فصل اول

ریاضیات مکانیک کوانتومی

مقدمه: همانند دیگر دروس اساسی فیزیک نظیر الکترومغناطیس ومکانیک کلاسیک و... ابتدا با ابزار ریاضی که بکمک آن اصول مکانیک کوانتومی بیان و فرمول بندی میشوند آشنا میشویم. این ریاضیات را بزبان علمی جبر خطی نامند که قسمت عمده آن در کتاب ریاضی فیزیک I آمده است.

معهذا در این فصل بخشی از مطالب جبر خطی که کاربرد بسیار زیاد در مکانیک کوانتومی دارد مرور می کنیم و سپس مطالبی را در این رابطه می آموزیم که مختص به این درس است.

(1-1)- فضای برداری :

تعریف: فضای برداری **V** از مجموعه ای از بردارهای

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots\ldots, \bar{v}_n, \ldots.\}$$

تشکیل شده که میتوان آنها را با یکدیگر جمع و یا در اعداد اسکالر $\alpha, \beta, \ldots$ ضرب نمود بطوریکه نتایج حاصل جزئی از عناصر مجموعه باشند. همچنین جمع بردارها با یکدیگر و ضرب آنها در اسکالرها از قواعد زیرین پیروی میکند

الف: خاصیت جابجایی :commutativity

$$\bar{v}_i + \bar{v}_j = \bar{v}_j + \bar{v}_i$$

ب: خاصیت انجمنی: associativity

$$\bar{v}_i + (\bar{v}_j + \bar{v}_k) = (\bar{v}_i + \bar{v}_j) + \bar{v}_k$$

ج: وجود بردار (خنثی) صفر در فضای برداری بطوریکه

$$\bar{v}_i + \bar{0} = \bar{0} + \bar{v}_i = \bar{v}_i$$

د: وجود بردار معکوس ($-\vec{v}_i$) در فضای برداری بطوریکه

$$\bar{v}_i + (-\bar{v}_i) = 0$$

ه:

$$\alpha\left(\bar{v}_i + \bar{v}_j\right) = \alpha\bar{v}_i + \alpha\bar{v}_j$$

ز:

$$(\alpha + \beta)\bar{v}_i = \alpha\,\bar{v}_i + \beta\,\bar{v}_i$$

ح:

$$\alpha(\beta\,\bar{v}_i) = (\alpha\,\beta)\bar{v}_i$$

محدوده مقادیر ممکنه ای که اعداد اسکالر $(\alpha,\beta,....)$ اختیار میکنند تشکیل میدان F میدهد. اگر این میدان شامل کلیه اعداد حقیقی باشد فضای برداری را حقیقی و در غیر این صورت فضای برداری را مختلط نامند.

به عنوان مثال، تمامی بردارها (با طولهای متفاوت) واقع بر امتداد ox تشکیل میدان برداری میدهد.

مجموعه بردارهای $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ (تعداد بردارها محدود است) را بطور خطی مستقل از یکدیگر نامند هرگاه رابطه ای نظیر

$$(1-1)\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i = 0$$

یافت نشود مگر آنکه تمامی ضرایب α_i صفر باشد.

مثلا" اگر دو بردار واقع بر محور ox در نظر بگیریم چون رابطه ای نظیر

$$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 = 0$$

یافت میشود که درآن $\alpha_1\neq0$ $\alpha_2\neq0$ است در اینصورت $\vec{v}_1$و$\vec{v}_2$ بطور خطی مستقل از هم نیستند.

فضای برداری را n بعدی نامند هرگاه حداکثر در آن n بردار که بطور خطی مستقل از یکدیگر هستند یافت شوند. معمولا" چنین فضای برداری را با سمبل

$$V^n(R) \quad , \quad V^n(C)$$

که اولی معرف فضای برداری n بعدی حقیقی (Real) و دومی معرف فضـای بـرداری n بعدی مختلط (Complex) میباشد. توجه کنید که در فضای سه بعدی بی نهایت بردار داریم که تشکیل فضای برداری $V^3(R)$ را میدهد اما حداکثر سه بردار از این مجموعه بی نهایت بردار وجود دارند که بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند و بدین علت آنرا فضای برداری سه بعدی V^3 نامند. اگر فضای برداری V^n با n بردار $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots\vec{v}_n\}$ که بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند داده شده باشند در اینصورت هر برداری را میتوان بصورت ترکیب خطی از آنها نوشت چه میبایستی رابطه ای بصورت

$$(1-2)\quad \alpha\bar{v}+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\bar{v}_i=0$$

