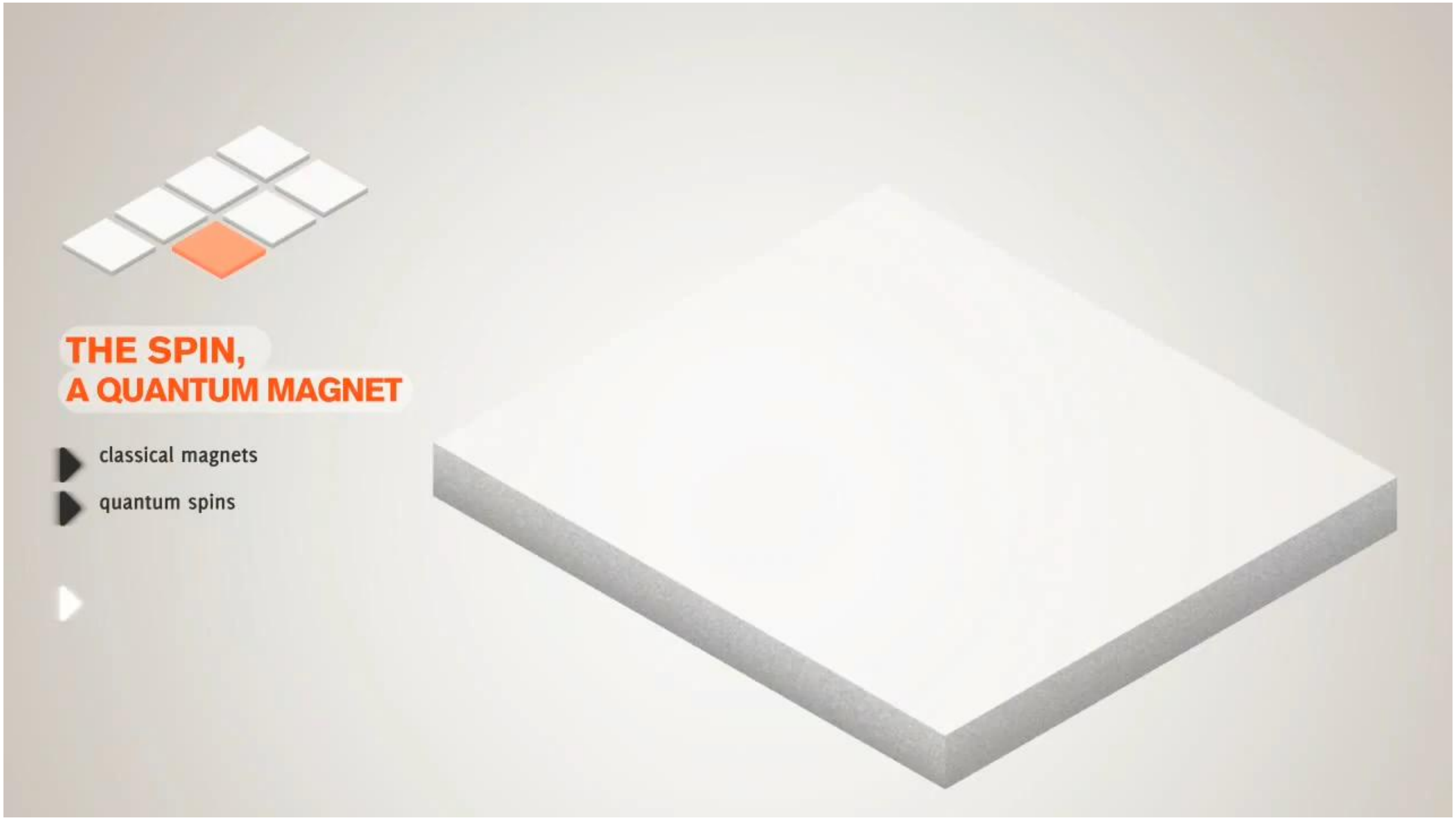
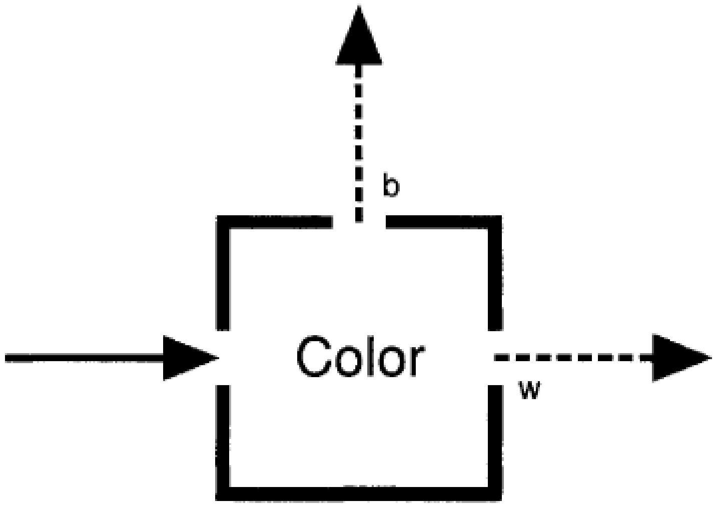
مقدمه ای متفاوت بر مکانیک کوانتومی

