen Kreis um einen Punkt oder die Strecke zwischen zwei Punkten realisieren) jeweils die flächengleichen Quadrate und verglich deren Seitenlängen. Dabei stellte sich naturgemäß die Frage, ob alle bzw. welche geometrischen Fragestellungen in dieser Form bearbeitet werden können.

Berühmt wurden in diesem Zusammenhang vor allem vier Fragestellungen:

1. Ist es möglich, zu einem gegebenen Würfel die Seitenlänge eines Würfels zu konstruieren, der das doppelte Volumen besitzt (Würfelverdoppelung)?
2. Ist jeder Winkel mit Zirkel und Lineal drittelbar (Winkeldrittelung)?
3. Welche regelmäßigen Vielecke sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
4. Ist es möglich, zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren (Quadratur des Kreises)?

Wir werden in diesem Kapitel Antworten auf diese Fragestellungen geben.

5.1 Konstruierbare Zahlen

Die moderne Idee, Konstruktionsprobleme zu lösen, beruht darauf, dass die Konstruktionsschritte bei Verwendung von Lineal und Zirkel auf lineare Gleichungen oder auf quadratische Gleichungen führen. Damit ergibt sich eine Möglichkeit, diese geometrische Problemstellung mithilfe der Algebra zu beschreiben. Um diese Übersetzung zu realisieren, verwenden wir wieder das euklidische Modell \mathbb{E} , welches auf dem \mathbb{R}^2 zusammen mit einem Skalarprodukt basiert. Für unsere Herangehensweise identifizieren wir allerdings $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vermöge der kanonischen Identifikation $(x; y) \mapsto x + iy$ mit dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.

Wir definieren nun eine aufsteigende Familie von Teilmengen von \mathbb{C} . Dazu sei $K_0 := \{0; 1\}$. Weiter sei wie üblich für $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $b \neq c$ die Gerade durch b und c mit bc bezeichnet sowie mit $K(a; |b - c|) := \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = |b - c|\}$ der Kreis um a mit Radius $|b - c|$. Dann definieren wir zu $n \in \mathbb{N}$ die Menge K_{n+1} der Schnittpunkte von denjenigen Kreisen und Geraden, die sich aus Punkten von K_n definieren lassen. Genauer bedeutet dies

$$K_{n+1} := \left\{ z \in \mathbb{C}; \begin{cases} z \in a_1 b_1 \cap a_2 b_2, & a_1 b_1 \neq a_2 b_2 \quad \text{oder} \\ z \in a_1 b_1 \cap K(a_2, |c_2 - b_2|) & \text{oder} \\ z \in K(a_1, |c_1 - b_1|) \cap K(a_2, |c_2 - b_2|), & a_1 \neq a_2 \end{cases} \right\},$$

mit $a_i, b_i, c_i \in K_n, i = 1, 2$. Offenbar gilt $K_n \subset K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 5.1.1 Die Menge

$$\mathbb{K} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \mathbb{C}$$

heißt Menge der konstruierbaren Zahlen.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass \mathbb{K} ein Körper ist. Dazu benötigen wir einige Vorüberlegungen.

Lemma 5.1.2 Es sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gelten auch $\bar{a}, \operatorname{Re}(a), \operatorname{Im}(a), |a| \in \mathbb{K}$. Umgekehrt folgt aus $x, y \in \mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ auch $x + iy \in \mathbb{K}$.

Beweis Ohne Einschränkung sei $\operatorname{Re}(a) \neq 0$. Wegen $\{0; 1\} = K_0 \subset \mathbb{K}$ folgt

$$\mathbb{K} \supset K(0; |a - 0|) \cap 01 = \{\pm|a|\}.$$

Damit erhält man auch $\{0, 2\operatorname{Re}(a)\} = K(a; |a|) \cap 01 \subset \mathbb{K}$. Dies zeigt (vgl. Abb. 5.1)

$$\bar{a} \in K(0; |a|) \cap K(2\operatorname{Re}(a); |a|) \subset \mathbb{K}.$$

Weiter folgt $\operatorname{Re}(a) \in a\bar{a} \cap 01 \subset \mathbb{K}$. Die Konstruktion von $\operatorname{Im}(a)$ überlassen wir dem Leser.

Für die letzte Behauptung sei $y \neq 0$. Dann gelten zunächst $\{x - y, x + y\} = 01 \cap K(x, |y|) \subset \mathbb{K}$ sowie (speziell) $2y \in K(y, |y|) \cap 01 \subset \mathbb{K}$. Damit sind auch die

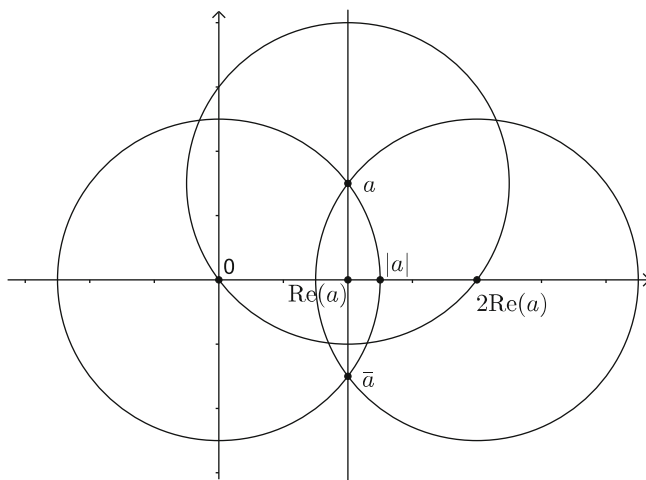


Abb. 5.1 Konstruktion konjugiert komplexer Zahlen

Schnittpunkte $z, w = x \pm iu$ von $K(x + y, 2|y|)$ und $K(x - y, 2|y|)$ in \mathbb{K} . Offenbar gilt dann $x + iy \in K(x, |y|) \cap zw \subset \mathbb{K}$. \square

Lemma 5.1.3 Es seien $a, b \in \mathbb{K}$. Dann gilt auch $a \pm b \in \mathbb{K}$.

Beweis Im Fall $a \neq b$ gilt $K(a; |0 - b|) \cap K(b; |0 - a|) \ni a + b$, für $a = b$ hat man $2a \in K(a, |a|) \cap 0a$, woraus die Behauptung über die Summe folgt. Die Differenz folgt aus dem ersten Teil zusammen mit der Beobachtung $-a \in K(0; |a|) \cap 0a$. \square

Lemma 5.1.4 Für $x, y \in \mathbb{R}_{>0} \cap \mathbb{K}$ gelten auch $x \cdot y \in \mathbb{K}$ sowie $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}$.

Beweis Aufgrund Lemma 5.1.2 gelten $1 + iy, x + i \in \mathbb{K}$. Dann erhält man nach dem Strahlensatz $x + xyi = 0(1 + iy) \cap x(x + i)$ (vgl. Abb. 5.2). Wieder mit Lemma 5.1.2 folgt $xy \in \mathbb{K}$.

Ebenso sieht man $1 + i\frac{1}{x} = 0(x + i) \cap 1(1 + i)$. \square

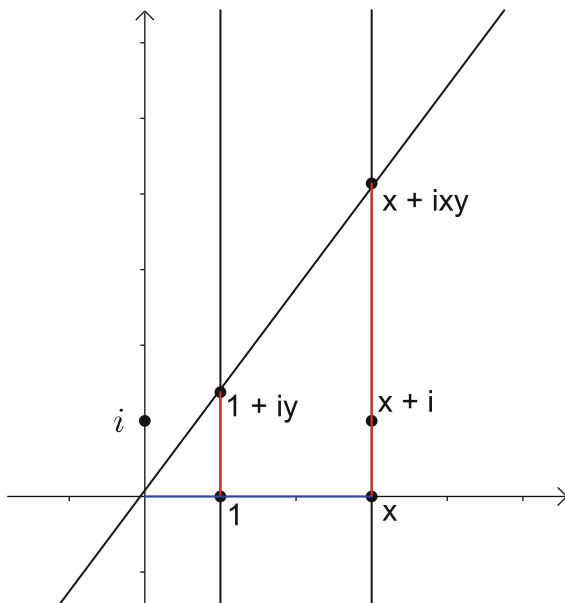
Satz 5.1.5 Die Menge \mathbb{K} der konstruierbaren Zahlen ist ein Körper.

Beweis Es ist zu zeigen, dass mit $a, b \in \mathbb{K}$ auch $a \pm b, a \cdot b \in \mathbb{K}$ und im Fall $a \neq 0$ auch $\frac{1}{a} \in \mathbb{K}$ gelten. Die erste Behauptung ist genau die Aussage von Lemma 5.1.3. Die Aussage über das Produkt folgt aus den bisherigen Lemmata aufgrund der Definition des komplexen Produkts. Für den Kehrwert erhält man die Behauptung aus der Beobachtung

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}.$$

\square

Abb. 5.2 Konstruktion
reeller Produkte



Speziell folgt aus dem letzten Satz, dass $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{K}$ gilt, Punkte mit rationalen Koordinaten also in jedem Fall konstruierbar sind. Allerdings lassen sich etwas mehr Zahlen konstruieren:

Lemma 5.1.6 Für $a \in \mathbb{K}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $b^2 = a$ gilt $b \in \mathbb{K}$.

Beweis Wir nehmen zunächst $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$ an. In diesem Fall gilt $b \in 0(a + |a|) \cap K(0; \sqrt{|a|})$ (vgl. Aufgabe 5.1.7), daher kann man ohne Einschränkung $a \in \mathbb{R}_{>0} \cap \mathbb{K}$ annehmen (das ist der in Abb. 5.3 dargestellte Fall). Dann sind nach Lemma 5.1.2 die Zahlen ia und $-i$ Elemente von \mathbb{K} . Wegen Satz 5.1.5 ist $m := \frac{1}{2}(ia - i) \in \mathbb{K}$ und mit Lemma 5.1.2 ist auch $r := \frac{1}{2}|-i - ia| \in \mathbb{K}$. Es sei nun b' der positive Schnittpunkt von 01 mit $K(m; r)$. Nach dem Satz des Thales 2.4.4 ist dann das Dreieck aus den Punkten $-i, b'$ und ia rechtwinklig mit rechtem Winkel bei b' . Der Höhensatz (Aufgabe 2.6.6) liefert nun $b'^2 = a$, und nach Konstruktion gilt offenbar $b' \in \mathbb{K}$. Wegen $b = \pm b'$ erhält man die Behauptung.

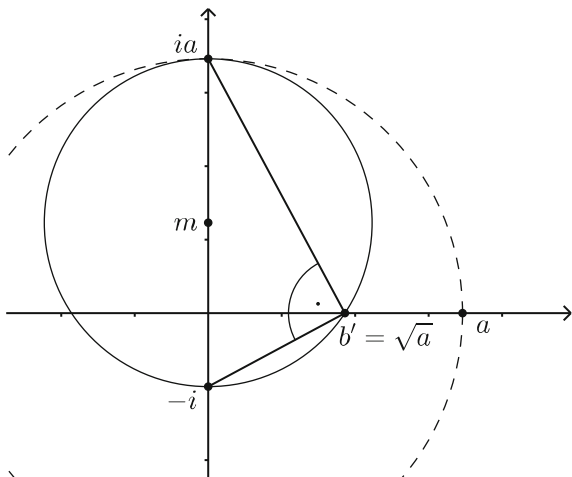
Den Fall $a < 0$ überlassen wir dem Leser. □

Aufgabe 5.1.7 Man zeige: Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$ und

$$b := \frac{\sqrt{|a|}}{|a + |a||} (a + |a|)$$

gilt $b^2 = a$.

Abb. 5.3 Konstruktion reeller Wurzeln



Zusätzlich zu Punkten mit rationalen Koordinaten enthält \mathbb{K} also auch Punkte, die sich durch sukzessives Wurzelziehen berechnen lassen.

Aufgabe 5.1.8 Man konstruiere zu einem gegebenen Dreieck mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat.

5.2 Quadratwurzeltürme

Die Grundidee, um die eingangs erwähnten Konstruktionsprobleme zu lösen, besteht darin, nachzuweisen, dass die Umkehrung der Aussagen von Abschn. 5.1 zutrifft, dass also alle konstruierbaren Punkte rationale Koordinaten haben oder sich aus diesen durch sukzessives Wurzelziehen berechnen lassen. Um dies nachweisen zu können, brauchen wir einige Begriffe und Resultate aus der Algebra, speziell der Körpertheorie.

Sind $L, K \subset \mathbb{C}$ Teilkörper von \mathbb{C} , so heißt L eine Körpererweiterung $L|K$ von K , wenn $K \subset L$ gilt. Offenbar lässt sich L dabei als K -Vektorraum auffassen. Ist die Dimension von L als K -Vektorraum endlich, so sprechen wir von einer endlichen Körpererweiterung. In diesem Fall heißt die Größe $[L : K] := \dim_K(L)$ der Grad von L über K . Gilt $[L : K] = 2$, so heißt L quadratische Erweiterung von K . Ein Quadratwurzelturm $L|K$ ist eine Folge von Körpererweiterungen

$$K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_s = L,$$

sodass jedes L_{i+1} quadratische Erweiterung von L_i ist, d.h. $\dim_{L_i}(L_{i+1}) = 2$ für $0 \leq i \leq s-1$.

Weiter bezeichnen wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ den kleinsten Teilkörper von \mathbb{C} , der M enthält, mit $\mathbb{Q}(M)$. Jeder derartige Teilkörper enthält speziell den Körper

\mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Gilt $M = \{x\}$, so ist $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ genau dann endlich, wenn x algebraisch ist, d.h. wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[T]$ mit $p(x) = 0$ gibt. Hat in diesem Fall das Polynom p kleinstmöglichen Grad, so gilt $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = \deg(p)$ (vgl. Bosch 1993, Abschn. 3.2, Sätze 6 und 7) und p heißt das Minimalpolynom von x über \mathbb{Q} .

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q}(K_n)$ der kleinste Teilkörper von \mathbb{C} , der K_n enthält, wobei K_n die zu Beginn von Abschn. 5.1 definierten Mengen bezeichnet. Wegen 5.1.5 gilt dann $\mathbb{Q}_n \subset \mathbb{K}$ und damit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n \subset \mathbb{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n.$$

Insgesamt erhält man also $\mathbb{K} = \bigcup \mathbb{Q}_n$.

Lemma 5.2.1 Es gilt $\overline{K_n} = K_n$.

Beweis Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Für $n > 0$ folgt die Behauptung gemäß der Definition von K_n mittels Induktion nach n . \square

Lemma 5.2.2 Es sei $x \in K_{n+1}$. Dann ist $x \in K_n$ oder $\mathbb{Q}_n(x)|\mathbb{Q}_n$ ist eine Erweiterung vom Grad höchstens zwei.

Beweis Es sei $x \notin K_n$. Dann ist x entweder Schnittpunkt von zwei Kreisen, Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden oder Schnittpunkt zweier Geraden, die jeweils durch Elemente aus $K_n \subset \mathbb{Q}_n$ definiert sind. Mithilfe von Lemma 5.2.1 und Hinschreiben der entsprechenden Gleichungen sieht man, dass in den ersten beiden Fällen x eine quadratische Gleichung und im dritten Fall eine lineare Gleichung über \mathbb{Q}_n erfüllt (es wird dem Leser empfohlen, dies auszuführen). Somit ist der Grad von $\mathbb{Q}_n(x)$ über \mathbb{Q}_n maximal zwei. \square

Satz 5.2.3 Es sei $x \in \mathbb{K}$. Dann gibt es einen Quadratwurzelturm

$$\mathbb{Q} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_s = \mathbb{Q}(x).$$

Beweis Wegen $\mathbb{K} = \bigcup K_n$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathbb{Q}_n$. Wir führen nun Induktion nach n . Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

Sei nun $x \in \mathbb{Q}_{n+1}$. Wegen $\mathbb{Q}_{n+1} = \mathbb{Q}(K_{n+1})$ können wir $x \in K_{n+1}$ annehmen (für zwei Elemente x, y aus \mathbb{C} ist $\mathbb{Q}(x, y) = (\mathbb{Q}(x))(y)$). Dann gilt nach Lemma 5.2.2 $x \in K_n \subset \mathbb{Q}_n$, und es ist nichts zu zeigen, oder $\mathbb{Q}_n(x)|\mathbb{Q}_n$ ist eine quadratische Erweiterung. Es gibt also ein quadratisches Polynom $p(T) := T^2 + aT + b$ mit $p(x) = 0$ und $a, b \in \mathbb{Q}_n$. Wendet man die Induktionsvoraussetzung auf a und b an, so erhält man Quadratwurzeltürme für a und b . Setzt man diese zusammen, so liefert dies einen Quadratwurzelturm für $\mathbb{Q}(a, b)$ und damit auch einen für $\mathbb{Q}(x)$. \square

Wir halten die folgenden Folgerungen fest:

Korollar 5.2.4 Ist $x \in \mathbb{K}$ konstruierbar, so ist x algebraisch und der Grad $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ ist eine Zweierpotenz.

Beweis Die erste Aussage folgt aus den Vorbemerkungen dieses Abschnitts, die zweite Aussage ergibt sich aus der aus der Algebra bekannten Multiplikativität des Körpergrads (vgl. Bosch 1993, Abschn. 3.2, Satz 2). \square

Mithilfe von etwas Algebra (Hauptsatz der Galoistheorie Lang 2002, VI. Theorem 1.1) zusammen mit dem Hauptsatz über p -Sylowgruppen (vgl. Lang 2002, Corollary 6.6) kann man zeigen, dass auch die Umkehrung des Korollars 5.2.4 richtig ist. Auf diesen Nachweis verzichten wir an dieser Stelle, da für unsere Zwecke die angegebene Richtung ausreicht. Damit sind wir bereits in der Lage, zwei der berühmten klassischen Konstruktionsfragen zu beantworten.

Beispiel 5.2.5 1. Das klassische Problem der Würfelverdopplung ist nicht lösbar.
2. Das klassische Problem der Winkeldrittung ist nicht lösbar.

Beweis 1. Hier wäre die Zahl $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren. Wegen $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ ist dies nach Korollar 5.2.4 nicht möglich.

2. Wir betrachten $z := \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in K(0, 1)$. Wegen Lemma 5.1.6 gilt $z \in \mathbb{K}$. Wäre der Winkel $\angle(\overrightarrow{01}, \overrightarrow{0z})$ drittelnbar, dann gäbe es ein $w \in \mathbb{K}$ mit $\angle(\overrightarrow{01}, \overrightarrow{0w}) = \frac{1}{3}\angle(\overrightarrow{01}, \overrightarrow{0z})$. Ohne Einschränkung können wir $w \in K(0, 1)$ annehmen (sonst betrachte $0w \cap K(0, 1)$). Schreiben wir $w = x + iy$, dann gelten $w^3 = z$ und $x^2 + y^2 = 1$, also

$$\frac{1}{2} = x^3 - 3xy^2 = 4x^3 - 3x,$$

somit gilt $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 3$. Wieder nach Korollar 5.2.4 ist x nicht konstruierbar. Dann kann aber auch w nach Lemma 5.1.2 nicht konstruierbar sein. \square

Die Frage nach der Konstruierbarkeit der regelmäßigen Vielecke behandeln wir im Abschn. 5.3. Die vierte Fragestellung nach der Quadratur des Kreises ist etwas aufwendiger. Da die Einheitskreisscheibe bekanntlich den Flächeninhalt π besitzt, ist die Frage zu beantworten, ob es zu $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})|\mathbb{Q}$ einen Quadratwurzelturm gibt. Nun ist aber π nicht algebraisch, es gibt also kein Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches π als Nullstelle besitzt, wie F. Lindemann (1852–1939) bereits 1882 beweisen konnte. Somit ist auch $\sqrt{\pi}$ nicht algebraisch und die Quadratur des Kreises nicht möglich. Auf den Nachweis, dass π nicht algebraisch ist (man sagt auch transzendent), verzichten wir hier. In Fritsch (2003) finden interessierte Leser einen gut verständlichen, auf wenigen Vorkenntnissen basierenden Nachweis dieser Aussage.

5.3 Regelmäßige Vielecke

Bereits in der Antike war bekannt, dass die regelmäßigen n -Ecke für $n = 3, 4, 5$ konstruierbar sind. Ebenso war bekannt, dass zu jedem konstruierbaren regelmäßigen n -Eck auch das regelmäßige $2n$ -Eck konstruierbar ist. Über das Siebeneck und weitere Vielecke wusste man nichts Genaues. Umso größer war die Überraschung, als Carl Friedrich Gauß (1777–1855) im Alter von 18 Jahren entdeckte, dass das regelmäßige Siebzehneck konstruierbar ist. Wir werden in diesem Abschnitt ein allgemeines Kriterium entwickeln, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, welche regelmäßigen Vielecke konstruierbar sind.

Aufgabe 5.3.1 Man gebe für das regelmäßige n -Eck, $n = 3, 4, 5, 6$, jeweils eine Konstruktion an.

Definition 5.3.2 Ein konvexes n -Eck heißt regelmäßig oder regulär, wenn es in allen Seitenlängen und allen Innenwinkeln übereinstimmt.

Aufgabe 5.3.3 Man zeige: Ist $n \geq 5$ und unterteilen die Verbindungsgeraden der Ecken jeden Innenwinkel in gleich große Teilwinkel, so ist das n -Eck regelmäßig.

Dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ein regelmäßiges n -Eck gibt, ist relativ leicht einzusehen.

Beispiel 5.3.4 1. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$E_n := \left\{ \zeta_n^k := \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right); 0 \leq k \leq n-1 \right\} \subset \mathbb{C}$$

die Menge der n -ten Einheitswurzeln. Dann sind die Punkte ζ_n^k Ecken eines regelmäßigen n -Ecks mit Seiten $\overline{\zeta_n^k \zeta_n^{k+1}}$, $k = 0, \dots, n-1$, (mit $\zeta_n^n = 1 = \zeta_0$). Man beachte, dass damit die Menge E_n der n -ten Einheitswurzeln mit dem Restklassenring

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

der Reste modulo n identifiziert werden kann.

2. Ist $n = p$ eine Primzahl, so ist \mathbb{Z}_p bekanntlich ein Körper, den man üblicherweise mit \mathbb{F}_p bezeichnet. Da in endlichen Körpern die Einheitengruppe \mathbb{F}_p^\times zyklisch ist (vgl. Bosch 1993, Abschn. 4.5, Satz 1), gibt es dann sogar ein $1 \leq u \leq p-1$, sodass jede Einheitswurzel ungleich eins von der Form $(\zeta_p)^{u^k}$, $1 \leq k \leq p-2$ ist: mit anderen Worten, in diesem Fall gilt

$$E_p = \{1, (\zeta_p)^u, (\zeta_p)^{u^2}, \dots, (\zeta_p)^{u^{p-2}}\}.$$

Aufgabe 5.3.5 Man zeige: Je zwei regelmäßige n -Ecke sind ähnlich.

Geometrisch ist einsichtig, dass der Mittelwert aller Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks gerade der Mittelpunkt des zugehörigen n -Ecks ist. Wir formulieren diese Aussage algebraisch:

Lemma 5.3.6 Es sei $n > 1$ und E_n die Menge der n -ten Einheitswurzeln. Dann gilt

$$\sum_{\zeta \in E_n} \zeta = 0.$$

Beweis Für $\xi \in E_n$ mit $\xi \neq 1$ und $s := \sum_{\zeta \in E_n} \zeta$ gilt

$$\xi s = \xi \sum_{\zeta \in E_n} \zeta = \sum_{\zeta \in E_n} \xi \zeta = \sum_{\zeta' \in E_n} \zeta' = s,$$

woraus man die Behauptung abliest. \square

Offensichtlich reicht es zur Konstruktion eines n -Ecks aus, eine Seite desselben zu konstruieren. Da der Eckpunkt $1 \in \mathbb{K}$ liegt, also immer konstruierbar ist, reduziert sich die Frage nach der Konstruierbarkeit eines regelmäßigen n -Ecks damit auf die Frage, ob $\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \in \mathbb{K}$ gilt.

Lemma 5.3.7 Ist $n = rs$ mit teilerfremden r und s , so ist das regelmäßige n -Eck genau dann konstruierbar, wenn das regelmäßige r -Eck und das regelmäßige s -Eck konstruierbar sind.

Beweis Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar.

Für die umgekehrte Richtung gehen wir von $\zeta_r = \exp\left(\frac{2\pi i}{r}\right)$, $\zeta_s = \exp\left(\frac{2\pi i}{s}\right) \in \mathbb{K}$ aus. Weil r und s teilerfremd sind, gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $ur + vs = 1$. Dies impliziert

$$\zeta_r^v \cdot \zeta_s^u = \exp\left(2\pi i \left(\frac{v}{r} + \frac{u}{s}\right)\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = \zeta_n.$$

Da nach Satz 5.1.5 die Menge \mathbb{K} ein Körper ist, folgt die Behauptung. \square

Aufgabe 5.3.8 Man gebe eine Konstruktion für das regelmäßige 15-Eck an.

Um für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ nun zu entscheiden, ob $\zeta_n \in \mathbb{K}$ gilt, reicht es nach Lemma 5.3.7 aus, den Fall zu betrachten, dass $n = p^k$ eine Primpotenz ist. Für diesen Fall bestimmen wir das Minimalpolynom von ζ_n , d. h. das normierte Polynom minimalen Grades, welches ζ_n als Nullstelle besitzt. Für $Q(T) := T^n - 1$ gilt offenbar $Q(\zeta_n) = 0$. Eine Anwendung der geometrischen Summenformel bestätigt schnell folgende Zerlegung

$$Q(T) = T^{p^k} - 1 = \overbrace{(T^{p^{k-1}} - 1)}^{q(T) :=} \cdot \overbrace{\left(\sum_{i=0}^{p-1} T^{ip^{k-1}}\right)}^{\Phi_n(T) :=}. \quad (5.1)$$

Das in dieser Zerlegung auftretende Polynom $\Phi_n(T)$ ist irreduzibel (vgl. Lang 2002, Abschn. VI.3). Damit erhält man

Lemma 5.3.9 Es sei $n = p^k$. Das Polynom $\Phi_n(T)$ in der Zerlegung (5.1) ist das Minimalpolynom der n -ten Einheitswurzel $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.

Beweis Offenbar gilt (Notation wie in (5.1)) $q(\zeta) \neq 0$. Wegen $Q(\zeta) = 0$ folgt daraus $\Phi_n(\zeta) = 0$. Weiter ist Φ_n normiert und nach der Vorbemerkung irreduzibel.

Da das Minimalpolynom durch die erwähnten Eigenschaften eindeutig festgelegt ist, folgt die Behauptung. \square

Wir können damit ein Kriterium angeben, wann für eine Primpotenz $p = n^k$ das regelmäßige n -Eck konstruierbar ist.

Satz 5.3.10 Es sei $n = p^k$ eine Primpotenz. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. Das regelmäßige n -Eck ist konstruierbar.
2. Die Zahl $p^k - p^{k-1}$ ist eine Zweierpotenz.
3. Es gilt $n = 2^k$ oder $n = p = 2^m + 1$ für ein $m \geq 0$.

Beweis Nach Lemma 5.3.9 hat das Minimalpolynom von $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ Grad $p^k - p^{k-1}$. Damit gilt $d := [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p^k - p^{k-1}$.

„1. \Rightarrow 2.“: Ist das regelmäßige n -Eck konstruierbar, so ist nach Korollar 5.2.4 $p^k - p^{k-1} = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ eine Zweierpotenz.

„2. \Rightarrow 3.“: Es gilt

$$2^m = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1).$$

Da 2 und p beides Primzahlen sind, erhält man daraus $p = 2$ oder $k - 1 = 0$, also die Behauptung.

„3. \Rightarrow 1.“: Den Fall $n = 2^k$ überlassen wir dem Leser zur Übung. Wir können also von primem $n = 2^m + 1$ ausgehen. Dann gilt nach Lemma 5.3.9 $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2^m$. Mithilfe der Umkehrung des Korollars 5.2.4 würde die Behauptung direkt folgen (vgl. die Anmerkung direkt nach diesem Korollar); wir geben aber einen direkten Beweis, der allerdings etwas Rechenaufwand und Notation benötigt.

Zunächst fixieren wir ein u wie in Lemma 5.3.4, sodass $\zeta^{(u^k)}$, $1 \leq k \leq p-1 = 2^m$, alle Einheitswurzeln außer 1 durchläuft. Für $0 \leq t \leq m$ und $0 \leq r < 2^t$ sei

$$R(t, r) := \{1 \leq j \leq p-1; j \equiv r \pmod{2^t}\},$$

die Menge der Elemente von \mathbb{F}_p^\times , die bei Division durch 2^t den gleichen Rest wie r lassen. Offenbar gibt es davon genau $\frac{p-1}{2^t} = 2^{m-t}$ viele. Damit definieren wir nun die Zahlen

$$Z(t, r) := \sum_{j \in R(t, r)} \zeta^{u^j}$$

und betrachten die von diesen über \mathbb{Q} erzeugten Körper $L_t := \mathbb{Q}(\{Z(t, r); 0 \leq r < 2^t\})$. Die grundlegende Beweisidee besteht nun darin, zu zeigen, dass für $t \geq 1$ jedes $Z(t, r)$ eine quadratische Gleichung über dem Körper L_{t-1} erfüllt; genauer zeigen wir, dass $Z(t, r)$ und $Z(t, r + 2^{t-1})$ die beiden Nullstellen einer solchen Gleichung sind. Nach dem Satz von Vieta reicht es dafür zu zeigen, dass sowohl die Summe als auch das Produkt dieser Zahlen in L_{t-1} liegen. Rechnen wir dies nach: Für $0 \leq r < 2^{t-1}$ erhält man wegen $R(t, r) \cup R(t, r + 2^{t-1}) = R(t-1, r)$ sofort

$$\begin{aligned} s := Z(t, r) + Z(t, r + 2^{t-1}) &= \sum_{j \in R(t, r)} \zeta^{u^j} + \sum_{i \in R(r+2^{t-1})} \zeta^{u^i} \\ &= \sum_{j \in R(t-1, r)} \zeta^{u^j} = Z(t-1, r) \in L_{t-1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Um dies auch für das Produkt einzusehen, betrachten wir die Quadrate der Zahlen $Z(t, r)$:

$$\begin{aligned} Z(t, r)^2 &= \sum_{i, j \in R(t, r)} \zeta^{u^j} \cdot \zeta^{u^i} = \sum_{i, j \in R(t, r)} \zeta^{u^j + u^i} = \sum_{j \in R(t, r)} \sum_{i \in R(t, r)} \zeta^{u^j(1+u^{i-j})} \\ &= \sum_{j \in R(t, r)} \sum_{k \in R(t, 0)} \zeta^{u^j(1+u^k)} = \sum_{k \in R(t, 0)} \sum_{j \in R(t, r)} \zeta^{u^j(1+u^k)}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei die letzten beiden Umformungen aus einer einfachen Indexverschiebung und dem Vertauschen der Summationsreihenfolge bestehen. Wir untersuchen nun den Faktor $1 + u^k$ im letzten Exponenten von (5.3). Ist dieser durch p teilbar, so hat die Potenz den Wert 1, die zugehörige Summe ist damit also eine ganze Zahl. Im anderen Fall ($1 + u^k$ ist nicht durch p teilbar) gibt es ein s_k , sodass $1 + u^k \equiv u^{s_k}$ modulo p gilt (vgl. Lemma 5.3.4). Damit lässt sich dann der gesamte letzte Exponent in der Gl. (5.3) in der Form

$$u^j \cdot (1 + u^k) = u^{j+s_k}$$

schreiben. Man erhält damit

$$Z(t, r)^2 = g + \sum_{k \in R(t, 0), p \nmid 1+u^k} Z(t, r + s_k),$$

mit einer ganzen Zahl g . Wie in (5.2) folgt daraus (wobei wir über die gleichen k wie in der letzten Gleichung summieren)

$$\begin{aligned} Z(t, r)^2 + Z(t, r + 2^{t-1})^2 &= 2g + \sum_k (Z(t, r + s_k) + Z(t, r + s_k + 2^{t-1})) \\ &= 2g + \sum_k Z(t-1, r + s_k) \in L_{t-1}, \end{aligned}$$

mit $2g \in \mathbb{Z}$. Damit gilt auch

$$\begin{aligned} p &:= Z(t, r)Z(t, r + 2^{t-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left((Z(t, r) + Z(t, r + 2^{t-1}))^2 - (Z(t, r)^2 + Z(t, r + 2^{t-1})^2) \right) \in L_{t-1}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Vieta sind dann $Z(t, r)$ und $Z(t, r + 2^{t-1})$ gerade die Nullstellen des Polynoms $X^2 - sX + p \in L_{t-1}[X]$, was die behauptete Existenz einer quadratischen Gleichung für $Z(t, r)$ über L_{t-1} zeigt.