داشته باشیم که در آن حداقل بعضی از ضرایب صفر نیستند چه اگر تمامی ضرایب صفر باشند در اینصورت بعد فضا (n+1) میگردد که خلاف فرض است. علاوه بر این α نیز مخالف صفر است چه در صورت صفر بودن نتیجه

$$(1-3)\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\vec{v}_i=0$$

را خواهیم داشت که در آن بعضی از α_i ها صفر نیستند کـه بمعنـای آن است که بعد فضای برداری کمتر از n است که باز هم خلاف فرض است بنابراین

$$(1-4)\quad \bar{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i \qquad \alpha_i=\frac{-\alpha'_i}{\alpha}$$

همچنین میتوان نشان داد که ضرایب بسط α_i منحصر بفرد هستند چه اگر ضرایب بسط دیگری داشته باشیم نظیر

$$(1-5)\quad \bar{v}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{v}_i$$

در اینصورت نتیجه میگیریم که

$$0=\sum_{i}(\alpha_i-\beta_i)\bar{v}_i=0$$

چون $\vec{v}_i$ ها بطور خطی مستقل از یکدیگر هستند

$$(1-6)\quad \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$$

بنابراین هرگاه مجموعه ای از بردارهای $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ متعلق به V^n که بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند در نظر بگیریم در این صورت میتوان هر برداری نظیر $\vec{v}$ را که متعلق به همان فضای برداری V^n است بر حسب آنها تجزیه نمود این مجموعه بردارها را بردارهای پایه و ضرایب بسط را مؤلفه نامند و گویند فضای برداری V^n بر حسب این بردارهای پایه نمایش داده میشوند.

2-1-معرفی نوتاسیون دیراک برای بردارها

برای سهولت در تحریر و بیان دقیقتر روابط برداری نوتاسیون برداری دیراک را معرفی میکنیم و آن چیزی جز تعبیر سمبل ← به صورت $|\ \rangle$ نمیباشد. یعنی بردار $\vec{a}$ را بصورت $|a\rangle$ نمایش میدهند و غالبا" آنرا کت (Ket) نامند. برای هر کتی (برداری)نظیر $\alpha|a\rangle$ (α کمیتی اسکالر است) کمیتی بنام برا Bra بصورت $\langle a|\alpha^*$ نسبت میدهیم واز روی آن حاصلضرب اسکالر(یا به زبان دقیقتر حاصلضرب داخلی) دو بردار را به صورت $\langle a|b\rangle$ تعریف میکنیم که شرایط زیر را اقناع میکند

1) $\langle a|a\rangle \geq 0$

2) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

3) $\langle a|\beta b + \gamma c\rangle = \beta\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$

و با استفاده از رابطه (2) نتیجه میگیریم که

4) $\langle \beta b + \gamma c|a\rangle = \beta^*\langle b|a\rangle + \gamma^*\langle c|d\rangle$

طول یک بردار (بزبان دقیقتر، در فضای n بعدی نرم Norm یک بردار)بموجب تعریف با رابطه

$$|a| = |\langle a|a\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

داده میشود.

هرگاه

$$\langle a|b\rangle = 0$$

شود در اینصورت بردار $\vec{a}$ را عمود بر بردار $\vec{b}$ نامند. هرچند در مثالهای آورده شده غالبا" از فضای سه بعدی استفاده شده است اما به آسانی می توان آنها را به فضای با بعد n تعمیم داد. بنابراین اگر $\{\vec{e}_i\}$ معرف یک دستگاه بردار پایه اورتونرمال (متعامد با طول واحد) باشد یعنی

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

در اینصورت چون a و b را میتوان بصورت

$$|a\rangle = \sum_i a_i|e_i\rangle \Rightarrow a_j = \langle e_j|a\rangle$$

$$|b\rangle = \sum_j b_j|e_j\rangle$$

تجزیه نمود، حاصلضرب اسکالر دو بردار بموجب شرط(3) بصورت

$$\begin{aligned}\langle a|b\rangle &= \langle a|b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3\rangle \\ &= b_1\langle a|e_1\rangle + b_2\langle a|e_2\rangle + b_3\langle a|e_3\rangle \\ &= b_1\langle e_1|a\rangle^* + b_2\langle e_2|a\rangle^* + b_3\langle e_3|a\rangle^* \\ (1-7)\quad &= \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i\end{aligned}$$

در میاید. رابطه (1-7) پیشنهاد میکند که $\langle a|$ و $|a\rangle$ را میتوان بترتیب بصورت ماتریسهای ستونی و سطری مزدوج نشان داد

$$(1-8)\quad |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \langle a| = (a_1^* \;\; a_2^* \;\; a_3^*)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$(1-9)\quad \langle a|b\rangle = (a_1^* \quad a_2^* \quad a_3^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_i a_i^* b_i$$

