

Seien A, B, C und D verschiedene Punkte in \mathbb{H} .

1. Fall:

Keine der Verbindungsgeraden der Punkte A, B, C, D ist senkrecht zur x -Achse.

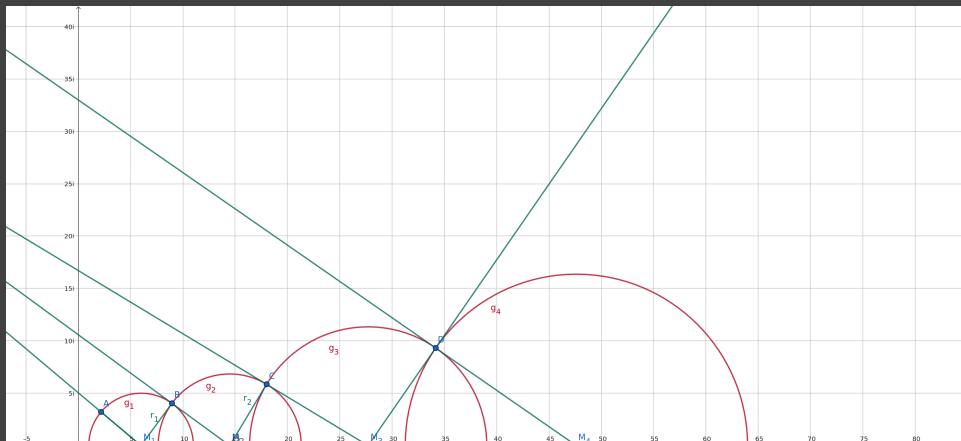


Abbildung 1: 1 Fall

Wir betrachten den Punkt A und die zugehörige Gerade g_1 mit Mittelpunkt M_1 sowie die Tangente t_{A_1} an A . Damit die nächste Gerade g_2 durch A mit Mittelpunkt M_2 mit g_1 einen rechten Winkel einschließt, muss gelten: Der Schnittpunkt von t_{A_1} mit der x -Achse ist identisch mit M_2 (da Tangenten senkrecht auf den Radius stehen). Wir wiederholen das Argument für die Gerade g_3 . Wir haben also nun drei Geraden, wobei g_1 senkrecht auf g_2 steht und g_2 senkrecht auf g_3 . Der Punkt D muss nun sowohl auf der Geraden g_1 als auch auf der Geraden g_3 liegen. Wenn D auf g_3 liegt, dann lässt sich das Tangentenargument wiederholen. Also der Schnittpunkt der Tangente durch D mit der x -Achse muss der Mittelpunkt von g_4 sein. Damit wiederum g_4 senkrecht auf g_1 steht, muss der Mittelpunkt M_1 der Schnittpunkt der Tangenten durch D mit der x -Achse sein. Jedoch ist die Tangente durch D gerade die Gerade durch D und M_3 . Somit müssten M_3 und M_1 identisch sein, dann ist $ABCD$ kein Viereck mehr.

2. Fall:

Eine der Verbindungsgeraden der Punkte A, B, C, D ist senkrecht zur x -Achse.

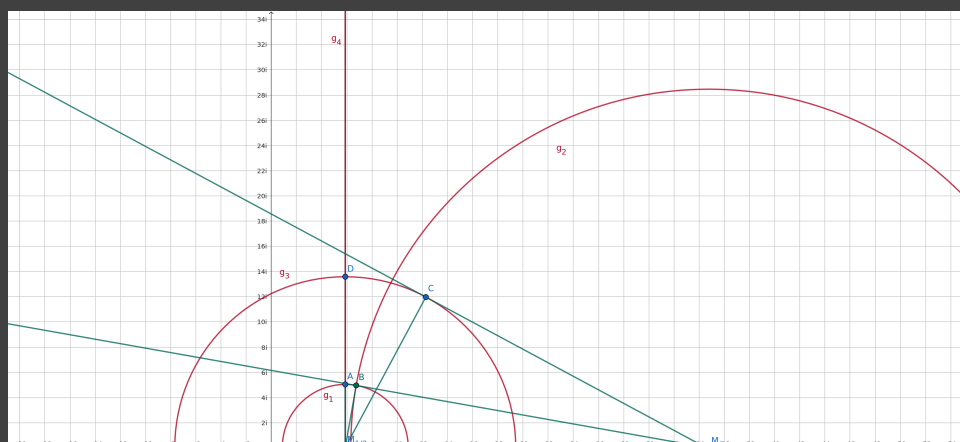


Abbildung 2: 2 Fall

Sei o.B.d.A. die Verbindungsgerade g_4 durch A und D senkrecht zur x -Achse. Die Verbindungsgerade g_1 durch A und B kann somit keine senkrechte Gerade zur x -Achse sein und lässt sich über Tangente eindeutig bestimmen. Gleiches gilt für die Verbindungsgerade g_3 durch D und C, wobei $M_1 = M_3$ (Die Mittelpunkte der Geraden) sein muss. Wenn A und D verschieden sind, haben die Geraden g_1 und g_3 verschiedene Radien und die Gerade g_2 muss mit g_1 und mit g_3 einen gemeinsamen Punkt haben. Wenn g_2 senkrecht wäre, dann müsste die Tangente durch B an g_1 parallel zur x -Achse verlaufen. Das ist aber nur in A der Fall, dann wäre $A = B$ und ABCD kein Vierreck. Somit muss die Gerade g_2 einen Mittelpunkt auf der x -Achse haben und sowohl der Schnittpunkt der Tangente durch B und g_1 sein als auch der Schnittpunkt der Tangente durch C und g_3 . Der Schnittpunkt einer Tangenten an einem Halbkreis mit der x -Achse liegt immer außerhalb des Halbkreises oder darauf, falls der Punkt an dem die Tangente angelegt ist selbst schon auf der x -Achse liegt, was wir ausgeschlossen haben, da sonst g_2 senkrecht auf der x -Achse stehen würde. Somit muss der Schnittpunkt der Tangente an B von g_2 auf der x -Achse liegen und "rechts" des Randes von g_3 . (Hier weiß ich nicht die Begründung, aber dann rückt B immer näher an A heran der Halbkreis g_2 schneidet entweder die Gerade g_3 nicht mehr in C oder die Tangenten schneiden sich nicht mehr auf der x -Achse).