محمد واحدی، مرکز شبکه های کوانتومی دانشگاه علم و صنعت ایران

مقدمه ای متفاوت بر مکانیک کوانتومی

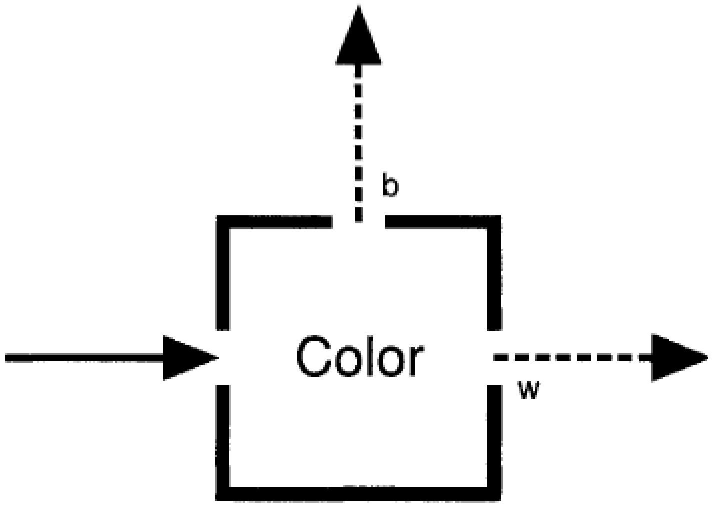


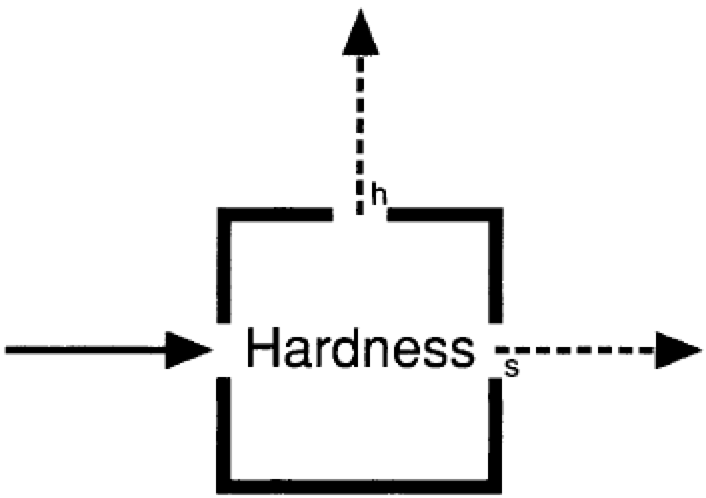
مقدمه ای متفاوت بر مکانیک کوانتومی



Quantum Mechanics & Experience بر مبنای کتاب
D. Z. Albert

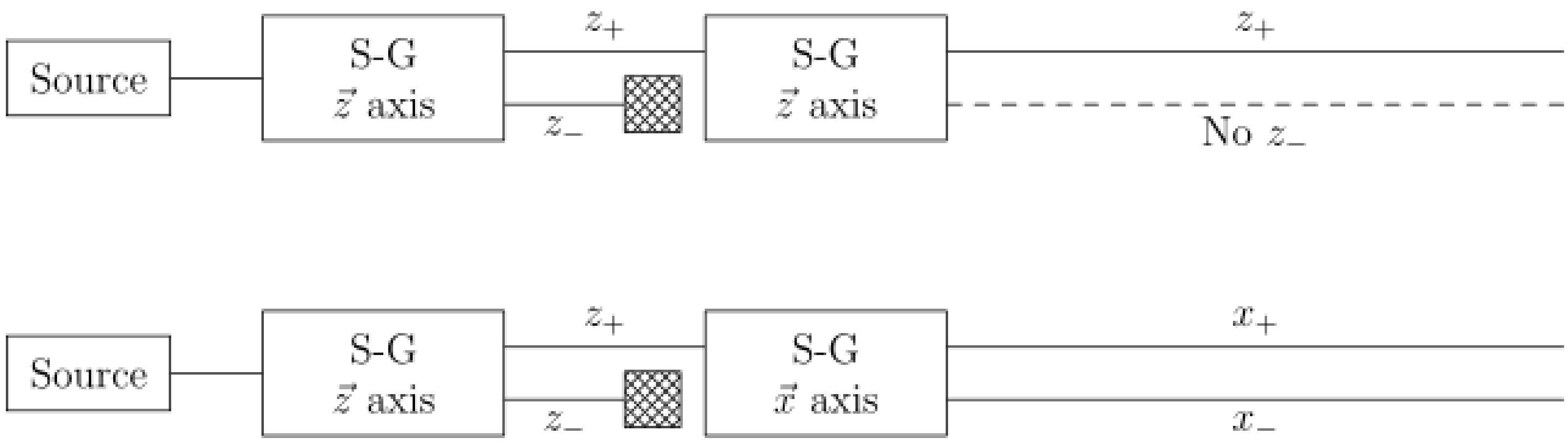
مقدمه ای متفاوت بر مکانیک کوانتومی



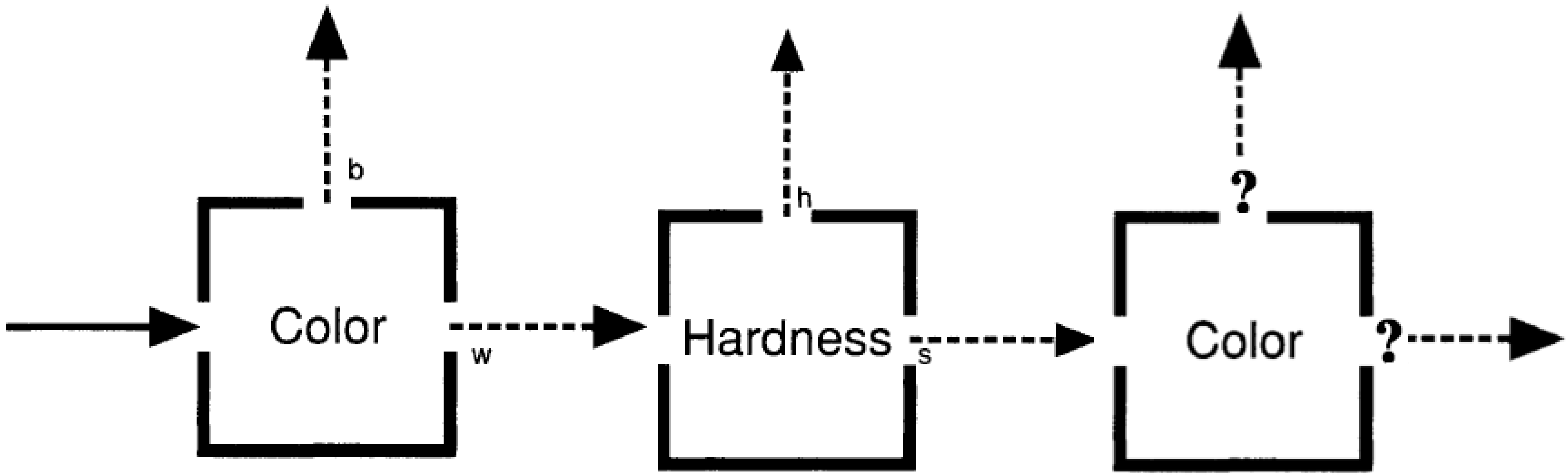


بر مبنای کتاب Quantum Mechanics & Experience
D. Z. Albert

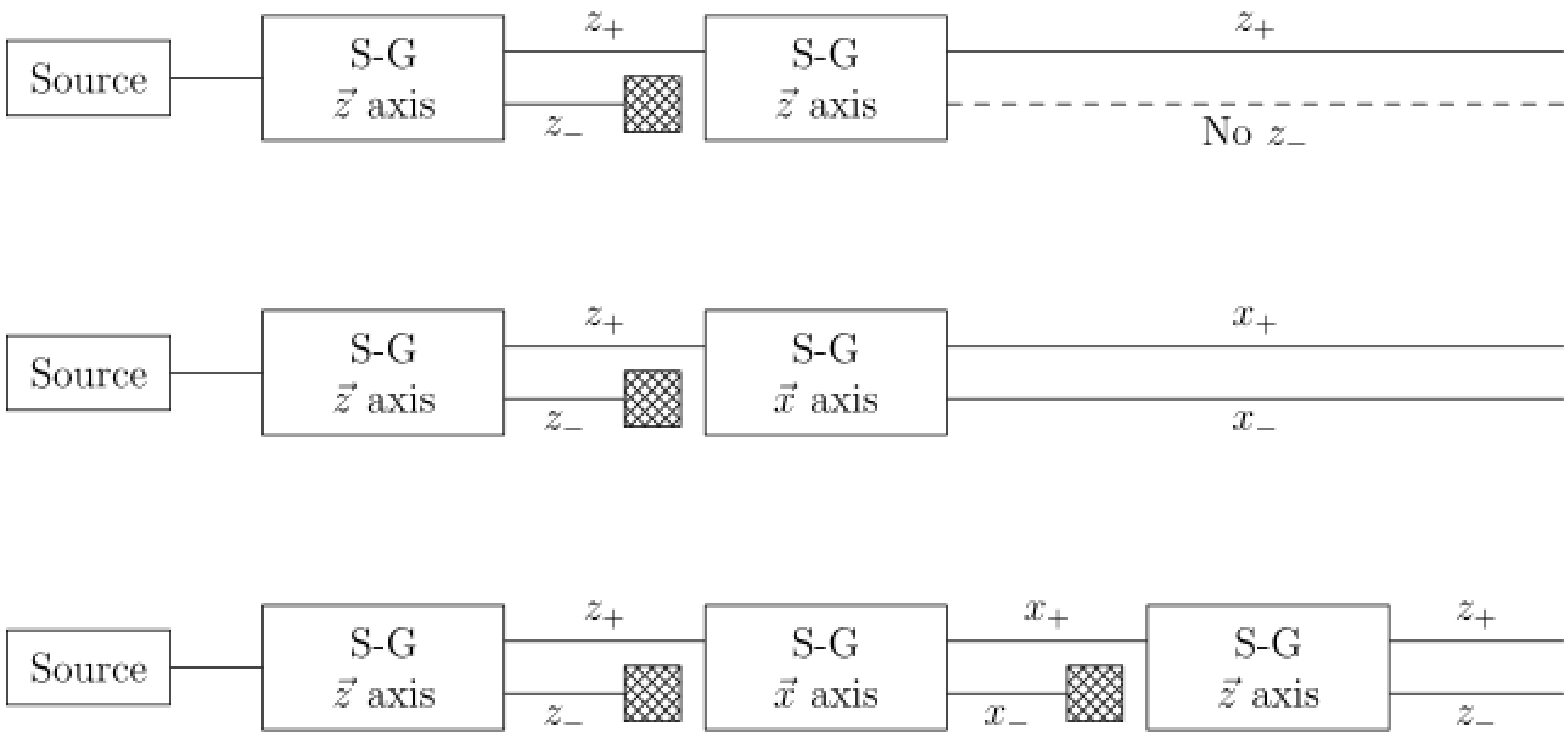
واقعیت آزمایشی