(1-3)-عملگر خطی

بموجب تعریف،یک عملگر ،ابزار ریاضی است که اگر بر برداری اثر دهیم آنرا تبدیل به بردار دیگری (متعلق به همان فضای برداری) نماید .این تأثیر را بصورت زیر نمایش میدهند :

$$(1-10)\quad A|a\rangle=|b\rangle$$

عملگرها همچنین میتوانند بر هر برائی (Bra) اثر کرده و آنرا تبدیل به برائی دیگر نمایند

$$\langle a|A=\langle b|$$

عملگر خطی از قوانین زیر پیروی میکند

$$A\alpha|a\rangle=\alpha A|a\rangle$$
$$A\{\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle\}=\alpha A|a\rangle+\beta B|b\rangle$$
$$\langle a|\alpha A=\langle a|A\alpha$$
$$(\langle a|\alpha+\langle b|\beta)A=\alpha\langle a|A+\beta\langle b|A$$

1-3-a-نمایش یک عملگر

یک بردار را میتوان به دو صورت محض (abstract representation) و یا بصورت مختصاتی (coordinate representation) نمایش داد شکل محض بردار $\vec{a}$ بصورت زیر است:

$$|a\rangle$$

اما نمایش مختصاتی بردار $\vec{a}$ بصورت

$$(1-11)\quad a_i=\langle e_i|a\rangle$$

است.یعنی بردار $\vec{a}$ بوسیله مؤلفه های آن در یک دستگاه بردارپایه (اورتونرمال)بر ما شناسانده شده است.معمولا" نمایش مختصاتی یک بردار برای انجام محاسبات ریاضی کارسازتر است تا نمایش محض آن .اما در هر حال هر دو نمایش یک مفهوم را در ذهن میبایستی ایجاد نماید .توجه میکنیم که در نمایش مختصاتی یک بردار ،میتوان

نمایشهای مختلفی را داشت کافیست بردار $\vec{a}$ را در دستگاه بردار پایه دیگری نظیر $\{\vec{e}'_i\}$ تجزیه نماییم. a_i و a'_i را بترتیب دو نمایش مختصاتی بردار $\vec{a}$ در دو دستگاه بردار پایه مختلف نامند. حال ببینیم معنای شناختن یک عملگر چیست. هرگاه عملگری بر ما شناخته شده باشد در این صورت اگر آنرا بر بردار معلومی اثر دهیم بردار تبدیل یافته بر ما معلوم خواهد شد.