Damit erhält man aber schnell die Behauptung: Zum Einen ist $Z(0, 0)$ die Summe aller Einheitswurzeln außer 1, ergibt nach Lemma 5.3.6 also -1 . Daher ist $L_0 = \mathbb{Q}$. Da zum Anderen $Z(m, 1) = \zeta^u$ gilt, sehen wir, dass schrittweise Adjunktion der $Z(t, r)$ einen Quadratwurzelturm für ζ^u liefert. Somit ist ζ^u konstruierbar. Da $\zeta = (\zeta^u)^k$ für ein geeignetes k gilt, ist dann auch ζ konstruierbar. \square

Als zentrales Ergebnis erhalten wir aus dem letzten Satz zusammen mit Lemma 5.3.7 folgenden Satz:

Satz 5.3.11 Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Dann ist das regelmäßige n -Eck genau dann konstruierbar, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Form

$$n = 2^s p_1 \cdots p_r$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen der Form $p_i = 2^{m_i} + 1$ hat.

Man nennt Primzahlen der Form $n = 2^m + 1$ Fermatsche Primzahlen. Man kann zeigen, dass eine solche Zahl nur dann prim sein kann, wenn m selbst eine Zweierpotenz ist, also $p = F_k = 2^{2^k} + 1$ gilt. Die Fälle $k = 0, k = 1, k = 2, k = 3$ und $k = 4$ führen auf die Zahlen $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ und $F_4 = 65.537$, die allesamt prim sind. Somit sind die zugehörigen Vielecke alle konstruierbar. Von der Zahl F_5 wurde von Euler gezeigt, dass sie faktorisierbar ist, es gilt nämlich

$$F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417.$$

Es ist nicht bekannt, ob es weitere Fermatsche Primzahlen gibt. Sieht man davon ab, liefert der Satz 5.3.11 eine vollständige Beschreibung der konstruierbaren regelmäßigen Vielecke. Speziell erhalten wir, dass das regelmäßige 17-Eck wegen $17 = 2^4 + 1$ konstruierbar (in der Einführung von Bewersdorff 2007 findet man eine explizite Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte eines solchen 17-Ecks), das regelmäßige 7-Eck wegen $7 = 2 \cdot 3 + 1$ nicht konstruierbar ist.

Teil II

Ausblicke

Inhaltsverzeichnis

6.1	Konvexität.....	130
6.2	Polytope	134
6.3	Graphen von Polytopen und Eulersche Polyederformel	144
6.4	Reguläre Polytope	150
6.5	Ergänzungen zur Graphentheorie.....	154

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Elementen der kombinatorischen Geometrie, speziell mit Polytopen in höherdimensionalen (euklidischen) Räumen sowie Grundbegriffen der Graphentheorie. Graphen sind einfache Inzidenzstrukturen, bei deren Untersuchung man aber schnell zu interessanten Fragestellungen kommt, die auch in vielfältigen Anwendungen eine Rolle spielen. Bei der Untersuchung von Polytopen, die die natürlichen Verallgemeinerungen der ebenen Vielecke sind, ist man in erster Linie an deren kombinatorischen Eigenschaften interessiert, also etwa den Beziehungen zwischen Eckpunkten und höherdimensionalen Seiten. Unter diesem Aspekt sind z. B. ein Würfel und ein Quader kombinatorisch äquivalent, auch wenn sie sich aus klassisch geometrischer Sicht natürlich unterscheiden. Wir werden aber außer bei der Untersuchung der regulären Polytope in Abschn. 6.4 in erster Linie aus dem Blickwinkel der kombinatorischen Geometrie vorgehen.

Polytope werden in unserer Situation stets konvexe Körper sein, d. h. Teilmengen des \mathbb{R}^n , die jeweils auch die Verbindungsstrecke zweier Punkte der Mengen enthalten. Wie schon im ersten Teil setzen wir dabei Begriffe wie metrischer oder normierter Raum voraus.

6.1 Konvexität

Bevor wir uns den uns eigentlich interessierenden Polytopen zuwenden, tragen wir noch einige Ergebnisse über allgemeine konvexe Mengen zusammen, die wir bei der Untersuchung von Polytopen öfter benötigen werden.

Als Grundlage unserer Überlegungen fixieren wir ein euklidisches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n , d.h. eine symmetrische, positiv definite Bilinearform (in den meisten Fällen wird dieses das Standardskalarprodukt sein). Bekanntlich wird damit für $v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf dem \mathbb{R}^n definiert, die \mathbb{R}^n zusammen mit dem gewählten Skalarprodukt zu einem normierten Raum macht. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ liefert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf \mathbb{R}^n , sodass man einen metrischen Raum erhält.

Wie im Fall $n = 2$ nennen wir die Elemente von \mathbb{R}^n „Punkte“. Unter einer Geraden des \mathbb{R}^n verstehen wir Mengen der Form

$$\Gamma := A + \mathbb{R} \cdot v, \quad A, v \in \mathbb{R}^n.$$

Sind $A, B \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte aus dem \mathbb{R}^n , so ist

$$[A, B] := \{A + t(B - A); t \in [0, 1]\}$$

die abgeschlossene Strecke zwischen A und B . Offenbar ist diese eine Teilmenge der eindeutig bestimmten Geraden durch A und B . Den Gegenpart zu den anschaulich eindimensionalen Geraden bilden die einskodimensionalen Teilmengen des \mathbb{R}^n , die sogenannten Hyperebenen:

Definition 6.1.1 Ist $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $e \in \mathbb{R}$, so heißt die Menge

$$H_{u=e} := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle u, x \rangle = e\}$$

eine Hyperebene in \mathbb{R}^n . Die beiden Mengen

$$H_{u \geq e} := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle u, x \rangle \geq e\} \text{ sowie } H_{u \leq e} := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle u, x \rangle \leq e\}$$

heißen die durch die Hyperebene $H_{u=e}$ definierten (abgeschlossenen) Halbräume von \mathbb{R}^n . Oftmals betrachtet man auch offene Halbräume und definiert diese dann sinngemäß.

Aufgabe 6.1.2 Man zeige: Im Fall $e = 0$ ist $H_{u=e}$ ein $(n - 1)$ -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

Wir merken an, dass für ein festes $u \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\varphi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle u, x \rangle,$$

offensichtlich eine Linearform auf dem \mathbb{R}^n ist. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sogar jede Linearform von dieser Form ist. Damit erhalten wir durch $u \mapsto \varphi_u$ einen expliziten Isomorphismus des \mathbb{R}^n mit seinem Dualraum

$$(\mathbb{R}^n)^* := \{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ linear}\}.$$

In dieser Sichtweise ist die Hyperebene $H_{u=e}$ nichts anderes als das Urbild von e unter φ_u , d. h. $H_{u=e} = \varphi_u^{-1}(e)$. Wie in der Beschreibung der Hyperebene werden wir oft nicht zwischen \mathbb{R}^n und seinem Dualraum bzw. zwischen u und φ_u unterscheiden, d. h., wenn wir von der Linearform $u \in \mathbb{R}^n$ sprechen, meinen wir die mithilfe des Skalarproduktes definierte Abbildung φ_u .

Definition 6.1.3 Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $A, B \in K$ auch deren Verbindungsstrecke $[A, B] \subset \mathbb{R}^n$ ganz in K liegt: $[A, B] \subset K$.

Anschaulich haben konvexe Mengen damit keine „Dellen“ bzw. Einbuchtungen, sondern sind nach außen gewölbt. Viele bekannte Mengen sind konvex:

- Beispiel 6.1.4**
1. Hyperebenen (allgemeiner: affine Unterräume) und Halbräume sind konvexe Mengen.
 2. Vollkugeln $D(M; r) := \{X \in \mathbb{R}^n; \|X - M\| \leq r\}$ mit $M \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sind konvex.

Beweis Wir beweisen nur die zweite Behauptung und überlassen die erste dem Leser zur Übung. Für den Nachweis, dass Kugeln konvex sind, seien $A, B \in D(M; r)$ und $X \in [A, B]$. Dann gibt es ein $t \in [0, 1]$ mit $X = (1 - t)A + tB$. Die Dreiecksungleichung und die Definition von $D(M; r)$ zeigen nun

$$\|X - M\| = \|(1 - t)(A - M) + t(B - M)\| \leq (1 - t)r + tr = r,$$

wie behauptet. □

Sind bereits einige Punkte einer konvexen Menge bekannt, so liegen offenbar alle Verbindungsstrecken dieser Punkte in der Menge. Man kann dieses Verfahren iterieren und erhält so folgendes Resultat:

Lemma 6.1.5 Sind $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $X_1, \dots, X_m \in K$, so liegt auch jeder Punkt der Form

$$X = \sum_{i=1}^m t_i X_i \text{ mit } \sum_{i=1}^m t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0$$

in K .

Beweis Wir beweisen dies mit Induktion nach m . Für $m = 1$ ist die Behauptung klar. Für den Schritt von m auf $m + 1$ setzen wir für $X_1, \dots, X_{m+1} \in K$ und

$$X = \sum_{i=1}^{m+1} t_i X_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{m+1} t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0$$

zunächst $t := \sum_{i=1}^m t_i \leq 1$. Im Fall $t = 0$ ist $X = X_{m+1} \in K$ klar. Andernfalls hat man $t_{m+1} = 1 - t$ und kann

$$X = t \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{t} X_i + t_{m+1} X_{m+1} = tY + (1-t)X_{m+1}$$

mit $Y := \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{t} X_i, \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{t} = 1, \frac{t_i}{t} \geq 0,$

schreiben. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $Y \in K$. Weil K konvex ist, folgt daher direkt, dass auch $X \in K$ ist. \square

Aus konvexen Mengen lassen sich weitere konvexe Mengen konstruieren:

Bemerkung 6.1.6 Sind $K_i, i \in I$, konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^n und $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gelten folgende Aussagen:

1. $K_{i_1} + K_{i_2} := \{x + y; x \in K_{i_1}, y \in K_{i_2}\}$ ist konvex.
2. $sK_i := \{sx; x \in K_i\}$ ist konvex.
3. $\bigcap_{i \in I} K_i$ ist konvex.

Aufgabe 6.1.7 Man zeige Bemerkung 6.1.6.

Besonderes Augenmerk verdient die dritte Aussage der Bemerkung 6.1.6. Diese erlaubt es nämlich, zu jeder Menge eine kleinste sie enthaltende konvexe Menge zu konstruieren:

Definition 6.1.8 Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, so heißt der Durchschnitt aller M enthaltenden konvexen Mengen

$$K_M := \text{conv}(M) := \bigcap_{M \subset K \text{ konvex}} K$$

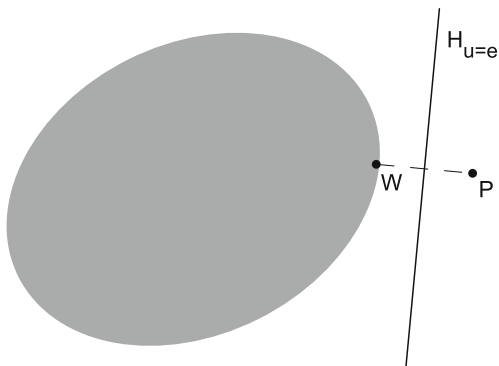
die konvexe Hülle von M .

Von besonderem Interesse sind für uns kompakte konvexe Mengen. So werden wir sehen, dass Polytope stets kompakt und konvex sind. Eine der zentralen Aussagen über kompakte konvexe Mengen, vielleicht sogar das technische Haupthilfsmittel für weitere Untersuchungen, ist das folgende Lemma, welches auch als Spezialfall des berühmten Satzes von Hahn-Banach (vgl. Werner 2011, Kap. III) aufgefasst werden kann.

Lemma 6.1.9 (Trennungslemma) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, weiter sei P ein Punkt mit $P \notin K$. Dann existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$ sowie ein $e \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle u, P \rangle < e < \langle u, K \rangle := \{\langle u, x \rangle; x \in K\}.$$

Abb. 6.1 Das
Trennungslemma



Man sagt dabei auch, dass die Hyperebene $H_{u=e} := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle u, x \rangle = e\}$ den Punkt P und die konvexe Menge K trennt (vgl. Abb. 6.1).

Beweis Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - P\|^2$$

ist stetig, nimmt also auf der kompakten Menge K ihr Minimum, etwa in W , an. Wir setzen $u := W - P$ und $e := \frac{1}{2}(\|W\|^2 - \|P\|^2)$. Es sei nun $y \in K$. Dann besitzt die quadratische Funktion

$$f(t) := \|ty + (1-t)W - P\|^2$$

in $[0, 1]$ ihr Minimum in null. Dann gibt es ein $T > 0$, sodass für $t \in [0, T]$ gilt

$$0 \leq f'(t) = 2\langle y - W, ty + (1-t)W - P \rangle.$$

Speziell erhält man $0 \leq f'(0) = 2\langle y - W, W - P \rangle = 2\langle y - W, u \rangle$, also

$$\langle u, y \rangle \geq \langle u, W \rangle = \|W\|^2 - \langle P, W \rangle = e + \frac{1}{2}\|W - P\|^2 > e.$$

Andererseits hat man

$$\langle u, P \rangle = \langle W, P \rangle - \|P\|^2 = e - \frac{1}{2}\|W - P\|^2 < e,$$

was schließlich die Behauptung liefert. \square

- Aufgabe 6.1.10** 1. Man zeige, dass man in Lemma 6.1.9 die Voraussetzung, dass K kompakt ist, durch die Abgeschlossenheit von K ersetzen kann.
2. Man zeige, dass man das e aus Lemma 6.1.9 immer als -1 oder 1 wählen kann.

Als beispielhafte Anwendung von Lemma 6.1.9 leiten wir eine weitere Möglichkeit ab, konvexe Mengen zu beschreiben.

Satz 6.1.11 Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, so stimmt K mit dem Durchschnitt aller K enthaltenden Halbräume überein.

Beweis Offenbar ist K im Durchschnitt aller K enthaltenden Halbräume enthalten. Angenommen, dieser Schnitt ist echt größer als K . Dann enthält dieser Schnitt ein x , welches nicht in K enthalten ist. Nach Lemma 6.1.9 gibt es dazu aber einen Halbraum, der K enthält, aber x nicht. Daher kann x nicht im Durchschnitt aller K enthaltenden Halbräume liegen. \square

6.2 Polytope

In diesem Abschnitt definieren wir Polytope und deren Seiten und betrachten einige einfache Beispiele. Wie erwähnt, sind Polytope kompakte konvexe Mengen. Man fordert zusätzlich lediglich noch eine spezielle Endlichkeitsbedingung, welche im Wesentlichen besagt, dass Polytope stets nur endlich viele Eckpunkte haben.

Definition 6.2.1 Eine Teilmenge P des \mathbb{R}^n heißt Polytop, wenn sie die konvexe Hülle endlich vieler Punkte des \mathbb{R}^n ist:

$$P = \text{conv}(A_1, \dots, A_m), \quad A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n, \quad m \geq 0.$$

Man beachte, dass die vorgegebenen Punkte nicht notwendigerweise eine minimale Anzahl darstellen müssen; es können durchaus Redundanzen auftreten. Im Allgemeinen ist es eine schwierige Aufgabe, zu einer gegebenen Menge von Punkten eine minimale Teilmenge zu finden, die die gleiche konvexe Hülle besitzt (Simplex-Verfahren, Fourier-Motzkin-Elimination). In Satz 6.2.13 geben wir ein Ergebnis an, das in diese Richtung geht. Wir vermerken, dass auch die leere Menge als konvexe Hülle von keinem Punkt ein Polytop ist. Bevor wir die Theorie der Polytope genauer untersuchen, geben wir zunächst einige Beispiele:

Beispiel 6.2.2 1. Regelmäßige n -Ecke (Polygone) wie in Beispiel 5.3.4 sind Polytope.

2. Der Würfel (Hexaeder)

$$C_3 := \text{conv}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

ist ein Polytop.

3. Das Standardsimplex

$$T_n := \text{conv}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist ein Polytop.

4. Die Einheitskugel

$$D_n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

ist kein Polytop.

Den Nachweis der Aussagen in Beispiel 6.2.2 überlassen wir dem Leser zur Übung.

Für die explizite Darstellung von Punkten eines Polytops ist folgende Beobachtung oft hilfreich:

Lemma 6.2.3 Für $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$P := \text{conv}(A_1, \dots, A_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i A_i; \sum_{i=1}^m t_i = 1, t_i \geq 0, 1 \leq i \leq m \right\}.$$

Insbesondere ist P kompakt.

Beweis Wir setzen $M := \{\sum_{i=1}^m t_i A_i; \sum_{i=1}^m t_i = 1, t_i \geq 0\}$. Dann sieht man schnell, dass M sicherlich konvex ist. Da offenbar $A_j \in M$ für $1 \leq j \leq m$ gilt, folgt $P \subset M$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich direkt aus Lemma 6.1.5.

Die Kompaktheit von P ergibt sich direkt aus der neu gewonnenen Darstellung. \square

Definition 6.2.4 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop und $H := H_{u=e}$ eine Hyperebene mit $P \subset H_{u \geq e}$. Dann heißt der Durchschnitt $F := H \cap P$ eine Seite von P . Im Fall von $F = \emptyset$ oder $F = P$ (z.B. $u = 0$ und $e = 0$, was wir hier zulassen) spricht man von uneigentlichen Seiten, andernfalls von eigentlichen Seiten. Ist F Seite von P , so schreibt man $F \leq P$.

Lemma 6.2.5 Es sei $P = \text{conv}(A_1, \dots, A_m)$ ein Polytop und $F \leq P$ eine Seite von P . Dann gilt $F = \text{conv}(\{A_i; A_i \in F\})$. Insbesondere ist F selbst ein Polytop.

Beweis Es sei $F = P \cap H$ mit $H := H_{u=e}$. Ohne Einschränkung (umnummerieren!) gelte $A_i \in H \iff 1 \leq i \leq k$. Wir behaupten $F = \text{conv}(A_1, \dots, A_k)$:

Da F als Schnitt konvexer Mengen selbst konvex ist und A_1, \dots, A_k enthält, gilt in jedem Fall $F \supset \text{conv}(A_1, \dots, A_k)$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in F$. Wegen $F \subset P$ besitzt x gemäß Lemma 6.2.3 eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^m t_i A_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = 1.$$

Wegen $F \subset H$ ergibt die Auswertung mit u

$$e = \langle u, x \rangle = \sum_{i=1}^k t_i e + \sum_{i=k+1}^n t_i \langle u, A_i \rangle.$$

Angenommen, für $k+1 \leq j \leq n$ ist ein t_j größer null, so erhält man aufgrund von $P \subset H_{u \geq e}$ und $A_j \notin H$

$$e = \langle u, x \rangle < \sum_{i=1}^k t_i e + \sum_{i=k+1}^n t_i e = e,$$

was nicht sein kann. Daher gilt $t_j = 0$ für alle $k + 1 \leq j \leq n$ und somit

$$x = \sum_{i=1}^k t_i A_i \in \text{conv}(A_1, \dots, A_k). \quad \square$$

Korollar 6.2.6 Ein Polytop besitzt nur endlich viele Seiten.

Offenbar liefert der Begriff der Seitenstruktur eines Polytops zusammen mit der Inklusion eine Ordnung auf der Menge der nichtleeren Seiten, die die sogenannte kombinatorische Struktur des Polytops widerspiegelt. In dieser Ordnung ist das Polytop selbst ein maximales Element und die einpunktigen Seiten die minimalen Elemente. Naheliegenderweise wird man diesen Seiten eine Dimension zuordnen. Um das zu präzisieren, erinnern wir an einige Begriffe der affinen Algebra.

Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, so bezeichnet man den kleinsten affinen Teilraum, der C enthält, mit $\text{aff}(C)$. Die Dimension von C ist dann die Dimension dieses Teilraums, d.h. $\dim(C) := \dim(\text{aff}(C))$. Die Dimension der leeren Menge setzt man in diesem Zusammenhang als -1 , also $\dim(\emptyset) := -1$.

Weiter nennen wir Punkte $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 2$ affin unabhängig, falls die $k - 1$ Vektoren $v_1 - v_i$, $2 \leq i \leq k$ linear unabhängig sind. Beispielsweise sind zwei verschiedene Elemente des \mathbb{R}^n immer affin unabhängig.

Bemerkung 6.2.7 Die Punkte $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann affin unabhängig, falls das System

$$\sum_{i=1}^k s_i v_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k s_i = 0, \quad s_i \in \mathbb{R},$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Beweis „ \Rightarrow “: Andernfalls sei s_i , $i = 1, \dots, k$ eine nichttriviale Lösung dieses Systems. Damit erhält man die Gleichung

$$0 = \sum_{i=2}^k s_i (v_1 - v_i),$$

in der mindestens ein s_i , $i \geq 2$ ungleich null ist. Damit sind die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_k affin abhängig im Widerspruch zur Voraussetzung.

„ \Leftarrow “: Es sei eine Darstellung

$$\sum_{i=2}^k s_i (v_1 - v_i) = 0$$

gegeben. Mit $s_1 := -\sum_{i=2}^k s_i$ erhält man daraus durch Umstellen die Gleichung

$$0 = \left(\sum_{i=1}^k s_i \right) v_1 = \sum_{i=1}^k s_i v_i,$$

in der nach Voraussetzung alle $s_i = 0$ sind, woraus man die Behauptung erhält. \square

Für Dimensionsaussagen benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 6.2.8 Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum der Dimension d mit $0 \notin A$ sowie $e \neq 0$. Dann ist die Menge

$$A^* := \{u \in \mathbb{R}^n; \langle u, A \rangle = e\}$$

ein affiner Unterraum der Dimension $n - 1 - d$.

Für den Beweis erinnern wir an den Begriff des orthogonalen Komplements

$$V^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n; \langle u, V \rangle = 0\}$$

eines Unterraumes $V \subset \mathbb{R}^n$. Bekanntlich gilt hierbei $\dim V + \dim V^\perp = n$.

Beweis Wir schreiben A in der Form $A = x + V$ mit einem d -dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie $x \notin V$. Dann hat $W := \text{lin}(V, x)$ Dimension $d + 1$ und daher W^\perp Dimension $n - 1 - d$. Weiter wähle man ein $u \in V^\perp \setminus W^\perp$. Dann gilt offenbar $\langle u, x \rangle \neq 0$, und nach Skalierung kann man sogar $\langle u, x \rangle = e$ annehmen. Wie man schnell nachrechnet, gilt dann $A^* = u + W^\perp$, was die Behauptung zeigt. \square

Damit können wir nun die Dimension eines Polytops (und damit auch seiner Seiten) definieren.

Definition 6.2.9 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop.

1. Die Dimension $\dim(P) := \dim(\text{aff}(P))$ von P ist die Dimension des kleinsten affinen Teilraums, der P enthält.
2. Das Polytop P heißt ein Simplex, wenn es die konvexe Hülle von genau $\dim(P) + 1$ vielen Punkten ist, d.h., es gibt Punkte $A_1, \dots, A_{\dim(P)+1}$ mit $P = \text{conv}(A_1, \dots, A_{\dim(P)+1})$.
Es heißt simplizial, wenn seine eigentlichen Seiten Simplizes sind.

Wir illustrieren diese Begriffe zunächst an einigen Beispielen.

Beispiel 6.2.10 1. Das Standardsimplex $T_n := \text{conv}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (vgl. Beispiel 6.2.2) ist ein Simplex.

2. Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $\dim(P) = n$, so heißt

$$\Pi_P := \text{conv}(P \times \{0\}, e_{n+1}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

Pyramide über P . Ist P ein Simplex, so ist auch Π_P ein Simplex.

3. Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ volldimensional und enthält P den Nullpunkt als inneren Punkt, so heißt

$$\Delta_P := \text{conv}(P \times \{0\}, \pm e_{n+1}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$$

Doppelpyramide über P . Ist P simplizial, so ist auch Δ_P simplizial.

4. Der Würfel $C := \text{conv}(\{(a_1, a_2, a_3); a_i = \pm 1, 1 \leq i \leq 3\})$ ist nicht simplizial. Allgemeiner bezeichnet man zu einem Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Menge

$$\overline{PP_v} := \text{conv}(P, P + v)$$

als ein Prisma über P , falls $\dim(\overline{PP_v}) = n$ gilt.

Definition 6.2.11 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein volldimensionales Polytop. Die Seiten von P der Dimension 0 heißen Ecken, die eindimensionalen Seiten Kanten und die $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten Facetten. Die Anzahl der j -dimensionalen Seiten wird mit $f_j(P)$ bezeichnet. Der Vektor $f_P := (f_0(P), \dots, f_{n-1}(P))$ wird auch als f -Vektor des Polytops P bezeichnet.

Aufgabe 6.2.12 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein volldimensionales Polytop (d.h. $\dim(P) = n$) sowie $F = (F_0, \dots, F_k)$ eine vollständige Fahne auf P (d.h., die F_i sind nichtleere Seiten von P mit $F_i \subsetneq F_{i+1}$ und es gibt keine Seite F' mit $F_i \subsetneq F' \subsetneq F_{i+1}$). Man zeige, dass dann $k = n$ und $\dim(F_i) = i$ gelten.

Die Ecken spielen eine wichtige Rolle: Anschaulich naheliegend ist es, dass man genau diese braucht, um das Polytop zu definieren. Dies ist genau die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 6.2.13 (Satz von Krein-Milman) Ist P ein Polytop, so gilt

$$P = \text{conv}(v; v \text{ Ecke von } P).$$

Beweis Die Inklusion „ \supset “ ist offensichtlich richtig. Umgekehrt genügt es für eine Darstellung $P = \text{conv}(w_1, \dots, w_n)$ und $w_1 \notin \text{conv}(w_2, \dots, w_n) =: P'$ zu zeigen, dass w_1 eine Ecke von P ist (anschaulich heißt das, dass man Ecken nicht weglassen darf). Nach Lemma 6.1.9 gibt es unter den gegebenen Voraussetzungen sowohl ein $u \in \mathbb{R}^n$ und ein $e \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle u, w_1 \rangle < e < \langle u, P' \rangle.$$

Wir setzen $f := \langle u, w_1 \rangle$. Dann gilt offenbar $P \subset H_{u \geq f}$ und $w_1 \in H_{u=f}$. Für $x \in P$ gibt es nach Lemma 6.2.3 eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^n t_i w_i$ mit $t_i \geq 0$. Dann gilt offenbar

$$f = \langle u, x \rangle \iff t_j = 0 \text{ für } j > 1,$$

also $H_{u=f} \cap P = w_1$. □

Eine aktuelle Forschungsfrage ist, welche Vektoren als f -Vektoren eines Polytops auftreten können. Für simpliziale Polytope wurde das von Stanley erst 1980 unter Einsatz von fortgeschrittenen Methoden der algebraischen Geometrie vollständig gelöst (vgl. Stanley 1980, zum Zusammenhang von Polytopen mit der algebraischen Geometrie vgl. Kaup 2002, in dem auch auf das Ergebnis von Stanley eingegangen wird). Im Fall nichtsimplicialer Polytope weiß man relativ wenig. Ein grundlegendes

Ergebnis zum f -Vektor ist die Eulersche Polyederformel 6.3.9, der wir uns später noch zuwenden werden.

Aufgabe 6.2.14 Es sei P ein $(n - 1)$ -dimensionales Polytop im \mathbb{R}^n . Man zeige:

1. Für eine Pyramide Π_P über P gilt

$$f_j(\Pi_P) = f_j(P) + f_{j-1}(P), \quad 1 \leq j \leq n - 1.$$

2. Für ein Prisma $\overline{PP_v}$ über P hat man

$$f_0(\overline{PP_v}) = 2f_0(P) \text{ und } f_j(\overline{PP_v}) = 2f_j(P) + f_{j-1}(P), \quad 1 \leq j \leq n - 1.$$

Wir diskutieren noch ein weiteres wichtiges Beispiel, nämlich die sogenannten zyklischen Polytope. Diese haben die wichtige Eigenschaft, dass kein Polytop gleicher Dimension und gleicher Eckenanzahl mehr Seiten als das entsprechende zyklische Polytop hat (das sogenannte Upper-Bound-Theorem von Mc Mullen, vgl. Ziegler 1998, Theorem 8.23 oder Brönsted 1983, Theorem 18.1).

Definition 6.2.15 Die Abbildung

$$\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n),$$

heißt Momentabbildung. Für $k > n$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden heißt das Polytop

$$C(k, n) := \text{conv}(\mu(t_1), \dots, \mu(t_k))$$

ein zyklisches Polytop.

Man kann zeigen, dass je zwei zyklische Polytope mit gleichem k und gleichem n in ihrer kombinatorischen Struktur übereinstimmen. Daher kann man auch von dem zyklischen Polytop $C(k, n)$ sprechen. Wir zeigen, dass das Polytop $C(k, n)$ genau k Ecken hat und simplizial ist. Das erwähnte Upper-Bound-Theorem von Mc Mullen besagt dann, dass jedes n -dimensionale Polytop mit k Ecken für jedes d mit $0 \leq d \leq n$ höchstens so viele d -dimensionale Seiten wie $C(k, n)$ hat. Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf Ziegler (1998, Abschn. 8.4).