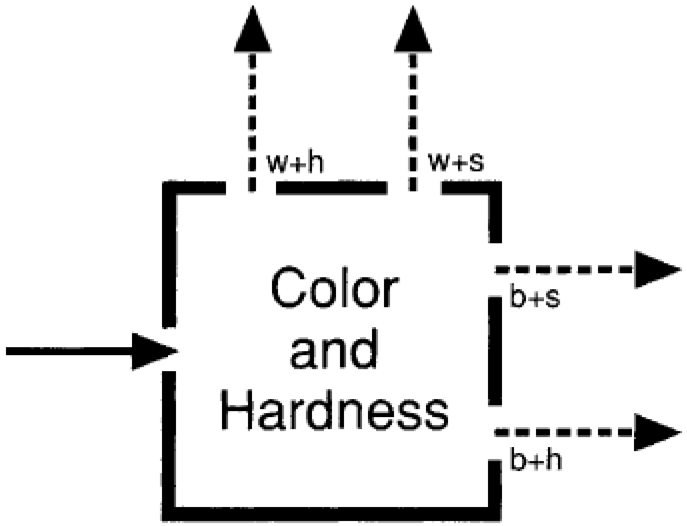
آزمایش فکری



واقعیت آزمایشی

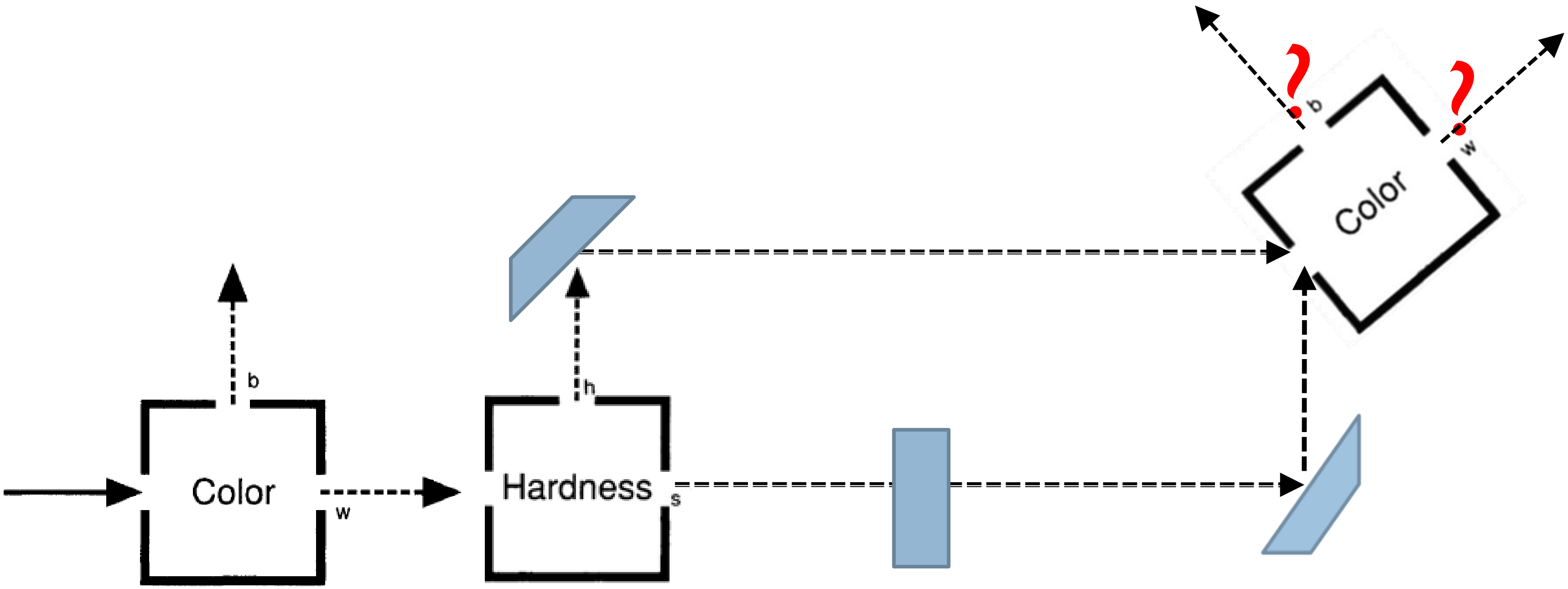


دستگاه اندازه گیری رنگ و سختی



اصل عدم قطعیت

رفتار عجیب ۲

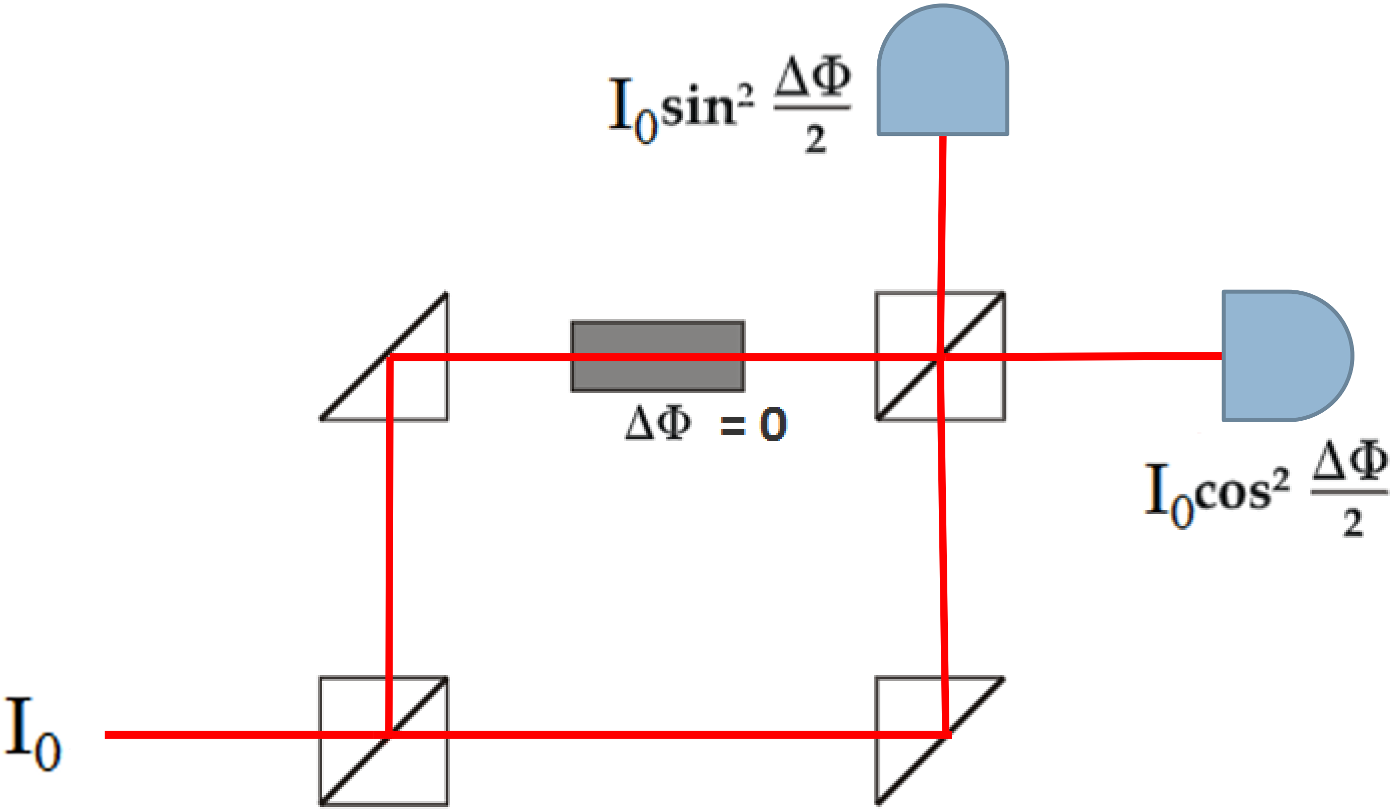


الکترون از کدام مسیر رفته است؟

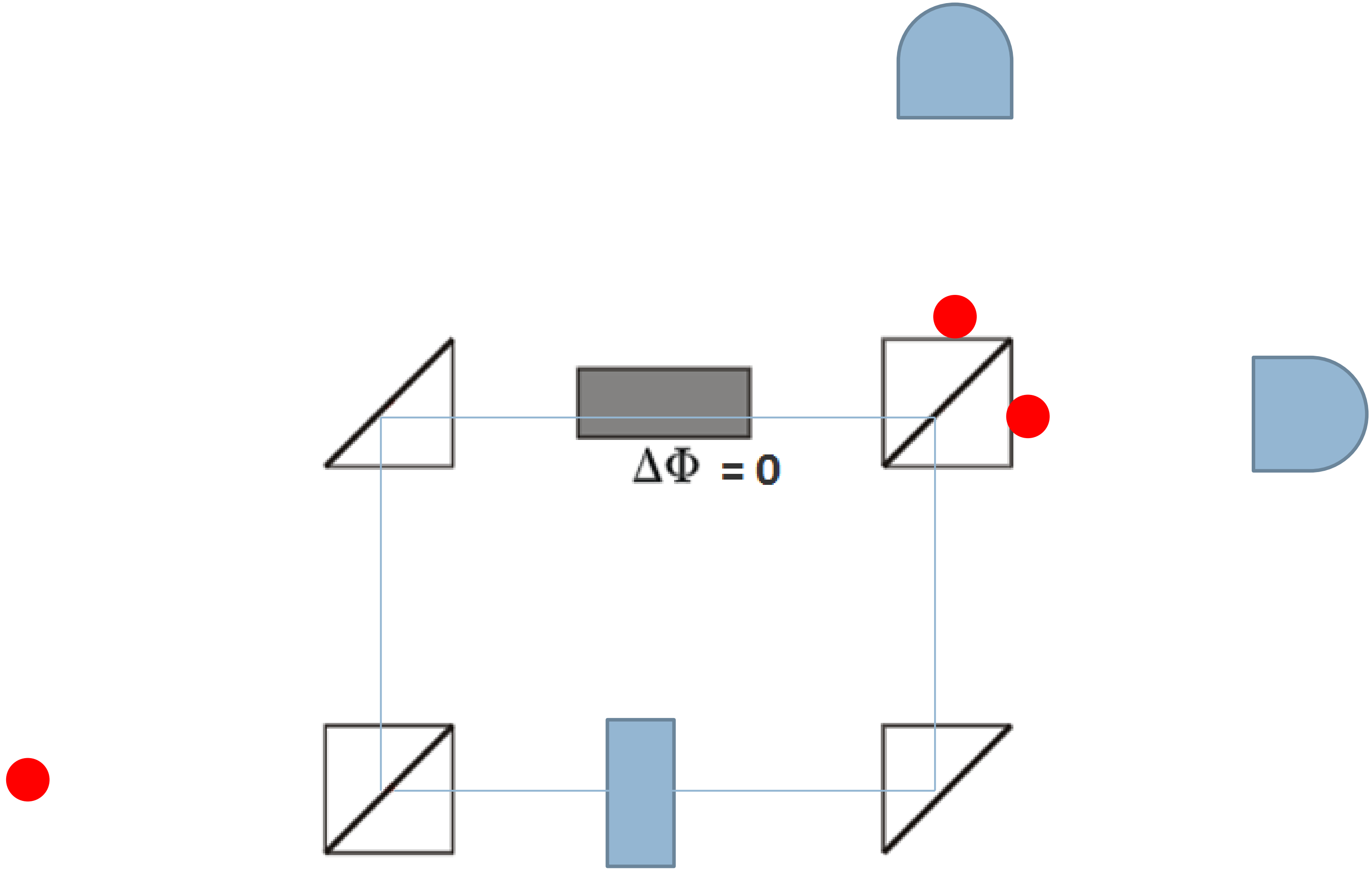
بحث در مورد رفتار عجیب ۲

- الکترون نه از مسیر اول، نه از مسیر دوم، نه از هر دو مسیر و نه از هیچ کدام رفته است.
- حالت یک الکترون سفید، برهم نهی سخت و نرم است.
- یک الکترون سفید، نه سخت است و نه نرم و نه هر دو و نه هیچ کدام.

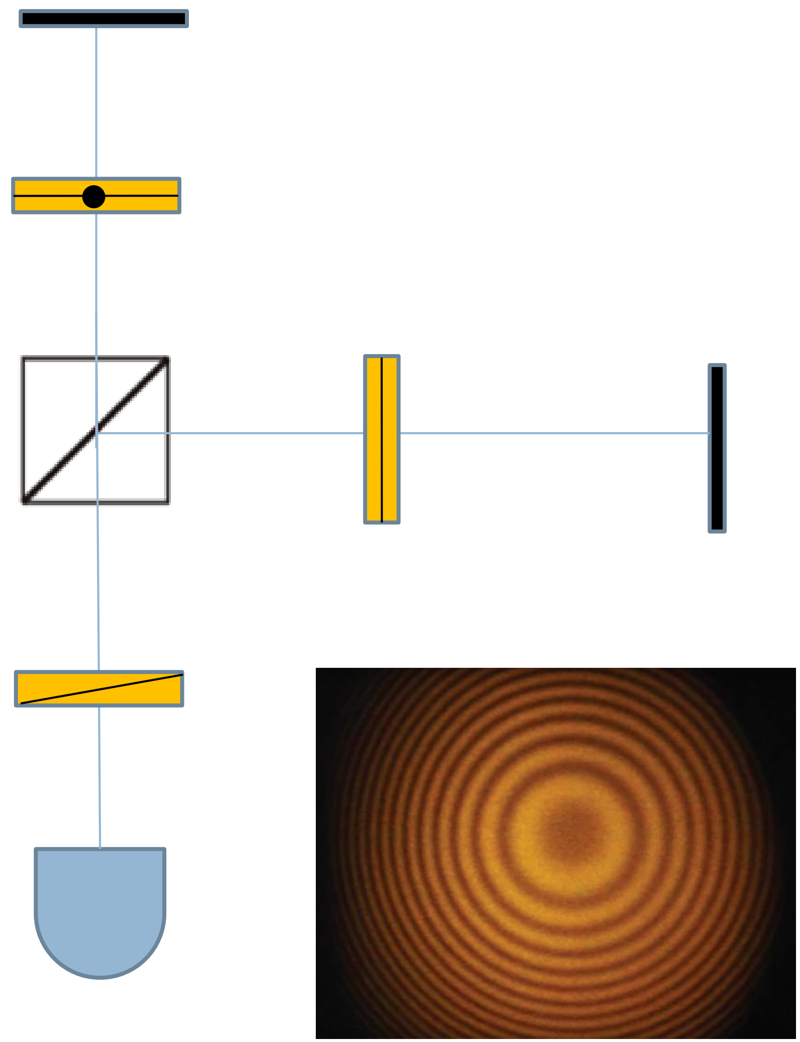