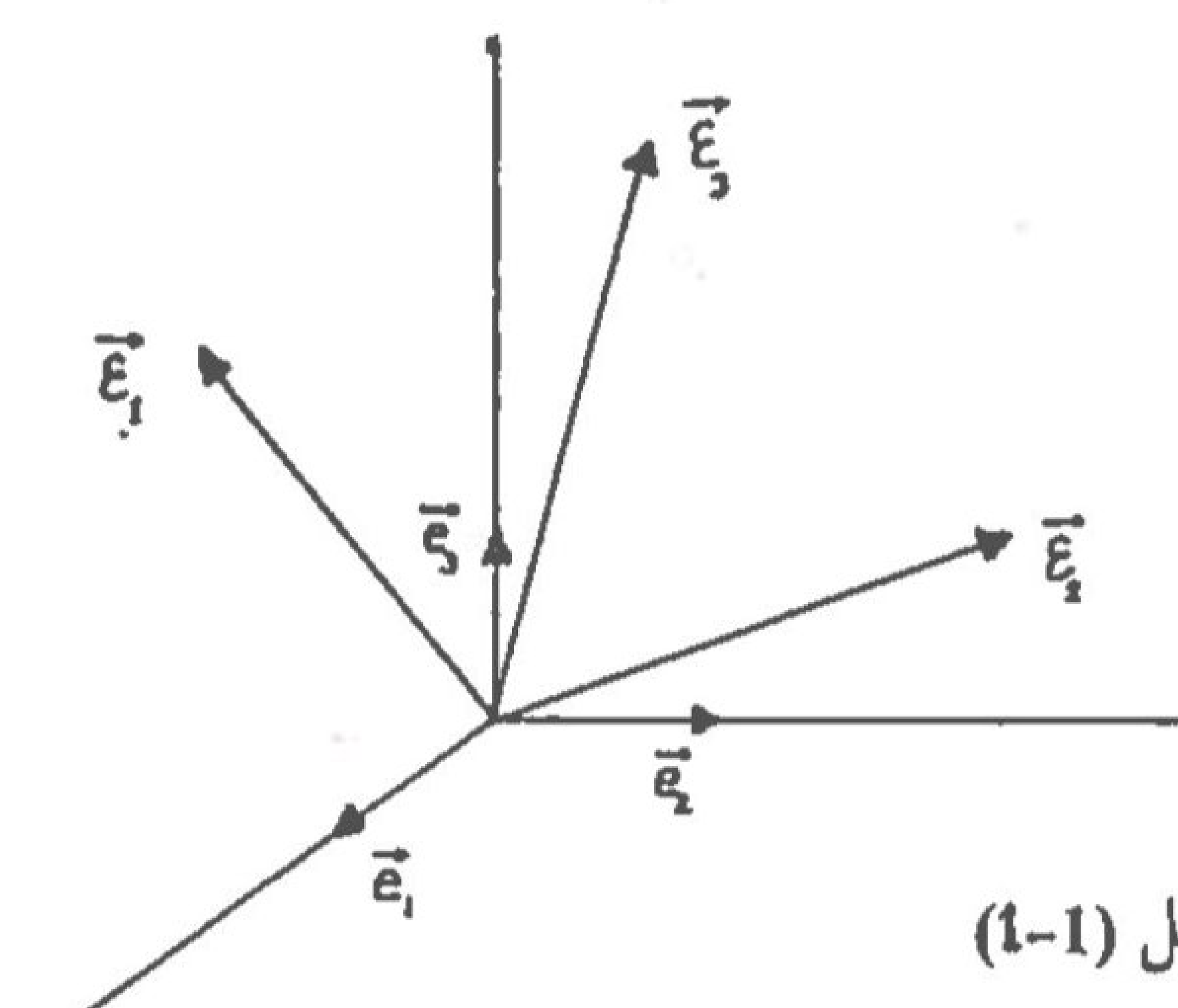
یک دستگاه

قضیه: هرگاه از تأثیر عملگر A بر تمامی بردارهای پایه مطلع باشیم آن عملگر بر ما شناخته شده است.

برای اثبات قضیه A را بر بردارهای پایه $\{\vec{e}_i\}$ اثر میدهیم:

$$(1-12) \quad A\left|e_j\right\rangle = \left|\varepsilon_j\right\rangle \quad j = 1,2,3$$

$\vec{\varepsilon}_j$ ها بردارهای حاصل از این تبدیل میباشند و همانگونه که از شکل (1-1) مشاهده میگردد این بردارها الزاما" اورتونرمال نمیباشند



شکل (1-1)

از طرفی شناختن بردارهای $\vec{\varepsilon}_j$ بمعنای معلوم نمودن مؤلفه های آن در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ است یعنی کمیتهای

$$(1-13) \quad \left\langle e_i \middle| \varepsilon_j \right\rangle \quad i = 1,2,3$$

بر ما معلوم هستند .بکمک روابط (12-1) و(13-1) در میابیم که کمیتهای معلوم در واقع

$$(1-14) \quad \langle e_i|A|e_j\rangle = \langle e_i|\varepsilon_j\rangle$$

میباشند.

$\langle e_i|A|e_j\rangle$ را که بطور مختصر با A_{ij} نمایش میدهند، مؤلفه یا عناصر عملگر A در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ نامند. حال ادعا میکنیم معلوم بودن $\langle e_i|\varepsilon_j\rangle$ به معنای معلوم بودن A_{ij} ها است که در غایت بمعنای معلوم بودن عملگر A است چه اگر عملگر A را بر بردار دلخواه و معلومی نظیر $\vec{a}$ اثر دهیم خواهیم داشت

$$(1-15) \quad A|a\rangle = |b\rangle$$

برای شناختن بردار $\vec{b}$ طرفین (15-1) را در $\langle e_i|$ ضرب و همچنین $\vec{a}$ را در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بسط میدهیم پس خواهیم داشت

$$(1-16) \quad \sum_j \langle e_i|A|e_j\rangle a_j = \langle e_i|b\rangle$$

$$\sum_j A_{ij}\, a_j = b_i$$

در (16-1) a_j ها معلوم است و اگر A_{ij} ها داده شده باشند در اینصورت b_i بر ما معلوم خواهد بود واین اثبات قضیه است. معمولاً" مؤلفه های بردارهای $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, ...$ را در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بصورت ستونهایی کنار هم مینویسند یعنی

$$(1-17) \quad \begin{pmatrix} \langle e_1|\varepsilon_1\rangle & \langle e_1|\varepsilon_2\rangle & \langle e_1|\varepsilon_3\rangle \\ \langle e_2|\varepsilon_1\rangle & \langle e_2|\varepsilon_2\rangle & \langle e_2|\varepsilon_3\rangle \\ \langle e_3|\varepsilon_1\rangle & \langle e_3|\varepsilon_2\rangle & \langle e_3|\varepsilon_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

جدول (17-1) را نمایش عملگر A در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ نامند و برای سالیان دراز مفهوم عناصر درون جدول فوق به عنوان یک معما برای مؤلف باقیمانده بود که اکنون برای خواننده مفهوم آن میبایستی واضح شده باشد .توجه میکنیم که رابطه -1)

(17 را نمایش عملگر A در بردار پایه $\{\vec{e_i}\}$ نامند و در اینصورت تأثیر عملگر A بر یک بردار دلخواه نظیر $\vec{a}$ در نمایش محض و نمایش محاسباتی بصورتهای زیر در می آیند

$$(1-18) \quad A|a\rangle = |b\rangle$$

$$(1-19) \quad \sum_j A_{ij} a_j = b_i$$

$$(1-20) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

که نحوه استفاده از رابطه (20-1) ،بموجب (19-1) ضرب عناصر هر عملگر در عناصر متناظر ستون میباشد که غالبا" در دبیرستان نحوه محاسبه آنرا آموخته ایم.

