

Présentation Analytique

Sommaire. Je suis un chercheur en informatique fondamentale spécialisé dans l'étude de la sémantique des programmes et je candidate pour un poste de maître de conférence à l'université Paris-Saclay rattaché au Laboratoire Méthodes Formelles. Je suis actuellement postdoctorant à UCL (*University College London*) à Londres où je travaille principalement avec [Fabio Zanasi](#). En septembre 2024, j'ai obtenu mon diplôme de doctorat après avoir défendu ma thèse intitulée *Relèvement du raisonnement algébrique aux espaces métriques généralisés* devant un jury dirigé par [Christine Tasson](#). J'ai étudié pour mon doctorat pendant trois ans dans le laboratoire LIP de l'ENS de Lyon (équipe [Plume](#)), où j'étais supervisé par [Matteo Mio](#) et [Valeria Vignudelli](#). J'avais auparavant obtenu mon master à l'ENS de Lyon et ma licence (B.Sc.) à l'université McGill à Montréal.

Ci-dessous, je résume brièvement mon parcours académique, et je développe plus en détails mes activités d'enseignement et de recherche.

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Parcours Académique | 1 |
| 1.1 | Parcours Universitaire | 1 |
| 1.2 | Activités Professionnelles | 2 |
| 1.3 | Publications | 3 |
| 2 | Enseignement | 4 |
| 2.1 | Cours Enseignés | 4 |
| 2.2 | Approche Pédagogique | 5 |
| 2.3 | Projet d'Intégration | 6 |
| 3 | Recherche | 7 |
| 3.1 | Thématiques | 7 |
| 3.2 | Projet d'Intégration | 7 |
| 3.2.1 | Sémantique de Programmes Probabilistes | 8 |
| 3.2.2 | Vérification de Modèles d'Intelligence Artificielle | 8 |
| 3.2.3 | Langages Diagrammatiques Quantitatifs pour des Procédés Quantiques | 8 |
| 4 | Références | 10 |
| 5 | Appendice | 14 |
| 5.1 | Rapport de Soutenance | 14 |
| 5.2 | Rapports de Thèse | 16 |
| 5.2.1 | Rapport de Jiří Adámek | 16 |
| 5.2.2 | Rapport de Gordon Plotkin | 18 |

1 Parcours Académique

Cette section contient une vue d'ensemble de mes études et de mes travaux.

1.1 Parcours Universitaire

Licence. Pour ma licence, j'ai étudié entre 2016 et 2019 à l'université McGill au Canada. J'ai obtenu un diplôme intitulé *Baccalauréat en sciences* dans le domaine des mathématiques et de l'informatique avec une mention *Honours*.

Master. Pour mon master, j'ai étudié entre 2019 et 2021 à l'ENS de Lyon, en France. J'ai obtenu un diplôme intitulé *Master sciences, technologies, santé, mention Informatique* avec un parcours type informatique fondamentale. J'étais financé par deux bourses du Labex MiLyon. J'ai effectué deux stages de recherches durant cette période. Le premier, en 2020, était encadré par Matteo Mio et Valeria Vignudelli. Nous avons étudié des axiomatisations algébriques, quantitatives ou non, de différents modèles de calcul combinant des choix non déterministes, des choix probabilistes et une possible terminaison. Le deuxième, en 2021, était encadré par Daniela Petrişan. Nous avons étudié les lois distributives faibles entre monades.

Doctorat. Pour mon doctorat, j'ai étudié entre 2021 et 2024 au LIP (UMR 5668) à l'ENS de Lyon, en France. J'ai obtenu un diplôme intitulé *Doctorat de l'ENS de Lyon* avec la spécialité Informatique. J'étais financé par un contrat doctoral spécifique normaliens (CDSN). Mon directeur de thèse était Matteo Mio, chargé de recherche au CNRS affilié au LIP, et ma co-encadrante était Valeria Vignudelli, chargée de recherche au CNRS affiliée au LIP. Le titre de ma thèse est *Relèvement du raisonnement algébrique aux espaces métriques généralisés*. Les autres membres de mon jury sont listés ci-dessous.

- Professeur Jiří Adámek (rapporteur), Czech Technical University in Prague
- Professeur Gordon Plotkin (rapporteur), University of Edinburgh
- Professeure Christine Tasson (présidente), ISAE Suparéo
- Professeur Rory B. B. Lucyshyn-Wright, Brandon University

En appendice de ce document, j'ai fourni le rapport de soutenance et les rapports de thèse.

1.2 Activités Professionnelles

Postes académiques :

- Postdoctorant au [PPLV](#) (University College London). Octobre 2024 – En cours
- Stage de recherche à l'[IRIF](#) (Université Paris Cité). Février – Juin 2021
 - Travail sur les lois distributives faibles supervisé par Daniela Petrişan.
- Stage de recherche au [LIP](#) (ENS de Lyon). Avril – Juillet 2020
 - Travail sur les présentations algébriques de monades supervisé par Matteo Mio et Valeria Vignudelli.

Enseignement :

- Assistant à UCL (University College London). Janvier – Avril 2025
 - Correction de rapports et présentations pour un cours de lecture dirigée sur des papiers classiques de l'informatique théorique.
- Activité complémentaire (ACE) à l'ENS de Lyon. 2021 – 2024
 - Travaux dirigés pour *Sémantique et vérification* et *Preuves et programmes* (total de 100 heures).
- Enseignant et organisateur d'un séminaire étudiant sur les catégories. 2019 – 2023
 - Cours magistraux, [notes de cours](#), et devoirs pour une introduction à la théorie des catégories sur un semestre à McGill et l'ENS de Lyon.
 - Supervision de deux cohortes d'étudiants enseignants à l'ENS de Lyon.
- Assistant à l'université McGill. Septembre – Décembre 2018
 - Permanence et correction pour *Theory of Computation*.