آزمایش ماخ-زندر کلاسیکی



نمونه کوانتوم اپتیکی



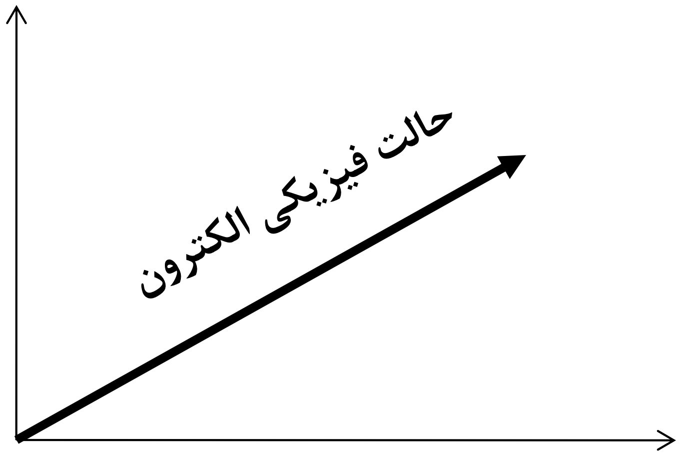
نمونه کوانتوم اپتیکی



مقدمات ریاضی مکانیک کوانتومی

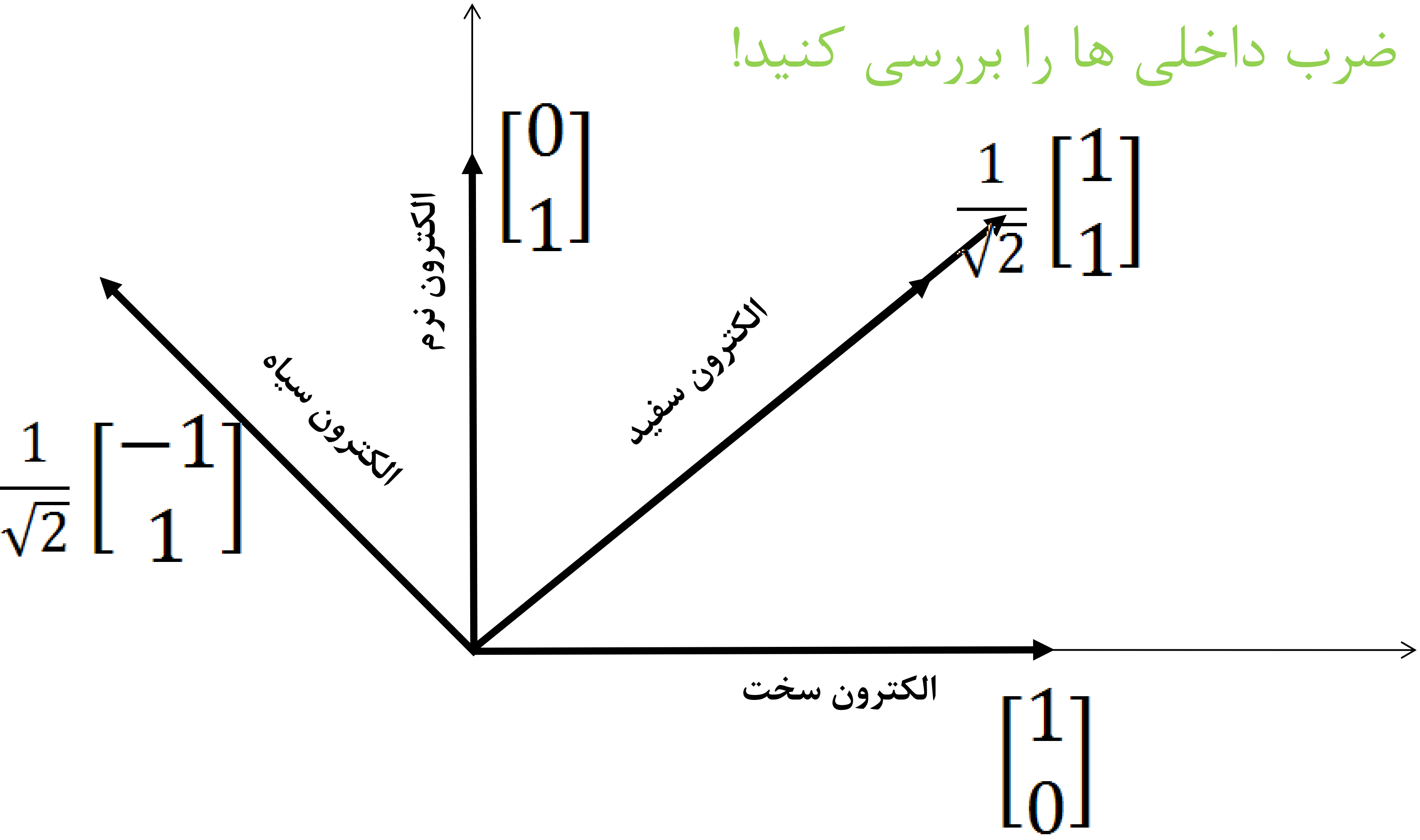
بردارها

- از آنجا که برهم‌نهی دو حالت فیزیکی، حالت جدیدی است و از طرف دیگر جمع دو بردار هم بردار جدیدی است، می توان برای نشان دادن برهم‌نهی دو حالت از جمع بردارها استفاده می کنیم. پس هر حالت فیزیکی الکترون را با یک بردار نشان می دهیم. مثلا حالت سفید برهم‌نهی حالت های نرم و سخت است. یک حالت سفید، جمع برداری حالت های نرم و سخت است.