توجه نمایید همانگونه که میتوان مؤلفه های یک بردار را در دستگاه متعامد دیگری نظیر $\{\vec{e'_i}\}$ بصورت a'_i نمایش داد که

$$(1-21) \quad a'_i = \langle e'_i | a \rangle \quad , \quad a'_i \neq a_i$$

یک عملگر را هم میتوان در دستگاه بردار پایه متعامد دیگری نظیر $\{\vec{e'_i}\}$ بصورت A'_{ij} نمایش داد که

$$(1-22) \quad A'_{ij} = \langle e'_i | A | e'_j \rangle \quad , \quad A'_{ij} \neq A_{ij}$$

است. حال همانگونه که خواص ریاضی بردار $\vec{a}$ نظیر طول، امتداد و جهت آن در نمایشهای مختلف تغییر نمیکند بهمین ترتیب خواص ریاضی عملگر A نظیر تبدیل نمودن بردار $\vec{a}$ به بردار $\vec{b}$ در نمایشهای مختلف تغییر نمیکند. بنابراین یکی از آرزوهای بزرگ ما اینست که دستگاه بردار پایه ای بیابیم که شکل عملگر A در آن بردار پایه ساده‌ترین صورت ممکن موسوم به شکل **قطری** در آید بعنوان مثال نمایش عملگر A در دو بردار پایه $\{\vec{e_i}\}$ و $\{\vec{e'_i}\}$ بصورت زیر است

$$(1-23) \quad \langle e_i | A | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad \langle e'_i | A | e'_j \rangle = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

هرگاه عملگر A داده شده باشد از روی آن چند عملگر مختلف میتوان ساخت معروفترین آنها عبارتند از:

1- عملگر وارونه (ترانهاده Transpose) عملگر A

عملگر جدیدی است که آنرا با سمبل $\tilde{A}$ نشان میدهند مؤلفه های این عملگر برابر است با

$$(1-69)\quad (\tilde{A})_{ij} = A_{ji}$$

بعنوان مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2- عملگر مزدوج وارونه عملگر Transpose Conjugate A:

عملگر جدیدی است که آنرا با A^+ نشان میدهند و مؤلفه های آن از رابطه

$$(1-70)\quad (A^+)_{ij} = A^*_{ji}$$

بدست میاید. بعنوان مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i & 4 \\ 5i & 7 & 2-i \\ 5-2i & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} 1+i & -5i & 5+2i \\ 3-2i & 7 & 3 \\ 4 & 2+i & 5 \end{pmatrix}$$

توجه کنید در فضای حقیقی روابط (69-1) و(70-1) عینیت هستند.

3-عملگر معکوس عملگر A (Inverse):

عملگر جدیدی است که آنرا با A^{-1} نشان میدهند و مؤلفه های آن را اگرقضایای مربوط به دترمینانهارا آموخته باشید میتوانید بدست آورید. در حال حاضر به تعریف آن اکتفا میکنیم که عملگر معکوس از رابطه

$$(1-71)\quad A^{-1}A = 1$$

پیروی میکند.

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\5&1&-1\\2&-3&-3\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6&0&2\\-13&2&-5\\17&-2&5\end{pmatrix}$$

(1-7)-معرفی عملگرهای خاص

1- عملگر هرمیتی: Hermitian

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه

$$(1-72)\quad A^{+}=A$$

پیروی کند عملگر A را هرمیتی نامند . در فضای حقیقی رابطه (72-1) بصورت

$$(1-73)\quad \bar{A}=A$$

در میاید که اینگونه عملگر هرمیتی را عملگر **متقارن** مینامند . بعنوان مثال عملگر A

$$A=\begin{pmatrix}2&1+i&2-3i\\1-i&3&4+i\\2+3i&4-i&5\end{pmatrix}$$

یک عملگر هرمیتی است چه بموجب (70-1) و(72-1) داریم

$$(1-74)\quad A_{ij}^{+}=A_{ij}$$
$$A_{ji}^{*}=A_{ij}$$

همانگونه که مشاهده میکنیم عملگر فوق از رابطه (74-1) پیروی میکند .

توجه کنید هرگاه در (74-1) $j=i$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$(1-75)\quad A_{ii}^{*}=A_{ii}$$

یعنی عناصر قطری عملگر هرمیتی میبایستی حقیقی باشند .

تعداد عناصر مستقل یک عملگر در حالت کلی در فضای مختلط n بعدی $2n^2$ است چون تعداد مؤلفه ها n^2 و هر مؤلفه عملگر در حالت عمومی از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی تشکیل شده است.