Satz 6.2.16 Es sei $n \geq 2$ und $C(k, n) = \text{conv}(\mu(t_1), \dots, \mu(t_k))$ ein zyklisches Polytop. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $C(k, n)$ ist simplizial.
2. Jedes $\mu(t_i)$, $1 \leq i \leq k$, ist eine Ecke von $C(k, n)$.

Beweis

1. Es genügt zu zeigen, dass je $n + 1$ der Punkte $\mu(t_i)$, $1 \leq i \leq k$, affin linear unabhängig sind. Dazu verwenden wir die Vandermonde-Determinante und zeigen dies ohne Einschränkung für die ersten $n + 1$ Punkte:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i) \neq 0.$$

2. Ohne Einschränkung sei $i = 1$ und das gewählte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , ferner setzen wir $v := \mu(t_1)$, $u := (-2t_1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ und $e := -t_1^2$. Dann gelten

$$\langle u, \mu(t_1) \rangle = -t_1^2 = e \text{ und } \langle u, \mu(t_j) \rangle = -2t_1 t_j + t_j^2 > -t_1^2 = e.$$

Daher ist $H_{u=e}$ eine Stützhyperebene für v .

□

Im Folgenden geben wir noch eine alternative Beschreibung von Polytopen, die eine Brücke von der Konvexgeometrie in die Theorie der linearen Ungleichungen und umgekehrt schlägt und damit in vielen Anwendungen, etwa der linearen Optimierung oder der Spieltheorie, eine eminent wichtige Rolle spielt.

Definition 6.2.17 Ein endlicher Schnitt von Halbräumen heißt Polyeder, d. h., eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Polyeder, wenn $u_i \in \mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, existieren mit

$$P = \bigcap_{i=1}^m H_{u_i \geq e_i}.$$

Offensichtlich entspricht ein Halbraum $H_{u \geq e}$ genau der Lösungsmenge der linearen Ungleichung $\langle u, x \rangle \geq e$. Damit kann man einen Polyeder gerade als Lösungsmenge eines endlichen Systems von linearen Ungleichungen interpretieren. Solche Ungleichungen zu lösen bzw. Punkte in der Lösungsmenge derartiger Systeme zu finden, die eine weitere lineare Gleichung maximieren, sind Ziele der linearen Optimierung, die gerade in wirtschaftlichen Fragestellungen eine große Rolle spielt. Der Hauptsatz der Polytoptheorie besagt eine enge Beziehung zwischen Polyedern und Polytopen. Damit wird eine Brücke von der Optimierungstheorie in die Konvexgeometrie geschlagen, was bedeutet, dass sich Optimierungsprobleme, die auf linearen Ungleichungen basieren, oft sehr gut mit konvexgeometrischen Methoden bearbeiten lassen.

Unser Ziel wird sein, diesen Hauptsatz der Polytoptheorie zu beweisen, dessen genaue Aussage ist, dass Polytope gerade die beschränkten Polyeder sind. Der entscheidende Schritt im Beweis dieser Aussage besteht dabei darin, in einem Polyeder die das Polytop erzeugenden Punkte zu finden. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des Eckenbegriffs auf beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Definition 6.2.18 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein $x \in M$ heißt Endpunkt von M , falls für alle abgeschlossenen Strecken $[A, B] \subset M$ mit $x \in [A, B]$ entweder $x = A$ oder $x = B$ gilt.

Ist M ein Polytop, so stimmen die Endpunkte von M gerade mit den Ecken von M überein:

Bemerkung 6.2.19 Ist P ein Polytop, so ist $x \in P$ genau dann ein Endpunkt von P , falls x eine Ecke von P ist.

Beweis Die Richtung „ \Leftarrow “ ist klar. Umgekehrt sei $x \in P$ Endpunkt von P . Dann zeigen wir, dass $P \setminus \{x\}$ konvex ist, woraus die Behauptung aus dem Satz von Krein-Milman folgt. Wäre $P \setminus \{x\}$ nicht konvex, dann gäbe es $A, B \in P$ mit $x \in [A, B] \subset P$ und $x \neq A$ sowie $x \neq B$ im Widerspruch dazu, dass x Endpunkt von P ist. \square

Unbeschränkte oder offene Mengen brauchen offenbar keine Endpunkte zu besitzen (vgl. Aufgabe 6.2.21). Im Falle kompakter Mengen existieren immer Endpunkte:

Lemma 6.2.20 Sind $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $x \in K$ mit $\|x\|$ maximal, dann ist x Endpunkt von K .

Beweis Es sei $x \in [A, B] \subset K$, etwa $x = tA + (1-t)B$, $0 \leq t \leq 1$, und $A \neq B$. Dann gilt

$$\|x\|^2 = t^2\|A\|^2 + 2t(1-t)\langle A, B \rangle + (1-t)^2\|B\|^2. \quad (6.1)$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz besagt $\langle A, B \rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|$, wobei hier Gleichheit genau dann gilt, wenn $A = rB$ mit $r > 0$ ist. Man erhält somit aus (6.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq t^2\|A\|^2 + 2t(1-t)\|A\| \cdot \|B\| + (1-t)^2\|B\|^2 \\ &\leq t^2\|x\|^2 + 2t(1-t)\|x\| \cdot \|x\| + (1-t)^2\|x\|^2 = \|x\|^2, \end{aligned}$$

d. h., alle Ungleichheitszeichen sind in Wahrheit Gleichheitszeichen. Dies zeigt entweder $t \in \{0, 1\}$, oder es gilt sowohl $\|x\| = \|A\| = \|B\|$ als auch $\langle A, B \rangle = \|A\| \cdot \|B\|$, also $A = rB$, $r > 0$. Die zweite Situation kann aber nur im Fall $A = B$ erfüllt sein, was wir ausgeschlossen hatten. Daher erhält man $t = 0$ oder $t = 1$, d. h. $x = A$ oder $x = B$, und x ist Endpunkt von K . \square

Aufgabe 6.2.21 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Man zeige, dass U keine Endpunkte besitzt.

Mit den bisherigen Ergebnissen können wir nun zeigen, dass Polytope genau die beschränkten Polyeder sind. Wir zeigen zunächst die eine Richtung:

Satz 6.2.22 Jeder beschränkte Polyeder ist ein Polytop.

Beweis Es sei $P = \bigcap_{i=1}^m H_{u_i \geq e_i} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann zeigen wir die Behauptung mittels Induktion nach n .

Im Fall $n = 1$ ist P ein Punkt oder eine Strecke und die Behauptung trifft zu.

Im Fall $n > 1$ sei $x \in P$ ein Endpunkt von P , welchen es nach Lemma 6.2.20 gibt. Offenbar gilt $x \in H_{u_i=e_i} =: H_i$ für mindestens ein i , und x ist auch Endpunkt von

$$P' := P \cap H_i \subset H_i \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung P' ein Polytop und hat daher nur endlich viele Ecken, also nach Bemerkung 6.2.19 endlich viele Endpunkte. Da es nur endlich viele H_i gibt, besitzt somit auch P nur endlich viele Endpunkte x_1, \dots, x_k . Wir setzen $S := \text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ und behaupten $S = P$. Andernfalls gibt es ein $p \in P \setminus S$. Dazu gibt es wegen Lemma 6.1.9 eine trennende Hyperebene $H_{u=e}$ mit $u(p) < e < u(S)$. Es seien $m_u := \min(u(P))$ sowie

$$Y := \{y \in P; u(y) = m_u\}.$$

Dann hat man $Y \cap S = \emptyset$. Nach Konstruktion ist Y selbst ein beschränktes Polyeder und besitzt daher einen Endpunkt q , welcher offenbar auch Endpunkt von P ist. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass S alle Endpunkte von P enthält. \square

Für die Umkehrung benötigen wir ein weiteres Lemma:

Lemma 6.2.23 Für ein volldimensionales Polytop $P \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\partial P = \bigcup_{F \leq P, F \neq P} F.$$

Beweis Die Inklusion \supset ist klar, da es sich um echte Seiten handelt. Für die umgekehrte Inklusion können wir ohne Einschränkung $0 \in P^\circ$ annehmen. Es sei nun $x \in \partial P$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \mathbb{R}^d \setminus P$ mit $\|x - y_n\| < \frac{1}{n}$ (bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm). Wegen Lemma 6.1.9 und Aufgabe 6.1.10 gibt es zu diesem y_n ein u_n mit $\langle u_n, P \rangle < 1$ und $\langle u_n, y_n \rangle > 1$. Da die u_n auf P beschränkt sind und null innerer Punkt von P ist, kann man $u_n \rightarrow u$ für ein $u \in \mathbb{R}^n$ annehmen. Für dieses u gilt dann $\langle u, P \rangle \leq 1$ und $\langle u, x \rangle = 1$. Damit gilt $x \in F := P \cap H_{u=1}$. \square

Damit erhalten wir die angekündigte Charakterisierung von Polytopen als kompakten Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

Satz 6.2.24 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein volldimensionales Polytop mit Seiten F_1, \dots, F_k . Weiter seien $u_i \in \mathbb{R}^n$ und $e_i \in \mathbb{R}$ mit $P \subset H_{u_i \geq e_i}$ und $F_i = P \cap H_{u_i=e_i}$, $1 \leq i \leq k$. Dann gilt

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_{u_i \geq e_i}.$$

Beweis Die Inklusion „ \subset “ ist offensichtlich richtig. Es bleibt also, „ \supset “ zu zeigen. Sonst gibt es ein $x \in \bigcap H_{u_i \geq e_i} \setminus P$. Zu $y \in P^\circ$ schneidet dann die Strecke \overline{xy} den Rand ∂P , also nach Lemma 6.2.23 eine Seite $F_i \leq P$ in z_i . Dann gilt offenbar $u_i(x) \geq e_i$, $u_i(z_i) = e_i$ und $u_i(y) > e_i$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass x und y auf verschiedenen Seiten von z_i liegen. \square

Die Darstellungen eines Polytops als konvexe Hülle endlich vieler Punkte bzw. als Schnitt endlich vieler Halbräume sind in gewissem Sinn dual zueinander und hängen daher eng mit dem Konzept des Dualisierens von Polytopen zusammen:

Definition 6.2.25 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $\dim(P) = n$ und $0 \in \overset{\circ}{P}$. Dann heißt P dualisierbar und

$$P^* := \{u \in \mathbb{R}^n; \langle u, P \rangle \geq -1\}$$

das zu P duale Polytop.

Aufgabe 6.2.26 Es sei P ein Polytop mit $0 \notin \overset{\circ}{P}$. Man untersuche die (wie in Definition 6.2.25 konstruierte) Menge P^* in dieser Situation.

Satz 6.2.27 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein dualisierbares Polytop. Dann gelten folgende Aussagen:

1. P^* ist ein dualisierbares Polytop.
2. $(P^*)^* = P$.
3. Ist $F \leq P$ eine Seite von P , so ist

$$F^* := \{u \in P^*; \langle u, F \rangle = -1\}$$

eine Seite von P^* mit $\dim(F) + \dim(F^*) = n - 1$.

4. $f_j(P^*) = f_{n-j-1}(P)$, $-1 \leq j \leq n$.

Beweis 1. Wir zeigen zunächst, dass P^* beschränkt ist: Da null innerer Punkt von P ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subset P$. Es sei $R := \frac{2}{\varepsilon}$. Für $u \in P^*$ gibt es ein $\lambda < 0$, sodass für $v := \lambda u$ gilt $\|v\| = \frac{\varepsilon}{2}$, also speziell $v \in P$. Damit gilt

$$-1 \leq \langle u, v \rangle = \lambda \|u\|^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \|u\| \implies \|u\| \leq \frac{2}{\varepsilon} = R,$$

somit ist P^* beschränkt.

Es seien v_1, \dots, v_m die Ecken von P . Dann behaupten wir

$$P^* = \bigcap_{i=1}^m H_{v_i \geq -1}.$$

Die Inklusion „ \subset “ ist offenbar richtig. Umgekehrt gelte für ein $u \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung $\langle u, v_i \rangle \geq -1$ für alle $1 \leq i \leq m$. Jedes $v \in P$ ist nach Lemma 6.2.3 eine Konvexkombination der v_i , was sofort $\langle u, v \rangle \geq -1$ zeigt, also $u \in P^*$.

Insgesamt ist P^* also ein beschränkter Polyeder und somit nach Satz 6.2.22 ein Polytop.

Es bleibt zu zeigen, dass null innerer Punkt von P^* ist. Dazu wählen wir ein $r > 0$ mit $\|v\| \leq r$ für alle $v \in P$, was es aufgrund der Beschränktheit von P gibt. Ist nun $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| \leq \frac{1}{r}$, so gilt für jedes $v \in P$ aufgrund der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| \leq 1, \text{ d.h. } \langle u, v \rangle \geq -1.$$

Daher gilt $K(0, \frac{1}{r}) \subset P^*$, was bedeutet, dass null innerer Punkt von P^* ist.

2. Für $v \in P$ gilt $\langle v, u \rangle \geq -1$ für jedes $u \in P^*$, also $v \in (P^*)^*$, was $P \subset (P^*)^*$, zeigt. Zu $v \notin P$ gibt es nach Lemma 6.1.9 und Aufgabe 6.1.10 ein u mit $\langle u, v \rangle < -1$ und $\langle u, P \rangle > -1$ (beachte $0 \in P^\circ$), also insbesondere $u \in P^*$ und $v \notin (P^*)^*$, was die umgekehrte Inklusion zeigt.
3. Es sei v ein Element des relativen Inneren von F . Wegen 2. gilt dann $\langle v, P^* \rangle \geq -1$. Wir setzen nun $F' := H_{v=-1} \cap P^*$ und behaupten $F' = F^*$: Dazu sei $u \in F'$. Dann gilt $\langle u, v \rangle = -1$. Weil v im relativen Inneren von F liegt, gilt dann auch $\langle u, F \rangle = -1$, also folgt $u \in F^*$. Die umgekehrte Inklusion ist klar. Daher ist F^* Seite von P^* . Die Aussage über die Dimension folgt aus Lemma 6.2.8
4. Das folgt direkt aus dem bereits Bewiesenen. □

Aufgabe 6.2.28 1. Man zeige, dass das duale Polytop eines n -Ecks wieder ein n -Eck ist.

2. Man bestimme die dualen Polytope zu den Polytopen aus Aufgabe 6.2.10.
3. Es sei P ein dualisierbares Polytop mit Facetten F_1, \dots, F_s , die durch die Hyperebenen $H_{u_i=e_i}$, $1 \leq i \leq s$, mit $P \subset H_{u_i \geq e_i}$ definiert seien. Dann gilt

$$P^* = \text{conv}(u'_1, \dots, u'_s) \quad \text{mit } u'_i := \frac{u_i}{|e_i|}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

6.3 Graphen von Polytopen und Eulersche Polyederformel

In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Einblick in die Graphentheorie und betrachten speziell Graphen von Polytopen. Als Anwendung geben wir mithilfe der Graphentheorie einen einfachen und leicht nachvollziehbaren Beweis der berühmten Eulerschen Polyederformel für dreidimensionale Polytope, die eine fundamentale Beziehung über die Anzahl der verschiedendimensionalen Seiten eines solchen Polytops liefert. Abschließend beweisen wir eine Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel für beliebige Dimensionen.

Definition 6.3.1 Es sei V eine endliche Menge (die „Knoten“), sowie \sim die durch $(x, y) \sim (y, x)$ definierte Äquivalenzrelation auf V^2 . Dann versteht man unter einem

gerichteten Graphen ein Paar $G = (V, E)$, wobei E eine Familie von Elementen aus V^2 (die „Kanten“) ist. Ein ungerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, bei dem die Elemente von E aus V^2 / \sim gewählt sind.

Einen Graphen $G = (V, E)$ kann man grafisch dadurch darstellen, dass man für jedes $v \in V$ einen Punkt in der Ebene markiert und zwei zu $v_1, v_2 \in V$ gehörende Punkte genau dann durch eine Linie verbindet, wenn $(v_1, v_2) \in E$ gilt. Umgekehrt wird dabei nicht gefordert, dass Kreuzungspunkte solcher Linien zwangsläufig einem Knoten des Graphen entsprechen müssen (vgl. dazu Abb. 6.2 und Lemma 6.3.5).

Im Falle eines ungerichteten Graphen werden die Kanten (v_1, v_2) und (v_2, v_1) nicht unterschieden, hat man einen gerichteten Graphen, so zeichnet man bei der Kante (v_1, v_2) eine Pfeilspitze zum Knoten v_2 , um so die Richtung zu symbolisieren. Um Schreibarbeit zu sparen, schreibt man anstelle V^2 / \sim einfach auch nur kurz V^2 und identifiziert das Tupel (x, y) mit seiner Klasse in V^2 / \sim . Wir werden uns in erster Linie mit ungerichteten Graphen auseinandersetzen, nicht zuletzt deshalb, weil jedes Polytop in naheliegender Weise einen ungerichteten Graphen definiert:

Definition 6.3.2 Es sei P ein Polytop. Setzt man $V := \{F \leq P; \dim(F) = 0\}$ und $E := \{(F_1, F_2) \in V^2 / \sim; \exists F \leq P \dim(F) = 1, F_1, F_2 \in F\}$, so heißt

$$G(P) := (V, E)$$

der Graph des Polytops P .

Wie oben erwähnt, unterscheiden wir dabei die Kanten (v_1, v_2) und (v_2, v_1) in V^2 nicht.

Aufgabe 6.3.3 Man gebe die Graphen des Würfels sowie der k -fachen Doppelpyramiden über $I := [-1, 1]$ an.

Im Folgenden stellen wir einige Eigenschaften des Graphen eines Polytops zusammen, deren Nachweis wir dem Leser zur Übung überlassen:

Aufgabe 6.3.4 Es sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein d -dimensionales Polytop mit Graph $G(P) = (V, E)$. Man zeige:

1. Der Graph $G(P)$ ist einfach, d. h., es gibt keine Schleifen oder mehrfachen Kanten, d. h. Kanten (x, x) treten gar nicht auf, und jede Kante (x, y) in E kommt nur einmal vor.
2. Der Graph $G(P)$ ist zusammenhängend, d. h., zu je zwei Knoten gibt es einen Kantenzug, der beide verbindet.
3. Jeder Knoten V von $G(P)$ hat mindestens Grad d , d. h., es gibt mindestens d Kanten, die V enthalten.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Polytopgraphen ist, dass sie sich immer überschneidungsfrei zeichnen lassen:

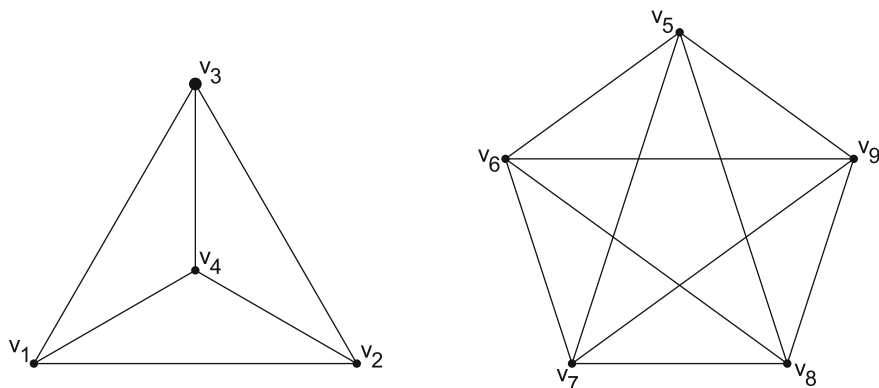


Abb. 6.2 Graphen K_4 und K_5

Lemma 6.3.5 Der Graph eines dreidimensionalen Polytops ist planar, d. h., der Graph lässt sich in einer Ebene ohne Überschneidungen darstellen.

Beweis Ohne Einschränkung sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein Polytop mit null als innerem Punkt. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $\|x\| < r$ für alle $x \in P$. Durch Streckung kann man annehmen, dass $r = 1$ gilt. Projiziert man P nun vom Ursprung aus auf S^2 und wendet anschließend eine stereografische Projektion dieses Bildes auf die Ebene an, so erhält man (ggf. nach einer geeigneten Drehung von S^2) offenbar einen planaren Graphen. \square

Beispiel 6.3.6 Unter einem vollständigen Graphen versteht man einen Graphen, bei dem je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind. Der vollständige Graph K_4 über vier Knoten ist planar, dagegen lässt sich der vollständige Graph K_5 über fünf Knoten nicht planar realisieren (warum? – vgl. Abb. 6.2).

Mithilfe eines weiteren Satzes lassen sich die Graphen von (dreidimensionalen) Polytopen vollständig charakterisieren.

Satz 6.3.7 (Satz von Balinski) Es sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein d -dimensionales Polytop. Der zugehörige Graph $G(P)$ ist dann d -zusammenhängend, d. h., er bleibt auch nach Entfernen von $d - 1$ Knoten (und allen an diesen Knoten anliegenden Kanten) zusammenhängend.

Beweis Es sei V die Knotenmenge von $G(P)$, d. h. $P = \text{conv}(V)$; dabei identifizieren wir die Ecken von P mit den Knoten von $G(P)$. Aufgrund der Dimensionsbedingung hat V mindestens $d + 1$ Elemente. Mit $S := \{E_1, \dots, E_{d-1}\}$ bezeichnen wir die $d - 1$ Knoten, die entfernt werden. Der resultierende Graph sei mit $G' := G(P) - S$ sowie seine Knotenmenge mit $V' := V \setminus S$ bezeichnet. Es sei

$$w := \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} E_i$$

der Eckenschwerpunkt von S . Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Fall: Es gibt eine echte Seite $F \prec P$ mit $w \in F$; dann liegen auch alle $E_i \in F$, $1 \leq i \leq d-1$. Man wähle nun eine Hyperebene $H := H_{u=e}$ mit $F = P \cap H$ und $P \subset H_{u \geq e}$. Weil P kompakt ist, nimmt u auf P sein Maximum, etwa m , an und durch $F' := H_{u=m} \cap P$ wird eine weitere Seite von P definiert. Alle Knoten in V' liegen dann entweder in F' oder lassen sich mit Ecken mit einem größeren u -Wert verbinden. Damit lässt sich jeder Knoten von V' mit einer Ecke von F' verbinden. Da F' selbst ein Polytop ist, ist der Graph von F' und somit auch G' zusammenhängend.

Im 2. Fall liegt w im Inneren von P . In diesem Fall überlassen wir den Beweis dem Leser zur Übung. \square

Beispiel 6.3.8 Der kleinste drei-zusammenhängende planare Graph ist der Graph K_4 mit vier Knoten und sechs Kanten (vgl. Abb. 6.2 links).

Ein bekanntes Ergebnis der Polytoptheorie besagt, dass umgekehrt jeder einfache, planare und drei-zusammenhängende Graph der Graph eines dreidimensionalen Polytops ist (Satz von Steinitz, vgl. Ziegler 1998, Theorem 4.1 – welches Polytop führt auf den K_4 ?). Wir verzichten auf diesen Nachweis und wenden uns nun der berühmten Eulerschen Polyederformel zu:

Satz 6.3.9 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polytop mit f -Vektor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i = 1 - (-1)^n.$$

Man überzeugt sich schnell, dass die Eulersche Polyederformel für ein- oder zweidimensionale Polyeder zutrifft:

Bemerkung 6.3.10 Gilt $n \leq 2$, so ist Satz 6.3.9 offensichtlich.

Einen Beweis für allgemeine Dimensionen stellen wir zunächst zurück und zeigen die Aussage für den speziellen (historischen) Fall $n = 3$ mit einem auch für den Schulunterricht geeigneten Beweis:

Beweis (von Satz 6.3.9 für dreidimensionale Polytope) Es sei $G := G(P)$ der Graph von P . Dann entsprechen die Knoten von G den Ecken von P , die Kanten von G den Kanten von P und die Komponenten von G den Facetten von P , wenn man die äußere Komponente mitzählt. Wir zeigen die behauptete Gleichung etwas allgemeiner für einen planaren, zusammenhängenden Graphen und führen dabei Induktion nach der Anzahl f_1 der Kanten. Im Fall $f_1 = 0$ besteht der Graph aus einem Knoten und null Kanten und einer (der äußeren) Komponenten und damit gilt

$$f_0 - f_1 + f_2 = 1 - 0 + 1 = 2,$$

wie behauptet.

Für den Schritt von f_1 auf $f_1 + 1$, d.h. dem Hinzufügen einer Kante zu einem Graphen, gibt es die folgenden Möglichkeiten:

a) Es wird eine Kante und ein Knoten hinzugefügt; dabei bleibt die Eulerformel gültig.

b) Zwei bestehende Knoten werden durch eine neue Kante verbunden. Dann erhöhen sich Gebiete- und Kantenanzahl jeweils um eins, und die Eulerformel bleibt gültig.

Da sich jeder Graph in dieser Form konstruieren lässt (Beweis!), erhält man die Behauptung. \square

Mithilfe der Eulerschen Polyederformel lassen sich oftmals sehr einfach fehlende Seitenzahlen eines Polytops bestimmen:

- Aufgabe 6.3.11** 1. Man verifiziere die Eulersche Polyederformel für eine Pyramide über einem n -Eck.
 2. Ein (klassischer) Fußball ist aus Sechs- und Fünfecken so aufgebaut, dass in jeder Ecke ein Sechseck und zwei Fünfecke aneinanderstoßen. Man bestimme den f -Vektor eines solchen Fußballs.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Eulerschen Polyederformel für beliebige Dimensionen zu. Dabei folgen wir im Wesentlichen dem Beweis von B. Grünbaum (vgl. Grünbaum und Kaibel 2003). Wir zeigen im ersten Schritt, dass die in Satz 6.3.9 behauptete Gleichung für eine spezielle Klasse von Polytopen, nämlich für Prismoide, gültig ist. Wir vereinbaren zunächst noch eine spezielle Sprechweise: Ein Polytop der Dimension d nennen wir ein d -Polytop.

Definition 6.3.12 Ein d -Polytop P heißt Prismoid, falls es höchstens $(d - 1)$ -dimensionale Polytope P_1, P_2 gibt, die in Hyperebenen H_1 bzw. H_2 so liegen, dass $(P_1 \cup P_2) \cap H_1 \cap H_2 = \emptyset$ gilt, mit der Eigenschaft, dass $P = \text{conv}(P_1, P_2)$ gilt.

Lemma 6.3.13 Es sei P ein d -Prismoid. Dann erfüllt P die Eulersche Polyederformel, falls jedes k -Polytop mit $k < d$ die Eulersche Polyederformel erfüllt.

Beweis Wir stellen P gemäß der Definition 6.3.12 dar und wählen (in obiger Notation) eine Hyperebene H_0 zwischen H_1 und H_2 , die einen inneren Punkt von P enthält. Es sei $P_0 := H_0 \cap P$. Dann gelten offenbar folgende Aussagen:

a) $f_0(P) = f_0(P_1) + f_0(P_2)$,

b) jede k -Seite F von P , $1 \leq k \leq d - 1$, ist entweder eine k -Seite von P_1 oder P_2 oder definiert eineindeutig eine $(k - 1)$ -dimensionale Seite von P_0 . Man erhält

$$f_k(P) = f_k(P_1) + f_k(P_2) + f_{k-1}(P_0)$$

mit $f_k(P_i) := 0$ für $k > \dim(P_i)$, $i = 1, 2$.

Da P_0 , P_1 und P_2 höchstens $(d-1)$ -dimensional sind, können wir davon ausgehen, dass diese die Eulersche Polyederformel erfüllen. Es seien $d_1 := \dim(P_1)$ und $d_2 := \dim(P_2)$. Weiter gilt offenbar $\dim(P_0) = d - 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) &= f_0(P_1) + f_0(P_2) + \sum_{i=1}^{d_1-1} (-1)^i f_i(P_1) + \sum_{i=1}^{d_2-1} (-1)^i f_i(P_2) \\ &\quad + (-1)^{d_1} + (-1)^{d_2} - \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^i f_i(P_0) \\ &= 1 - (-1)^{d_1} + 1 - (-1)^{d_2} + (-1)^{d_1} + (-1)^{d_2} - 1 + (-1)^{d-1} \\ &= 1 - (-1)^d. \end{aligned}$$

□

Lemma 6.3.14 Es sei P ein d -Polytop und $H = H_{u=e}$ eine Hyperebene, die P im Inneren trifft und genau eine Ecke v von P enthält. Weiter seien $P_0 := P \cap H$, $P_+ := P \cap H_{u \geq e}$ und $P_- := P \cap H_{u \leq e}$. Erfüllen dann P_0 , P_+ und P_- den Satz 6.3.9, so auch P .

Beweis Die Idee besteht darin, die Seitenzahlen von P durch die von P_0 , P_+ und P_- auszudrücken. Zunächst gilt offenbar

$$f_0(P) = f_0(P_+) + f_0(P_-) - 2f_0(P_0) + 1.$$

Weiter hat man

$$f_1(P) = f_1(P_+) + f_1(P_-) - 2f_1(P_0) - f_0(P_0) + 1,$$

da jede Kante von P , die P_0 nicht in v trifft, in eine Kante von P_1 und eine von P_2 geteilt wird.

Für $2 \leq i \leq d-2$ gilt analog

$$f_i(P) = f_i(P_+) + f_i(P_-) - 2f_i(P_0) - f_{i-1}(P_0).$$

Für Facetten von P gilt schließlich

$$f_{d-1}(P) = f_{d-1}(P_+) + f_{d-1}(P_-) - 2 - f_{d-2}(P_0).$$

Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(P) &= \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i (f_i(P_+) + f_i(P_-)) \\ &\quad - 2 \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^i f_i(P_0) + \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^i f_i(P_0) + 1 - 1 - 2(-1)^{d-1} \\ &= 2(1 - (-1)^d) - (1 - (-1)^{d-1}) + 2(-1)^d = 1 - (-1)^d. \end{aligned} \quad \square$$

Damit können wir nun die Eulersche Formel beweisen:

Beweis (von Satz 6.3.9) Wir führen Induktion nach $d := \dim(P)$ durch. Der Induktionsanfang ist durch Bemerkung 6.3.10 gegeben. Zu einem d -Polytop P wähle man eine Hyperebene H , sodass keine zu H parallele Hyperebene mehr als eine Ecke von P enthält. Dann gibt es zu H parallele Hyperebenen H_1, \dots, H_s , wobei die H_i so nummeriert seien, dass $H_{i+1,+} \subset H_{i,+} := H_{u_i \geq e_i}$ für jedes $1 \leq i \leq s-1$ gilt, und jedes H_i genau eine Ecke des Polytops enthält. Man setze

$$P_i := H_{u_i \geq e_i} \cap H_{u_{i+1} \leq e_{i+1}} \cap P, \quad 1 \leq i \leq s-1.$$

Offenbar ist dann jedes P_i ein d -Prismoid. Wegen Lemma 6.3.13 erfüllt somit unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung jedes P_i die Eulerformel. Weiter sei $P^{(j)} := \bigcup_{i=1}^j P_i$. Dann lässt sich auf $P^{(j+1)}$, H_{j+1} , $P^{(j)}$ und P_{j+1} das Lemma 6.3.14 anwenden und jedes $P^{(\ell)}$, $1 \leq \ell \leq s-1$, erfüllt die Eulersche Polyederformel. Wegen $P^{(s-1)} = P$ erhält man die Behauptung. \square

6.4 Reguläre Polytope

In diesem Abschnitt betrachten wir reguläre Polytope; anschaulich sind das Polytope, die aus allen Richtungen betrachtet gleich aussehen. Damit stellen sie eine Verallgemeinerung von den regelmäßigen Vielecken dar, die wir in Abschn. 5.3 betrachtet haben. Überraschenderweise gibt es in höheren Dimensionen nur relativ wenige dieser Polytope. Wir werden uns zunächst dem dreidimensionalen Fall zuwenden, ehe wir einen kurzen Ausblick in höhere Dimensionen geben.