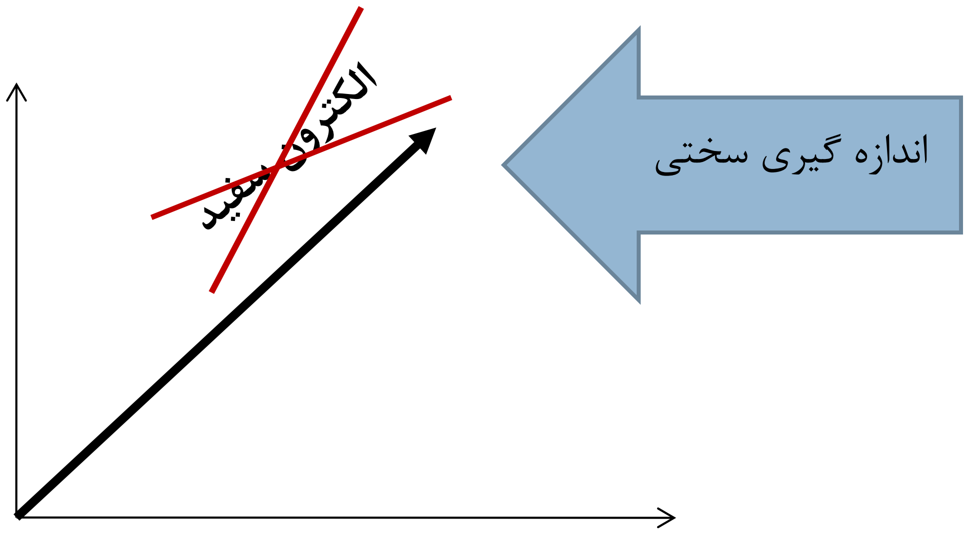
بردارها

ضرب داخلی ها را بررسی کنید!



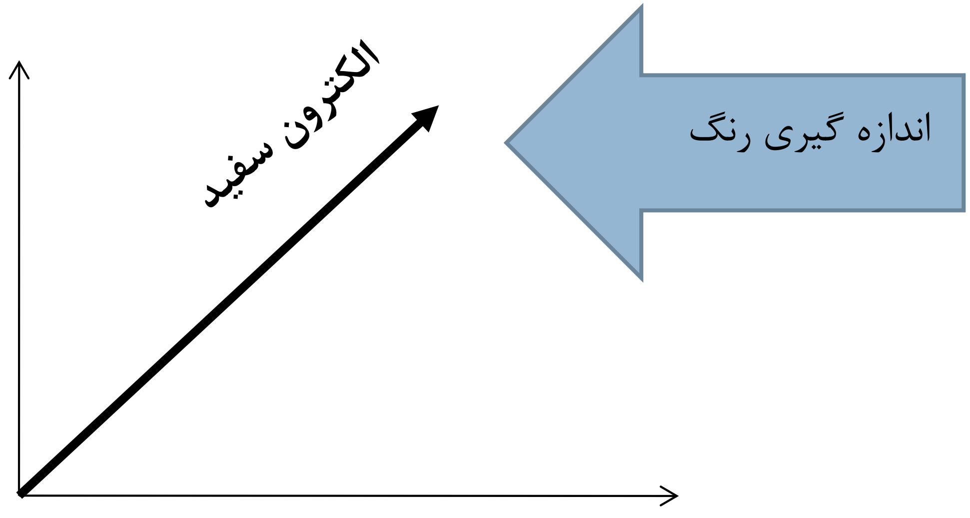
اندازه گیری

- اندازه گیری سختی یک الکترون که حالت سفید دارد، حالت آن را تغییر می دهد. این به معنی این است که بردار حالت آن به بردار دیگری تغییر می کند.



اندازه گیری

- پس اندازه گیری در حالت کلی باعث دوران یافتن بردار حالت یک الکترون می شود. بنابراین برای نمایش دادن اندازه گیری از ماتریس استفاده می کنیم.
- اما یک استثنا وجود دارد و آن اینکه اگر مثلا رنگ یک الکترون سفید را اندازه بگیریم، حالت آن نباید تغییر کند.



ماتریس سختی

- ماتریس اندازه گیری سختی، حالت سخت و نرم را تغییر نمی‌دهد. به این ماتریس، ماتریس سختی می‌گوییم.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- به این ترتیب، حالت سخت، سختی ۱+ دارد و حالت نرم سختی ۱−

ماتریس رنگ

- به همین ترتیب می توان ماتریس رنگ را طراحی کرد.

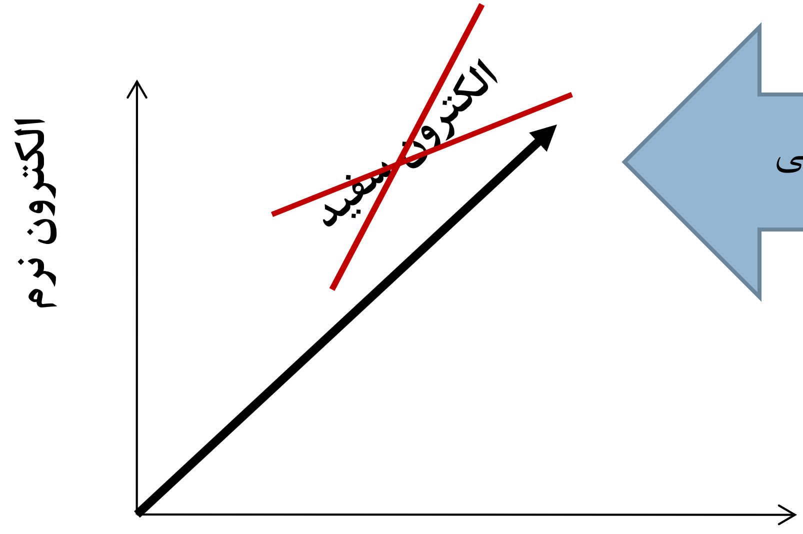
$$\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- به این ترتیب، حالت سفید، رنگِ ۱+ دارد و حالت سیاه، رنگِ ۱−
- ماتریس ها را عملگر هم می نامند.
- حالت های با رنگ سفید و سیاه، ویژه حالت های عملگر رنگ هستند. ویژه مقدارهای آن هم ۱+ و ۱− هستند.

اندازه گیری سختی یک الکترون سفید



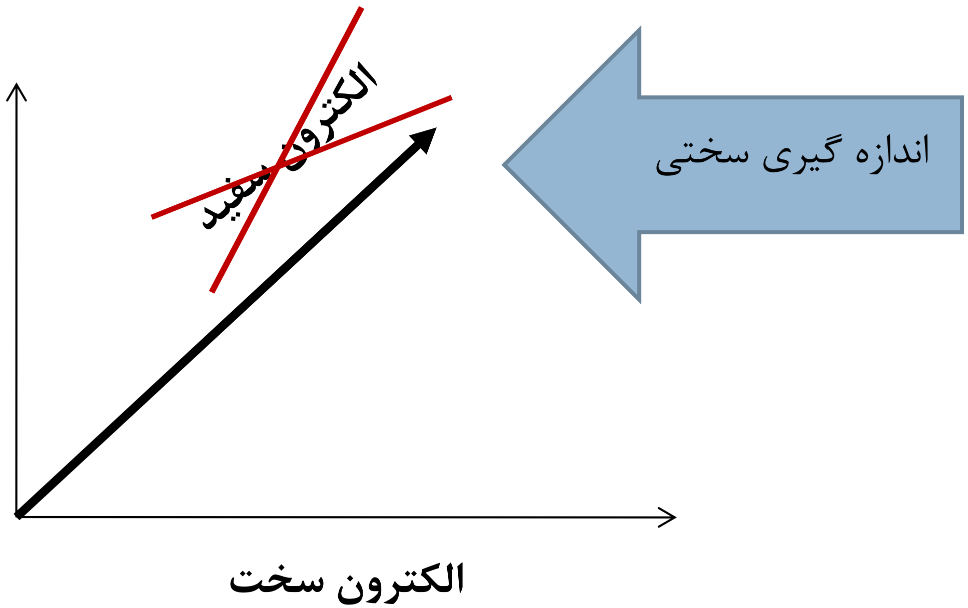
اندازه گیری سختی

اندازه گیری رنگ یک الکترون سخت

- الکترون سفید به احتمال یک‌دوم، سخت و به احتمال یک‌دوم نرم است. می توان این مطلب را به این صورت خلاصه کرد:

$$P(\theta) = Cos^2\theta$$

به این خاطر فرقی بین بردارهای در خلاف جهت هم وجود ندارد.