اما برای عملگر هرمیتی در فضای مختلط مشاهده میشود که اولا" عناصر قطری حقیقی و در ثانی عناصر غیر قطری A_{ij} با A_{ji} هرچند که مساوی نیستند اما از اعداد یکسان درست شده اند بنابراین $2(n^2-n)$ تعداد عناصر غیر قطری را حاصل مینماید و اگر بر دو تقسیم کنیم تعداد عناصر واقع در یک طرف قطر را معلوم میسازد و این تعداد عناصر مستقل غیر قطری است. بنابراین تعداد کل عناصر مستقل یک عملگر هرمیتی برابر میشود با

$$(1-76) \quad \frac{2(n^2-n)}{2}+n=n^2$$

اگر فضای برداری حقیقی باشد تعداد عناصر مستقل یک عملگر هرمیتی (متقارن) برابر میشود با

$$(1-77) \quad \frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$$

اثبات (1-77) بعهده خواننده واگذار میشود (آیا n^2+n عدد زوجی هست یا نه).

از روی رابطه (1-38) نتیجه میگیریم که تانسور اینرسی یک عملگر هرمیتی (متقارن) است.

2- عملگر ضد هرمیتی (Anti Hermitian)

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه

$$(1-78) \quad A^+=-A$$

پیروی کند عملگر A را ضد هرمیتی نامند. در فضای حقیقی رابطه (1-78) بصورت

$$(1-79) \quad \tilde{A}=-A$$

در میاید که اینگونه عملگر را عملگر ضد متقارن یا پاد متقارن نامند[پاد بمعنای ضد است نظیر زهر – پادزهر، سخن – پادسخن = پاسخ، آلایش – پادآلایش = پالایش] توجه میکنیم بموجب (1-78) داریم

$$\left(A^+\right)_{ij}=-A_{ij}$$

$$(1-80) \quad A^*_{ji} = -A_{ij}$$

هرگاه در (80-1) i=j قرار دهیم

$$(1-81) \quad A^*_{ii} = -A_{ii}$$

میگردد یعنی عناصر قطری یک عملگر ضد هرمیتی موهومی خالص و در فضای حقیقی

$$(1-82) \quad A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow 2A_{ii} = 0$$

صفر میباشند.

تعداد پارامترهای مستقل یک عملگر ضد هرمیتی بموجب (76-1) باز هم برابر n^2 میگردد و اگر عملگر ضد متقارن باشد، در اینصورت با استفاده از نتیجه (76-1) برابر

$$(1-83) \quad \frac{n^2 - n}{2}$$

میگردد. (عناصر قطری نداریم)

معروفترین عملگر ضد متقارن عملگر مولد چرخش خرد S^i است که با روابط (32-1) داده شده اند:

$$(1-84) \quad S^i_{mn} = -S^i_{nm} = \varepsilon_{imn}$$

3- عملگر Unitary

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه

$$(1-85) \quad A^+A = AA^+ = 1 \Rightarrow A^+ = A^{-1}$$

پیروی نماید عملگر A را یونیتاری نامند. در فضای حقیقی رابطه (85-1) بصورت

$$(1-86) \quad \tilde{A}A = A\tilde{A} = 1 \Rightarrow \tilde{A} = A^{-1}$$

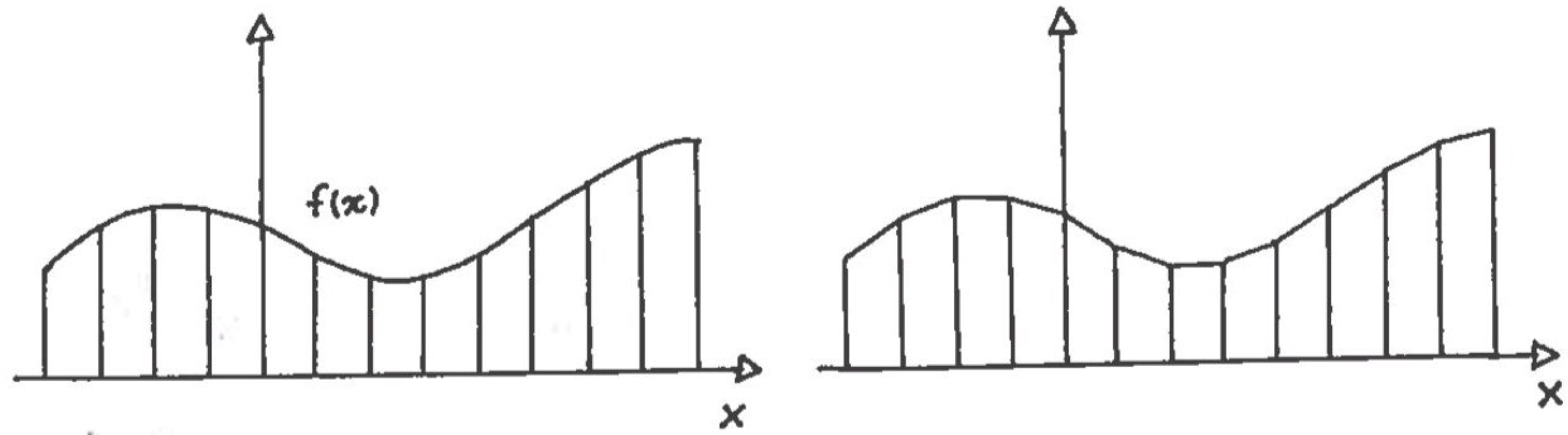
در میاید که اینگونه عملگر یونیتاری را متعامد نامند.