Um reguläre Polytope zu definieren, muss man etwas vorsichtig vorgehen. Die erste intuitive Idee, dass die Facetten kongruente regelmäßige Vielecke sein müssen, ist zwar richtig, reicht aber nicht aus, um ein regelmäßiges Polytop zu erhalten, wie etwa der Vergleich von Rautenviereck und Quadrat oder eine geeignet konstruierte Doppelpyramide über einem gleichseitigen Dreieck zeigt. Für dreidimensionale Polytope kann man folgende Definition nehmen:

Definition 6.4.1 Ein platonischer Körper ist ein dreidimensionales Polytop, dessen Facetten kongruente regelmäßige n -Ecke sind und bei dem es ein k gibt, sodass jede Ecke in genau k Facetten enthalten ist.

Man beachte, dass diese Definition sich offenbar nicht ohne Weiteres auf andere Dimensionen übertragen lässt, wie bereits im zweidimensionalen Fall der oben erwähnte Vergleich einer Raute und eines Quadrats zeigt! Wir werden daher später eine allgemeinere Definition angeben, die alle Dimensionen umfassen wird. Für den dreidimensionalen Fall ist aber Definition 6.4.1 ausreichend.

Bereits in der Antike stellte man fest, dass es – bis auf Ähnlichkeit – genau fünf platonische Körper gibt. Das damals gefundene, auch gut für den Schulunterricht

geeignete Argument nutzt die Winkelsumme im regelmäßigen n -Eck: Offenbar ist klar, dass die Zahlen k und n in Definition 6.4.1 mindestens den Wert drei haben müssen. Im Fall von $n = 3$ hat das regelmäßige Dreieck den Innenwinkel $\frac{\pi}{3}$, d. h., für k kommen dann nur die Werte 3, 4 oder 5 infrage, da die Winkelsumme von k an einer Ecke aneinanderstoßender n -Ecke immer kleiner als 2π sein muss. Im Fall von $n = 4$ ist der Innenwinkel bereits $\frac{\pi}{2}$, für $n = 5$ ist er $\frac{3\pi}{10}$, daher kann k in diesen beiden Fällen nur 3 sein. Im Fall von $n \geq 6$ müsste $k < 3$ sein, was nicht sein kann.

Wir stellen noch einen weiteren Beweis dieser Tatsache vor, der im Wesentlichen auf der Eulerschen Polyederformel basiert.

Satz 6.4.2 Es gibt bis auf Ähnlichkeit maximal fünf platonische Körper, nämlich den Tetra-, Hexa-, Okta-, Dodeka- sowie den Ikosaeder.

Beweis Da jede Ecke in k Facetten liegt, aber jede Facette genau n Ecken hat, folgt $nf_2 = kf_0$. Ebenso sieht man $2f_1 = nf_2$. Mithilfe der Eulerschen Polyederformel erhält man daraus

$$f_2(2k - kn + 2n) = 4k > 0 \implies \frac{kn}{k+n} < 2.$$

Zusammen mit $n, k \geq 3$ sieht man schnell, dass die einzigen ganzzahligen Lösungstupel dieser Ungleichung gegeben sind durch $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$ und $(5, 3)$. \square

Den Nachweis der Existenz der angesprochenen platonischen Körper, nämlich des Tetraeders (dreiseitige Pyramide), Hexaeders (Würfel), Oktaeders (Doppelpyramide über einem Quadrat), Dodekaeders (Zwölfflächner aus regelmäßigen Fünfecken) und des Ikosaeders (Zwanzigflächners aus gleichseitigen Dreiecken) (vgl. Abb. 6.3) überlassen wir dem Leser:

- Aufgabe 6.4.3**
1. Man zeige, dass es (bis auf Ähnlichkeit) mindestens fünf platonische Körper gibt.
 2. Es sei P ein platonischer Körper mit Mittelpunkt $0 \in P^\circ$. Man zeige, dass das duale Polytop P^* ebenfalls ein platonischer Körper ist, und gebe die zu den angegebenen platonischen Körpern dualen Polytope an.
 3. Man bestimme die f -Vektoren der platonischen Körper.

Um regelmäßige Polytope in beliebigen Dimensionen definieren zu können, benötigen wir den Begriff der Eckenfigur einer Ecke eines Polytops:

Definition 6.4.4 Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein volldimensionales Polytop. Ist $E \subset P$ eine Ecke, die in d_E Kanten enthalten ist, so seien M_i , $1 \leq i \leq d_E$, die Mittelpunkte aller Kanten, die E enthalten. Das Polytop

$$V(E) := \text{conv}(M_i; 1 \leq i \leq d_E)$$

heißt Eckenfigur von P .

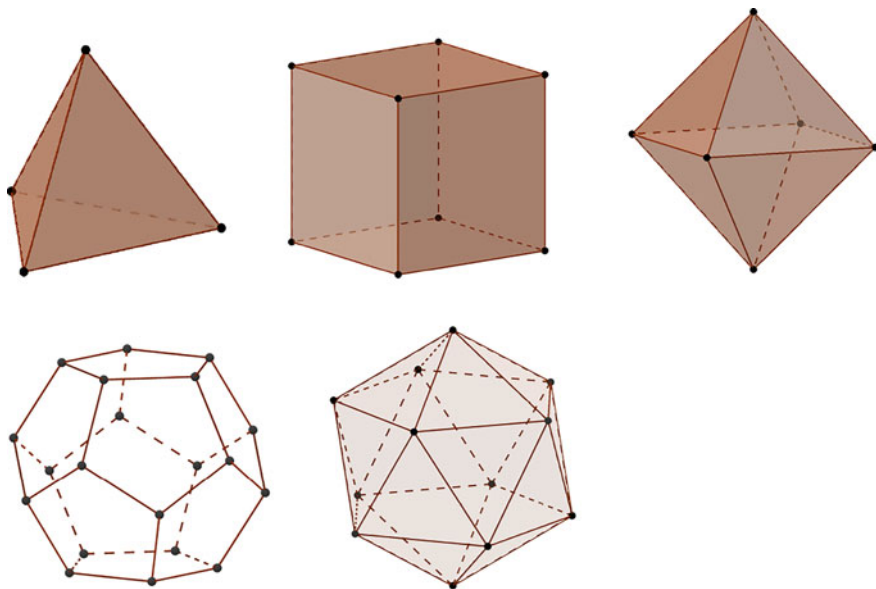


Abb. 6.3 Platonische Körper

Damit können wir rekursiv reguläre Polytope definieren. Dabei gehen wir davon aus, dass wir wissen, was Regularität im Zweidimensionalen bedeutet:

Definition 6.4.5 Ein volldimensionales Polytop im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, heißt regulär, wenn jede Facette und jede Eckenfigur von P reguläre $(n-1)$ -Polytope sind.

Aufgabe 6.4.6 Man zeige, dass die Definition 6.4.5 im dreidimensionalen Fall genau mit der Definition 6.4.1 der platonischen Körper übereinstimmt.

Beispiel 6.4.7 Für $n \in \mathbb{N}$ sei e_1, \dots, e_{n+1} eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^{n+1} sowie $u := \sum_{i=1}^{n+1} e_i$. Damit können wir den \mathbb{R}^n mit der Hyperebene $H := H_{u=1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Das Standardsimplex

$$T_n := \text{conv}(e_1, \dots, e_{n+1}) \subset H \cong \mathbb{R}^n$$

(vgl. Beispiel 6.2.2) ist dann ein n -dimensionales reguläres Simplex.

Beweis Wir zeigen dies mit Induktion nach n . Für $n = 2$ ist T_2 ein gleichseitiges Dreieck, also regulär. Es sei also $n > 2$. Dann liegt die Facette

$$F_j := \text{conv}(e_i; 1 \leq i \leq n+1, i \neq j)$$

in der Hyperebene $H_j := H_{e_j=0} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Setzt man nun $u_j := \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} e_i$, so sieht man, dass auch $F_j \subset H_{u_j=1}$ gilt. Somit lässt sich F_j mit T_{n-1} identifizieren und ist als solches nach Induktionsvoraussetzung regulär.

Um die Regularität aller Eckenfiguren zu zeigen, wählen wir ohne Einschränkung die Ecke $v := e_{n+1}$ aus und setzen $H' := H_{2e_{n+1}=1} \cong \mathbb{R}^n$. Dann ist die zugehörige Eckenfigur

$$V(v) = \frac{1}{2} \text{conv}(e_1 + v, \dots, e_n + v) \subset H \cap H' \subset H'$$

zunächst ein $(n-1)$ -dimensionales Polytop. Setzt man $e'_i := \frac{1}{2}(e_i + v)$, so lassen sich die e'_i als eine Orthonormalbasis bzgl. des durch die Identifikation von H' mit \mathbb{R}^n induzierten Skalarprodukts auffassen. Wie oben zeigt die Inklusion $V(v) \subset H$, dass sich $V(v)$ wieder als ein $(n-1)$ -dimensionales Standardsimplex T_{n-1} auffassen lässt, also regulär ist. \square

Damit sehen wir, dass in jeder Dimension reguläre Polytope existieren. Wir werden im Folgenden zwei weitere Beispiele regulärer Polytope vorstellen.

Definition 6.4.8 Es sei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , bzgl. derer wir im Folgenden die Elemente des \mathbb{R}^n als n -Tupel darstellen.

1. Das Polytop

$$X_n := \text{conv}(\pm e_i; 1 \leq i \leq n)$$

heißt n -dimensionales Kreuzpolytop.

2. Für $\underline{l} := (i_1, \dots, i_n) \in \underline{l} := \{0, 1\}^n$ sei $\varepsilon_{\underline{l}} := ((-1)^{i_1}, \dots, (-1)^{i_n})$ der zugehörige Vektor, dessen Komponenten nur aus 1 und -1 bestehen. Dann heißt das Polytop

$$C_n := \text{conv}(\varepsilon_{\underline{l}}; \underline{l} \in \underline{l})$$

n -dimensionaler Hyperwürfel.

Wir überlassen die Nachweise einiger elementarer Eigenschaften des Hyperwürfels und des Kreuzpolytops dem Leser:

Aufgabe 6.4.9 In der Notation von Definition 6.4.8 zeige man für den Hyperwürfel C_n und das Kreuzpolytop X_n :

1. Die Punkte $\varepsilon_{\underline{l}}, \underline{l} \in \underline{l}$, sind Ecken von C_n , die Punkte $\pm e_i$ sind Ecken von X_n .
2. Die Strecke $\overline{\varepsilon_{\underline{l}} \varepsilon_{\underline{j}}}$ ist genau dann eine Kante von C_n , wenn $\varepsilon_{\underline{l}} - \varepsilon_{\underline{j}} = \pm 2e_k$ für ein $1 \leq k \leq n$ gilt.
3. Das duale Polytop des Hyperwürfels C_n ist das Kreuzpolytop X_n .

Damit können wir zeigen, dass sowohl das Kreuzpolytop als auch der Hyperwürfel ebenfalls reguläre Polytope sind (eine nette Vorstellung des Hyperwürfels wird in dem bereits erwähnten Buch Burger 2006, Abschn. I.7, vgl. zu der dort diskutierten Problematik auch Abbot 2009, gegeben).

Satz 6.4.10 Für $n \geq 2$ sind der Hyperwürfel C_n und das Kreuzpolytop X_n reguläre Polytope.

Beweis Wir beweisen die Aussage für den Hyperwürfel und überlassen den Nachweis für das Kreuzpolytop dem Leser. Für $n = 2$ ist C_2 ein Quadrat und damit regulär. Im Fall $n > 2$ werden die Facetten von C_n durch die Hyperebenen $H_{i,+} := H_{e_i=1}$ sowie $H_{i,-} := H_{e_i=-1}$ definiert (vgl. die dritte Aussage der Aufgabe 6.4.9). Offenbar kann man dann die Facette $F_{i,\pm} := C_n \cap H_{i,\pm}$ als einen $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperwürfel C_{n-1} in $H_{i,\pm}$ auffassen, welcher nach Induktionsvoraussetzung regulär ist.

Die ersten beiden Aussagen der Aufgabe 6.4.9 implizieren zusammen mit Beispiel 6.4.7 sofort, dass die Eckenfigur jeder Ecke des Hyperwürfels ein reguläres Simplex ist, womit man insgesamt die Behauptung erhält. \square

Damit gibt es in jeder Dimension die regulären Polytope T_n , C_n sowie X_n . Man kann zeigen, dass für $n \geq 5$ dies (bis auf Ähnlichkeit) die einzigen regulären Polytope sind. Im Fall $n = 4$ gibt es außer T_4 , C_4 und X_4 noch drei weitere reguläre Polytope, deren Konstruktion allerdings etwas aufwendiger ist. Für weitere Informationen wie etwa die Konstruktion dieser Polytope sowie den Beweis, dass es keine weiteren regulären Polytope gibt, verweisen wir den Leser auf Coxeter (1963), speziell Kap. 7 und 8.

6.5 Ergänzungen zur Graphentheorie

Wir beenden das Kapitel über kombinatorische Geometrie mit einem Abschnitt über zwei berühmte Sätze der Graphentheorie, nämlich den Satz von Euler und den Vierfarbensatz. Für interessierte Leser, die tiefer in die Graphentheorie einsteigen wollen, verweisen wir auf Diestel (2006) und Lovász et al. (2003).

Der Satz von Euler geht auf das sogenannte Problem der „Brücken von Königsberg“ zurück. Euler soll damals gefragt worden sein, ob man alle Brücken von Königsberg auf einem Rundgang queren kann, ohne dabei eine Brücke mehrmals zu benutzen. Er löste dieses Problem, wobei er damit die moderne Graphentheorie begründete.

Definition 6.5.1 Es sei $G := (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Eulerweg des Graphen G ist eine Aufzählung der Kanten $E = (e_i)_{1 \leq i \leq m}$, wobei $e_i = (v_{i1}, v_{i2})$ mit $v_{i2} = v_{(i+1)1}$ für $1 \leq i \leq m - 1$ sowie $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ gelten.

Beispiel 6.5.2 1. Der durch ein n -Eck kanonisch definierte Graph besitzt immer einen Eulerweg.
2. Der Graph K_4 (vgl. Abb. 6.2) besitzt keinen Eulerweg.

Definition 6.5.3 Der Grad $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ des Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Kanten, die v enthalten:

$$\deg(v) = |\{e \in E; v \in e\}|.$$

Mit dem Begriff des Grad eines Knotens lässt sich bereits der Satz von Euler formulieren.

Satz 6.5.4 Ein Graph (V, E) besitzt genau dann einen Eulerweg, wenn es keinen oder genau zwei Knoten von ungeradem Grad gibt.

Beweis „ \Rightarrow “: Es sei $E = (e_i)$ ein Eulerweg des Graphen (V, E) . Für $1 \leq i \leq m-1$ gilt

$$e_i \ni v_{i2} = v_{i1} \in e_{i+1},$$

d. h., für alle Knoten $v \in V \setminus \{v_{11}, v_{m2}\}$ ist $\deg(v)$ gerade. Im Fall $v_{11} = v_{m2}$ haben alle Knoten geraden Grad, andernfalls gibt es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad.

„ \Leftarrow “: Wir nehmen zunächst an, dass $G := (V, E)$ nur Knoten geraden Grades hat, und zeigen, dass G dann sogar einen Eulerkreis, also einen geschlossenen Eulerweg besitzt. Wir wählen einen Knoten $v \in G$. Offenbar enthält G einen Kreis, der v enthält, da alle Knoten einen geraden Grad größer gleich zwei haben. Es sei C ein solcher Eulerkreis maximaler Länge (dabei ist die Länge die Anzahl der Kanten, die in C liegen). Wir behaupten, dass C alle Kanten von G enthält. Andernfalls sei $e = (y, x)$ eine Kante, die nicht in C enthalten ist. Dann gibt es, da G zusammenhängend ist, einen Weg $W = (e_1, \dots, e_r)$ der x mit v verbindet, d. h. $e_1 = (x, v_{12})$ und $e_r = (v_{r1}, v)$. Weiter setzen wir $e_0 := e$. Dann sei $1 \leq i \leq r$ so gewählt, dass e_i die erste Kante von W ist, die in C liegt (liegt keine Kante von W in C , so setzen wir $i := r+1$). Dann ist die Kante $e' := e_{i-1}$ nicht in C . Es sei $G' := G \setminus C$. Jeder Knoten in G' hat geraden Grad, da ja aus dem geraden Graphen G der gerade Graph C entnommen wurde. Daher gibt es wie oben einen Kreis C' in G' , der die Kante e' enthält. Die Verbindung $C \cup C'$ definiert dann einen Kreis \hat{C} in G , der echt größer als C ist, was ein Widerspruch ist.

Für den Fall, dass G genau die zwei Knoten u und v von ungeradem Grad besitzt, betrachten wir den Graphen $G' := G \cup (u, v)$. Dieser enthält nur Knoten von geradem Grad und besitzt nach dem ersten Teil des Beweises einen Eulerkreis. Entfernt man von diesem wieder die Kante (u, v) , erhält man einen Eulerweg für G . \square

Abschließend gehen wir noch kurz auf Färbungsprobleme ein:

Definition 6.5.5 Es sei $G = (V, E)$ ein (schleifenfreier) Graph und $n \in \mathbb{N}$. Eine surjektive Abbildung $f: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißt n -Färbung von G , falls für alle Kanten $e = (v_i, v_j) \in E$ immer $f(v_i) \neq f(v_j)$ gilt.

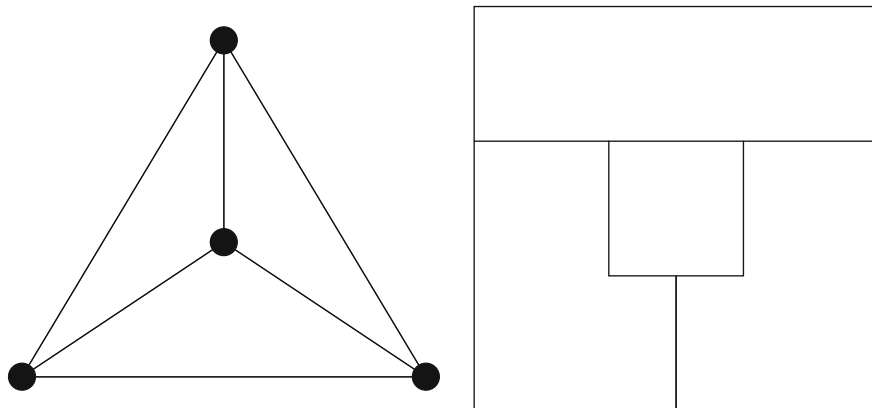


Abb. 6.4 Ein Graph mit mindestens vier Farben samt Landkarte

Offenbar besitzt jeder schleifenfreie Graph $G = (V, E)$ für $n := |V|$ eine n -Färbung, indem man einfach jedem Knoten eine andere Zahl zuordnet. Die interessante Frage ist offenbar, welches das kleinste $n \in \mathbb{N}$ ist, sodass ein gegebener Graph eine n -Färbung besitzt. Man nennt ein solches n die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ des Graphen G .

Für planare Graphen sieht man schnell ein, dass die chromatische Zahl mindestens 4 beträgt, wie einmal mehr der Graph K_4 (vgl. Abb. 6.4) zeigt.

Im Jahr 1852 fragte der Student Francis Guthrie den Mathematiker Auguste de Morgan, ob es richtig sei, dass man eine Landkarte immer mit vier Farben so färben könne, dass zwei aneinandergrenzende Länder verschiedenfarbig gefärbt sind. Da de Morgan die Frage nicht lösen konnte, legte er sie seinem Kollegen William Hamilton vor, der aber auch keine Lösung angeben konnte. In der folgenden Zeit wurde dieses Problem als Vier-Farben-Vermutung weltberühmt, und erst 1976 wurde diese Frage von W. Haken und K. Appel unter massivem Computereinsatz positiv beantwortet: Sie reduzierten das Problem dazu auf eine endliche (exakt 1936 – später gelangen weitere Reduktionen) Anzahl von Fällen, welche dann mit Computerhilfe untersucht wurden (zur weiteren Informationen zu deren Vorgehen und dem Vierfarbensatz allgemein vgl. Fritsch und Fritsch 1994).

Indem man einer Landkarte einen Graphen so zuordnet, dass die Länder der Karte den Knoten des Graphen entsprechen und zwei Knoten genau dann verbunden werden, wenn die zugehörigen Länder eine gemeinsame Grenze haben, erweist sich die Fragestellung gleichbedeutend mit der Frage, ob jeder planare Graph eine Vierfärbung besitzt. Wir wollen hier den deutlich einfacher zu zeigenden Fünffarbensatz beweisen, also die Aussage, dass jeder planare Graph immer eine Fünffärbung zulässt.

Wir zeigen zunächst zwei auch für sich genommen interessante Aussagen über planare Graphen.

Satz 6.5.6 Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher, planarer, zusammenhängender Graph mit $f_0 := |V|$ und $f_1 := |E|$. Dann gilt

$$f_1 \leq 3f_0 - 6.$$

Beweis Mit f_2 bezeichnen wir die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G , wobei wir die unbeschränkte Komponente mitzählen. Da jede derartige Komponente von mindestens drei Kanten begrenzt ist, aber jede Kante an genau zwei Komponenten grenzt, gilt $3f_2 \leq 2f_1$. Setzt man dies in die Eulersche Polyederformel ein, so folgt

$$2 = f_2 - f_1 + f_0 \leq \frac{2}{3}f_1 - f_1 + f_0 \implies f_1 \leq 3f_0 - 6.$$

□

Damit zeigen wir nun

Satz 6.5.7 Jeder einfache planare Graph besitzt einen Knoten vom Grad $d \leq 5$.

Beweis Angenommen jeder Knoten hätte einen Grad $d \geq 6$. Dann käme jeder Knoten in mindestens sechs Kanten vor. Da aber jede Kante zwei Knoten enthält, folgt $6f_0 \leq 2f_1$. Zusammen mit Satz 6.5.6 ergibt sich

$$6f_0 \leq 2f_1 \leq 6f_0 - 12 \implies 12 \leq 0,$$

was nicht sein kann.

□

Damit können wir den Fünffarbensatz zeigen:

Satz 6.5.8 Jeder planare, einfache, zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ ist fünf-färbbar.

Beweis Wir führen Induktion nach $f_0 := |V|$. Für $f_0 \leq 5$ ist die Aussage trivialerweise zutreffend. Es sei nun also $f_0 > 5$. Nach Satz 6.5.7 gibt es einen Knoten v_0 vom Grad kleiner gleich fünf. Ist der Grad echt kleiner als fünf, so ist der Graph $G' := G \setminus v_0$ nach Induktionsvoraussetzung fünf-färbbar, und die mit v_0 verbundenen Knoten sind mit maximal vier Farben gefärbt. Daher bleibt eine Farbe für v_0 übrig und es gibt eine Fünffärbung von G .

Ist der Grad von v_0 genau 5, so gibt es zwei Nachbarn v_1 und v_3 von v_0 , die selbst nicht benachbart sind. Dann betrachten wir den Graphen G' , der entsteht, wenn man v_0 entfernt und v_1 mit v_3 identifiziert. Dieser besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine 5-Färbung, aus der man wieder eine 5-Färbung von G gewinnen kann. □

Inhaltsverzeichnis

7.1 Bilinearformen	160
7.2 Kegelschnitte	163
7.3 Eigenschaften von Kegelschnitten	169

Bisher hatten wir in erster Linie geometrische Objekte betrachtet, die durch lineare Objekte definiert wurden. Damit ergeben sich anschaulich stets geradlinige bzw. ebene Objekte, wie Geraden und Strecken in der ebenen Geometrie oder die durch lineare Ungleichungen definierten Polyeder in höheren Dimensionen. Ein nächster Verallgemeinerungsschritt ist offenbar, allgemeinere Kurven und Flächen zu untersuchen. Dies ist Gegenstand der Differenzialgeometrie, von der wir in Abschn. 7.3 im Fall ebener Kurven lediglich einige grundlegende Begriffe betrachten wollen. Eine ausführliche Behandlung differenzialgeometrischer Methoden würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Wir beschränken uns vielmehr auf den einfachsten Fall nichtlinearer Objekte, nämlich Quadriken in der Ebene, d. h. durch quadratische Gleichungen definierte Kurven. Diese lassen sich interessanterweise auch auf rein geometrischem Weg als Schnitte eines dreidimensionalen Kegels mit einer Ebene erhalten.

Dieser Zugang zu Quadriken als Kegelschnitte wurde bereits in der Antike ausführlich untersucht. In diesem Kapitel wiederholen wir in Abschn. 7.1 zunächst einige (wohlbekannte) Ergebnisse über quadratische Formen aus der linearen Algebra, bevor wir die ebenen Quadriken wie Parabel, Hyperbel und Ellipse auf klassisch geometrischem Wege konstruieren. Abschließend führen wir einige Begriffe der Differenzialgeometrie ein, um mit deren Hilfe ein paar frappierende Eigenschaften der Kegelschnitte zu erhalten.

7.1 Bilinearformen

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige – vermutlich schon aus der linearen Algebra bekannte – Grundaussagen über quadratische Formen und die damit eng verwandten Bilinearformen.

Eine (reelle) Bilinearform ist bekanntlich eine Abbildung

$$\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

des kartesischen Produktes eines \mathbb{R} -Vektorraums mit sich selbst nach \mathbb{R} , die linear in jedem Argument ist. Sie heißt symmetrisch, falls für alle $v, w \in V$ gilt $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$. Wir nennen eine solche Bilinearform nicht ausgeartet, wenn es zu jedem von null verschieden $v \in V$ ein $u \in V$ gibt mit $\varphi(v, u) \neq 0$.

Wir werden uns im Folgenden auf symmetrische Bilinearformen beschränken, auch wenn wir dies nicht in jedem Fall explizit erwähnen werden.

Beispiel 7.1.1 1. Jedes Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n ist eine nicht ausgeartete Bilinearform.

2. Ist V ein Vektorraum, so ist die triviale Abbildung $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto 0$ nicht nicht ausgeartet, also ausgeartet.

3. Ist $V = \mathcal{C}[0; 1]$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, so ist

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V .

4. Ist $V := \mathbb{R}^n$, so ist das Minkowski-Produkt

$$\psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n,$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform, die kein Skalarprodukt ist (eine ausführliche Darstellung der für die Physik grundlegende Minkowski-Geometrie findet man z. B. in Klotzek und Quaisser 1978, Kap. 5 oder Knörrer 2006, Abschn. 5.4).

Ähnlich wie bei linearen Abbildungen lassen sich Bilinearformen auf endlich-dimensionalen Räumen durch Matrizen beschreiben.

Definition 7.1.2 Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $B: v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V sowie $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, so heißt

$$M_B(\varphi) := (\varphi(v_i, v_j))_{i,j}$$

Matrix von φ bzgl. der Basis B .

Offenbar ist der folgende Satz richtig:

Satz 7.1.3 Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und B eine Basis von V . Dann ist die Abbildung

$$\text{Bil}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \varphi \mapsto M_B(\varphi)$$

bijektiv.

Bemerkung 7.1.4 Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Sind B und B' Basen von V und S die Matrix des Basiswechsels von B' zu B , so gilt

$$M_{B'} = S^\top \cdot M_B \cdot S.$$

Durch Fixieren einer Basis von V lassen sich Bilinearformen also durch die Koeffizienten der betrachteten Vektoren berechnen. Im Folgenden beschränken wir uns daher auf den Fall, dass der betrachtete Vektorraum V ein \mathbb{R}^n ist, und definieren direkt für diese Räume quadratische Formen.

Definition 7.1.5 Eine Polynomfunktion $q: V := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt quadratische Form, wenn für jedes $v \in V$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $q(tv) = t^2 q(v)$.

Durch Koeffizientenvergleich bestätigt man schnell, dass ein Polynom

$$q(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

genau dann eine quadratische Form induziert, wenn jedes Monom von q Grad 2 hat.

Ist $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V , so wird offenbar durch $q(v) := \varphi(v, v)$ eine quadratische Form definiert. Interessanterweise lässt sich eine Bilinearform aus der durch sie definierten quadratischen Form zurückgewinnen:

Aufgabe 7.1.6 Es sei $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form mit zugehöriger quadratischer Form q . Weiter sei $\psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(v, w) := \frac{1}{2} (q(v + w) - q(v - w)).$$

Dann ist ψ eine Bilinearform und es gilt $\varphi = \psi$.

Ist φ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$, so nennen wir zwei Vektoren $v, w \in V$ genau dann φ -orthogonal (wenn der Zusammenhang klar ist, auch nur orthogonal), wenn $\varphi(v, w) = 0$ gilt. Ein Vektor v , der zu sich selbst orthogonal ist, wird als isotrop bezeichnet.

Aufgabe 7.1.7 Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform φ .

1. Ist $W \subset V$ ein Unterraum von V , so heißt W^\perp das φ -orthogonale Komplement von W . Man zeige, dass W^\perp ein Unterraum von V ist.
2. Die Menge C aller isotropen Vektoren von V bildet einen linearen Kegel, d. h., für jedes $u \in C$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $tu \in C$. Allerdings ist im Allgemeinen C kein Unterraum von V .