Médiation :

- Animateur bénévole à la [MMI](#). 2023 – 2024
 - Ateliers et exposition *Dans ma cuisine* (sur les maths et l'info) pour des étudiants de 13 à 18 ans.
- Superviseur de stage bénévole pour [UPBS](#). Avril 2022, 2023, et 2024
 - Initiation à la recherche d'une semaine sur les diagrammes de fils pour des étudiants de 16 à 17 ans.
- Enseignant et aide-enseignant à [DMA](#). Juillet 2015 et 2017
 - Cours de programmation et d'électronique dans un camp de jour pour des étudiants de 8 à 17 ans.

Service académique :

- J'ai évalué des articles pour des conférences et publications prestigieuses comme FSCD 2023, FoSSaCS 2023, LiCS 2024, le journal *Logical Methods in Computer Science* (LMCS), le *Polynesian Journal of Mathematics*, et ICALP 2025.

Conférences invitées et contribuées :

- *Graded String Diagrams*, séminaire OASIS. Mars 2025
- *Quantitative Monoidal Algebra*, séminaire de Bellairs *Quantitative Reasoning*. Mars 2025
- *Lifting Algebraic Reasoning to Generalized Metric Spaces*, séminaire en ligne CT Zulip. Août 2024
- *Quantitative Algebraic Semantics*, journée de l'école doctorale InfoMaths. Juin 2024
- *Universal Quantitative Algebra*, séminaire de groupe LIMD. Octobre 2023
- *Universal Quantitative Algebra*, séminaire de groupe LoVE. Septembre 2023
- *Lifting Algebraic Presentations to Met*, séminaire de Bellairs *Quantitative Logic and Reasoning*. Mai 2023
- *I show you my favorite diagrams (the 3rd is ULTRA rare !)*, Séminaire étudiant de McGill. October 2022
- *Tape diagrams*, ACT adjoint school. Juillet 2022
- *Je vous montre mes plus beaux diagrammes (le 3e va vous surprendre !)*, CGS pour grand public. Mai 2022
- *Quotienting a Monad via Projective Algebras*, conférence RAMiCS. Novembre 2021
- *Semialgebras and Weak Distributive Laws*, conférence MFPS. Septembre 2021
- *Modelling Nondeterminism, Probability, and Termination*, conférence LiCS. Juillet 2021
- *Modelling Nondeterminism, Probability, and Termination*, séminaire CaCS. Juin 2021

1.3 Publications

J'ai trois articles publiés dans des conférences internationales, dont deux dans LICS, la conférence la plus prestigieuse de mon domaine. J'ai aussi un article publié dans un journal l'année dernière et deux articles soumis à des conférences cette année.

Conférences internationales :

- [40] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. "Beyond Nonexpansive Operations in Quantitative Algebraic Reasoning". In : *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS '22. Haifa, Israel : Association for Computing Machinery, 2022. ISBN : 9781450393515. DOI : 10.1145/3531130.3533366. URL : <https://doi.org/10.1145/3531130.3533366>
- [47] Daniela PETRIŞAN et Ralph SARKIS. "Semialgebras and Weak Distributive Laws". In : *Proceedings 37th Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics, MFPS 2021, Hybrid : Salzburg, Austria and Online, 30th August - 2nd September, 2021*. Sous la dir. d'Ana SOKOLOVA. T. 351. EPTCS. 2021, p. 218-241. DOI : 10.4204/EPTCS.351.14. URL : <https://doi.org/10.4204/EPTCS.351.14>
- [41] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. "Combining Nondeterminism, Probability, and Termination : Equational and Metric Reasoning". In : *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. 2021, 1–14. DOI : 10.1109/LICS52264.2021.9470717. URL : <https://arxiv.org/abs/2012.00382>

Journaux :

- [42] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. "Universal Quantitative Algebra for Fuzzy Relations and Generalised Metric Spaces". In : *Logical Methods in Computer Science* Volume 20, Issue 4, 19 (2024). ISSN : 1860-5974. DOI : 10.46298/lmcs-20(4:19)2024. URL : <https://lmcs.episciences.org/12339>

Soumissions :

- [37] Gabriele LOBBIA et al. *Quantitative Monoidal Algebra : Axiomatising Distance with String Diagrams*. 2025. arXiv : 2410.09229 [cs.LO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2410.09229>
- [51] Ralph SARKIS et Fabio ZANASI. *String Diagrams for Graded Monoidal Theories with an Application to Imprecise Probability*. 2025. arXiv : 2501.18404 [math.CT]. URL : <https://arxiv.org/abs/2501.18404>

2 Enseignement

2.1 Cours Enseignés

Je commence par un tableau qui résume les enseignements que j’ai livrés au niveau universitaire. J’y liste, pour chaque cours, l’intitulé, le volume horaire de CM et de TD, le nombre (approximatif) d’étudiants et leur niveau, et l’établissement.

| Intitulé | CM | TD | Niveau | Effectif | Établissement |
|---|------------|------------|----------|------------|---------------|
| <i>Directed Reading</i> (2025) | 0 | 0 | Licence | 8 | UCL |
| <i>Sémantique et Vérification</i> (2021–2023) | 0 | 62 | Master | 15 | ENS de Lyon |
| <i>Preuves et Programmes</i> (2022–2023) | 0 | 40 | Master | 15 | ENS de Lyon |
| <i>Category Theory</i> (2019–2023) | 40+ | 0 | Licence+ | 10–20 | McGill et ENS |
| <i>Theory of Computation</i> (2018) | 0 | 0 | Licence | ≥ 100 | McGill |
| Total | 40+ | 102 | | | |

Pour les deux cours avec un volume horaire nul, mes responsabilités consistaient à tenir des heures de permanence et corriger des devoirs. Ci-dessous, je développe brièvement le contenu des autres cours ainsi que mes responsabilités.