اندازه گیری یک حالت دلخواه و تحول زمانی

- اندازه گیری یک حالت دلخواه باعث می شود که آن حالت به یکی از ویژه حالت های کمیت مورد اندازه گیری تبدیل شود. این را در ادبیات مکانیک کوانتومی رمبش (Collapse) می گویند.
- تحول زمانی هر حالت، با معادله شرودینگر داده می شود. یعنی معادله شرودینگر، معادله حرکت حالت های کوانتومی است.
- نتیجه اندازه گیری با معادله شرودینگر تعیین نمی شود!

روش مرسوم فکرکردن

- وقتی حالتی مثلا برهم‌نهی حالت های سخت و نرم است، نمی توان در مورد سختی این حالت حرفی زد و صحبت کردن از سختی چنین الکترونی بی معنی است. صحبت کردن از سختی چنین الکترونی مثل این است که بگوییم که شغل الکترون چیست.
- پس تناقضات قبلی از بین می رود. نمی توان گفت که الکترون سفید، سخت یا نرم است و یا هم سخت و هم نرم و یا هیچکدام. بلکه صحبت کردن از سختی یک الکترون سفید بی معنی است.
- حالت برهم‌نهی حالتی است که صحبت کردن از بردارهای برهم‌نهی شده بی معنی است.

روش مرسوم فکرکردن

- اندازه گیری سختی یک الکترون سفید، صرفا اطلاع یافتن از حالت سختی آن نیست. بلکه اندازه گیری آن الکترون را تبدیل به یک الکترون سخت یا نرم خواهد کرد. به صورتی که حالا صحبت کردن از سختی الکترون معنی دار خواهد بود.

خواص عملگرها

- هر کمیت فیزیکی(مشاهده پذیر) را با یک عملگر(ماتریس) نشان می‌دهیم.

- عملگرهایی که با هم جابجا نمی‌شوند، نمایانگر کمیت‌های ناسازگارند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای مکان

- آزمایش ها نشان می دهد که مکان و اندازه حرکت دو کمیت ناسازگارند.

$$[x,p]=\mathrm{i}\hbar$$

- پس مکان و اندازه حرکت هم دو عملگر یا ماتریس خواهند بود که ویژه‌حالت‌هایی خواهند داشت.

$$\begin{bmatrix} \text{اندازه گیری} \\ \text{مکان} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{حالت} \\ \text{ذره} \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} \text{حالت} \\ \text{ذره} \end{bmatrix}$$

فضای مکان

- عملگر مکان بی‌نهایت ویژه‌حالت خواهد داشت. پس یک فضای برداری بی‌نهایت بعدی خواهیم داشت. هر بردار دلخواه در این فضا را می توان بر حسب ویژه حالت‌های عملگر مکان نوشت.

$$\begin{bmatrix} \text{حالت} \\ \text{دلخواه} \end{bmatrix} = 0.2 \begin{bmatrix} \text{حالت} \\ x = 1 \end{bmatrix} + 0.3 \begin{bmatrix} \text{حالت} \\ x = 5 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} \text{حالت} \\ x = 4.3 \end{bmatrix} + \cdots$$

دستگاه‌های چند ذره‌ای

- به راحتی می‌توان بردار حالت را برای دو الکترون نوشت. مثلا یک الکترون سخت و یک الکترون نرم:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2$$

- به این ترتیب باز می توان یک فضای برداری ۴ بعدی تشکیل داد که هر حالت دلخواه دوالکترونی قابل نوشتن برحسب پایه های جدید باشد.

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2 , \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2 , \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2 , \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2$$

- توجه کنید که در این حالت هم می‌توان ضرب داخلی بردارهای پایه را تعریف کرد. این بردارها باید همگی بر هم عمود باشند.

دستگاه‌های چند ذره ای

- می‌توان نتایج آزمایشها را به صورت احتمالی تعیین کرد. به صورتی که احتمال یک نتیجه خاص برای الکترون اول را ضرب در احتمال نتیجه خاص دیگری برای الکترون دوم کنیم.

احتمال سخت بودن الکترون ۱ و سفید بودن الکترون ۲ = احتمال سخت بودن الکترون ۱ × احتمال سفید بودن الکترون ۲

- همچنین هر حالت دلخواه از دو یا چند ذره را می‌توان بر حسب پایه‌های مذکور نوشت.

حالت‌های جدایی ناپذیر

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}\text{حالت}\\x=1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}\text{حالت}\\x=2\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}\text{حالت}\\x=3\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}\text{حالت}\\x=5\end{bmatrix}_2\right)$$

حالت‌های جدایی ناپذیر

- در حالت‌های جدایی‌ناپذیر کمیت قابل اندازه‌گیری ذره‌ها به صورت جداگانه مقدار مشخصی ندارد. کوچکترین قسمتی از دستگاه که می‌توان به آن کمیت مقدار مشخصی نسبت داد، دو ذره‌ای‌ست.
- حالت‌های جدایی‌ناپذیر یکی دیگر از تفاوت‌های مهم فیزیک کوانتوم و کلاسیک هستند.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}\text{حالت}\\ x=1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}\text{حالت}\\ x=2\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}\text{حالت}\\ x=3\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}\text{حالت}\\ x=4\end{bmatrix}_2\right)$$

اندازه‌گیری حالت‌های چند ذره‌ای

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2\right)$$

اندازه گیری سختی
الکترون اول

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2$$

یا

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2\right)$$

ناموضعیت و قضیه بل

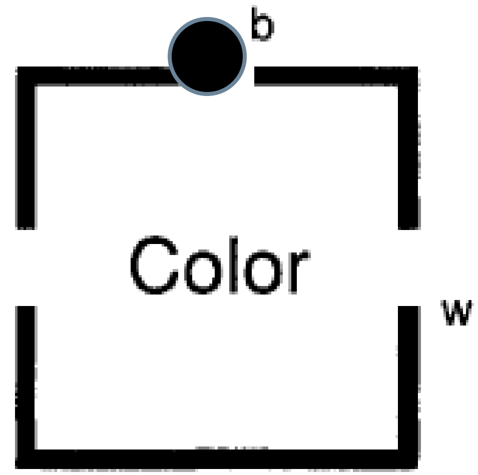
تناقض نمای EPR

- در ۱۹۳۵، انیشتین، پادولسکی و روزن : مکانیک کوانتومی کامل نیست.
- فرض ۱- واقعیت: توصیفی از طبیعت کامل است که "عنصری از واقعیت" نباشد که در آن توصیف مغفول مانده باشد.
- آنها در مقاله شان یک شرط لازم مطرح می کنند که یک مشخصه قابل اندازه گیری برای یک دستگاه خاص باید داشته باشد که آن را بتوان "عنصری از واقعیت" نامید.
- این شرط به این قرار است: اگر بدون مختل کردن یک دستگاه، بتوانیم با قاطعیت (با احتمال مساوی یک) مقدار یک کمیت فیزیکی را پیش بینی کنیم، آنگاه عنصری از واقعیت متناظر با این کمیت فیزیکی وجود دارد.
- ادعای مقاله: اگر ادعاهای مکانیک کوانتومی درست باشد، آنگاه عناصری از واقعیت وجود دارند که معادلی در توصیف مکانیک کوانتومی از طبیعت ندارند.

تناقض نمای EPR

- مثلا اگر رنگ الکترون را اندازه بگیریم و نتیجه مثلا سیاه شود، از این پس می توانیم با قطعیت بگوییم که اندازه‌گیری‌های بعدی رنگ الکترون نتیجه‌اش چه خواهد بود. پس رنگ عنصری از واقعیت برای این الکترون خواهد بود.
- حال اگر سختی یک الکترون را اندازه بگیریم و نتیجه سخت شود، از این پس نمی‌توانیم با قطعیت رنگ الکترون را پیش بینی کنیم. تعیین کردن رنگ الکترون مستلزم اندازه گیری رنگ است که این اندازه گیری حالت الکترون را تغییر خواهد داد. پس برای این الکترون، در حال حاضر، رنگ عنصری از واقعیت نیست. همان طور که نظریه کوانتوم هم این ادعا را دارد.