Der Hauptsatz über Bilinearformen (der über beliebigen Körpern mit Charakteristik ungleich zwei gilt) liefert die Existenz von Orthonormalbasen (im entsprechenden Sinne):

Satz 7.1.8 Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform mit zugehöriger quadratischer Form q . Dann gibt es eine Basis (man sagt auch „ φ -Orthonormalbasis“) v_1, \dots, v_n von V mit

$$\varphi(v_i, v_j) = 0 \text{ für } i \neq j, \quad q(v_i) = -1, \quad 1 \leq i \leq r, \quad q(v_i) = 1, \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Beweis Wir führen Induktion nach $n := \dim V$. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Für $n > 1$ folgt aus Aufgabe 7.1.6 die Existenz eines Vektors w mit $q(w) \neq 0$. Setzt man $w' := \frac{w}{\sqrt{|q(w)|}}$, so hat man $q(w') = \pm 1$ und damit den ersten Basisvektor gefunden. Für die weiteren Basisvektoren setzen wir $W := \mathbb{R}w$ und $U := W^\perp$. Dann ist U ein Untervektorraum von V mit $w \notin U$, d. h. $\dim(U) < n$. Die Induktionsvoraussetzung liefert daher eine Basis u_1, \dots, u_m von U , wie gewünscht. Es bleibt, $m = n - 1$ zu zeigen. Dazu sei $v \in V$ beliebig und

$$u := v - \frac{\varphi(w, v)}{\varphi(w, w)}w.$$

Man sieht dann schnell $u \in U$, was zeigt, dass w, u_1, \dots, u_m ein Erzeugendensystem von V , also nach Konstruktion sogar eine Basis ist. \square

Für quadratische Formen, die aus Bilinearformen entstehen, besagt dieser Satz im Wesentlichen, dass jede solche quadratische Form sich als Differenz von Summen von Quadraten schreiben lässt. Im zweidimensionalen Fall kann man diese Darstellung recht einfach über eine quadratische Ergänzung erhalten:

Beispiel 7.1.9 Wir betrachten für $a > 0$ die quadratische Form $q(x, y) := x^2 + 4xy + ay^2$. Quadratische Ergänzung liefert

$$q(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + (a - 4)y^2 = (x + 2y)^2 + (a - 4)y^2.$$

Es sei φ die zugehörige Bilinearform. Ist $a = 4$, so ist diese eine ausgeartete Bilinearform. Im Fall $a > 4$ liegt ein Skalarprodukt vor; dann ist die Matrix von φ bzgl. einer wie in Satz 7.1.8 gewählten Basis die Einheitsmatrix. Im letzten Fall $a < 0$ hat

sie einen positiven und einen negativen Eintrag auf der Diagonalen und q entspricht dem Minkowski-Produkt (vgl. Beispiel 7.1.1) auf dem \mathbb{R}^2 . Geometrisch gesehen, hat im ersten Fall die quadratische Form q als Niveaulinien Ellipsen, im zweiten Fall Hyperbeln, wie wir später sehen werden.

Definition 7.1.10 Ist $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form, so heißt für ein $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$C_q(c) := \{x \in \mathbb{R}^n; q(x) = c\}$$

eine Quadrik des \mathbb{R}^n .

7.2 Kegelschnitte

Überraschenderweise lassen sich im Zweidimensionalen Quadriken auch auf rein geometrischem Weg, nämlich als Kegelschnitte erhalten. In diesem Abschnitt geben wir eine elementargeometrische Einführung der Kegelschnitte und werden abschließend zeigen, dass die erhaltenen Kegelschnitte sich jeweils als Quadriken wie in Beispiel 7.1.9 auffassen lassen.

Zu einer Linearform $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^3$ nennen wir $H(u, a) := \{x \in \mathbb{R}^3; \langle u, x - a \rangle = 0\}$ die durch u und a definierte Ebene. In der Notation von Definition 6.1.1 gilt dann gerade $H(u, a) = H_{u=e}$ mit $e := \langle u, a \rangle$

Eine Kugeloberfläche (oft auch nur Kugel) $K := K(M; r) \subset \mathbb{R}^3$ ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3; \|x - M\| = r\}$. Weiter nennen wir eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M , falls es eine Ebene $H_D \subset \mathbb{R}^3$ gibt mit $M \in H$ und $D = H \cap K(M; r)$. Die Ebene H_D ist dann eindeutig bestimmt und heißt Kreisebene von D .

Aufgabe 7.2.1 Man zeige: Ist K eine Kugel und H eine Ebene, so ist $K \cap H$ entweder leer, einpunktig oder ein Kreis in $H \cong \mathbb{R}^2$.

Definition 7.2.2 Es sei D ein Kreis im \mathbb{R}^3 mit Mittelpunkt M und Kreisebene $H = H(u, a)$. Weiter sei $S \in M + \mathbb{R}_{\neq 0}u$. Dann heißt die Menge

$$C := \bigcup_{y \in D} \text{aff}(S, y)$$

ein (Kreis-)Doppelkegel mit Spitze S . Die Gerade $L := M + \mathbb{R}u$ heißt Zentralgerade des Kegels.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass Definition 7.2.2 genau die anschauliche Vorstellung eines Kegels wiedergibt.

Aufgabe 7.2.3 Man zeige: Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Kegel mit Zentralgerade $L = M + \mathbb{R}u$ und Spitze S , wenn folgende zwei Aussagen gelten:

1. $S \in L$.
2. Es gibt ein $c > 0$, sodass für jedes $A \in L \neq S$ die Menge $H(u, A) \cap C$ ein Kreis mit Radius $c\|A - M\|$ und Mittelpunkt A ist.

Ein wichtiger einen Kegel beschreibender Parameter ist anschaulich die Öffnungsweite. Diese definieren wir mithilfe des Winkels zwischen Leitgeraden und einer Seitengerade des Kegels. Dabei ist der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden als der kleinere der beiden am Schnittpunkt entstehenden Winkel definiert. Da zwei sich schneidende Geraden immer in einer Ebene liegen, können wir die Definition des Winkels aus Definition 2.1.12 direkt auf die dreidimensionale Situation verallgemeinern.

Definition 7.2.4 Ist C ein Kegel mit Zentralgerade L und Spitze S , so ist der Kegelwinkel (oder halbe Öffnungswinkel) ω von C definiert als $\angle L, SY$ mit $Y \in C \setminus \{S\}$.

Bereits in der Antike interessierte man sich für die Kurven, die man erhält, wenn man einen (Kreis-)Doppelkegel mit einer Ebene schneidet. Offenbar unterscheiden sich diese Kurven je nach Lage der Ebene. Wie die Aufgabe 7.2.3 zeigt, ergeben sich Kreise, wenn die Schnittebene senkrecht zur Leitgeraden ist.

Definition 7.2.5 Es sei C ein Doppelkegel mit Spitze S und Zentralgerade L sowie H eine Ebene mit $S \notin H$. Der Schnittebenenwinkel ist der Winkel zwischen H und der Zentralgeraden L .

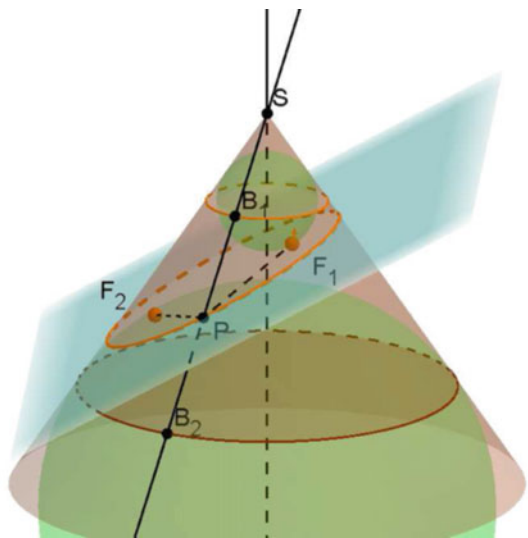
Wir werden sehen, dass das Verhältnis von Schnittebenenwinkel zu Kegelwinkel die entscheidende Größe ist, die die Qualität der Schnittkurve beschreibt. Um diese zu untersuchen, verwenden wir als grundlegendes Hilfsmittel für die geometrische Beschreibung der Schnittkurven die Dandelinschen Kugeln (Pierre Dandelin, 1794–1847).

Definition 7.2.6 Es sei C ein Doppelkegel und H eine Schnittebene. Eine Kugel, die den Kegel von innen (in einem Kreis) und die Ebene H berührt, heißt Dandelinsche Kugel. Der Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene heißt Brennpunkt.

Satz 7.2.7 Es seien C ein Doppelkegel mit Spitze S und Kegelwinkel ω , H eine Schnittebene mit Schnittwinkel $\alpha > \omega$. Dann gibt es zwei Punkte F_1 und F_2 und ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $P \in H \cap C$ gilt

$$|PF_1| + |PF_2| = c.$$

Abb. 7.1 Zum Beweis von Satz 7.2.7



Beweis Offenbar gibt es in der betrachteten Situation genau zwei Dandelin'sche Kugeln K_1 und K_2 mit Berührungskreisen D_1 und D_2 in Kreisebenen H_1 und H_2 . Ferner seien F_1 und F_2 die Berührungspunkte der Kugeln K_1 und K_2 mit der Ebene H . Zu $P \in H \cap C$ seien $g := SP$ und $B_i := D_i \cap g$, $i = 1, 2$, (vgl. Abb. 7.1). Durch die Punkte F_1 , B_1 und P wird eine Ebene H' definiert. Gemäß Aufgabe 7.2.1 ist $H' \cap K_1$ ein Kreis, der die Geraden PF_1 und PB_1 als Tangenten besitzt. Daher liefert der Kreistangentensatz 2.4.16 $|PF_1| = |PB_1|$. Analog sieht man $|PF_2| = |PB_2|$. Insgesamt erhält man

$$|PF_1| + |PF_2| = |PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2|,$$

wobei der letzte Wert ersichtlich unabhängig von P ist, was die Behauptung liefert. \square

Definition 7.2.8 Eine Kurve wie in Satz 7.2.7 heißt Ellipse; die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte der Ellipse.

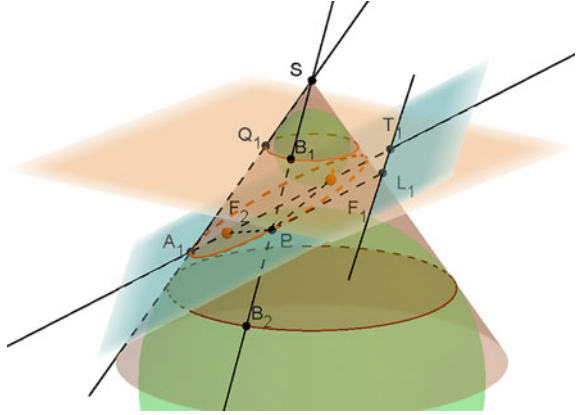
Lemma 7.2.9 In der Notation des Beweises von Satz 7.2.7 sei $\ell_i := H_i \cap H$, $i = 1, 2$. Dann gibt es ein $0 < \varepsilon < 1$, sodass für jeden Punkt $P \in C \cap H =: E$ die Beziehung

$$\frac{|PF_i|}{d(P, \ell_i)} = \varepsilon$$

gilt.

Beweis Wir verwenden wieder die Notation aus dem Beweis von Satz 7.2.7. Weiter wähle man $L_1 \in \ell_1$ mit $d(P, \ell_1) = |PL_1|$. Ferner setze man $T_1 := (F_1F_2) \cap \ell_1$ und

Abb. 7.2 Zum Beweis von Lemma 7.2.9



wähle $A_1 \in F_1 F_2 \cap E$ so, dass $|A_1 T_1|$ maximal ist sowie $Q_1 := (A_1 S) \cap H_1$ (vgl. Abb. 7.2). Dann erhält man (Strahlensatz!)

$$\frac{|PF_1|}{d(P, \ell_1)} = \frac{|PB_1|}{|PL_1|} = \frac{|A_1 Q_1|}{|A_1 T_1|}.$$

Wendet man auf das Dreieck $A_1 Q_1 T_1$ den Sinussatz 2.6.3 an und bezeichnet Kegelwinkel und Schnittwinkel wieder mit ω bzw. α , so folgt

$$\frac{|PF_1|}{d(P, \ell_1)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \omega)} = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\omega)} =: \varepsilon.$$

Weil der Kosinus im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, gilt $\varepsilon < 1$. □

Für den Fall $\alpha < \omega$ gelten analoge Aussagen:

Satz 7.2.10 Es seien C ein Doppelkegel mit Spitze S und Kegelwinkel ω , H eine Schnittebene mit Schnittwinkel $\alpha < \omega$.

1. Dann gibt es zwei Punkte F_1 und F_2 und ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $P \in H \cap C$ gilt

$$||PF_1| - |PF_2|| = c.$$

2. Sind H_i wieder die Berührungsebenen der Dandelin'schen Kugeln und setzt man wieder $\ell_i := H \cap H_i$, so gibt es ein $\varepsilon > 1$, sodass für jedes $P \in H \cap C$ gilt

$$\frac{|PF_i|}{d(P, \ell_i)} = \varepsilon.$$

Beweis Die Beweise verlaufen entsprechend den Beweisen von Satz 7.2.7 und Lemma 7.2.9 und werden dem Leser zur Übung überlassen. □

Definition 7.2.11 Die Schnittkurve im Fall des Satzes 7.2.10 heißt Hyperbel.

Definition 7.2.12 Die Größe ε aus Lemma 7.2.9 bzw. Satz 7.2.10 2. heißt numerische Exzentrizität des Kegelschnittes.

Der Grenzfall $\alpha = \omega$ führt zur numerischen Exzentrizität von 1, und in der Tat gilt, wie man mit analogen Argumenten wie bisher einsehen kann:

Satz 7.2.13 Es seien C ein Doppelkegel mit Spitze S und Kegelwinkel ω , H eine Schnittebene mit Schnittwinkel $\alpha = \omega$. Dann gibt es einen Punkt F sowie eine Gerade ℓ , sodass für alle $P \in H \cap C$ gilt

$$d(P, \ell) = |PF|.$$

Eine derartige Kurve nennt man eine Parabel.

Wir zeigen im Folgenden, dass die Gleichungen der speziellen Kegelschnitte Ellipse und Hyperbel gerade Gleichungen entsprechen, die man erhält, wenn man Niveaulinien von quadratischen Formen betrachtet.

Für einen Kegel C und eine Schnittebene $H \cong \mathbb{R}^2$ mit Schnittwinkel $\alpha > \omega$ sei $E := C \cap H$ die Schnittellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 . Durch Identifikation von H mit \mathbb{R}^2 und nach Anwenden einer Kongruenzabbildung können wir annehmen, dass $F_1 = (-f; 0)$ und $F_2 = (f; 0)$ mit $f > 0$ gelten. Die Ellipsengleichung $|PF_1| + |PF_2| = c$ schreibt sich dann in der Form

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = c.$$

Offenbar können wir hier $c > 2f$ annehmen. Dann liefert Quadrieren die äquivalente Gleichung

$$(x+f)^2 + y^2 + (x-f)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = c^2$$

bzw.

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \frac{1}{2}c^2 - x^2 - y^2 - f^2.$$

Erneutes Quadrieren liefert

$$((x+f)^2 + y^2) \cdot ((x-f)^2 + y^2) = \left(\frac{1}{2}c^2 - x^2 - y^2 - f^2\right)^2,$$

mit der Zusatzbedingung

$$x^2 + y^2 + f^2 < \frac{1}{2}c^2. \quad (7.1)$$

Die neue Gleichung ergibt beim Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} & ((x+f)(x-f))^2 + y^2((x+f)^2 + (x-f)^2) + y^4 \\ &= \frac{1}{4}c^4 - c^2(x^2 + y^2 + f^2) + x^4 + y^4 + f^4 + 2(x^2y^2 + x^2f^2 + y^2f^2), \end{aligned}$$

bzw.

$$c^2(x^2 + y^2 + f^2) = \frac{1}{4}c^4 + 4x^2f^2.$$

In einer weiteren Umformung ergibt sich nun

$$(c^2 - 4f^2)x^2 + c^2y^2 = \frac{1}{4}c^2(c^2 - 4f^2) \text{ bzw. } \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - 4f^2} = \frac{1}{4},$$

also genau die Ellipsengleichung gemäß der Hauptachsentransformation. Ist diese Gleichung erfüllt, so gilt weiter

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + f^2 &= x^2 + \frac{1}{4}(c^2 - 4f^2) - x^2 + 4\frac{f^2}{c^2}x^2 + f^2 \\ &= \frac{1}{4}c^2 + 4\frac{f^2}{c^2}x^2 \leq \frac{1}{4}c^2 + \frac{f^2}{c^2}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + f^2 \leq \frac{1}{2}c^2, \end{aligned}$$

d. h., die Bedingung (7.1) ist automatisch erfüllt.

Setzt man nun abschließend $a := \frac{c}{2}$ und $b := \frac{\sqrt{c^2 - 4f^2}}{2}$, so erhält man die Ellipsengleichung in Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mit analogen Rechnungen sieht man ein, dass die Normalform der Hyperbel gegeben ist durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die so erhaltenen Gleichungen für Ellipse und Hyperbel entsprechen damit genau den Gleichungen der Niveaulinien einer quadratischen Form wie in Beispiel 7.1.9, das wir damit nun auch geometrisch interpretieren können.

Für eine Parabel mit Brennpunkt $F = (f, 0)$ und Leitgerade $x = -f$ erhält man ebenso die Gleichung

$$y^2 = 4fx.$$

Man beachte, dass dies keine Quadrik im Sinne der Definition 7.1.10 ist, da $q(x, y) = y^2 - 4fx$ zwar ein quadratisches Polynom, aber wegen des zusätzlichen linearen Terms keine quadratische Form ist.

Für spätere Anwendungen formulieren wir für diese speziellen Gleichungen der Kegelschnitte noch die zugehörigen Abstandsformeln:

Lemma 7.2.14 1. Es sei $P := (x; y)$ ein Punkt auf der Ellipse $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit den Brennpunkten $F_1 := (-f; 0)$ und $F_2 := (f; 0)$. Dann gelten

$$|PF_1| = a + \frac{xf}{a} \quad \text{und} \quad |PF_2| = a - \frac{xf}{a}.$$

2. Es sei $P := (x; y)$ ein Punkt auf der Parabel $K: y^2 = 4fx$ mit Brennpunkt $F := (f; 0)$ und Leitgeraden $x = -f$. Dann gilt

$$|PF| = x + f.$$

Beweis 1. Offenbar hat man die Beziehung $f^2 = a^2 - b^2$. Damit gilt etwa für $|PF_1|$ die Gleichung

$$\begin{aligned} |PF_1|^2 &= (x + f)^2 + y^2 = x^2 + 2xf + a^2 - b^2 + y^2 \\ &= x^2 + 2xf + a^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 + 2xf + \frac{f^2x^2}{a^2} = \left(a + \frac{fx}{a}\right)^2, \end{aligned}$$

woraus man die Behauptung abliest.

2. Dies ist mehr oder weniger die Definition der Parabel. \square

7.3 Eigenschaften von Kegelschnitten

Das besondere Interesse an Kegelschnitten im Verlauf der Mathematikgeschichte lässt sich nicht zuletzt durch die Reflexionseigenschaften von Parabel und Ellipse begründen, die beispielsweise im Parabolspiegel eine jedem vertraute Anwendung finden. Um diese zu begründen, verwenden wir Methoden aus der Differentialgeometrie (vgl. Hilbert und Cohn-Vossen 1973, Kap. 4), um deren Techniken beispielhaft zu illustrieren. Dazu führen wir zu Beginn dieses Abschnitts einige Grundbegriffe aus dieser mathematischen Teildisziplin ein, um dann damit abschließend die erwähnten Reflexionseigenschaften herzuleiten.

Wir beginnen mit zwei unterschiedlichen Möglichkeiten, mit denen man Kurven in der Ebene definieren kann.

Definition 7.3.1 1. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine (stetig differenzierbare) Funktion.

Dann heißt die Menge $N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f oder die durch f definierte ebene Kurve.

2. Ist N_f eine ebene Kurve, so heißt eine injektive Abbildung $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$, ein Intervall, mit $s(I) = N_f$ eine Parametrisierung von N_f . Eine solche Parametrisierung heißt glatt, falls s stetig differenzierbar ist und $s'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Für viele Anwendungen haben beide in Definition 7.3.1 gegebenen Sichtweisen von Kurven unterschiedliche Vorteile. So lassen sich aus der Definition einer ebenen Kurve oftmals globale Eigenschaften der Kurve gut ableiten, wohingegen die Bestimmung konkreter Punkte auf der Kurve mithilfe einer Parametrisierung naheliegenderweise sehr einfach ist.

Beispiel 7.3.2 1. Es sei $E := N_f$ für $f(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, also eine Ellipse.

Dann ist durch $s: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$ eine glatte Parametrisierung von E gegeben.

2. Es sei $H := N_f$ mit $f(x, y) := \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ eine Hyperbel. Dann ist $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \cosh(t), b \sinh(t))$ eine glatte Parametrisierung von E .

3. Es sei $P := N_p$ für $p(x, y) = y^2 - 4fx$ eine Parabel. Dann ist $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\frac{t^2}{4f}, t)$ eine glatte Parametrisierung von P .

Den Beweis dieser Beispiele überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Ist $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung einer ebenen Kurve C sowie $\psi: J \rightarrow I$ eine bijektive Abbildung, so ist offensichtlich $s \circ \psi: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ ebenfalls eine Parametrisierung von C . Ist s glatt und ψ in beiden Richtungen differenzierbar, so ist auch $s \circ \psi$ glatt. Man nennt dann ψ auch eine Umparametrisierung von C .

Oftmals versucht man besonders naheliegende Parametrisierungen von gegebenen Kurven zu finden:

Definition 7.3.3 Es sei $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Parametrisierung einer Kurve C . Man nennt s kanonische Parametrisierung, wenn $\|s'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Anschaulich ist eine Parametrisierung kanonisch, wenn die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Insbesondere gibt in diesem Fall der Parameter t gerade die Länge der bis zum entsprechenden Punkt durchlaufenden Kurve an, denn aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung folgt unmittelbar

Bemerkung 7.3.4 Es sei $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Parametrisierung einer Kurve C . Dann ist s genau dann kanonisch, falls für jedes $a \in I$

$$\int_a^t \|s'(\tau)\| d\tau = t - a$$

gilt.

Insbesondere motiviert dies eine Möglichkeit, eine kanonische Parametrisierung zu konstruieren: Man setze für eine Parametrisierung $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ einer Kurve C und ein $a \in I$ einfach

$$\psi: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_a^t \|s'(\tau)\| d\tau.$$

Dann ist die Abbildung $s \circ \psi^{-1}: \psi(I) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine kanonische Parametrisierung von C , wie man durch Rechnung schnell bestätigen kann.

Definition 7.3.5 Es seien $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Parametrisierung einer ebenen Kurve K sowie $P := s(t_0) \in K$. Dann heißt $s'(t_0)$ ein Tangentialvektor von K in P . Ein Vektor $n \neq 0$ mit $\langle n, s'(t_0) \rangle = 0$ heißt ein Normalenvektor von K in P .

Im Fall einer kanonischen Parametrisierung lassen sich Normalenvektoren recht einfach bestimmen:

Lemma 7.3.6 Ist $s: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine kanonische Parametrisierung einer Kurve und gilt $s''(t_0) \neq 0$, so ist $s''(t_0)$ ein Normalenvektor von C in $P := s(t_0)$.

Beweis Durch Ableiten folgt aus

$$1 = \|s'(t)\|^2 = \langle s'(t), s'(t) \rangle \quad \text{direkt} \quad \langle s''(t), s'(t) \rangle = 0,$$

also die Behauptung. \square

Da eine explizite Darstellung kanonischer Parametrisierungen im Falle der Kegelschnitte nur teilweise möglich ist, muss man in dieser Situation Normalenvektoren auf andere Art berechnen. Hier geht dies über die definierende Gleichung selbst. Dies nützen wir im folgenden Satz aus, um die Reflexionseigenschaften der Ellipse nachzuweisen.

Satz 7.3.7 Es sei $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse mit den Brennpunkten $F_1 := (-f; 0)$ und $F_2 := (f; 0)$ und P ein Punkt auf der Ellipse, sowie n_P ein Normalenvektor der Ellipse in P (vgl. Abb. 7.3). Dann gilt

$$\angle(n_P, PF_1) = \angle(n_P, PF_2).$$

Beweis Es sei $(x(t), y(t))$ eine glatte Parametrisierung der Ellipse, die nach Beispiel 7.3.2 existiert. Durch Differenzierung der definierenden Gleichung der Ellipse erhält man

$$\frac{2x(t)x'(t)}{a^2} + \frac{2y(t)y'(t)}{b^2} = 0, \quad \text{also} \quad \left\langle (x'(t), y'(t)), \left(\frac{x(t)}{a^2}, \frac{y(t)}{b^2} \right) \right\rangle = 0.$$

Damit ist $n(t) := \left(\frac{x(t)}{a^2}, \frac{y(t)}{b^2} \right)$ ein Normalenvektor der Ellipse in $(x(t), y(t))$. Die Behauptung folgt nun aus dem ersten Teil des Lemmas 7.2.14 durch Nachrechnen. \square

Abb. 7.3

Reflexionseigenschaft der Ellipse

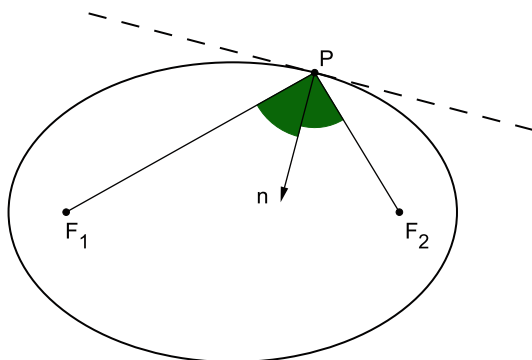
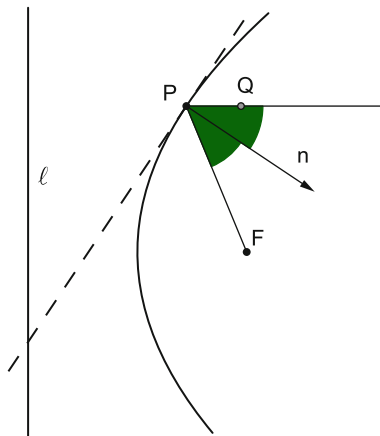


Abb. 7.4

Reflexionseigenschaft der
Parabel



Anschaulich bedeutet diese Aussage, dass aus einem Brennpunkt der Ellipse ausgesandte Strahlen von der Ellipse genau in den anderen Brennpunkt reflektiert werden. Eine ähnliche Eigenschaft weist die Parabel auf:

Satz 7.3.8 Es sei $K: y^2 = 4fx$ eine Parabel mit Brennpunkt $F = (f; 0)$ und Leitgerade $x = -f$. Weiter sei $P := (x; y)$ ein Punkt auf der Parabel mit Normalenvektor n_P sowie $Q := (x + 1, y)$ (vgl. Abb. 7.4). Dann gilt

$$\angle(n_P, PQ) = \angle(n_P, PF).$$

Beweis Es sei wieder $(x(t), y(t))$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung der Parabel. Dann gilt $2y(t)y'(t) - 4fx'(t) = 0$, d.h. $n(t) = (-2f, y(t))$ ist ein möglicher Normalenvektor. Damit folgt die Behauptung wieder mithilfe von Lemma 7.2.14. \square

Die anschauliche Interpretation dieser Aussage ist, dass parallel einfallende Strahlen allesamt durch den Brennpunkt reflektiert werden, ein Prinzip, welches beispielsweise in Parabolantennen oder den zu Beginn des Abschnitts erwähnten Parabolspiegeln Anwendung findet.

Inhaltsverzeichnis

8.1	Topologie	173
8.2	Gruppenoperationen	176
8.3	Mannigfaltigkeiten	179
8.4	Fundamentalgruppe topologischer Räume	184
8.5	Gruppenoperationen auf dem \mathbb{R}^n	192
8.6	Symmetriegruppen von Polytopen	195
8.7	Untergruppen der speziellen linearen Gruppe	198

Die mathematische Disziplin Topologie wurde zum Zeitpunkt ihrer Entstehung auch als „Geometrie der Lage“ bezeichnet. Bei topologischen Fragestellungen steht weniger der metrische Aspekt im Vordergrund, vielmehr werden in erster Linie die Lagebeziehungen der einzelnen Objekte untersucht. Damit lässt sich auch die umgangssprachliche Bezeichnung „Gummibandgeometrie“ rechtfertigen. Wir werden in diesem Kapitel diese Sichtweise der Geometrie einnehmen und geometrische Objekte mit topologischen Methoden untersuchen. Dazu gehen wir auf topologische Räume und Transformationen geometrischer und topologischer Objekte ein. Wir erinnern in Abschn. 8.1 zunächst an einige topologische Grundlagen.

8.1 Topologie

Einige Grundbegriffe der Topologie werden üblicherweise in den Grundvorlesungen, speziell der Analysis, eingeführt. Wir werden diese in diesem Abschnitt noch einmal wiederholen, sodass mit topologischen Begriffen vertraute Leser diesen Abschnitt gefahrlos überspringen können.

Definition 8.1.1 Ein topologischer Raum (M, \mathcal{O}) ist eine Menge M zusammen mit einem System \mathcal{O} von Teilmengen („offene Mengen“) von M , welches folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
3. Ist $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$, dann gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Ein topologischer Raum heißt hausdorffsch, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ offene Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in O_x, y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$. Eine Menge $A \subset M$ heißt abgeschlossen, wenn $M \setminus A \in \mathcal{O}$ gilt, also das Komplement von A offen ist.

Zur Veranschaulichung geben wir einige Beispiele:

Beispiel 8.1.2 1. Das vertrauteste Beispiel ist sicher die Standardtopologie auf dem \mathbb{R}^n : Es sei $M := \mathbb{R}^n$ und $O \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, falls es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$U_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{R}^n; \|x - z\| < \varepsilon\} \subset O$$

gilt. Man rechnet schnell nach, dass man damit in der Tat einen topologischen Raum erhält, der darüber hinaus hausdorffsch ist.

2. Für eine beliebige Menge M sei $\mathcal{O} := \{\emptyset, M\}$, welches offenbar die Eigenschaften 8.1.1 erfüllt. Die erhaltene Topologie auf M nennt man auch die triviale Topologie. Sie ist im Allgemeinen nicht hausdorffsch.
3. Definiert man für eine Menge M als System \mathcal{O} offener Mengen die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M , so erhält man eine hausdorffsche Topologie auf M , die man als die diskrete Topologie auf M bezeichnet.

Aufgabe 8.1.3 Es seien (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $T \subset X$ eine Teilmenge von X . Man zeige, dass durch

$$\mathcal{O}_T := \{O \cap T; O \in \mathcal{O}_X\}$$

eine Topologie auf T definiert wird (die sogenannte Teilraumtopologie).