Sémantique et Vérification (2021, 2022, et 2023)

Syllabus. Ce cours s’intéresse à l’étude de différents types de modèles de calcul et des propriétés de leurs comportements qui peuvent être vérifiées automatiquement. Il aborde les systèmes de transitions étiquetés, les propriétés temporelles linéaires, la théorie des ordres, la topologie, la logique temporelle linéaire, la bisimulation, la logique modale.

Rôle. Chargé de TD via une ACE. Mes responsabilités étaient de préparer une feuille d’exercices avec des solutions avant chaque TD, de diriger les sessions de TD, et de communiquer avec l’enseignant sur l’atteinte des différents objectifs du cours.

Informations additionnelles. Total de 62 heures équivalent TD avec des groupes d’environ 15 étudiants en master d’informatique à l’ENS de Lyon. L’enseignant était Colin Riba.

Preuves et Programmes (2023)

Syllabus. Ce cours s’intéresse à des résultats simples et plus avancés autour de la correspondance entre les preuves et les programmes (Curry–Howard). Il aborde le lambda calcul simplement typé, la déduction naturelle intuitionniste et classique, le système T, le système F, les preuves de normalisation forte et la paramétricité.

Rôle. Chargé de TD via une ACE. Mes responsabilités étaient de préparer une feuille d’exercices avec des solutions avant chaque TD, de diriger les sessions de TD, et de communiquer avec l’enseignant sur l’atteinte des différents objectifs du cours.

Informations additionnelles. Total de 20 heures équivalent TD avec des groupes d’environ 15 étudiants en master d’informatique à l’ENS de Lyon. L’enseignant était Michele Pagani.

Preuves et Programmes (2022)

Syllabus. Ce cours s’intéresse à des résultats simples et plus avancés autour de la correspondance entre les preuves et les programmes (Curry–Howard). Il aborde l’assistant de preuve Coq, le lambda calcul simplement typé, la déduction naturelle intuitionniste et classique, le système T, les catégories cartésiennes fermées et la correspondance de Curry–Howard–Lambek.

Rôle. Chargé de TD via une ACE. Mes responsabilités étaient de préparer une feuille d'exercices avec des solutions avant chaque TD, de diriger les sessions de TD, et de communiquer avec l'enseignant sur l'atteinte des différents objectifs du cours.

Informations additionnelles. Total de 20 heures équivalent TD avec des groupes d'environ 15 étudiants en master d'informatique à l'ENS de Lyon. L'enseignant était Colin Riba.

Théorie des Catégories (2019-2021 et 2023)

Syllabus. Ce cours introduit les bases de la théorie des catégories avec des exemples venant de différents domaines des mathématiques et de l'informatique. Il aborde, les catégories, les foncteurs, les (co)limites, les propriétés universelles, les transformations naturelles, le lemme de Yoneda, les adjonctions et les monades. Il est destiné à des élèves en fin de licence ou master ayant déjà quelques familiarités avec les mathématiques.

Rôle. Enseignant volontaire. Mes responsabilités ont évolué au cours du temps. À la première itération de ce cours, j'ai préparé chaque cours avec des notes de cours les accompagnants, et j'ai donné des cours magistraux pendant le semestre d'été à l'université McGill. Le cours n'était pas officiel. J'ai repris la même formule pour la deuxième itération (en visioconférence) après avoir adapté le contenu des cours et des notes. Pour la troisième itération, en 2020, j'ai été accompagné par trois autres étudiants pour enseigner le cours à l'ENS de Lyon, et nous avons pu l'officialiser avec les départements de mathématiques et d'informatique. Nous avons repris une formule similaire, mais nous avons inclus des travaux dirigés et des devoirs pour pouvoir récompenser les participants de crédits facultatifs (crédits École). En 2021 et 2023, j'ai occupé un rôle de superviseur : d'autres étudiants donnaient les cours magistraux (à l'ENS de Lyon) basés sur mes notes, et je les aidais à préparer chaque cours en donnant des retours complets. Les notes de cours sont disponibles [ici](#).

Informations additionnelles. Le cours a été offert comme "séminaire étudiant" à l'ENS de Lyon en 2020, 2021, et 2023, permettant aux étudiants d'obtenir des crédits facultatifs en le suivant. Au cours des quatre premières éditions, j'ai conçu et dispensé plus de 40 heures de cours magistraux. Pour les deux dernières itérations, j'ai cédé ma place à des étudiants de master afin de leur offrir une première expérience en enseignement. J'ai néanmoins continué à m'impliquer activement en les conseillant, en les guidant dans la préparation de leurs cours et en concevant les devoirs.

2.2 Approche Pédagogique

Je suis passionné par l'enseignement depuis un jeune âge et cherche continuellement à enrichir mon approche pédagogique en intégrant de nouvelles méthodes dans mes cours et travaux dirigés. Par exemple, lors de mes TD (et à plus grande échelle dans les deux dernières itérations de mon cours sur la théorie des catégories), j'illustre par l'exemple l'idée que la meilleure façon d'apprendre est d'enseigner. Concrètement, en plus de leur demander de résoudre les exercices du TD, j'invite les étudiants à présenter leurs solutions au tableau, puis j'anime une discussion collégiale avec toute la classe sur les points forts et les éventuelles améliorations de chaque solution.