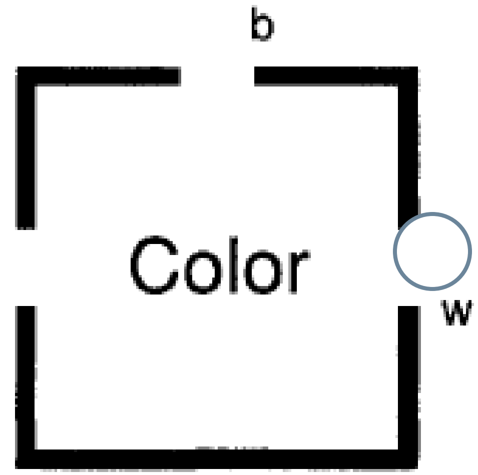
تناقض نمای EPR



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_2\right)$$

تناقض نمای EPR



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_2\right)$$

بررسی یک حالت جدایی ناپذیر

- اندازه گیری رنگ الکترون یک، حالت رنگ الکترون ۲ را مشخص می کند و برعکس.
- همین مسأله در مورد سختی هم برقرار است!
- فرض ۲ – موضعیت : می توان آزمایش را طوری طراحی کرد که اندازه گیری روی الکترون اول تأثیری روی الکترون دوم نداشته باشد و برعکس.
- پس روشی وجود دارد که رنگ الکترون ۲ را بدون مختل کردن آن پیش بینی کنیم.
- به همین ترتیب روشی وجود دارد که سختی الکترون ۲ را بدون مختل کردن آن پیش بینی کنیم.
- پس نظریه کامل نیست. چون عناصری از واقعیت وجود دارند که نظریه آنها را توصیف نمی کند؛ مثلا رنگ و سختی الکترون ۲.
- در فرمول بندی کوانتومی روشی که بتوان رنگ و سختی الکترون ۲ را تعیین کرد، وجود ندارد.

چه نوع ناموضعیتی داریم؟

- کدام شرط EPR با مکانیک کوانتومی در تناقض است؟
- در مقاله EPR فرض شده بود که موضعیت وجود دارد. پس این تناقض به این معنی خواهد بود که فرض موضعیت در تناقض با مکانیک کوانتومی است.
- آزمایش ها نشان می دهند که فرض موضعیت باطل است و نتایج آزمایش ها با پیش بینی های مکانیک کوانتومی در توافق است.
- پس این گزاره کوانتوم مکانیکی درست است که اندازه گیری بر روی یک ذره بر روی حالت کوانتومی دیگری تأثیر می گذارد و مهم نیست که آنها چقدر از هم دور باشند.
- نتیجه کار بل این است که مکانیک کوانتومی (و مشاهدات تجربی) با هر توصیف موضعی از طبیعت در تناقض است.
- ناموضعیت یک خصیصه طبیعت است که در مکانیک کوانتومی هم وجود دارد.

چه نوع ناموضعیتی داریم؟

- آیا نتایج مشاهده شده از اندازه گیری روی الکترون دوم به این وابسته هست که اندازه‌گیری روی الکترون اول صورت گرفته باشد یا نه؟
- مثال برای اندازه گیری سختی الکترون اول و رنگ الکترون دوم:
- می دانیم که نتیجه اندازه گیری رنگ الکترون دوم، به احتمال مساوی، سیاه یا سفید است. حال ببینیم که اگر سختی الکترون اول را اندازه بگیریم، نتیجه های اندازه گیری رنگ برای الکترون دوم متفاوت خواهند بود یا نه.

چه نوع ناموضعیتی داریم؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\right)$$

اندازه گیری سختی الکترون اول

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_2 \quad \textbf{یا} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2$$

به احتمال یک دوم سفید و به احتمال یک دوم سیاه

به احتمال یک دوم سفید و به احتمال یک دوم سیاه

- پس در مجموع باز هم به احتمال مساوی نتیجه آزمایش سفید یا سیاه خواهد بود و نتیجه آزمایش به این وابسته نیست که سختی الکترون اول اندازه گیری شده یا نه.

چه نوع ناموضعیتی داریم؟

- پس ناموضعیت موجود در طبیعت به این صورت است که نتایج اندازه گیری یک کمیت فیزیکی، به صورت غیرموضعی، به اندازه گیری کمیت های دیگر در مکان های دور وابسته است ولی نتایج اندازه گیری آن کمیت فیزیکی به این وابسته نیست که کمیت های دیگر در آن مکان های دور اندازه گیری شده‌اند یا نه.
- پس نمی توان به طریقی نتایج اندازه گیری در طرف مقابل را تعیین کرد. یعنی نمی‌توان از این ناموضعیت برای انتقال اطلاعات به صورت آنی و با سرعت بیش از نور استفاده کرد. نتایج اندازه گیری ها از کنترل ما خارجند هرچند به هم وابسته اند.