Topologische Räume lassen sich vergleichen:

Definition 8.1.4 Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Ist f bijektiv und stetig und ist auch f^{-1} stetig, so heißt f ein Homöomorphismus. Zwei topologische Räume X und Y heißen homöomorph, falls es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt. In diesem Fall schreiben wir einfach $X \cong Y$, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

- Aufgabe 8.1.5** 1. Man zeige, dass der Begriff der Stetigkeit aus Definition 8.1.4 mit der klassischen metrischen Definition der Stetigkeit, wie man sie im Fall des Beispiels 8.1.2 verwendet, übereinstimmt.
2. Für $u \in \mathbb{R}^n$ und $e \in \mathbb{R}$ sei die Hyperebene $H := H_{u=e} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Teilraumtopologie ausgestattet. Durch die Wahl einer Basis von H wird ein Vektorraumisomorphismus $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow H$ definiert. Man zeige, dass g ein Homöomorphismus ist.

Im Folgenden geben wir eine für uns überaus wichtige Konstruktion an, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume erhalten kann.

Definition 8.1.6 Es sei X ein topologischer Raum und R eine Äquivalenzrelation auf X . Weiter bezeichne man mit X/R den Raum der Äquivalenzklassen und mit $\pi: X \rightarrow X/R$ die kanonische Abbildung. Eine Teilmenge $O \subset X/R$ sei offen, falls ihr Urbild $\pi^{-1}(O) \subset X$ offen ist. Den so erhaltenen topologischen Raum bezeichnet man als den topologischen Quotienten von X nach R , und die Topologie auf X/R heißt Quotiententopologie.

Bemerkung 8.1.7 Die Quotiententopologie auf X/R ist die feinste Topologie, so dass die Quotientenabbildung stetig ist, d. h., es gibt keine Topologie mit mehr offenen Mengen auf X/R , bei der die Stetigkeit der Quotientenabbildung noch erhalten ist.

Wie bei Quotientenabbildungen in der Algebra besitzt auch der topologische Quotient eine gewisse universelle Eigenschaft:

Lemma 8.1.8 Es seien X und Y topologische Räume und R eine Äquivalenzrelation auf X . Weiter sei $f: X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x) = f(y)$, falls xRy . Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\bar{f}: X/R \rightarrow Y$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.

Beweis Man definiere $\bar{f}([x]) := f(x)$, wobei x ein Repräsentant für die Äquivalenzklasse $[x]$ ist. Dies ist wohldefiniert, da für yRx nach Voraussetzung $f(x) = f(y)$ gilt. Es bleibt, die Stetigkeit von \bar{f} zu zeigen. Dazu sei $O \subset Y$ offen. Dann ist auch

$$\pi^{-1}\bar{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O) \subset X$$

wegen der Stetigkeit von f offen. Nach Definition der Quotiententopologie ist dann auch $\bar{f}^{-1}(O) \subset X/R$ offen, also \bar{f} stetig. \square

Man beachte, dass die Quotiententopologie oftmals uns vertraute Vorstellungen verletzt.

Beispiel 8.1.9 Auf \mathbb{R} sei die Äquivalenzrelation $x \sim y$ definiert durch $x = ay$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann besteht der Quotientenraum aus zwei Punkten $[0]$ und $[1]$, wobei $[1]$ ein offener Punkt ist, $[0]$ jedoch nicht!

Aufgabe 8.1.10 Es sei $X := \mathbb{R}$. Zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ seien äquivalent ($x \sim y$), falls es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = y + z$. Man zeige:

1. Obige Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} .
2. Es gilt $X/\sim \cong S^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ zusammen mit der Abbildung $\pi: X \rightarrow S^1$, $x \mapsto \exp(2\pi i x)$, wobei die Topologie auf S^1 die Teilraumtopologie der üblichen Topologie auf \mathbb{C} sei.
3. Man bestimme zu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2\pi x)$, die gemäß Lemma 8.1.8 gehörende Abbildung \tilde{f} .

8.2 Gruppenoperationen

Eine klassische Methode, mathematische Objekte zu studieren, besteht in der Untersuchung der strukturerhaltenden Transformationen dieser Objekte. An den Beispielen von Ähnlichkeitsabbildungen in der euklidischen Geometrie oder der Möbiustransformationen in der hyperbolischen Geometrie haben wir dieses Vorgehen bereits kennengelernt. Allgemeiner betrachtet man dabei eine Menge von invertierbaren Transformationen, die eine Hintereinanderausführung in sinnvoller Weise zulassen. In der Mathematik entspricht dies genau einer Gruppe, also einer Menge zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung mit neutralem Element, sodass zu jedem Element ein inverses Element existiert. Kann eine beliebige Gruppe in diesem Sinn als Menge von Transformationen auf einem geometrischen oder topologischen Raum aufgefasst werden, so spricht man von einer Operation (oder Wirkung) dieser Gruppe auf dem entsprechenden Raum. In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Grundlagen derartiger Gruppenoperationen auf einem topologischen Raum zusammen. Als wichtige Beobachtung werden wir feststellen, dass jede derartige Gruppenwirkung in kanonischer Weise eine Äquivalenzrelation auf dem entsprechenden Raum induziert. Nach Abschn. 8.1 erhalten wir damit einen topologischen Quotienten, der in gewissem Sinn die betrachtete Gruppenoperation beschreibt.

Das einfachste Beispiel einer Gruppe, die sich als Menge als Transformationen einer beliebigen Menge auffassen lässt, und auch als Grundlage für alle weiteren Gruppenoperationen dient, ist folgendes:

Beispiel 8.2.1 Es sei X eine Menge. Unter $\text{Bij}(X)$ verstehen wir die bijektiven Selbstabbildungen von X . Diese bilden bzgl. der Verkettung von Abbildungen eine Gruppe.

Ebenso, wie sich jede endliche Gruppe als Untergruppe einer endlichen Permutationsgruppe auffassen lässt, entspricht eine Gruppenoperation einfach einer Untergruppe der bijektiven Selbstabbildungen einer Menge.

Definition 8.2.2 Es sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\psi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$.

Gruppenoperationen sind also spezielle Abbildungen $G \times X \rightarrow X$. Wir verwenden jedoch meist eine vereinfachte Notation.

Bemerkung 8.2.3 Ist $\psi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation, so schreiben wir für $g \in G$ und x in X meist einfach gx anstatt $\psi(g)(x)$. Dann gilt für eine Gruppenoperation gerade $(gh)x = g(hx)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ sowie $ex = x$ für das Neutralelement $e \in G$.

Definition 8.2.4 Es sei $\psi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation. Dann heißt die Operation

1. transitiv, falls zu jedem $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert mit $gx = y$,
2. effektiv, falls ψ injektiv ist.

Anschaulich bedeutet also die Effektivität einer Gruppenoperation, dass das Neutralelement das einzige Element ist, welches „nichts macht“, d. h. alle Elemente der betrachteten Menge fest lässt.

Beispiel 8.2.5 1. Es sei $X := \mathbb{R}^n$ und $G := \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann operiert G auf X vermöge der üblichen Matrizenmultiplikation. Diese Operation ist transitiv und effektiv. Offenbar operiert damit auch jede Untergruppe von G auf X . Die Untersuchung derartiger Untergruppen wird das Hauptziel der folgenden Betrachtungen sein.

2. Die Operation von $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf \mathbb{R} mit

$$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto tx,$$

ist effektiv, aber nicht transitiv (vgl. Beispiel 8.1.9).

3. Lässt man $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf \mathbb{R} vermöge

$$\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto t^2x,$$

so erhält man eine weder effektive noch transitive Operation.

Ist $\psi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine nichteffektive Operation, so ist nach einem bekannten Resultat der Gruppentheorie der Kern $N := \ker(\psi)$ nichttrivial. Die Faktorgruppe G/N induziert aber gemäß dem Homomorphiesatz für Gruppen eine effektive Operation auf X . Daher reicht es aus, sich bei der Untersuchung von Gruppenoperationen auf effektive Operationen zu beschränken.

Aufgabe 8.2.6 Man erläutere die Aussagen des letzten Absatzes anhand des dritten Beispiels aus Beispiel 8.2.5.

Operiert G auf X , so wird durch $x \sim_G y$ genau dann, wenn es ein g in G gibt mit $y = gx$, eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Man nennt in dieser Situation die Äquivalenzklasse

$$[x] := \{y \in X; x \sim_G y\} = \{y \in X; \exists g \in G \ y = gx\} =: Gx$$

von x auch die Bahn von x unter dieser Operation. Für den Raum der Äquivalenzklassen schreibt man in dieser Situation X/G .

Die Bahn eines Elementes unter einer Gruppenoperation erlaubt eine einfache Beschreibung mithilfe der Gruppenelemente, die das betrachtete Element fixieren.

Lemma 8.2.7 Ist $\text{Iso}(x) := G_x := \{g \in G; gx = x\}$ die sogenannte Isotropiegruppe von x , so ist

$$G/\text{Iso}(x) \rightarrow Gx, \quad h\text{Iso}(x) \mapsto hx$$

bijektiv.

Beweis Zunächst ist zu zeigen, dass die angegebene Abbildung wohldefiniert ist. Ist $h_1^{-1}h_2 \in \text{Iso}(x)$, so gilt $h_1^{-1}h_2x = x$, also $h_1x = h_2x$. Weiter ist sie injektiv, da aus $h_1x = h_2x$ sofort $h^{-1}h_2 \in \text{Iso}(x)$ folgt. Die Surjektivität ist klar. \square

Wir werden im Folgenden stets Gruppenoperationen auf topologischen Räumen betrachten. In dieser Situation kann der Raum der Äquivalenzklassen als topologischer Quotient betrachtet werden. Es stellt sich heraus, dass die Quotientenabbildung dann eine besondere Eigenschaft besitzt.

Lemma 8.2.8 Es seien X ein topologischer Raum und $\psi: G \rightarrow \text{Bij}(X)$ eine Gruppenoperation, sodass für jedes $g \in G$ das Bild $\psi(g)$ ein Homöomorphismus von X ist. Dann ist die Quotientenabbildung

$$\pi: X \rightarrow X/G$$

offen, d. h., Bilder offener Mengen sind offen.

Beweis Es sei $O \subset X$ offen. Dann ist

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = GO := [O] := \bigcup_{g \in G} gO = \{x \in X; \text{ ex. } g \in G, y \in O \ x = gy\}$$

als Vereinigung offener Mengen selbst offen. Nach Definition der Quotiententopologie ist dann auch $\pi(O)$ offen. \square

Aufgabe 8.2.9 Es sei $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$, die Projektion auf die zweite Komponente. Man zeige:

1. Die Projektion p ist (bzgl. der üblichen Topologie) offen.
2. Die Einschränkung $p|_\Gamma$ von p auf

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^3 - x\}$$

ist nicht offen (bzgl. der induzierten Teilraumtopologie).

8.3 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt definieren wir den für die Topologie eminent wichtigen Begriff der Mannigfaltigkeit. Mannigfaltigkeiten sind anschaulich Objekte, die lokal wie ein Teil des \mathbb{R}^n aussehen. Im Fall $n = 2$ sehen Mannigfaltigkeiten damit lokal wie eine Fläche aus. Fordert man in dieser Situation zusätzlich, dass die betrachteten Flächen kompakt sind, so stellt man fest, dass es davon erstaunlich wenig gibt. Letztendlich gibt es in gewissem Sinn nur drei Grundtypen von Flächen, nämlich die Kugeloberfläche, die Oberfläche eines Torus sowie die projektive Ebene (vgl. Definition 3.4.1). Dies ist die Aussage des Klassifikationssatzes reeller kompakter Flächen, von dem wir in diesem Abschnitt eine Beweisskizze geben.

Offenbar ist es sinnvoll, nur Flächen zu betrachten, die anschaulich aus einem Stück bestehen. Derartige topologische Räume nennt man zusammenhängend, d. h., sie lassen sich nicht als Vereinigung zweier disjunkter nichtleerer offener Teilmengen darstellen.

Definition 8.3.1 Es sei X ein zusammenhängender hausdorffscher topologischer Raum sowie $n \in \mathbb{N}$. Man nennt X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $x \in U \subset X$ gibt, die homöomorph zur offenen Einheitskugel $U_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Ist X kompakt und gilt $n = 2$, so heißt X eine kompakte reelle Fläche.

Beispiel 8.3.2 1. Es sei $G := \mathbb{Z}^2$ und die Operation von G auf $X := \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G \times X \rightarrow X, \quad ((m_1, m_2), (x, y)) \mapsto (x + m_1, y + m_2).$$

Dann ist $T := X/G \cong S^1 \times S^1$ (mit $S^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$) eine kompakte reelle Fläche, die man als Torus bezeichnet. Anschaulich entspricht X/G einem Rettungsring bzw. einem Donut.

2. Für $n \geq 1$ sei $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sowie $G := \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, (x_1, \dots, x_{n+1})) \mapsto (gx_1, \dots, gx_{n+1}).$$

Dann ist X/G eine kompakte n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit, der sogenannte projektive Raum \mathbb{RP}_n .

Man beachte, dass im Fall $n = 2$ der Raum \mathbb{RP}_2 gerade die projektive oder elliptische Ebene \mathbb{P}_2 aus Definition 3.4.1 ist.

Beweis 1. Dies überlassen wir dem Leser als Übung (vgl. auch Aufgabe 8.1.10).

2. Es seien $\pi: X \rightarrow X/G$ die Quotientenabbildung,

$$\hat{U}_i := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i = 1\} \cong \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

und $U_i := \pi(\hat{U}_i)$. Dann ist wegen $\pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i \neq 0\}$ die Menge U_i offen in \mathbb{RP}_n . Weiter sei $[x] := \pi(x) \in \mathbb{RP}_n$ mit $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in X$.

Dazu gibt es ein $1 \leq i \leq n+1$ mit $x_i \neq 0$. Offenbar gilt

$$y := \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \in \hat{U}_i, \text{ also } \pi(y) = [x] \in U_i.$$

Damit sieht man, dass $\mathbb{RP}_n = \bigcup U_i$ gilt. Weiter ist die Einschränkung

$$\pi|_{\hat{U}_i}: \hat{U}_i \rightarrow U_i$$

stetig und bijektiv. Für eine offene Menge \hat{O} in \hat{U}_i ist offensichtlich $O := \mathbb{R}^* \hat{O}$ offen in $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Aufgrund Lemma 8.2.8 ist dann auch $\pi|_{\hat{U}_i}(\hat{O}) = \pi(O)$ offen in $U_i = \pi(\hat{U}_i)$, d. h., $\pi|_{\hat{U}_i}$ ist eine offene Abbildung. Das bedeutet aber, dass $(\pi|_{\hat{U}_i})^{-1}$ stetig ist. Insgesamt ist $\pi|_{\hat{U}_i}$ ein Homöomorphismus. Daher ist \mathbb{RP}_n eine Mannigfaltigkeit. Schließlich ist $\mathbb{RP}_n = \pi(S^n)$, mit $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ kompakt. \square

Im Folgenden wollen wir die kompakten reellen Flächen genauer studieren. Diese lassen sich durch sogenannte Flächenpolygone gut beschreiben: Unter einem Flächenpolygon versteht man ein Polygon mit $2m$ Ecken und $2m$ Kanten, bei dem jede Kante eine Orientierung besitzt und je zwei Kanten mit demselben Symbol bezeichnet werden (vgl. Abb. 8.1 – dabei sind auch „Zweiecke“ zugelassen).

Man kann in einem Flächenpolygon P gleichnamige Kanten identifizieren: Sind (A, B) und (C, D) zwei gleichorientierte Kanten, so definiert man auf P durch $tA + (1-t)B \sim tC + (1-t)D$ eine Äquivalenzrelation (im Fall unterschiedlich orientierter Kanten setzt man $tA + (1-t)B \sim (1-t)C + tD$). Die zugehörige Fläche ist dann der topologische Quotient P/\sim .

Aufgabe 8.3.3 Man überzeuge sich, dass der topologische Quotient eines Flächenpolygons eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Durch dieses Vorgehen erhält man in der Abb. 8.1 z. B. im ersten Fall die Oberfläche S^2 der Einheitskugel, die sogenannte Einheitssphäre, im zweiten Fall die projektive Ebene und im letzten Fall den Torus. Man kann diese Flächenpolygone durch Flächenworte beschreiben:

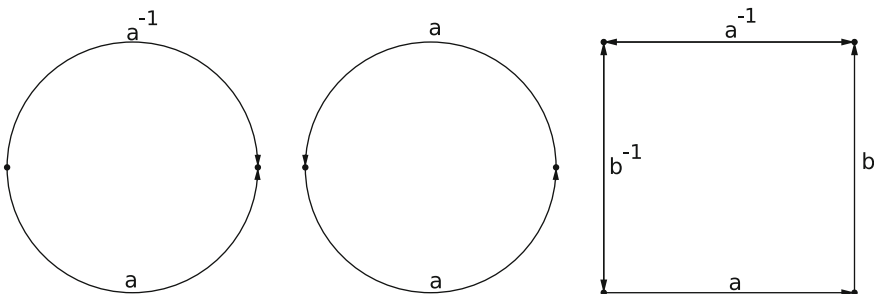


Abb. 8.1 Beispiele für Flächenpolygone

Definition 8.3.4 Ein Flächenwort ist eine Abfolge von $2n$ Buchstaben, bei der jeder Buchstabe mindestens zweimal auftritt und jeder Buchstabe durch eine Orientierung gekennzeichnet ist.

Beispiel 8.3.5 Die Flächenworte aa^{-1} , aa und $aba^{-1}b^{-1}$ beschreiben die Sphäre, die projektive Ebene sowie den Torus.

Im Folgenden stellen wir eine Methode vor, wie man aus gegebenen Flächen neue erhalten kann:

Definition 8.3.6 Es seien X und Y Flächen, $A_X \subset X$ und $A_Y \subset Y$ zur Einheitskreisscheibe homöomorphe Teilmengen sowie $\psi: \partial A_X \rightarrow \partial A_Y$ ein Homöomorphismus. Weiter sei auf

$$Z := (X \setminus \overset{\circ}{A}_X) \cup (Y \setminus \overset{\circ}{A}_Y)$$

eine Äquivalenzrelation durch $x \sim \psi(x)$ erklärt. Dann versteht man unter der topologischen Summe $X \sharp Y$ von X und Y bzgl. ψ den Raum Z / \sim .

Anschaulich werden aus X und Y also jeweils zwei Kreisscheiben entfernt und die verbleibenden Räume längs der durch das Entfernen entstandenen Ränder miteinander verklebt.

Bemerkung 8.3.7 Es sei X eine topologische Fläche und Y die Einheitssphäre, so gilt

$$X \sharp Y \cong X.$$

Aufgabe 8.3.8 Die topologischen Summen von n Tori bzw. von n projektiven Ebenen lassen sich durch die Flächenworte

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \quad \text{bzw.} \quad a_1 a_1 \dots a_n a_n$$

beschreiben.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jede kompakte Fläche entweder homöomorph zur Sphäre oder zu einer der in Aufgabe 8.3.8 dargestellten Flächen ist. Dabei geben wir eher eine informelle Beweisskizze und überlassen die Details dem Leser. Wir folgen an dieser Stelle der Darstellung aus W. Massey (vgl. Massey 1967).

Definition 8.3.9 Es sei X eine kompakte reelle Fläche. Ein (topologischer) Simplex in X ist eine Einbettung des zweidimensionalen Standardsimplexes in X . Eine Triangulierung ist eine Zerlegung

$$X = \bigcup S_i$$

von X in Simplizes, derart, dass $S_i \cap S_j$ „Kante“ sowohl von S_i als auch S_j ist, d. h., es ist Bild einer Kante des entsprechenden Standardsimplex.

Man kann zeigen, dass jede kompakte reelle Fläche triangulierbar ist (Satz von Rado, vgl. Moise 1977, Theorem 8.3). Diese Tatsache werden wir im Folgenden stillschweigend verwenden. Als erste wichtige Beobachtung stellen wir fest, dass sich jede Fläche durch ein Flächenpolygon beschreiben lässt.

Lemma 8.3.10 Es sei X eine reelle kompakte (triangulierbare) Fläche. Dann gibt es zu X ein Flächenpolygon P , sodass X aus P durch Identifikation geeigneter Kanten von P entsteht.

Beweis Wir geben lediglich eine Beweisskizze und verweisen für einen exakten Beweis auf die Literatur (vgl. etwa Moise 1977 oder Massey 1967).

Es sei eine Triangulierung S von X gegeben. Dann können wir $S = T_1, \dots, T_n$ so schreiben, dass jedes „Dreieck“ T_i mit mindestens einem Dreieck T_j , $1 \leq j \leq i-1$, eine Kante gemeinsam hat. Dies ist möglich, da X zusammenhängend ist.

Dazu konstruieren wir nun rekursiv ein Flächenpolygon für X . Zunächst sei \hat{T}_1 ein Dreieck mit $\psi_1: \hat{T}_1 \cong T_1$. Ist die aus den Dreiecken $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_{i-1}$ bestehende Fläche bereits konstruiert, so hat T_i eine Kante mit einem der Dreiecke T_1, \dots, T_i gemeinsam, etwa mit T_j . Diese Kante kann nicht im Inneren des Flächenpolygons liegen, da die resultierende Fläche sonst keine 2-Mannigfaltigkeit wäre. Daher lässt sich die bisherige Fläche um ein Dreieck \hat{T}_i erweitern.

Schließlich erhält man eine aus Dreiecken zusammengesetzte Fläche, die man mithilfe eines geeignet gewählten Homöomorphismus in ein konvexes Polygon umwandeln kann, bei dem lediglich die Seiten identifiziert werden müssen, die Dreiecken T_i und T_j der Triangulierung mit einer gemeinsamen Kante $T_i \cap T_j$ entsprechen. \square

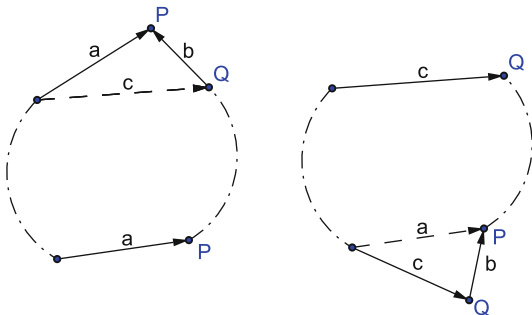
Wir brauchen nun einige Umformungsregeln für Flächenpolygone und -worte:

Lemma 8.3.11 Es seien P ein Flächenpolygon sowie E die Menge der Ecken von P . Nennt man zwei Ecken äquivalent, wenn sie beim Verkleben identifiziert werden, so sei $[E]$ die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen. Dann gibt es ein Flächenpolygon P' mit nur einer Äquivalenzklasse von Ecken, sodass die zugehörigen Flächen X_P und $X_{P'}$ homöomorph sind.

Beweis Einelementige Äquivalenzklassen können nur auftreten, wenn Flächenworte einen Abschnitt aa^{-1} enthalten. Diese aufeinanderfolgenden Kanten lassen sich gemäß Bemerkung 8.3.7 eliminieren.

Es seien nun zwei mindestens zweielementige Äquivalenzklassen vorhanden. Dann gibt es mindestens eine Kante, die zwei nichtäquivalente Punkte verbindet. Die angrenzenden Kanten sind dann ebenfalls verschieden, da man sie sonst als Sphäre eliminieren könnte. Dann führen wir die in Abb. 8.2 dargestellte Operation durch. Dadurch reduzieren wir die Elemente in einer Äquivalenzklasse. Offenbar kann man durch sukzessives Anwenden dieser Operation sowie durch die Sphärene-

Abb. 8.2 Reduktion einer Eckenäquivalenzklasse



elimination ein Flächenpolygon mit nur einer Äquivalenzklasse erhalten, ohne dass sich der Homöomorphietyp ändert. \square

Lemma 8.3.12 Treten in einem Flächenwort zwei Kanten mit derselben Orientierung auf, so kann man annehmen, dass diese Kanten aneinandergrenzen.

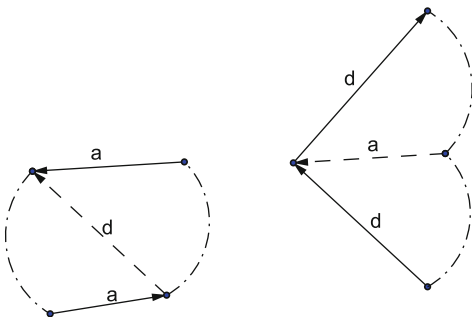
Beweis Wir geben die entsprechende Operation in Abb. 8.3 lediglich grafisch an und überlassen die Details dem Leser. \square

Lemma 8.3.13 Tritt in einem Flächenwort ein Kantenpaar mit verschiedener Orientierung auf, so gibt es ein weiteres Kantenpaar mit unterschiedlicher Orientierung, und wir können annehmen, dass diese vier Kanten in der Form $aba^{-1}b^{-1}$ auftreten.

Beweis Angenommen, es tritt nur ein Kantenpaar in der Form $\star a \star a^{-1} \star$ auf. Dann wenden wir zunächst Lemma 8.3.11 an, um sicherzustellen, dass es nur eine Äquivalenzklasse von Ecken gibt. Gemäß Lemma 8.3.12 können wir zudem erreichen, dass das zugehörige Flächenwort die Form

$$x_1 x_1 \dots x_m x_m a x_{m+1} x_{m+1} \dots x_k x_k a^{-1} x_{k+1} x_{k+1} \dots x_n x_n$$

Abb. 8.3 Nachbarkanten



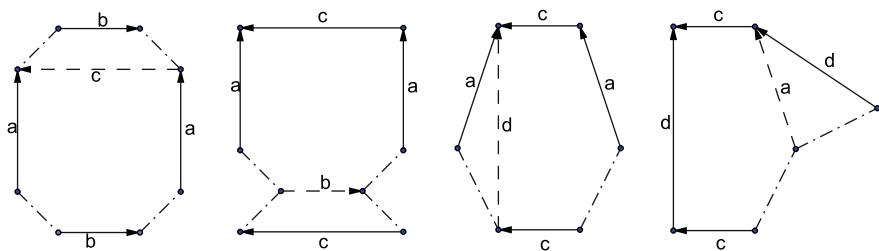


Abb. 8.4 Aneinanderhängung von Kanten

mit paarweise verschiedenen x_i hat. Dann werden aber die Endpunkte von a und a^{-1} nicht identifiziert, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass das konstruierte Flächenpolygon nur eine Äquivalenzklasse von Ecken besitzt.

Die Aneinanderhängung der vier Kanten stellen wir wieder lediglich grafisch dar (vgl. Abb. 8.4): □

Lemma 8.3.14 Die topologische Summe eines Torus und einer projektiven Ebene ist homöomorph zur Summe dreier projektiver Ebenen.

Beweis Diesen Beweis kann man wieder über das entsprechende Flächenwort führen, und wir überlassen ihn dem Leser zur Übung. □

Damit können wir nun den Klassifikationssatz für reelle kompakte Flächen beweisen:

Satz 8.3.15 Jede kompakte reelle (triangulierbare) Fläche ist entweder homöomorph zu einer Sphäre, einer Summe von Tori oder einer Summe projektiver Ebenen.

Beweis Wegen Lemma 8.3.10 können wir die Fläche durch ein Flächenpolygon und damit durch ein zugehöriges Flächenwort beschreiben. Ist die Fläche keine Sphäre, so können wir aufgrund von Lemma 8.3.12 und von Lemma 8.3.13 sehen, dass das Flächenwort aus einer Abfolge von Tori und von projektiven Ebenen besteht. Tritt keine Ebene oder kein Torus auf, so sind wir fertig. Wenn beides auftritt, können wir die Anzahl der Tori aufgrund von Lemma 8.3.14 um eins reduzieren. Damit folgt die Behauptung induktiv. □

8.4 Fundamentalgruppe topologischer Räume

In diesem Abschnitt studieren wir einige Methoden der algebraischen Topologie. Die Grundidee der algebraischen Topologie besteht darin, topologischen Räumen ein algebraisches Objekt zuzuordnen, welches unter Homöomorphismen invariant (bis auf

Isomorphie) ist. Damit lassen sich häufig topologische-geometrische Fragestellungen in algebraische Probleme übersetzen, die sich dann mit Methoden der Algebra bearbeiten und lösen lassen. Dieses Vorgehen hat sich sowohl für die Topologie als auch für die Geometrie als äußerst fruchtbar erwiesen. Wir werden es anhand des Beispiels der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes vorstellen. Als Anwendung zeigen wir die zweidimensionale Variante des berühmten Fixpunktsatzes von Brouwer.

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes beschreibt anschaulich den Typ von (geschlossenen) Wegen, die in diesem Raum möglich sind.

Definition 8.4.1 1. Ein Weg in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma: I := [0, 1] \rightarrow X$. Er heißt geschlossen, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt.
 2. Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Elementen $x, y \in X$ einen Weg $\gamma: I \rightarrow X$ gibt, der beide verbindet, d.h. $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Die beiden Begriffe „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ liefern überraschenderweise nicht das Gleiche. Das bekannte Standardbeispiel wird in der folgenden Aufgabe dargestellt.

Aufgabe 8.4.2 *Man zeige:*

1. Ist X wegzusammenhängend, dann ist X auch zusammenhängend.
2. Die Menge

$$T := \{0\} \times \mathbb{R} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

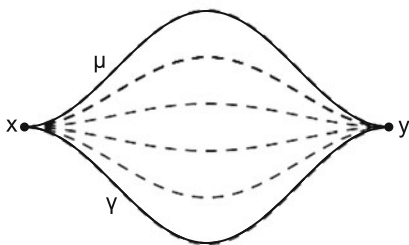
ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

In diesem Abschnitt werden wir uns in erster Linie auf wegzusammenhängende Räume beschränken. Ganz analog wie im Fall der hyperbolischen Ebene in Bemerkung 4.2.5 lassen sich auch Wege in topologischen Räumen invertieren und aneinanderhängen. Dazu seien $\gamma: I \rightarrow X$ und $\mu: I \rightarrow X$ Wege in X mit $\gamma(1) = \mu(0)$, wobei I wie im gesamten vorliegenden Abschnitt das Einheitsintervall $I := [0, 1]$ bezeichnet. Dann ist wieder der zu γ inverse Weg durch $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$ definiert. Die Aneinanderhängung von γ und μ ist

$$\gamma * \mu: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \mu(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Der entscheidende Begriff für die Definition der Fundamentalgruppe ist der Begriff der Homotopie.

Abb. 8.5 Homotopie von Wegen



Definition 8.4.3 Es seien $\gamma, \mu: I \rightarrow X$ zwei Wege mit $\gamma(0) = \mu(0) =: x$ und $\gamma(1) = \mu(1) =: y$. Eine stetige Abbildung $H: I \times I \rightarrow X$ mit

$$H(0, t) = \gamma(t), \quad H(1, t) = \mu(t), \quad t \in I, \quad H(s, 0) = x \text{ und } H(s, 1) = y, \quad s \in I,$$

heißt eine Homotopie zwischen γ und μ und man sagt, dass dann γ zu μ homotop ist. Dafür schreibt man kurz $\gamma \sim_h \mu$.