Cette approche présente plusieurs avantages. Tout d'abord, elle amène les étudiants à reformuler leurs idées pour mieux les communiquer, ce qui approfondit leur compréhension des concepts abordés en cours. De plus, elle leur permet de s'exercer à enseigner dans un cadre bienveillant, développant ainsi des compétences transversales précieuses dans un cursus scientifique.

Pour affiner mes méthodes pédagogiques, j'apprécie échanger avec mes pairs pour m'inspirer de leurs expériences. Ces discussions ont souvent lieu de manière informelle, par exemple pendant les pauses café, mais j'aimerais également les intégrer dans un cadre plus structuré. Lors d'une visite à l'université McGill au premier trimestre de l'année 2022/23, j'ai ainsi participé à des rencontres bimensuelles sur le sujet, organisées par Rosalie Bélanger-Rioux.

Par ailleurs, je prends part à des activités de médiation scientifique (volume horaire dépassant 100 heures durant mon doctorat). Les formats, souvent plus légers et adaptés à un public plus jeune, m’amènent à ajuster mes méthodes d’enseignement et à explorer de nouveaux points de vue, que je peux ensuite réinvestir en classe.

2.3 Projet d’Intégration

Fort d’une expérience d’enseignement couvrant plusieurs disciplines théoriques en informatique et en mathématiques, je souhaite apporter mon expertise au sein de Polytech Paris-Saclay. Je suis particulièrement enthousiaste à l’idée d’enseigner les cours dans la spécialité *Informatique et Ingénierie Mathématique*, notamment ceux où les étudiants découvrent l’informatique sous un angle formel et rigoureux. Plus précisément, je liste les cours provenant de la maquette qui m’intéresse et j’indique avec une étoile (★) ceux qui me tiennent tout particulièrement à cœur.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| ★ Algorithmique I | • Modélisation & programmation |
| ★ Algorithmique II | • Probabilités Statistiques |
| ★ Analyse | • Projet d’application |
| ★ C++ I | • Projet génie logiciel |
| ★ Développement web et mobile I | ★ Projet personnel professionnel 1 |
| ★ Fondements théoriques I | ★ Projet personnel professionnel 2 |
| ★ Fondements théoriques II | ★ Projet personnel professionnel 3 |
| ★ Informatique quantique | ★ Projets / Projets interspécialité |
| ★ Informatique théorique | • Recherche opérationnelle |
| • Intelligence artificielle | |

Les offres de cours plus avancés dans les différents masters offert par l’université Paris-Saclay sont aussi attrayant pour moi. J’aimerais beaucoup enseigner des cours proches de mon domaine de recherche (la sémantique de programme) dans le MPRI et j’aimerais beaucoup préparer les étudiants à passer l’agrégation (les guidant dans leurs premiers pas en pédagogie) dans le M2 prévu à cet effet. Polytech Paris-Saclay offre aussi un cursus préparatoire (PEIP) dans lequel je pourrais enseigner tous les cours de maths et d’informatique.

Il y a plusieurs cours dans la maquette notés SAÉ qui demande d’organiser l’apprentissage et l’évaluation autrement que dans les cours standard, souvent en insistant sur l’exécution de projets. Cet aspect de la formation me parle car je suis convaincu de son efficacité. L’accompagnement des étudiants dans des travaux indépendants est une occasion de leur apprendre à structurer leurs idées et leurs temps, à mener des recherches en autonomie, et à développer leurs compétences en communication scientifique. Cela facilite aussi une évaluation plus juste des étudiants dans un contexte où l’accès aux intelligences artificielles génératives rend la triche plus accessible durant des épreuves standards de résolution de problème. Ça sera un objectif important durant ma carrière d’inclure des techniques pédagogiques innovatrice pour enrichir mes cours et garder la formation du département à jour avec les standards établis par les universités prestigieuses à travers le monde.

Je suis convaincu que mes nombreuses heures consacrées à l’enseignement, ainsi que mon engagement à affiner mes méthodes pédagogiques, me permettront de proposer une formation de qualité, en adéquation avec les attentes de votre département.

En parallèle de mon service d’enseignement, j’aimerais m’investir activement dans les initiatives visant à promouvoir la diversité au sein de l’université Paris-Saclay, en veillant à la mise en place d’un environnement inclusif et équitable pour tous les étudiants. Plus particulièrement, je vais continuer à m’impliquer dans des actions de médiation comme des ateliers ou conférences grand public, l’organisation d’hackathons, ou bien des collaborations avec des collègues et lycées. Ces activités sont selon moi indispensables pour rendre l’informatique plus accessible à un large public, et elles contribuent à la promotion des valeurs académiques en dehors des milieux privilégiés dans lesquels on exerce notre métier.

3 Recherche

3.1 Thématiques

Mes travaux se situent à l'intersection de la théorie des catégories, de la logique et de l'informatique. Un lien formel entre ces domaines a été découvert par Curry, Howard et plus tard Lambek, mais depuis lors, de nombreuses lignes de recherche utilisent des liens étroits qui tombent sous le terme générique de "computational trinitarianism". Plus précisément, j'utilise le raisonnement algébrique et les diagrammes de cordes pour étudier la sémantique quantitative de programmes informatiques.