کلمه تعامد برای عملگری که با رابطه (86-1) تعریف شده نام با مسمی میباشد چه بموجب (86-1) داریم

$$(1-87) \quad \begin{gathered} \sum_k \tilde{A}_{ik} A_{kj} = \delta_{ij} \\ \sum_k A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \end{gathered}$$

(14-1)-فضای هیلبرت :

مأخذ تعریف: تابع $f(x)$ بر حسب x در شکل (1-6-a) داده شده است.



(a) (b)

شکل (1-6)

روش ترسیم تابع بدینصورت است که اگر مقادیر $f(x_1) \equiv f_{x_1} \equiv f_1$, $f(x_2) \equiv f_{x_2} \equiv f_2$, $f(x_N) \equiv f_{x_N} \equiv f_N \cdots\cdots$, داده شود این تابع بصورت (تقریبی) مطابق شکل (1-6-b) رسم میشود. هر قدر هم تعداد مقادیر داده شده $f(x_i) \equiv f_i$ بیشتر باشد منحنی رسم شده شباهت دقیقتری به منحنی شکل (1-6-a) خواهد داشت. (در واقع میبایستی بی نهایت مقدار $f(x_i)$ داده شود)

حال با کمی هشیاری میتوان کمیتهای $f(x_i) \equiv f_{x_i} \equiv f_i$ را بعنوان مؤلفه های یک بردار در فضای N بعدی تعبیر نمود (که N میتواند بی نهایت باشد) بنابراین با چنین تعبیری ما فضای بی نهایت بعدی هیلبرت را معرفی مینمائیم و در نتیجه مقادیر مختلفی که تابع $f(x)$ بازاء x های مختلف اختیار میکند مؤلفه های بردار $|f\rangle$ مینامیم. مشاهده خواهیم کرد با معرفی فضای هیلبرت به روش فوق ریاضیات جبر خطی (عملگرها و ماتریسها) را برای معادلات دیفرانسیل بکار خواهیم گرفت.

براستی بردارهای یکه واقع بر محورهای این فضای بی نهایت بعدی هیلبرت را چگونه مشخص نمائیم؟ . در پاسخ به فضای سه بعدی معمولی بر میگردیم . میدانیم f_i مؤلفه یک بردار در فضای سه بعدی است و آنرا بصورت