Die anschauliche Idee der Homotopie ist, dass dabei der eine Weg stetig in den anderen deformiert wird (vgl. dazu auch die Abb. 8.5).

Beispiel 8.4.4 Es seien $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex sowie $\gamma, \mu: I \rightarrow X$ zwei Wege mit $\gamma(0) = \mu(0)$ und $\gamma(1) = \mu(1)$. Dann sind γ und μ homotop.

Beweis Wir definieren $H(s, t) := (1 - s)\gamma(t) + s\mu(t)$. Dann ist H offenbar eine Homotopie zwischen γ und μ . \square

Die Terminologie einer Homotopie *zwischen* zwei Wegen suggeriert, dass „homotop zu“ eine symmetrische Relation ist. Dies trifft in der Tat zu:

Lemma 8.4.5 Die Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege mit festem Anfangs- und Endpunkt.

Beweis Es seien x, y der fest gewählte Anfangs- bzw. Endpunkt. Die Reflexivität ist einfach: Zu einem Weg $\gamma: I \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ liefert $H(s, t) := \gamma(t)$ offenbar eine Homotopie zwischen γ und γ .

Ähnlich sieht man die Symmetrie ein: Sind γ und μ homotop mit einer Homotopie H , so wird durch $H^{-1}(s, t) := H(1 - s, t)$ eine Homotopie zwischen μ und γ definiert.

Für den Nachweis der Transitivität seien γ, μ und ν Wege in X mit Anfangspunkt x und Endpunkt y , sodass jeweils γ und μ sowie μ und ν homotop mit zugehörigen Homotopien H und K seien. Dann ist

$$L: I \times I \rightarrow X, \quad \text{mit } L(s, t) := \begin{cases} H(2s, t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s - 1, t), & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen γ und ν . \square

Wir führen folgenden Begriffsbildung ein: Zu $x \in X$ sei

$$\Gamma_x := \{\gamma: I \rightarrow X; \gamma(0) = \gamma(1) = x, \gamma \text{ stetig}\}$$

die Menge der geschlossenen Wege in X mit Anfangs- und Endpunkt x . Damit können wir den zentralen Begriff der Fundamentalgruppe definieren.

Definition 8.4.6 Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt die Menge der Äquivalenzklassen der Wege in Γ_x (also der geschlossenen Wege mit Anfangs- (und Endpunkt) in x) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ von X zum Basispunkt x .

Eine erstaunliche und für ihre Anwendung sehr nützliche Eigenschaft der Fundamentalgruppe besteht darin, dass sich – wie der Name bereits andeutet – darauf eine Gruppenstruktur definieren lässt. Dazu definiert man für zwei geschlossene Wege $\gamma, \mu \in \Gamma_x$ die Verknüpfung ihrer Klassen durch

$$[\gamma] \star [\mu] := [\gamma * \mu]. \quad (8.1)$$

Dabei muss natürlich überprüft werden, dass diese Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten einer Klasse ist.

Bemerkung 8.4.7 Sind $\gamma, \gamma', \mu, \mu' \in \Gamma_x$ mit $\gamma \sim_h \gamma'$ und $\mu \sim_h \mu'$, dann gilt auch $\gamma * \mu \sim_h \gamma' * \mu'$.

Beweis Es seien H eine Homotopie zwischen γ und γ' sowie K eine Homotopie zwischen μ und μ' . Dann rechnet man schnell nach, dass

$$L(s, t) := \begin{cases} H(s, 2t); & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(s, 2t - 1); & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\gamma * \mu$ und $\gamma' * \mu'$ liefert. \square

Satz 8.4.8 Es sei X ein topologischer Raum mit Basispunkt x . Die durch (8.1) definierte Verknüpfung induziert auf $\pi_1(X, x)$ eine Gruppenstruktur, deren Neutralelement die Klasse des konstanten Weges $\varepsilon_x: I \rightarrow X, t \mapsto x$, ist.

Beweis Wir zeigen zunächst die Assoziativität. Dazu seien $\gamma, \mu, \nu \in \Gamma_x$. Dann liefert

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma * \mu((2-s)t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu * \nu(st + t - s), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $(\gamma * \mu) * \nu$ und $\gamma * (\mu * \nu)$.

Dass zu jedem $\gamma \in \Gamma_x$ stets $\gamma \sim_h \gamma * \varepsilon_x$ gilt, überlassen wir dem Leser zur Übung. Es bleibt, die Existenz eines Inversen zu zeigen. Dazu sei zu $\gamma \in \Gamma_x$ die Abbildung

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma(2st), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s(1-t)), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Wie man schnell nachrechnet, liefert H eine Homotopie zwischen ε_x und $\gamma * \gamma^{-1}$, was zeigt, dass das Inverse der Klasse $[\gamma]$ gerade die Klasse $[\gamma^{-1}]$ des inversen Weges ist. \square

Ein Schönheitsfehler der bisherigen Konstruktion ist, dass die Fundamentalgruppe nach Konstruktion vom Basispunkt abhängt. In den uns interessierenden Räumen stimmen aber alle Fundamentalgruppen (bis auf Isomorphie von Gruppen) überein:

Lemma 8.4.9 Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x, y \in X$. Dann sind die beiden Gruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ isomorph.

Beweis Es sei $\nu: I \rightarrow X$ ein Weg mit $\nu(0) = x$ und $\nu(1) = y$ und die Abbildung

$$T_\nu: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x) \text{ definiert durch } [\gamma] \mapsto [\nu^{-1} * \gamma * \nu].$$

Wie oben überprüft man, dass diese Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist, also nicht von den Repräsentanten abhängt. Ebenso rechnet man mit ähnlichen Argumenten wie beim Beweis von Satz 8.4.8 nach, dass T_ν ein Gruppenhomomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), [\mu] \mapsto [\nu * \mu * \nu^{-1}].$$

ist (die Details überlassen wir an dieser Stelle dem Leser zur Übung). Damit erhält man die Behauptung. \square

Da es bei der Untersuchung eines Raumes mithilfe der Fundamentalgruppe nur auf den Isomorphietyp der Gruppe ankommt, macht folgende Definition Sinn:

Definition 8.4.10 Ist X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, so versteht man unter der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X die Gruppe $\pi_1(X, x)$ für einen beliebigen Punkt $x \in X$.

Wie erwähnt, ist die Fundamentalgruppe damit bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Mithilfe des Beispiels 8.4.4 können wir bereits für eine große Klasse topologischer Räume die Fundamentalgruppe angeben.

Beispiel 8.4.11 Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so gilt $\pi(X) = \{1\}$, d. h., die Fundamentalgruppe ist trivial.

Räume mit trivialer Fundamentalgruppe werden auch als einfach zusammenhängend bezeichnet. Diese müssen nicht konvex sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Aufgabe 8.4.12 Man zeige für $n \geq 3$ und $y \in \mathbb{R}^n$, dass $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{y\}) = \{1\}$ gilt.

Bisher hatten wir nur Räume mit trivialer Fundamentalgruppe betrachtet. Eine naheliegende Frage ist, ob es überhaupt Räume mit nichttrivialer Fundamentalgruppe gibt und was wohl das einfachste Beispiel für einen solchen Raum ist. Es stellt sich heraus, dass der Rand des Einheitskreises ein Beispiel eines Raumes mit nichttrivialer Fundamentalgruppe liefert. Anschaulich erscheint es naheliegend, dass der Weg, der das einmalige Umlaufen des Kreises beschreibt, nicht innerhalb des Einheitskreises auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Um dies aber sauber nachzuweisen, benötigen wir etwas Vorarbeit:

Definition 8.4.13 Es sei $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zu einer stetigen Abbildung $f: Z \rightarrow Y$ von einem weiteren topologischen Raum Z nach Y heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f}: Z \rightarrow X$ eine *Liftung* von f (bzgl. p), wenn $f = p \circ \tilde{f}$ gilt.

Beispiel 8.4.14 Es sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ definiert durch $\varphi \mapsto \exp(2\pi i \varphi)$. Dann ist für jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ der Weg $\tilde{\gamma}_m: I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto tm$ eine Liftung von $\gamma_m: I \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi i mt)$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass im Fall des Beispiels 8.4.14 jeder Weg in S^1 eine Liftung auf \mathbb{R} besitzt. Dazu zeigen wir etwas allgemeiner:

Satz 8.4.15 Es seien $K := I^k \subset \mathbb{R}^k$ der Einheitswürfel in \mathbb{R}^k und $f: K \rightarrow S^1$ stetig mit $f(0, \dots, 0) = 1$. Weiter sei $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Abbildung aus Beispiel 8.4.14. Dann gibt es genau eine Liftung $\tilde{f}: K \rightarrow \mathbb{R}$ von f mit $\tilde{f}(0, \dots, 0) = 0$.

Beweis Wir zeigen zunächst die Existenz einer Liftung und unterscheiden dazu die Fälle $k = 1$ und $k > 1$ (der Fall $k = 0$ ist trivial). Im Fall $k = 1$ gibt es für $K = I$ eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1, \quad m \in \mathbb{N}$$

von I , sodass es zu jedem $1 \leq i \leq m$ ein $z_i \in S^1$ gibt mit $z_i \notin f([t_{i-1}, t_i])$. Die Mengen $p^{-1}(S^1 \setminus \{z_i\})$ zerfallen in eine disjunkte Vereinigung von Intervallen J_{ij} , $j \in \mathbb{Z}$, auf denen die Einschränkungen

$$p|_{J_{ij}}: J_{ij} \rightarrow S^1 \setminus \{z_i\}$$

bijektiv sind. Wir definieren nun für jedes $1 \leq i \leq m$ rekursiv Intervalle J_i , wobei jedes J_i ein Intervall der J_{ij} , $j \in \mathbb{Z}$, ist. Dazu sei J_1 dasjenige Intervall J_{1j} , $j \in \mathbb{Z}$, für welches $0 \in J_{1j}$ gilt. Zu $i > 1$ sei J_i dasjenige J_{ij} , welches $(p|_{J_{i-1}})^{-1}(f(t_{i-1}))$ enthält. Mit diesen J_i definieren wir nun für $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq m$ die Abbildung \tilde{f} durch

$$\tilde{f}(t) := (p|_{J_i})^{-1} \circ f.$$

Setzt man zusätzlich $\tilde{f}(0) := 0$, so ist nach Konstruktion klar, dass \tilde{f} stetig und eine Liftung von f ist.

Im Fall $k > 1$ betrachten wir zu $\tau \in K$ den Weg $\gamma_\tau: I \rightarrow K, t \mapsto t\tau$. Dann lässt sich $f \circ \gamma_\tau$ nach dem ersten Fall zu einer Abbildung $\widetilde{f \circ \gamma_\tau}$ liften. Dann definieren wir $\tilde{f}(\tau) := \widetilde{f \circ \gamma_\tau}(1)$. Dass die so konstruierte Abbildung eine Liftung von f ist und $\tilde{f}(0) = 0$ gilt, ist offensichtlich; den Nachweis der Stetigkeit von \tilde{f} überlassen wir dem Leser.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Liftungen \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 von f . Nach Definition gilt dann $p \circ \tilde{f}_1(t) = p \circ \tilde{f}_2(t)$, also $h(t) := \tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_2(t) \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in K$. Da h als Differenz stetiger Abbildungen stetig ist, ist h konstant. Weil nach Konstruktion $h(0) = 0$ gilt, erhält man $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. \square

In der Topologie nennt man eine Abbildung, die ähnliche Eigenschaften wie die Abbildung p aus Beispiel 8.4.14 hat, eine Überlagerung und beweist für diesen Typ von Abbildung eine zu Satz 8.4.15 analoge Aussage. Uns reicht aber das Ergebnis aus Satz 8.4.15 aus, um die Fundamentalgruppe von S^1 zu bestimmen.

Korollar 8.4.16 Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zu \mathbb{Z} .

Beweis Wir wählen den Basispunkt $1 \in S^1$ und betrachten $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$. Mit $\gamma_m, m \in \mathbb{Z}$, bezeichnen wir die m -fache Hintereinanderhängung von γ bzw. γ^{-1} (für negatives m). Dann stellen wir als Erstes fest, dass die Wege γ_m für verschiedene m jeweils nicht homotop sind: Die nach 8.4.15 eindeutig bestimmten Liftungen von γ_m mit Anfangspunkt 0 sind nach Beispiel 8.4.14 die Wege $\tilde{\gamma}_m$ mit $\tilde{\gamma}_m(t) = mt$. Eine Homotopie H zweier Wege γ_m und $\gamma_{m'}$ lässt sich wieder nach Satz 8.4.15 zu einer stetigen Abbildung \tilde{H} und damit einer Homotopie zweier Wege $\tilde{\gamma}_m$ und $\tilde{\gamma}_{m'}$ liften, die dann zwangsläufig $p \circ \tilde{H}(s, 1) = H(s, 1) = 1$ erfüllt. Da \tilde{H} stetig ist, folgt $m = m'$.

Weiter ist jeder Weg $\gamma: I \rightarrow S^1$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ homotop zu einem γ_m . Um dies einzusehen, sei $\tilde{\gamma}$ eine Liftung von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Dann gilt $\tilde{\gamma}(1) = m \in \mathbb{Z}$ für ein m . Gemäß Beispiel 8.4.4 gibt es eine Homotopie \tilde{H} zwischen $\tilde{\gamma}_m$ und $\tilde{\gamma}$. Dann ist $H := p \circ \tilde{H}$ eine Homotopie zwischen γ_m und γ .

Insgesamt stellt man fest, dass $\pi_1(X, 1) = \mathbb{Z}[\gamma] \cong \mathbb{Z}$ gilt. \square

Anschaulich beschreibt die Klasse γ eines Weges in S^1 , wie oft γ in mathematisch positiver Richtung um den Kreis S^1 herumläuft. Man nennt dies auch die Umlaufzahl von γ um den Ursprung. Damit liefert die Fundamentalgruppe eine Möglichkeit, ein mathematisch stringentes Konzept der Umlaufzahl zu definieren.

Aufgabe 8.4.17 Man zeige, dass $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ gilt.

Die im Beweis des Korollars 8.4.16 verwendete Eigenschaft, dass eine stetige Abbildung eine Homotopie zweier Wege in eine Homotopie der Bildwege überführt, kann man verwenden, um einer solchen Abbildung eine zugehörige Abbildung der Fundamentalgruppen zuzuordnen.

Definition 8.4.18 Es seien $X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, $x \in X$ ein Basispunkt sowie $y := f(x)$. Dann wird durch

$$f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y), [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppenhomomorphismus der zugehörigen Fundamentalgruppen definiert.

Die Zuordnung $f \rightarrow f_*$ wird auch als ein Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen bezeichnet, da er verträglich mit der Komposition von Abbildungen ist.

Bemerkung 8.4.19 Es seien X, Y, Z topologische Räume mit Basispunkten x, y, z . Weiter seien die Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetig mit $f(x) = y$ und $g(y) = z$. Dann gilt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$. Gilt $X = Y$ und $f = \text{id}_X$, so hat man $f_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}$.

Den einfachen Beweis dieser Bemerkung überlassen wir dem Leser zur Übung. Insbesondere folgt daraus, dass es zwischen zwei wegzusammenhängenden Räumen nur dann einen Homöomorphismus geben kann, wenn ihre Fundamentalgruppen isomorph sind. Speziell erhält man:

Korollar 8.4.20 Die Räume \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^n sind für $n \geq 3$ nicht homöomorph.

Beweis Andernfalls sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist auch

$$f' := f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$$

ein Homöomorphismus. Gemäß den Aufgaben 8.4.12 und 8.4.17 haben diese beiden Räume aber unterschiedliche Fundamentalgruppen. \square

Die letzte Aussage ist für uns gerade aus geometrischer Sicht interessant. Bei der Axiomatisierung der Geometrie nach Hilbert hatten wir mithilfe des Axioms 1.2.7 von Pasch sichergestellt, dass sich ebene Geometrie und räumliche Geometrie unterscheiden. Das Korollar 8.4.20 zeigt nun, dass zwischen den Standardmodellen für die Ebene und den Raum bereits aus rein topologischer Sicht ein Unterschied besteht.

Zum Abschluss des Abschnittes über die Fundamentalgruppe nutzen wir diese noch, um ein fundamentales Ergebnis über die abgeschlossene Einheitskreisscheibe zu zeigen, den sogenannten Brouwerschen Fixpunktsatz. In seiner klassischen Formulierung besagt dieser, dass jede stetige Abbildung der Vollkugel $D_n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ in sich selbst einen Fixpunkt besitzt. Wir beweisen dies für den Fall der Ebene.

Satz 8.4.21 (Brouwerscher Fixpunktsatz der Ebene) Es sei $f: D_2 \rightarrow D_2$ eine stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Dann gibt es ein $y \in D_2$ mit $f(y) = y$.

Beweis Andernfalls sei zu $x \in D_2$ der Punkt $g(x)$ der Schnittpunkt des von $f(x)$ ausgehenden Strahles durch x mit dem Rand $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$ von D_2 . Anschaulich ist es naheliegend, dass die Abbildung $x \mapsto g(x)$ stetig ist; der rechnerische Nachweis ist etwas aufwendig und wir verzichten an dieser Stelle darauf. Ist nun $\gamma: I \rightarrow S^1$ ein geschlossener Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) =: z$, so gibt es gemäß Beispiel 8.4.11 eine Homotopie $H: I^2 \rightarrow D_2$ mit $\gamma \underset{h}{\sim} \varepsilon_z$. Dann ist aber $g \circ H$ eine Homotopie zwischen γ und ε_z in S^1 . Damit müsste aber $\pi(S^1, z) = 0$ gelten im Widerspruch zu Korollar 8.4.16. \square

Etwas abstrakter ließe sich der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes mithilfe des Fundamentalgruppenfunktors führen: Für die Einbettung $\iota: S^1 \rightarrow D_2$ gilt mit der Abbildung g aus dem Beweis von Satz 8.4.21 die Beziehung

$$g_* \circ \iota_* = (g \circ \iota)_* = \text{id}_*: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dies impliziert, dass die Abbildung $g_*: \{1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist, was offensichtlich nicht sein kann.

Um den Brouwerschen Fixpunktsatz in höheren Dimension zu zeigen, benötigt man höherdimensionale Varianten der Fundamentalgruppe. Beispielsweise kann man anstelle geschlossener Wege, also Abbildungen des Randes des Einheitskreises, Abbildungen höherdimensionaler Sphären in den topologischen Raum betrachten. Wir werden diesen Ansatz an dieser Stelle aber nicht weiter verfolgen, sondern verweisen den Leser auf weiterführende Literatur zur Topologie, etwa tom Dieck (2000) oder Stöcker und Zieschang (1994).

8.5 Gruppenoperationen auf dem \mathbb{R}^n

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen allgemeinen Aussagen über Gruppenoperationen auf dem \mathbb{R}^n . Unser Hauptaugenmerk liegt dabei auf geometrisch relevanten Gruppen, wie etwa Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (eine ausführliche Darstellung der Geometrie derartiger Gruppen findet man in Beardon 1983). Diese operieren kanonisch auf dem \mathbb{R}^n und können oftmals durch diese Operationen charakterisiert werden.

Die allgemeinste auf dem \mathbb{R}^n operierende Gruppe ist die Gruppe $\text{Bij}(\mathbb{R}^n)$ aller bijektiven Selbstabbildungen des \mathbb{R}^n . Weitere prinzipiell interessante Gruppen sind die Gruppen

$$\text{Top}(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ Homöomorphismus}\},$$

$$\text{Diff}(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ bijektiv, } f, f^{-1} \text{ differenzierbar}\}$$

der Homöomorphismen bzw. Diffeomorphismen, welche eher für die klassische Topologie oder die Differentialtopologie (und Differentialgeometrie) interessant sind und von uns hier nicht weiter untersucht werden sollen. Für uns wichtige Gruppen sind zum einen die Gruppe der Vektorraumautomorphismen von \mathbb{R}^n , die bekanntlich

nach Wahl einer Basis isomorph zur $GL_n(\mathbb{R})$ ist und die wir im Folgenden damit identifizieren werden, und zum anderen die Translationsgruppe $T \cong \mathbb{R}^n$, welche auf dem \mathbb{R}^n vermöge

$$T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto x + t$$

operiert. Die von diesen in $\text{Bij}(\mathbb{R}^n)$ erzeugte Untergruppe ist die Gruppe $AGL_n(\mathbb{R})$ der affinen Transformationen des \mathbb{R}^n , die oft auch kurz als affine Gruppe bezeichnet wird.

Definition 8.5.1 Es sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge von G . Dann heißt

$$\langle M \rangle := \bigcap_{M < H, H \text{ UG}} H$$

die von M in G erzeugte Untergruppe.

Es ist leicht einzusehen, dass $\langle M \rangle$ in der Tat eine Untergruppe von G ist. Explizit hat man:

Bemerkung 8.5.2 In der Notation von Definition 8.5.1 gilt

$$\langle M \rangle = \{m_1^{e_1} m_2^{e_2} \dots m_s^{e_s}; m_i \in M; e_i = \pm 1\}.$$

Da beim Verknüpfen zweier Gruppenelemente die Reihenfolge eine Rolle spielt, lässt sich diese Darstellung im Allgemeinen nicht vereinfachen. Im Fall der affinen Transformationen jedoch lässt sich eine einfachere Darstellung finden:

Lemma 8.5.3 Jedes $f \in AGL_n(\mathbb{R})$ lässt sich in der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ darstellen.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Verkettung einer Translation mit einem Vektorraumautomorphismus von \mathbb{R}^n die gewünschte Form hat. Dies ist aber wegen

$$A(x + t) = Ax + At$$

offenbar richtig. □

Da die Translationgruppe eine einfach zu verstehende Struktur besitzt, kann man sich im Prinzip auf die Operation von $GL_n(\mathbb{R})$ bzw. deren Untergruppen beschränken. Wichtige derartige Gruppen sind die spezielle lineare Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$, die orthogonale Gruppe $O(n)$ und die Gruppe der Kongruenzabbildungen (oder Isometrien) des \mathbb{R}^n :

Definition 8.5.4 Für den \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt und der daraus resultierenden Norm heißt eine geraden- und längentreue Abbildung eine Kongruenzabbildung des \mathbb{R}^n .

Bemerkung 8.5.5 Wie in Satz 2.3.4 zeigt man, dass jede Kongruenzabbildung f von der Form

$$f(v) = Av + b$$

mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

Für die Untersuchung von Gruppenoperationen bildet der Begriff konjugierter Untergruppen ein wichtiges Hilfsmittel.

Definition 8.5.6 Zwei Untergruppen $H_1, H_2 \subset G$ einer Gruppe G heißen konjugiert in G , falls es ein $\Psi \in G$ gibt mit

$$H_1 = \Psi^{-1}H_2\Psi.$$

Bemerkung 8.5.7 Offenbar ist Konjugiertheit von Gruppen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G .

Im gewissen Sinne operieren zwei konjugierte Untergruppen in analoger Weise, insbesondere sind konjugierte Gruppen offensichtlich isomorph. Allerdings ist der Begriff der Konjugation deutlich schärfer.

Lemma 8.5.8 1. Es seien H_1 und H_2 zwei durch Ψ konjugierte Untergruppen von $\text{Bij}(\mathbb{R}^n)$; weiter sei x ein Fixpunkt von H_2 , d. h., für alle $h \in H_2$ gilt $hx = x$. Dann ist $\Psi^{-1}(x)$ ein Fixpunkt von H_1 .

2. Konjugierte Untergruppen einer Gruppe G sind als abstrakte Untergruppen isomorph; die Umkehrung jedoch ist falsch.

Beweis 1. Für jedes $h_1 \in H_1$ gibt es ein $h_2 \in H_2$ mit $h_1 = \Psi^{-1}h_2\Psi$. Dann gilt

$$h_1(\Psi^{-1}(x)) = \Psi^{-1}h_2\Psi(\Psi^{-1}(x)) = \Psi^{-1}(x).$$

2. Den ersten Teil überlassen wir dem Leser als Übung, für den zweiten Teil betrachten wir die beiden Untergruppen

$$C_2 := \{I_2, -I_2\} \quad \text{und} \quad S_x := \left\{ I_2, S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, die Drehgruppe um den Winkel π und die Spiegelungsgruppe zur Spiegelung an der x -Achse. Diese sind offenbar isomorph, da sie beide zyklisch der Ordnung 2 sind. Wären sie (in $\text{GL}_2(\mathbb{R})$) konjugiert, so gäbe es eine Matrix Ψ mit $\Psi^{-1}S\Psi = -I_2$. Anwenden der Determinanten liefert $-1 = 1$, einen Widerspruch. \square

Im letzten Beweis liefert der erste Teil auch ein geometrisches Argument für die zweite Aussage: Die erste Gruppe hat genau einen Fixpunkt, die zweite jedoch unendlich viele. Daher können sie nach der ersten Aussage nicht konjugiert sein (nicht einmal in $\text{Bij}(\mathbb{R}^2)$).

Wir zeigen nun noch, dass endliche Untergruppen der Kongruenzgruppe sich immer als Untergruppen der orthogonalen Gruppe auffassen lassen.

Lemma 8.5.9 Es sei G eine endliche Untergruppe von AGL_n . Dann hat G einen Fixpunkt.

Beweis Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$p := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x).$$

Wegen Bemerkung 8.5.3 ist jedes $h \in G$ von der Form $h(x) = Ax + b$. Daher gilt

$$\begin{aligned} h(p) &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Ag(x) \right) + b = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (Ag(x) + b) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h(g(x)) = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} h'(x) = p. \end{aligned}$$

□

Korollar 8.5.10 Ist G eine endliche Untergruppe der Kongruenzgruppe von \mathbb{R}^n , so ist G konjugiert zu einer Untergruppe von $O(n)$.

Beweis Nach Lemma 8.5.9 hat G einen Fixpunkt p . Es sei Ψ die Translation, die null auf p abbildet. Dann hat $H := \Psi^{-1}G\Psi$ wegen Lemma 8.5.8 den Fixpunkt null und man erhält die Behauptung. □

8.6 Symmetriegruppen von Polytopen

In diesem Abschnitt gehen wir auf den Spezialfall der Symmetriegruppen von regelmäßigen Polytopen ein. Zunächst beschränken wir uns auf die Ebene, d. h. auf die Symmetrien eines regelmäßigen Polygons.

Definition 8.6.1 Es sei P ein regelmäßiges Polygon mit n Ecken (kurz: n -Polygon). Dann heißt die Menge der Kongruenzabbildungen des \mathbb{R}^2 , welche P in sich selbst überführen, die Symmetriegruppe oder Diedergruppe von P und wird mit D_n bezeichnet.

Offenbar sind die Diedergruppen zweier n -Polygone isomorph, sogar konjugiert. Daher macht es Sinn, von der Diedergruppe D_n zu sprechen. Um diese zu untersuchen, stellen wir n -Polygone wie in Beispiel 5.3.4 mithilfe der Einheitswurzeln dar.

Beispiel 8.6.2 Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Weiter sei

$$E_n := \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$$

die Menge der n -ten Einheitswurzeln. Dann ist $P := \text{conv}(E_n)$ ein n -Polygon.

1. Für jedes $\zeta \in E_n$ ist die Multiplikation mit ζ ein Element von D_n .
2. Die Spiegelung

$$\sigma_x : z \mapsto \bar{z}$$

an der reellen Achse ist ein Element von D_n .

Den Beweis dieser Aussagen überlassen wir dem Leser zur Übung.

Satz 8.6.3 Die Diedergruppe D_n hat genau $2n$ Elemente und wird von zwei Elementen erzeugt.

Beweis Wir betrachten die Situation in Beispiel 8.6.2. Dann ist für jedes $\zeta \in E_n$ auch $\sigma_\zeta := \zeta \sigma_x \in D_n$. Offenbar gilt für $\zeta \neq \zeta'$ auch $\sigma_\zeta \neq \sigma_{\zeta'}$ und daher hat D_n in dieser Situation mindestens die $2n$ Elemente $E_n \cup \{\sigma_\zeta; \zeta \in E_n\} =: D'$ und diese Gruppe (Beweis!) wird von einer primitiven Einheitswurzel ζ und σ_x erzeugt.

Es bleibt zu zeigen, dass $D' = D_n$ gilt. Dazu sei nun τ ein beliebiges Element von D_n und $\zeta := \tau(1) \in E_n$. Dann fixiert $\tau' := \zeta^{-1}\tau$ den Punkt $1 \in D_n$. Wir behaupten, dass dann $\tau' = \text{id}$ oder $\tau' = \sigma_x$ gilt: Als Kongruenzabbildung können wir annehmen, dass τ' entweder eine Spiegelung oder eine Drehung ist (vgl. Satz 2.3.11). Es sei $\xi \in E_n$ eine Einheitswurzel, sodass $\bar{\xi}1$ eine Kante von P ist. Wegen $\tau'(1) = 1$ gilt entweder $\tau'(\xi) = \xi$ oder $\tau'(\xi) = \bar{\xi}$. Offenbar gilt im ersten Fall $\tau' = \text{id}$ und im zweiten Fall $\tau' = \sigma_x$. Dann ist offenbar entweder $\tau = \zeta$ oder $\tau = \zeta \sigma_x$, liegt also in D' . \square

Aufgabe 8.6.4 Man zeige in der Notation von Beispiel 8.6.2:

1. Es gilt $\sigma_\zeta = \xi \sigma_x \xi^{-1}$, für $\xi^2 = \zeta$ (d. h., σ_ζ ist die Spiegelung an der Ursprungsgeraden durch ξ).
- 2.

$$\sigma_\zeta \sigma_x = \zeta;$$

daraus folgere man, dass die Gruppe D_n auch von den beiden Spiegelungen σ_x und σ_ζ , ζ primitiv, erzeugt wird.

- Beispiel 8.6.5**
1. Die Diedergruppe D_3 eines Dreiecks ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 .
 2. Die Diedergruppe D_4 eines Quadrats ist isomorph zur Untergruppe

$$\langle (1234), (12)(34) \rangle \subset S_4.$$

Diese Aussagen besitzen höherdimensionale Verallgemeinerungen:

Satz 8.6.6 Es sei $T_n := \text{conv}(e_1, \dots, e_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der reguläre n -dimensionale Standardsimplex. Dann ist die Symmetriegruppe $D(T_n)$ von T_n isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{n+1} .