Les méthodes algébriques ont été utilisées par de nombreux pionniers des fondations mathématiques de l'informatique (Scott [52], Goguen [26], Plotkin [31], Hyland [31], Moggi [43], etc.) pour concevoir des modèles importants en sémantique de programmes. Un premier principe dans ce domaine de recherche est que la composition de programmes complexes à partir de programmes simples est un analogue très proche de la formation d'expressions algébriques complexes. Par exemple, on peut commencer avec des nombres $(0, 1, \dots)$, des variables (x, y, \dots) , et des opérations basiques $(+, \times, \dots)$, et construire l'expression $3 + 5 \times x + y \times y$. De la même façon, on peut commencer avec des nombres, des variables, et des constructions d'un langage de programmation pour écrire des programmes comme :

$$\text{let } x = 9 \text{ in (if } x \% 2 = 0 \text{ then } x/2 \text{ else } 3x + 1)$$

Sous cet angle, on peut dériver des propriétés de programmes en étudiant les programmes simples qui les composent et la manière dont ils les composent.

Les diagrammes de cordes forment une syntaxe bidimensionnelle qui étend le langage algébrique classique. Ce langage permet de représenter fidèlement des processus ou des systèmes qui sont sensitifs à l'utilisation de ressources. Par exemple, dans la syntaxe algébrique classique, la réutilisation d'une variable à différents endroits d'un programme n'est pas explicitement marqué, alors que l'action de copier est représentée par un diagramme de corde. Cette syntaxe tient ses origines dans une utilisation informelle par Penrose [44], puis elle a été formalisée par Joyal et Street [35], et ensuite appliquée à pleins de domaines de l'informatique (e.g. les processus quantiques, les automates, les logiques de programmes) [2, 8, 10, 11, 28, 29, 32, 33, 48, 49, 50, 54].

Un objectif commun dans cette recherche est de pouvoir dériver une équivalence entre deux programmes en passant par une interprétation mathématique (au lieu de concevoir des tests souvent non exhaustifs). Cependant, il y a beaucoup d'applications où la notion d'équivalence est trop forte. Quand deux programmes utilisent des choix aléatoires, il est possible que leurs interprétations coïncident avec une grande probabilité sans pour autant être égales. Il serait plus pertinent dans ce cas de noter la probabilité d'observer le même comportement pour ces deux programmes plutôt que de les étiqueter comme non équivalents. Pour remédier à ce problème, différents groupes se sont intéressés à une sémantique quantitative où la notion d'équivalence est remplacée par une relation plus fine (souvent une métrique) [5, 9, 19, 20, 23, 25].

Mes travaux peuvent se résumer à la conception d'extension du raisonnement algébrique et diagrammatique à une dimension quantitative pour modéliser des distances entre programmes. La série de papiers écrits avec mes superviseurs de thèse [40, 41, 42] concerne une extension de la logique équationnelle de Birkhoff, et les papiers écrits pendant mon postdoctorat [37, 51] concernent des extensions du langage des diagrammes de cordes.

3.2 Projet d'Intégration

Mes travaux s'inscrivent clairement dans la ligne directrice du LMF, c'est-à-dire les méthodes formelles. Ci-dessous, je développe des lignes de recherche potentielles qui pourrait bénéficier de collaborations avec les membres actuels du LMF.

3.2.1 Sémantique de Programmes Probabilistes

Une grande partie des exemples dans la littérature sur la sémantique quantitative provient de l'étude de systèmes modélisant des choix probabilistes. Par exemple, les processus de Markov ont été abordés à maintes reprises [5, 6, 17, 18, 19, 20]. Les résultats de ces papiers reposent essentiellement sur l'étude de structures algébriques qui caractérisent les distributions de probabilités (les algèbres convexes) et leur interaction avec des distances connues (e.g. Kantorovich/Wasserstein, variation totale).

Des récentes avancées montrent le potentiel d'une théorie synthétique des probabilités basée sur les diagrammes de cordes [22], et le raisonnement quantitatif commence à s'immiscer dans cette approche [46]. Ma recherche avec Fabio Zanasi concerne la conception d'un cadre théorique permettant un raisonnement quantitatif et diagrammatique. Dans notre papier [37], nous axiomatisons la distance de variation totale entre des matrices stochastiques qui sont représentées par des diagrammes de cordes. Dans un autre papier [51], nous interprétons un langage de programmation avec des primitives pour des choix probabilistes et non déterministes dans un langage de diagrammes de cordes correspondant à des matrices stochastiques. J'envisage un programme de recherche à court terme où l'on pourrait développer un langage de programmation diagrammatique qui incorpore des choix probabilistes qui sera équipé d'un système logique permettant de quantifier différences entre deux programmes.

Cette ligne de recherche correspond à la thématique *Preuve de Programmes*, en particulier dans l'Axe 4 qui concerne les logiques pour la vérification. Ces idées sont aussi connexes aux travaux de Jean Goubault-Larrecq qui étudie la programmation probabiliste avec des structures riches venant de la topologie (un domaine directement relié aux espaces métriques). Elle est aussi très importante pour étudier les modèles d'intelligence artificielle, que j'aborde plus en détail dans la prochaine section.

3.2.2 Vérification de Modèles d'Intelligence Artificielle

Dans les six dernières années, il y a une explosion d'articles esquissant des structures catégoriques sous-jacentes à l'apprentissage automatique, e.g. [13, 16, 21, 24, 53], et un outil assez populaire dans cette recherche (les lentilles ou *lens*) et souvent représenté par un langage qui évoque les diagrammes de cordes. Ce pan de l'étude des méthodes formelles pour l'intelligence artificielle est la fondation du projet britannique *Safeguarded AI* qui me finance actuellement [3, 4]. Ce projet vise les mêmes objectifs que le projet français SAIF (*Safe AI through Formal methods*) [45] donc Benedikt Bollig fait partie.