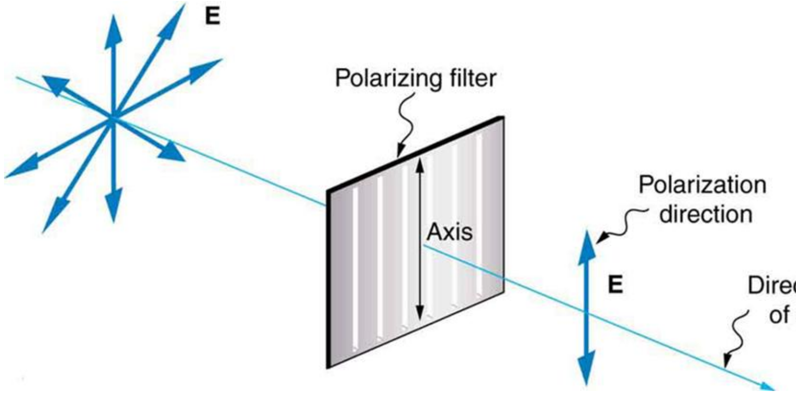
ناموضعیت به زبانی دیگر

برگرفته از روش ارائه شده در کتاب

Quantum Non-locality and Relativity

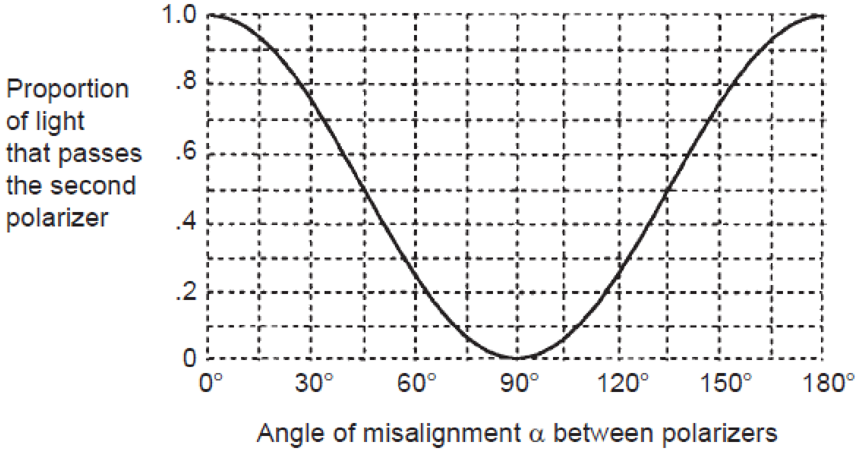
By: Tim Maudlin

قطبش

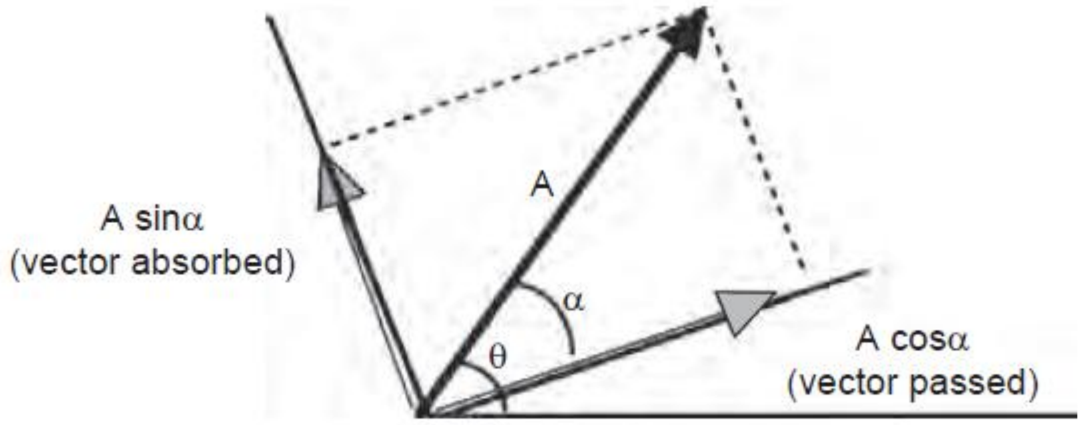


E
Polarizing filter
Axis
Polarization
direction
E
Direction
of ray

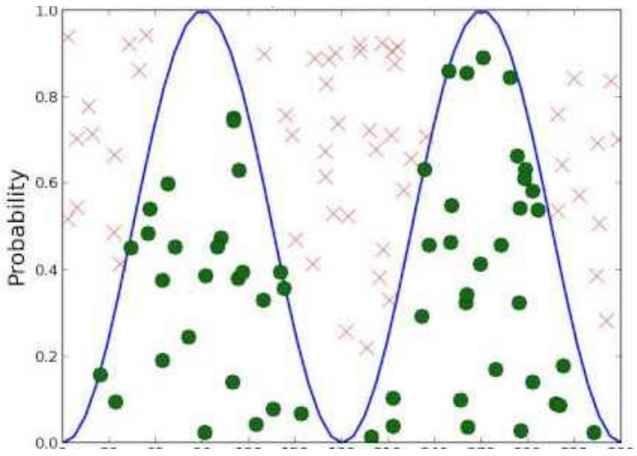
انرژی عبوری از دو قطبش‌گر



توجیه موجی

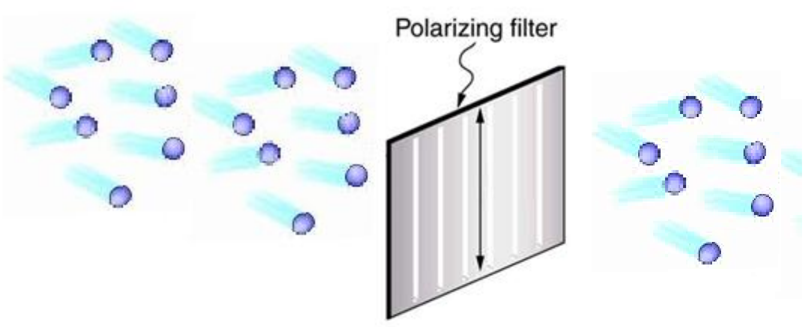


فوتون‌ها

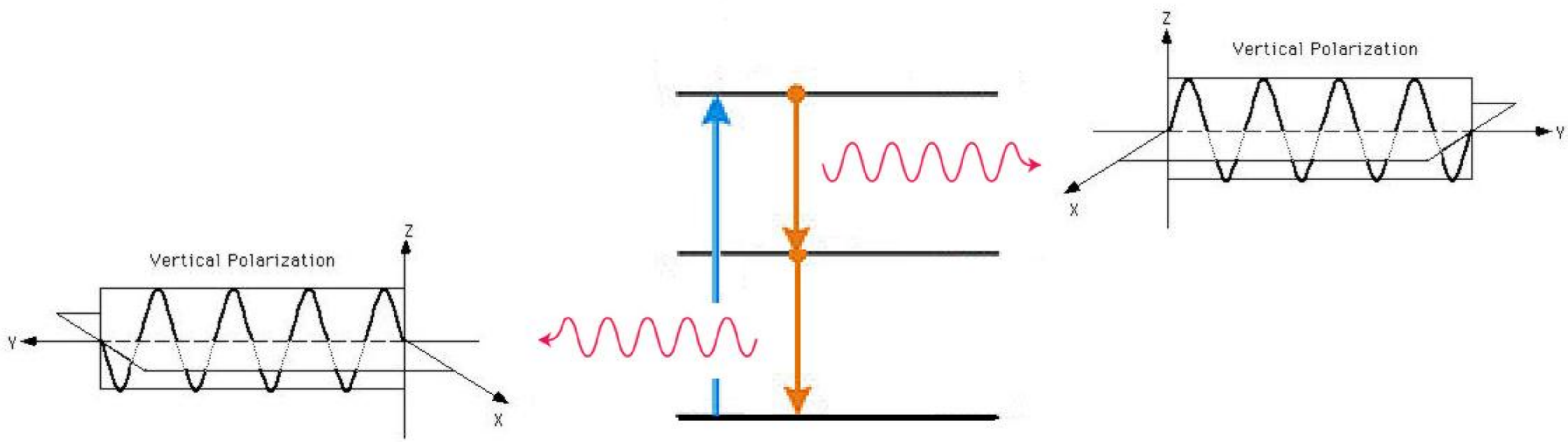


قطبش فوتون ها

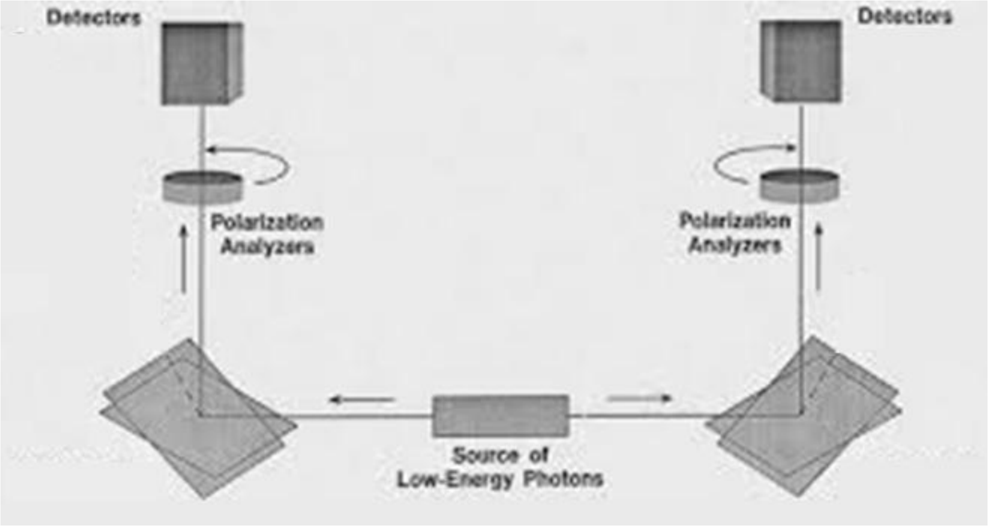
- انرژی هر فوتون قبل از عبور از قطبش‌گر دقیقاً مساوی انرژی آن فوتون بعد از عبور از قطبش‌گر است. پس چطور انرژی نور پس از عبور از قطبش‌گر دوم کاهش می یابد؟



حالات جدایی ناپذیر (درهم‌تنیده)



حالات جدایی ناپذیر (درهم‌تنیده)



- اگر زاویه بین دو قطبش‌گر θ باشد، در کسر $\cos^2 \theta$ از زمان باز هم قطبش گر ها نتیجه یکسان خواهند داشت.

شبیه سازی نتایج

- حال دو شخص را در نظر بگیرید که می خواهند این نتایج را شبیه سازی کنند.
- فرض کنید زوایای مورد سؤال فقط صفر، ۳۰ و ۶۰ درجه باشند.
- آنها نمی دانند که سؤالی که پرسیده خواهد شد، چیست و روشی هم برای اینکه بفهمند از دوست دیگرشان چه پرسیده شده وجود ندارد!
- بعد از زمانی طولانی از این بازی، می خواهیم رفتار فوتونها را شبیه سازی کنیم.

شبیه سازی نتایج

- واقعیت ۱: وقتی که سؤال یکسانی از این دو پرسیده می شود باید جواب یکسان بدهند.
- واقعیت ۲: وقتی که سؤالی که پرسیده می شود به اندازه ۳۰ درجه متفاوت باشد (مثلا از یکی صفر و دیگری ۳۰ پرسیده شود) این دو باید سه چهارم زمان جواب های یکسانی بدهند.
- واقعیت ۳: وقتی که سؤالی که پرسیده می شود به اندازه ۶۰ درجه متفاوت باشد (از یکی صفر و دیگری ۶۰ پرسیده شود) این دو باید یک چهارم زمان جواب های یکسانی بدهند.
- این دو می توانند هر قرار-مداری با هم بگذارند.
- ما سؤالها را به صورت اتفاقی انتخاب می کنیم.

استراتژی های ممکن (قرار مدارها)

- می توانند با انداختن سکه (شیر یا خط) جواب بدهند. اما در این صورت پاسخ ها هیچ ارتباطی به هم نخواهند داشت.

مدت زمان اتخاذ	گروه استراتژی	استراتژی قرینه	استراتژی
α	A	(2) (A,A,A)	(1) (P,P,P)
β	B	(4) (P,A,A)	(3) (A,P,P)
γ	C	(6) (A,P,A)	(5) (P,A,P)
δ	D	(8) (A,A,P)	(7) (P,P,A)

نامساوی بل

$$\gamma + \delta = 0.25$$
$$\beta + \gamma = 0.25$$
$$\beta + \delta = 0.75.$$

$$(\beta + \gamma) + (\gamma + \delta) = 0.25 + 0.25 = 0.5$$

$$(\beta + \gamma) + (\gamma + \delta) = 2\gamma + (\beta + \delta) = 2\gamma + 0.75$$

$$\gamma = -0.125$$