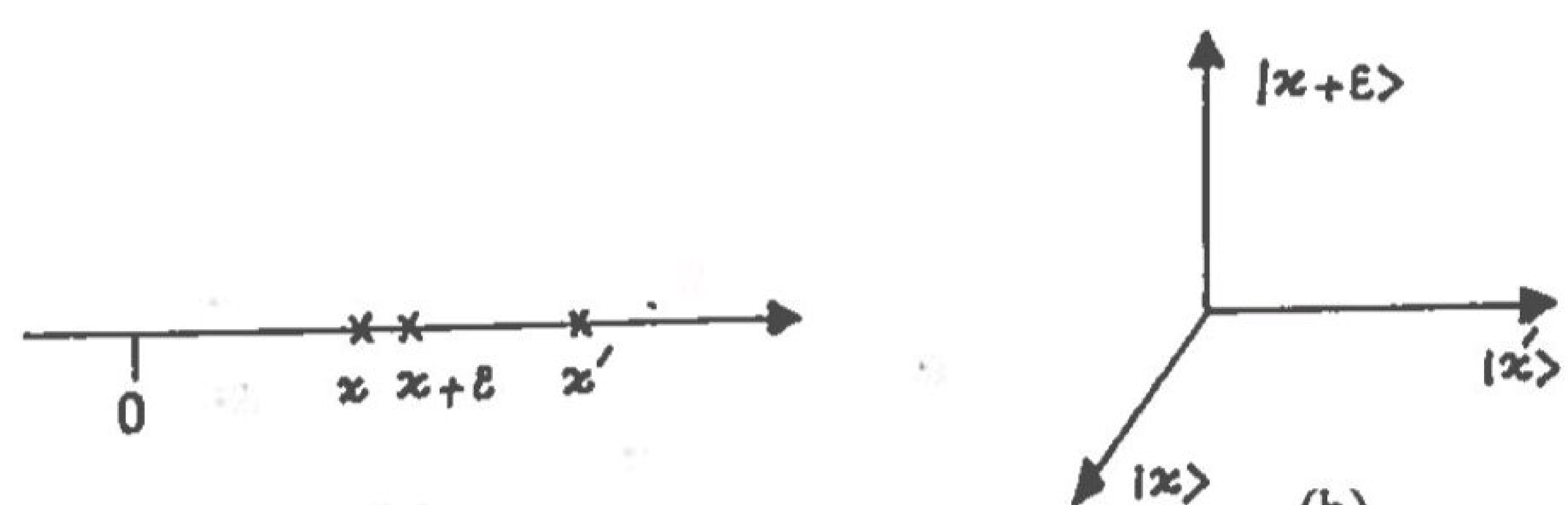
$$\langle e_i | f \rangle = f_i$$

مشخص می نمایيم. چون مؤلفه های بردار $\langle f |$ در فضای بی نهایت بعدی هیلبرت $f(x_i) \equiv f_{x_i} \equiv f_i$ نشان داده ایم بنابراین داریم

$$(1-187) \quad f(x_i) \equiv f_{x_i} \equiv f_i = \langle x_i | f \rangle$$

پس در چنین فضایی بردارهای پایه را با بردارهای $\langle x_i |$ نشان می دهیم از طرفی چون x_i بطور پیوسته تغییر میکند حتی اندیس i را کنار گذاشته و بردارهای پایه در فضای هیلبرت بی نهایت را بصورت $\langle x |$ نشان میدهیم.

بنابراین ادعا میکنیم بازاء هر نقطه به مختصات x واقع بر محور ox (بزبان دقیقتر بازاء هر مقداری که مختصه تعمیم یافته q در فضای configuration یکبعدی اختیار میکند) برداری یکه بصورت $\langle x |$ (یا $\langle q |$) نسبت میدهیم که همگی بر هم عمود هستند. در شکل (1-7-a) سه نقطه به مختصات x و x' و x +ε بر روی محور ox انتخاب کردیم و بردارهای منتسب به آنها در فضای هیلبرت (بی نهایت بعدی) در شکل (1-7-b) رسم میکنیم توجه کنید فضای هیلبرت بی نهایت بعدی است و ما در اینجا از بی نهایت بردار، سه بردار یکه رسم کرده ایم



(a) (b)

شکل (1-7)

توجه کنید حتی برای دو نقطه بسیار نزدیک به هم واقع بر محور ox یعنی نقـاط (x) و

$(x+\varepsilon)$ بردارهای منتسب به آنها در فضای هیلبرت بر هم عمود هستند .چون مختصه x به طور پیوسته تغییر میکند شرط اورتونرمالیزاسیون این بردارها را بجای آنکه بـا دلتـای کرونکر نشان دهیم با دلتای دیراک نشان میدهیم یعنی

$$(1-188)\quad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$$

برخی خواص تابع دلتای دیراک در کتاب ریاضی فیزیک آمده است اما برخی دیگـر از اشکال و خواص مختلف تابع دلتای دیراک را که در مکـانیک کوانتومی کـاربرد دارد شرح داده خواهد شد.

توجه نمایید خاصیت کامل بودن بردارهای پایـه اورتونرمـال گسسته ، رابطـه (1-26) برای بردار پایه پیوسته $\langle x|$ بصورت

$$(1-189)\quad \sum_x |x\rangle\langle x| = 1 \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x|\,dx = 1$$

در میاید که فرم انتگرالی آن دقیقتر است.

حاصلضرب اسکالر دو بردار در فضای هیلبرت بصورت

$$(1-190)\quad \langle f|g\rangle = \int \langle f|x\rangle\langle x|g\rangle\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx$$

در میاید .این رابطه را با رابطه

$$\langle f|g\rangle = \sum \langle f|e_i\rangle\langle e_i|g\rangle = f_i^* g_i$$

که در فضای برداری با بردارهای پایـه گسسته نوشته شده است مقایسه نمائـید و شباهت اساسی دو رابطه را درک نمائید. مؤلـف یـاد دارد کـه در زمـان دانشجوئـی هنگامیکه در مبحث سری فوریه توابـع cosx و sinx را بدلیـل رابطـه (1-190) متعـامد مینامیدند باعث حیرت او بود چه کلمه متعامد بـرای بردارهـا بکـار گرفتـه میشـد و نـه

۱ عملگرهای اسپین و ماتریس های پاوولی

عملگرهای اسپین را می توان به صورت $S_a = \frac{\hbar}{2}\sigma_a$ نوشت که درآن σ_a ها ماتریس های پاوولی نامیده می شوند و عبارتند از:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$