Il est évident que l'apprentissage n'est pas une science exacte : les méthodes de calcul approximatif, les mesures de performances quantitatives et les modèles probabilistes sont au cœur de l'efficacité des méthodes en apprentissage automatique. C'est pourquoi il est nécessaire de développer les idées de la sémantique quantitative pour l'étude des modèles d'apprentissage. On retrouve déjà cette idée dans les recherches financées par les deux projets mentionnés [27, 38, 39, 51].

La vérification de l'intelligence artificielle comporte de multiples facettes que je n'ai pas encore pu explorer, et j'estime que la communication avec l'équipe de LMF sur la thématique *Intelligence Artificielle* pourrait m'aider à orienter mes recherches dans ce genre d'applications.

3.2.3 Langages Diagrammatiques Quantitatifs pour des Procédés Quantiques

Les langages diagrammatiques sont aussi un sujet en vogue en informatique quantique avec le calcul ZX [14] et ses différentes variantes [7, 15, 32, 34]. Deux chercheurs du LMF dans l'équipe Inria QuaCS sont d'ailleurs des experts de ces langages comme Renaud Vilmart et Vladimir Zamdzhiev.

Quand j'ai commencé à parler d'une possible collaboration avec Fabio Zanasi sur le raisonnement diagrammatique quantitatif, nous avons assez rapidement trouvé des exemples

en informatique quantique ou un rudiment de raisonnement quantitatif était utilisé avec des diagrammes de cordes de manière plutôt informelle [12, 30, 36]. C'était tout à fait prévisible, car le calcul quantique est rempli de subtilités ne pouvant être expliquées par un raisonnement exact. En effet, on retrouve les distributions de probabilités au cœur des fondations théoriques de la physique quantique et une des plus grandes contraintes techniques pour construire des ordinateurs quantiques et la gestion du bruit. Cela motive différentes idées dans l'étude formelles des algorithmes quantiques qui demande de raisonner à propos de distances comme l'utilisation de métriques induits par des normes (d'opérateur ou diamants [12]) ou la notion de fidélité [1].

Les exemples développés dans notre papier [37] sont encore basiques, mais nous espérons pouvoir appliquer notre cadre théorique à l'axiomatisation de différentes distances entre des processus quantiques représentés par des diagrammes de corde. Les méthodes basées sur les langages diagrammatiques ont fait leurs preuves en informatique quantique (et se répandent à d'autres domaines), et je crois que le raisonnement diagrammatique quantitatif pourra être tout aussi utile à cette recherche.

4 Références

- [1] Damian F. ABASTO, Alioscia HAMMA et Paolo ZANARDI. “Fidelity analysis of topological quantum phase transitions”. In : *Phys. Rev. A* 78 (1 2008), p. 010301. DOI : 10.1103/PhysRevA.78.010301. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.010301>.
- [2] Thibaut ANTOINE et al. “A Complete Diagrammatic Calculus for Automata Simulation”. In : *33rd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2025)*. Sous la dir. de Jörg ENDRULLIS et Sylvain SCHMITZ. T. 326. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 27 :1-27 :22. ISBN : 978-3-95977-362-1. DOI : 10.4230/LIPIcs.CSL.2025.27. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CSL.2025.27>.
- [3] ARIA. *Safeguarded AI Programme Thesis*. 2024. URL : <https://www.aria.org.uk/wp-content/uploads/2024/01/ARIA-Safeguarded-AI-Programme-Thesis-V1.pdf>.
- [4] ARIA. *Safeguarded AI : TA1.1 Theory – Call for Proposals*. 2024. URL : <https://www.aria.org.uk/wp-content/uploads/2024/04/ARIA-Safeguarded-AI-TA1.1-Theory-Call-for-proposals.pdf>.
- [5] Giorgio BACCI et al. “A Complete Quantitative Deduction System for the Bisimilarity Distance on Markov Chains”. In : *Log. Methods Comput. Sci.* 14.4 (2018). DOI : 10.23638/LMCS-14(4:15)2018. URL : [https://doi.org/10.23638/LMCS-14\(4:15\)2018](https://doi.org/10.23638/LMCS-14(4:15)2018).
- [6] Giorgio BACCI et al. “An Algebraic Theory of Markov Processes”. In : *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2018, Oxford, UK, July 09-12, 2018*. Sous la dir. d’Anuj DAWAR et Erich GRÄDEL. ACM, 2018, 679–688. DOI : 10.1145/3209108.3209177. URL : <https://doi.org/10.1145/3209108.3209177>.
- [7] Miriam BACKENS et Aleks KISSINGER. “ZH : A Complete Graphical Calculus for Quantum Computations Involving Classical Non-linearity”. In : *Proceedings of the 15th International Conference on Quantum Physics and Logic, Halifax, Canada, 3-7th June 2018*. Sous la dir. de Peter SELINGER et Giulio CHIRIBELLA. T. 287. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Open Publishing Association, 2019, p. 23-42. DOI : 10.4204/EPTCS.287.2.
- [8] Miriam BACKENS et al. “Completeness of the ZH-calculus”. In : *Compositionality* Volume 5 (2023), 5 (2023). ISSN : 2631-4444. DOI : 10.32408/compositionality-5-5. URL : <https://compositionality.episciences.org/13524>.
- [9] Paolo BALDAN et al. “Coalgebraic Behavioral Metrics”. In : *Log. Methods Comput. Sci.* 14.3 (2018). DOI : 10.23638/LMCS-14(3:20)2018. URL : [https://doi.org/10.23638/LMCS-14\(3:20\)2018](https://doi.org/10.23638/LMCS-14(3:20)2018).
- [10] Filippo BONCHI, Alessandro Di GIORGIO et Elena Di LAVORE. *A Diagrammatic Algebra for Program Logics*. 2024. arXiv : 2410.03561 [cs.LO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2410.03561>.
- [11] Filippo BONCHI et al. “Diagrammatic algebra : from linear to concurrent systems”. In : *Proc. ACM Program. Lang.* 3.POPL (jan. 2019). DOI : 10.1145/3290338. URL : <https://doi.org/10.1145/3290338>.
- [12] Spencer BREINER, Carl A. MILLER et Neil J. ROSS. “Graphical Methods in Device-Independent Quantum Cryptography”. In : *Quantum* 3 (mai 2019), p. 146. ISSN : 2521-327X. DOI : 10.22331/q-2019-05-27-146. URL : <https://doi.org/10.22331/q-2019-05-27-146>.
- [13] Matteo CAPUCCI et al. “Towards Foundations of Categorical Cybernetics”. In : *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 372 (nov. 2022), 235–248. ISSN : 2075-2180. DOI : 10.4204/eptcs.372.17. URL : <http://dx.doi.org/10.4204/EPTCS.372.17>.