Beweis Wir definieren die Vektoren $n_{i,j} := e_i - e_j$ und die Hyperebenen $H_{i,j}$ durch

$$H_{i,j} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle n_{i,j}, x \rangle = 0\}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j < i \leq n+1.$$

Dann gilt für $\ell \neq i, j$ offenbar $e_\ell \in H_{i,j}$, und die Spiegelung $\sigma_{i,j}$ an $H_{i,j}$ mit

$$\sigma_{i,j}(e_\ell) = e_\ell, \quad \sigma_{i,j}(e_i) = e_j \text{ und } \sigma_{i,j}(e_j) = e_i$$

ist offenbar eine Kongruenzabbildung, die T_n in sich überführt, liegt also in $D(T_n)$. Das Bild der kanonischen Einbettung $D(T_n) \rightarrow S_{n+1}$ enthält somit alle Transpositionen. Da diese S_{n+1} erzeugen, folgt die Behauptung. \square

Satz 8.6.7 Die Symmetriegruppe $D(C_3)$ des Würfels

$$C_3 := \text{conv} \left(\sum_{i=1}^3 a_i e_i; \quad a_i = \pm 1 \right) \subset \mathbb{R}^3$$

besteht aus 48 Elementen, nämlich 24 Drehungen und 24 Spiegelungen. Dabei lässt sich jede Spiegelung als Verkettung einer Drehung und der Spiegelung am Ursprung realisieren.

Beweis Wir bestimmen zunächst alle geraden Elemente (mit Determinante 1) in $D(C_3)$, die sogenannte Drehgruppe des Würfels C_3 . Dazu gehören einmal alle Drehungen um Flächenmittelpunkte (mit Ordnung 4 – diese entsprechen den Drehungen einer Facette, also eines Quadrats) sowie die sechs Drehungen um die Kantenmittelpunkte (der Ordnung 2). Dazu kommen die Drehungen um die vier Raumdiagonalen, welche Ordnung 3 haben, da sie den Drehungen der zugehörigen Eckenfigur, also einem Dreieck entsprechen. Dies liefert bereits 24 gerade Symmetrien, und offenbar kann es keine weiteren Drehungen geben.

Die Spiegelung σ_0 am Ursprung ist eine ungerade Symmetrie. Da für je zwei Drehungen ϱ_1 und ϱ_2 die Spiegelungen $\varrho_1 \sigma_0 \varrho_1^{-1}$ und $\varrho_2 \sigma_0 \varrho_2^{-1}$ verschieden sind, erzeugen die Drehungen und σ_0 eine Untergruppe D' von $D(C_3)$ mit mindestens 48 Elementen.

Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Symmetrien des Würfels C_3 gibt. Dazu betrachten wir die Untergruppe $R \subset D(C_3)$ aller Drehungen. Diese ist ein Normalteiler von $D(C_3)$, da für eine Spiegelung $\sigma \in D(C_3)$ und eine Drehung $\varrho \in R$ die Symmetrie $\sigma \varrho \sigma^{-1}$ gerade, also eine Drehung ist. Die Faktorgruppe $D(C_3)/R$ enthält dann nur Elemente der Ordnung 2 (außer dem Neutralelement), ist also nach einem bekannten Satz der Gruppentheorie (vgl. Bosch 1993, Korollar 5.12) eine Gruppe der Ordnung 2^k für ein $k \in \mathbb{N}$. Andererseits kann man R als Untergruppe von S_6 auffassen, da die Würfelgruppe isomorph zur Symmetriegruppe des Oktaeders ist, da Würfel und Oktaeder zueinander duale Polytope sind. Nun hat S_6 genau 720 Elemente, und es gilt $720 = \cdot 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Dann kann $D(C_3)$ maximal $48 = 24 \cdot 2$ Elemente haben, und die Faktorgruppe $D(C_3)/R$ ist von Ordnung 2, was die Behauptung zeigt. \square

Aufgabe 8.6.8 Man bestimme die Ordnungen der Symmetriegruppen des Dodekaeders (bzw. des Ikosaeders) (vgl. dazu Klein und Slodowy 1993).

8.7 Untergruppen der speziellen linearen Gruppe

Abschließend betrachten wir noch Untergruppen der speziellen linearen Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}.$$

Die entscheidende Beobachtung zur Untersuchung dieser Gruppe ist die Surjektion

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Iso}_o(\mathbb{H}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad (8.2)$$

dieser Gruppe auf die orientierungstreuen Isometrien $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{H})$ der hyperbolischen Ebene \mathbb{H} (vgl. Bemerkung 4.1.5, Satz 4.2.13 und Bemerkung 4.3.2), welche bis auf Multiplikation der Matrix A mit dem Faktor -1 eineindeutig ist.

Wir beschränken uns auf zyklische Untergruppen von $\mathrm{Iso}_o(\mathbb{H})$, d.h. von einer Möbiustransformation erzeugte Gruppen (vgl. Beardon 1991, Abschn. 1.2). Um das geometrische Verhalten einer derartigen Transformation besser zu verstehen, untersuchen wir die Fixpunkte einer solchen Transformation $M(z) := \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ad - bc = 1$: Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} = z &\iff az + b = cz^2 + dz \\ &\iff z_{1/2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a + d)^2 - 4}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Daher gibt es für $a + d = \pm 2$ genau einen Fixpunkt (auf der reellen Achse), für $|a + d| > 2$ zwei Fixpunkte auf der reellen Achse sowie im Fall $|a + d| < 2$ genau einen Fixpunkt in \mathbb{H} und einen in $-\mathbb{H}$.

Definition 8.7.1 Es sei

$$M(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

eine Möbiustransformation. Im Fall $a + d = \pm 2$ heißt M parabolisch, im Fall $|a + d| > 2$ hyperbolisch und im Fall $|a + d| < 2$ elliptisch.

Lemma 8.7.2 Es sei $z^* \in \mathbb{C}$ ein Fixpunkt der Möbiustransformation M , sowie S eine weitere Möbiustransformation und $T := SMS^{-1}$. Dann ist $S(z^*)$ ein Fixpunkt von T , und es gilt (für $S(z^*) \neq \infty$)

$$T'(S(z^*)) = M'(z^*).$$

Beweis Die erste Aussage ist klar (vgl. Lemma 8.5.8). Für die zweite Aussage beachte man die für beliebiges $w \in \mathbb{C}$ gültige Gleichung

$$T'(w) = S'(M(S^{-1}(w))) \cdot M'(S^{-1}(w)) \cdot \frac{1}{S'(S^{-1}(w))}.$$

Durch Einsetzen von $w = S(z^*)$ folgt die Behauptung. □

Bekanntlich hat man (vgl. den Beweis von Satz 4.2.8) für eine Möbiustransformation $M \in \text{Iso}_o(\mathbb{H})$

$$M'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Im Fall zweier Fixpunkte $z_{1/2}$ wie in (8.3) gilt

$$M'(z_{1/2}) = \frac{4}{\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)^2} \implies M'(z_1) \cdot M'(z_2) = 1.$$

Korollar 8.7.3 Im Fall einer parabolischen Transformation M mit einem Fixpunkt z^* gilt $M'(z^*) = 1$. Hat M zwei Fixpunkte $z_{1/2}$, so gilt im hyperbolischen Fall $M'(z_1) > 1$ und $M'(z_2) < 1$ (bzw. umgekehrt) und in der elliptischen Situation $|M'(z_i)| = 1$, $i = 1, 2$.

Wir untersuchen im Folgenden das geometrische Verhalten der drei oben definierten Typen von Möbiustransformationen:

Lemma 8.7.4 Ist M eine parabolische Transformation, so ist M konjugiert zu $z \mapsto z + b$ für ein geeignetes b in \mathbb{R} .

Beweis Nach Definition gibt es genau einen Fixpunkt z^* von M . Dann gibt es eine Möbiustransformation S , die diesen auf ∞ abbildet. Wegen Lemma 8.7.2 ist dann ∞ der einzige Fixpunkt von $T := SM S^{-1}$. Dann ist aber T zwangsläufig von der Form $T(z) = z + b$, wie man schnell nachrechnet. \square

Beispiel 8.7.5 Die Abbildung $M(z) = \frac{z}{z+1}$ ist über $z \mapsto -\frac{1}{z}$ konjugiert zu $z \mapsto z + 1$. Sie bildet die Bereiche zwischen den Halbkreisen in Abb. 8.6 in die jeweils benachbarten Bereiche ab.

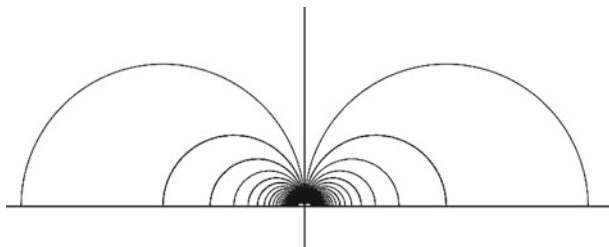


Abb. 8.6 Beispiel einer parabolischen Transformation

Aufgabe 8.7.6 Man zeige: In $\text{Iso}_o(\mathbb{H})$ ist $z \mapsto z + b$ für $b > 0$ konjugiert zu $z \mapsto z + 1$; in $\text{Kong}_h(\mathbb{H})$ ist jede Abbildung $z \mapsto z + b$, $b \neq 0$, konjugiert zu $z \mapsto z + 1$.

Lemma 8.7.7 Ist M hyperbolisch, so ist M konjugiert zu $z \mapsto kz$ mit $k > 0$.

Beweis Gemäß Lemma 4.2.15 gibt es eine Möbiustransformation $S \in \text{Iso}_o(\mathbb{H})$, die die zwei reellen Fixpunkte von M auf 0 und ∞ abbildet. Offenbar ist dann die konjugierte Abbildung $T := SMS^{-1}$ von der Form $T(z) = kz$ mit $k > 0$. \square

Durch Konjugation mit $z \mapsto -\frac{1}{z}$ kann man in Lemma 8.7.7 sogar annehmen, dass $k > 1$ gilt.

Beispiel 8.7.8 Die Abbildung $M(z) = \frac{2z}{1+z}$ ist über $z \mapsto \frac{z}{1-z}$ konjugiert zu $z \mapsto 2z$. Sie hat die Fixpunkte 0 und 1, und die Bereiche zwischen den Halbkreisen in Abb. 8.7 „wandern“ von 0 zu 1.

Lemma 8.7.9 Ist M elliptisch, so gibt es ein $t \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, sodass M konjugiert ist zu einer Abbildung der Form

$$z \mapsto \frac{\cos(t)z - \sin(t)}{\sin(t)z + \cos(t)}.$$

Beweis Bei einer elliptischen Transformation sind die beiden Fixpunkte $z_{1/2}$ aus (8.3) konjugiert komplex. Ohne Einschränkung können wir daher annehmen, dass $z_1 = i$ und $z_2 = -i$ gilt, also $a - d = 0$ und $4 - (a + d)^2 = 4c^2$ (vgl. (8.3)). Dies impliziert aber $1 = a^2 + c^2$, und somit gibt es ein $t \in [0, 2\pi[$ mit $d = a = \cos(t)$ und $c = \sin(t)$. Wegen $1 = ad - bc = \cos^2(t) - b \sin(t)$ folgt $b = -\sin(t)$ für $t \neq 0, \pi$. Offenbar liegt in den beiden übrigen Fällen $t = 0$ oder $t = \pi$ aber die Identität vor. \square

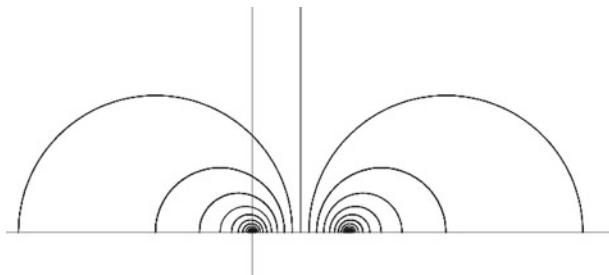
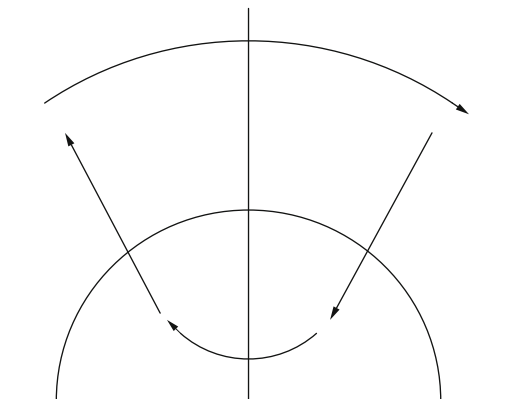


Abb. 8.7 Beispiel einer hyperbolischen Transformation

Abb. 8.8 Beispiel einer elliptischen Transformation



Umgekehrt rechnet man schnell nach, dass die angegebene Form in der Tat eine elliptische Transformation ist. Da in (8.2) genau die beiden Matrizen A und $-A$ die gleiche Möbiustransformation liefern und $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ und $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ gelten, lässt sich das t in Lemma 8.7.9 auch immer in $]0; \pi[$ wählen.

Beispiel 8.7.10 Wählt man in Lemma 8.7.9 für $t = \frac{\pi}{4}$, so erhält man (nach Erweitern) die elliptische Abbildung

$$M(z) = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Diese hat Ordnung 4, d. h. $M^4(z) = z$ (viermalige Hintereinanderausführung). Hier gibt es vier Bereiche, die durch M zyklisch aufeinander abgebildet werden (vgl. Abb. 8.8).

Aufgabe 8.7.11 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ sowie

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } M_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

die zugehörige Möbiustransformation. Weiter seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von A und z_1 bzw. z_2 die Fixpunkte von M_A . Man zeige, dass dann (bis auf Reihenfolge) $M'_A(z_i) = \frac{1}{\lambda_i^2}$ gilt.

Als abschließende Folgerung erhalten wir letztendlich eine Spezialfassung des Satzes über die Jordansche Normalform für die $SL_2(\mathbb{R})$:

Korollar 8.7.12 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Dann ist A in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert zu einer der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad |\lambda| > 1, \quad \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi[, \quad \text{oder} \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Literaturverzeichnis

- E. A. Abbot: *Flächenland*, RaBaKa-Publishing, 2009 (*Populärwissenschaftliche Erzählung*)
- L. Ahlfors: *Complex Analysis*, 2. Auflage, Mc. Graw-Hill Book Company, New York, 1966 (*Klassisches Lehrbuch zur Funktionentheorie*)
- M. Arendt: *Geometrie*, Skript für den Unterricht zwischen schriftlichem und mündlichem Abitur, Hohentwiel-Gewerbeschule Singen 2011 (*Unterrichtsskript*)
- I. Agricola, T. Friedrich: *Elementargeometrie*, 3. Auflage, Vieweg+Teubner 2011 (*Lehrbuch zur ebenen Geometrie*)
- L. M. Batten, A. Beutelspacher: *The Theory of Finite Linear Spaces*, Cambridge University Press, 1993 (*Weiterführendes Lehrbuch zu linearen Räumen*)
- A. F. Beardon: *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag 1991 (*Weiterführendes Lehrbuch mit Bezügen zur hyperbolischen Geometrie*)
- A. F. Beardon: *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1983 (*Weiterführendes Lehrbuch zu Gruppenoperationen, speziell zu Operationen von Möbiustransformationen*)
- R. Benedetti, C. Petronio: *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1992 (*Weiterführendes Lehrbuch zur hyperbolischen Geometrie*)
- H. Behnke, F. Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965 (*Klassisches Lehrbuch zur Funktionentheorie*)
- A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie*, 2. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2004 (*Umfassendes Lehrwerk zur axiomatischen projektiven Geometrie*)
- J. Bewersdorff: *Algebra für Einsteiger*, 3. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden 2007 (*Gut verständliches Lehrbuch zur Algebra*)
- H.-G. Bigalke: *Kugelgeometrie*, Otto Salle Verlag 1984 (*Lehrbuch zur sphärischen Geometrie*)
- O. Blumenthal: *Lebensgeschichte* in "D. Hilbert Gesammelte Abhandlungen", Band 3, Julius Springer, Berlin 1935, Seite 403 (*Artikel zu Hilberts Lebensgeschichte*)
- S. Bosch: *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1993 (*Lehrbuch zur Algebra*)
- C. Boyer, U. Merzbach: *A History of Mathematics*, 2. Auflage, John Wiley & Sons, New York Singapore 1989 (*Klassisches Lehrbuch zur Mathematikgeschichte*)
- A. Brøndsted: *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1983 (*Lehrbuch zu Polytopen*)

- D. Burger: *Silvestergespräche eines Sechsecks*, 9. Auflage, Aulis Verlag Deubner, Köln, 2006 (*Populärwissenschaftliche Erzählung - passt zu Abbot (2009)*)
- H. S. M. Coxeter: *Reelle Projektive Geometrie der Ebene*, Verlag von R. Oldenbourg, 1955 (*Klassisches, etwas altmodisches Lehrbuch zur projektiven Geometrie*)
- H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes*, 2. Auflage, Macmillan Company New York 1963 (*Sehr gutes Nachschlagewerk zu regulären Polytopen*)
- H. S. M. Coxeter: *Introduction to geometry*, Verlag Wiley New York 1969 (*Klassisches Lehrbuch zur ebenen Geometrie*)
- R. Diestel: *Graphentheorie*, 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006 (*Lehrbuch zur Graphentheorie*)
- M. Dreher: *Elementargeometrie für Lehrer*, Vorlesungsskript, 2. Auflage 2014 <https://www.researchgate.net/publication/230597301> (Online-Ressource – gut verständliches Lehrwerk zur euklidischen Geometrie)
- Euclides: *Die Elemente*, Wiss. Buchges., Sonderausgabe 8, Darmstadt 1991 (*Übersetzung des Originaltexts von Euklid*)
- G. Fischer: *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Vieweg Verlag 1997 (*Klassisches Lehrbuch*)
- E. Freitag, R. Busam: *Funktionentheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1993 (*Lehrbuch zur Funktionentheorie*)
- R. Fritsch: *Hilberts Beweis der Transzendenz der Ludolphschen Zahl π* LMU München, www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/pi.pdf 2003 (Online-Ressource mit einem einfachen Beweis der Transzendenz von π)
- R. Fritsch, G. Fritsch: *Der Vierfarbensatz*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1994 (*Ausführliches Lehrbuch zur Geschichte und zum Beweis des Vierfarbensatzes*)
- D. Gans: *An Introduction to Non-Euclidean Geometry* Academic Press, New York and London 1973 (*Weiterführendes Lehrbuch zu Nicht-Euklidischen Geometrien*)
- B. Grünbaum, V. Kaibel: *Convex Polytopes*, 2. Auflage, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2003 (*Klassisches Lehrbuch zu Polytopen*)
- R. Harthshorne: *Geometry: Euclid and beyond*, Springer-Verlag New York 2000 (*Lehrbuch zur ebenen Geometrie*)
- H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis*, Teil 2, 5. Auflage, B. G. Teubner Stuttgart 1990 (*Klassisches Lehrbuch*)
- D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 4. Auflage, B.G. Teubner, Leipzig Berlin 1913 (*Frühe Version des Originaltexts von Hilbert*)
- D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 11. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart 1972 (*Späte Version des Originaltexts von Hilbert*)
- D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1973 (*Klassisches Lehrbuch zu vielen Bereichen der Geometrie*)
- B. Iversen: *Hyperbolic Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1992 (*Weiterführendes Lehrbuch zur hyperbolischen Geometrie*)
- L. Kaup: *Vorlesungen über torische Varietäten*, Konstanzer Schriften in Mathematik und Statistik, Bd. 130, Konstanz 2002 (*Weiterführendes Lehrwerk über die Bezüge zwischen Konvexgeometrie und algebraischer Geometrie*)
- F. Klein: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Verlag von Julius Springer Berlin 1928 (Nachdruck 1968) (*Klassisches, weiterführendes Lehrbuch zur nichteuklidischen Geometrie*)
- F. Klein, P. Slodowy: *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Birkhäuser Verlag 1993 (*Klassische umfassende Darstellung des Ikosaeders mit Bezügen zur Algebra*)
- B. Klotzek: *Elementare euklidische und nicht euklidische Geometrien*, Deutsch-Verlag, 2001 (*Lehrbuch zur ebenen Geometrie, aufbauend auf absoluter Geometrie*)
- B. Klotzek, E. Quaisser: *Nichteuklidische Geometrie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978 (*Weiterführendes Lehrbuch zur ebenen Geometrie (mit Minkowski-Geometrie)*)

- H. Knörrer: *Geometrie: Ein Lehrbuch für Mathematik- und Physikstudierende*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden 2006 (*Elementares Lehrbuch zur ebenen Geometrie*)
- G. Kowol: *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2009 (*Weiterführendes Lehrbuch zur projektiven und hyperbolischen Geometrie*)
- E. Kunz: *Ebene Geometrie*, Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1976 (*Lehrbuch zur axiomatischen Geometrie*)
- S. Lang: *Algebra*, 3. Auflage, Springer-Verlag 2002 (*Klassisches Lehrbuch zur Algebra*)
- L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi: *Diskrete Mathematik*, Springer-Verlag New York 2003 (*Lehrbuch unter Anderem mit Bezügen zur Graphentheorie*)
- W. S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1967 (*Klassisches Lehrbuch zur Topologie*)
- E. E. Moise: *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 2. Auflage, Addison-Wesley, Reading MA 1974 (*Umfassendes Lehrbuch zur axiomatischen ebenen Geometrie*)
- E. E. Moise: *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York 1977 (*Weiterführendes Lehrbuch zur geometrischen Topologie*)
- S. Müller-Philipp, H.-J. Gorski: *Leitfaden Geometrie*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2012 (*Elementares Lehrbuch zur ebenen Geometrie*)
- J. Richter-Gebert: *Perspectives on projective geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011 (*Umfassendes Lehrbuch zur analytischen projektiven Geometrie*)
- J. Richter-Gebert, T. Orendt: *Geometriekalküle*, Springer-Verlag, Heidelberg London New York 2009 (*Lehrbuch zu ausgesuchten Themen der ebenen Geometrie*)
- E. M. Schröder: *Vorlesungen über Geometrie*, Band 1, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich 1991 (*Weiterführendes Lehrbuch zu ebenen nicht-euklidischen Geometrien*)
- R. Stanley: *The Number of Faces of a Simplicial Convex Polytope*, *Advances in Mat.* 35, 236-238 (1980) (*Spezialartikel zu Polytopen*)
- R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, B.G.e Teubner, Stuttgart 1994 (*Lehrbuch zur algebraischen Topologie*)
- W. Strampp: *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden 2015 (*Nachschlagewerk zur mehrdimensionalen Analysis*)
- T. tom Dieck: *Topologie*, 2. Auflage, de Gruyter, Berlin New York, 2000 (*Lehrbuch zur Topologie*)
- D. Werner: *Funktionalanalysis*, 7. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg 2011 (*Lehrbuch zur Funktionalanalysis*)
- M. Winter (Hrsg.): *Theorema Pythagoricum*, Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte, Heft 12, 2005 (*Büchlein mit verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras*)
- H. Zeidler: *Hyperbolische Geometrie*, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1970 (*Elementares Lehrbuch zur hyperbolischen Geometrie*)
- G. M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*, Springer Verlag, New York 1995 (Corrected second printing, 1998) (*Weiterführendes Lehrbuch zu Polytopen*)

Sachverzeichnis

A

Abstand
 hyperbolischer, 90
 Formel, 93
affin unabhängig, 136
ähnlich, 34
Ähnlichkeitsabbildung, 30
Antipodenpaar, 54
archimedisches Streckenaxiom, 15
Axiome
 Anordnung, 8
 Inzidenz, 6
 projektive Ebene, 67
Axiom von Pasch, 8

B

Basiswinkelsatz
 euklidischer, 27
 hyperbolischer, 101
 sphärischer, 63
 Umkehrung, 27
Beltrami-Klein-Modell, 113
Bilinearform, 160
 nicht ausgeartete, 160
 symmetrische, 160
Brennpunkt, 164
Brouwerscher Fixpunktsatz, 191

C

Cayley-Transformation, 85
chromatische Zahl, 156

D

Dandelinsche Kugel, 164
Diedergruppe, 195
Dimension
 eines Polytops, 137
Doppelkegel, 163
Doppelpyramide, 137
Doppelverhältnis, 85
Dreieck
 entartetes, 12
 euklidisches, 12
 Eulersches, 59
 hyperbolisches, 98
 sphärisches, 58
Durchmesser, 34

E

ebene Kurve, 169
Ecke, 138
Eckenfigur, 151
einfach zusammenhängend, 188
Einheitskreismodell, 111
Ellipse, 165
Endpunkt, 141
Euklid, 4
euklidische Ebene, 18
Eulersche Gerade, 45
Eulersche Polyederformel, 147
Eulerweg, 154

F

Facette, 138
Fano-Ebene, 68

Fermatsche Primzahl, 126
Fermat-Torricelli-Punkt, 40
Fläche
 kompakte reelle, 179
Flächeninhalt
 Eulersches Dreieck, 66
 hyperbolischer, 102
Flächenpolygon, 180
Flächenwort, 181
Fundamentalgruppe, 187
Fünffarbensatz, 157
 f -Vektor, 138

G

Gegenwinkel, 13
Gegenwinkelsatz, 13
Geometrie, absolute, 16
Geradentreue, 30
Grad
 eines Knotens, 145
Graph, 145
 eines Polytops, 145
 n -Färbung, 155
Großkreis, 54
Gruppenoperation, 177
 effektive, 177
 transitive, 177

H

Halbebene, 11
Halbebenenmodell, 94
Halbkreis, 34
Halbraum, 130
Halbstrahl, 10
 analytischer, 20
hausdorffsch, 174
Hexaeder, 134
Hilbert, David, 6
Höhe, 43
 sphärische, 65
Höhenfußpunkt, 44
Höhensatz, 49
Höhenschnittpunkt, 43
homöomorph, 174
Homöomorphismus, 174
Homotopie, 186
Hyperbel, 166
Hyperboloid, 113
Hyperebene, 130
Hyperwürfel, 153

I

Inkreismittelpunkt, 43
Innenwinkel
 Eulersches Dreieck, 59

K

kanonische Lage, 98
Kante
 eines Graphen, 145
 eines Polytops, 138
Kathetensatz, 49
Kegelwinkel, 164
Klassifikationssatz reeller Flächen, 184
Knoten, 144
komplex projektive Gerade, 81
Kongruenz
 von Dreiecken, 28
 von Strecken, 11
 von Winkeln, 12
Kongruenzabbildung, 32
 hyperbolische, 91
 sphärische, 79
Kongruenzaxiom sws, 12
Kongruenzsatz
 euklidischer
 sss, 29
 ssw, 29
 sws, 22
 wsw, 28
 hyperbolischer, 101
 sws, 101
 sphärischer, 63
konjugierte Untergruppen, 194
konstruierbare Zahlen, 116
konvex, 131
konvexe Hülle, 132
Kosinussatz, 47
Kreis
 euklidischer, 34
 hyperbolischer, 110
Kreissehne, 34
Kreistangentensatz, 39
Kreuzpolytop, 153
Kugelkoordinaten, 54

L

Länge
 hyperbolische, 89
längentreu, 32
Liftung, 189
linearer Raum, 6

M

Mannigfaltigkeit, 179
Mittelsenkrechte, 36
 hyperbolische, 109
 sphärische, 64
Möbiustransformation, 83
 elliptische, 198
 hyperbolische, 198
 parabolische, 198

N

Nebenwinkel, 13
Nebenwinkelsatz, 13
 analytischer, 25
Neunpunktekreis, 46
Normalenvektor
 einer Kurve, 170
 Gerade, 19

O

offene Abbildung, 178

P

Parabel, 167
parallel, 14
Parallelenaxiom, 15
Parallelenpostulat, 5
Parametrisierung, 169
 kanonische, 170
Peripheriewinkelsatz, 35
 Umkehrung, 35
planar, 146
platonischer Körper, 150
Poldreieck, 61
Polpaar, 57
Polyeder, 140
Polytop, 134
 duales, 143
 reguläres, 152
 zyklisches, 139
Prisma, 138
Prismoid, 148
projektive Ebene, 67
 duale, 71
 endlich, 68
 reelle, 72
projektive Transformation, 77
projektiver Raum, 179
Pyramide, 137
pythagoräisches Tripel, 51

Q

quadratische Form, 161
Quadratwurzelturm, 119
Quadrik, 163
Quotiententopologie, 175

R

Randparallele, 107
reguläres n -Eck, 122
Riemannsche Zahlenkugel, 82

S

Satz
 des Euklid, 49
 des Pythagoras, 47
 hyperbolischer, 100
 sphärischer, 61
 Umkehrung, 51
 des Thales, 35
Jordansche Normalform, 201
vom Außenwinkel, 26
vom Sehnentangentenwinkel, 39
vom Sehnenviereck, 37
vom Tangentenviereck, 40
 Umkehrung, 50
von Ceva, 42
von Desargues, 79
von Euler, 155
von Krein-Milman, 138
von Menelaos, 41
von Pappos, 75
 dualer, 76
 euklidische Version, 76
von Ptolemäus, 38
Schnittebenenwinkel, 164
Schwerpunkt, 43
Sehnensatz, 36
Sehnentangentensatz, 39
Sehnenviereck, 37
Seite, 135
Seitenhalbierende, 43
 sphärische, 65
Seitenkosinussatz
 hyperbolischer, 100
 sphärischer, 60
Sekantensatz, 36
Simplex, 137
Simplex, topologischer, 181
simplicial, 137
Sinussatz, 47
 hyperbolischer, 99

sphärischer, 61
Sphärenmetrik, 55
Standardsimplex, 134
Strahlensatz, 23
 Umkehrung, 24
Strecke, 8
Streckfaktor, 30
Stufenwinkelsatz, 26
Summe, topologische, 181
Symmetriegruppe, 195

T

Tangente, 39
Tangentenviereck, 40
Tangentialvektor
 einer Kurve, 170
Teilraumtopologie, 174
Teilverhältnis, 41
topologischer Quotient, 175
topologischer Raum, 174
Torus, 179
Trennungslemma, 132
Triangulierung, 181

U

Umfangswinkelsatz, 35
Umkreismittelpunkt, 37
 sphärischer, 64

V

verallgemeinerter Kreis, 85
verbindbar, 106
Verhältnistreue, 30
Viereck, 37

Lambertsches, 105
Saccherisches, 104
Vollständigkeitsaxiom, 15

W

Wechselwinkelsatz, 26
Weg
 geschlossenener, 185
wegzusammenhängend, 185
Winkel, 11
 orthogonaler, 27
Winkeldrittung, 121
Winkelhalbierende, 43
 sphärische, 64
Winkelkosinussatz
 hyperbolischer, 101
 sphärischer, 63
Winkelsumme
 euklidische, 26
 sphärische, 66
Winkelsummensatz
 hyperbolischer, 103
winkeltreu, 32
Winkelwert
 euklidischer, 20
 hyperbolischer, 96
 sphärischer, 57
Würfelverdoppelung, 121

Z

zentrische Streckung, 31
Zirkellemma, 21
zusammenhängend, 179
Zweieck, sphärisches, 58