- [14] Bob COECKE et Ross DUNCAN. “Interacting quantum observables : categorical algebra and diagrammatics”. In : *New Journal of Physics* 13.4 (2011), p. 043016. DOI : [10.1088/1367-2630/13/4/043016](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/043016). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/043016>.
- [15] Bob COECKE et al. “The GHZ/W-calculus contains rational arithmetic”. In : *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 52 (mars 2011), 34–48. ISSN : 2075-2180. DOI : [10.4204/eptcs.52.4](https://doi.org/10.4204/eptcs.52.4). URL : <http://dx.doi.org/10.4204/EPTCS.52.4>.
- [16] Geoffrey S. H. CRUTTWELL et al. “Categorical foundations of gradient-based learning”. English. In : *Programming languages and systems. 31st European symposium on programming, ESOP 2022, held as part of the European joint conferences on theory and practice of software, ETAPS 2022, Munich, Germany, April 2–7, 2022. Proceedings*. Cham : Springer, 2022, p. 1–28. ISBN : 978-3-030-99335-1 ; 978-3-030-99336-8. DOI : [10.1007/978-3-030-99336-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-99336-8_1).
- [17] Josée DESHARNAIS et al. “Metrics for labeled Markov systems”. In : *CONCUR’99 : concurrency theory (Eindhoven)*. T. 1664. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1999, p. 258–273. ISBN : 3-540-66425-4. DOI : [10.1007/3-540-48320-9_19](https://doi.org/10.1007/3-540-48320-9_19). URL : https://doi.org/10.1007/3-540-48320-9_19.
- [18] Josée DESHARNAIS et al. “Metrics for labelled Markov processes”. In : *Theoret. Comput. Sci.* 318.3 (2004), p. 323–354. ISSN : 0304-3975,1879-2294. DOI : [10.1016/j.tcs.2003.09.013](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2003.09.013). URL : <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2003.09.013>.
- [19] Norm FERNS, Prakash PANANGADEN et Doina PRECUP. “Bisimulation metrics for continuous Markov decision processes”. In : *SIAM J. Comput.* 40.6 (2011), p. 1662–1714. ISSN : 0097-5397,1095-7111. DOI : [10.1137/10080484X](https://doi.org/10.1137/10080484X). URL : <https://doi.org/10.1137/10080484X>.
- [20] Norm FERNS, Prakash PANANGADEN et Doina PRECUP. “Metrics for finite Markov decision processes”. In : *Proceedings of the 20th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. UAI ’04. Banff, Canada : AUAI Press, 2004, 162–169. ISBN : 0974903906.
- [21] Brendan FONG, David SPIVAK et Rémy TUYÉRAS. “Backprop as functor : a compositional perspective on supervised learning”. In : *2019 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE, [Piscataway], NJ, 2019, [13 pp.] ISBN : 978-1-7281-3608-0.
- [22] Tobias FRITZ. “A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics”. In : *Advances in Mathematics* 370 (2020), p. 107239. ISSN : 0001-8708. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107239>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870820302656>.
- [23] Marco GABOARDI et al. “Graded Hoare Logic and its Categorical Semantics”. In : *Programming Languages and Systems : 30th European Symposium on Programming, ESOP 2021, Held as Part of the European Joint Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2021, Luxembourg City, Luxembourg, March 27 – April 1, 2021, Proceedings*. Luxembourg City, Luxembourg : Springer-Verlag, 2021, 234–263. ISBN : 978-3-030-72018-6. DOI : [10.1007/978-3-030-72019-3_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-72019-3_9). URL : https://doi.org/10.1007/978-3-030-72019-3_9.
- [24] Bruno GAVRANOVIĆ. “Fundamental Components of Deep Learning : A Category-Theoretic Approach”. Department of Computer and Information Sciences, Thesis identifier : T16859. Thèse de doct. Glasgow, UK : University of Strathclyde, 2024. DOI : [10.48730/795r-wn11](https://doi.org/10.48730/795r-wn11). URL : <https://doi.org/10.48730/795r-wn11>.
- [25] Daniel GEBLER, Kim G. LARSEN et Simone TINI. “Compositional bisimulation metric reasoning with Probabilistic Process Calculi”. In : *Logical Methods in Computer Science* Volume 12, Issue 4, 12 (2017). ISSN : 1860-5974. DOI : [10.2168/LMCS-12\(4:12\)2016](https://doi.org/10.2168/LMCS-12(4:12)2016). URL : <https://lmcs.episciences.org/2627>.

- [26] J. A. GOGUEN et al. “Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras”. In : *J. ACM* 24.1 (1977), 68–95. ISSN : 0004-5411. DOI : [10.1145/321992.321997](https://doi.org/10.1145/321992.321997). URL : <https://doi.org/10.1145/321992.321997>.
- [27] Eric GOUBAULT et Sylvie PUTOT. “A Zonotopic Dempster-Shafer Approach to the Quantitative Verification of Neural Networks”. In : *Formal Methods*. Sous la dir. d’André PLATZER et al. Cham : Springer Nature Switzerland, 2025, p. 324-342. ISBN : 978-3-031-71162-6.
- [28] Tao GU, Robin PIEDELEU et Fabio ZANASI. “A Complete Diagrammatic Calculus for Boolean Satisfiability”. In : *Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science* Volume 1 - Proceedings of MFPS XXXVIII (fév. 2023). DOI : [10.46298/entics.10481](https://doi.org/10.46298/entics.10481). URL : <https://entics.episciences.org/10481>.
- [29] Amar HADZIHASANOVIC. “A diagrammatic axiomatisation for qubit entanglement”. In : *2015 30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2015)*. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2015, p. 573-584. ISBN : 978-1-4799-8875-4. DOI : [10.1109/LICS.2015.59](https://doi.org/10.1109/LICS.2015.59). URL : <https://doi.org/10.1109/LICS.2015.59>.
- [30] Nicholas Gauguin HOUGHTON-LARSEN. “A Mathematical Framework for Causally Structured Dilations and its Relation to Quantum Self-Testing”. PhD thesis. Copenhagen, Denmark : University of Copenhagen, 2021. arXiv : [2103.02302](https://arxiv.org/abs/2103.02302) [quant-ph]. URL : <https://arxiv.org/abs/2103.02302>.
- [31] Martin HYLAND, Gordon PLOTKIN et John POWER. “Combining effects : Sum and tensor”. In : *Theoretical Computer Science* 357.1 (2006). Clifford Lectures and the Mathematical Foundations of Programming Semantics, 70–99. ISSN : 0304-3975. DOI : [10.1016/j.tcs.2006.03.013](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2006.03.013). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397506002659>.
- [32] Emmanuel JEANDEL, Simon PERDRIX et Renaud VILMART. “A complete axiomatisation of the ZX-calculus for Clifford+T quantum mechanics”. In : *LICS ’18—33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. ACM, New York, 2018, [10 pp.] ISBN : 978-1-4503-5583-4. DOI : [10.1145/3209108.3209131](https://doi.org/10.1145/3209108.3209131). URL : <https://doi.org/10.1145/3209108.3209131>.
- [33] Emmanuel JEANDEL, Simon PERDRIX et Renaud VILMART. “Completeness of the ZX-calculus”. In : *Log. Methods Comput. Sci.* 16.2 (2020), Paper No. 11, 72. ISSN : 1860-5974. DOI : [10.23638/LMCS-16\(2:11\)2020](https://doi.org/10.23638/LMCS-16(2:11)2020). URL : [https://doi.org/10.23638/LMCS-16\(2:11\)2020](https://doi.org/10.23638/LMCS-16(2:11)2020).
- [34] Emmanuel JEANDEL, Simon PERDRIX et Renaud VILMART. “Y-Calculus : A Language for Real Matrices Derived from the ZX-Calculus”. In : *Proceedings 14th International Conference on Quantum Physics and Logic, Nijmegen, The Netherlands, 3-7 July 2017*. Sous la dir. de Bob COECKE et Aleks KISSINGER. T. 266. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Open Publishing Association, 2018, p. 23-57. DOI : [10.4204/EPTCS.266.2](https://doi.org/10.4204/EPTCS.266.2).
- [35] André JOYAL et Ross STREET. “The geometry of tensor calculus. I”. In : *Adv. Math.* 88.1 (1991), p. 55-112. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : [10.1016/0001-8708\(91\)90003-P](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-P). URL : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(91\)90003-P](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-P).
- [36] Aleks KISSINGER, Sean TULL et Bas WESTERBAAN. *Picture-perfect Quantum Key Distribution*. 2017. arXiv : [1704.08668](https://arxiv.org/abs/1704.08668) [quant-ph]. URL : <https://arxiv.org/abs/1704.08668>.
- [37] Gabriele LOBBIA et al. *Quantitative Monoidal Algebra : Axiomatising Distance with String Diagrams*. 2025. arXiv : [2410.09229](https://arxiv.org/abs/2410.09229) [cs.LG]. URL : <https://arxiv.org/abs/2410.09229>.
- [38] Denis MAZZUCATO. “Static Analysis by Abstract Interpretation of Quantitative Program Properties”. Theses. École Normale Supérieure, déc. 2024. URL : <https://inria.hal.science/tel-04886659>.

- [39] Denis MAZZUCATO, Marco CAMPION et Caterina URBAN. “Quantitative Static Timing Analysis”. In : *31st Static Analysis Symposium (SAS 2024)*. Roberto Giacobazzi and Alessandra Gorla and Marco Campion. Pasadena, CA, United States, oct. 2024. URL : <https://hal.science/hal-04669723>.
- [40] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. “Beyond Nonexpansive Operations in Quantitative Algebraic Reasoning”. In : *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS ’22. Haifa, Israel : Association for Computing Machinery, 2022. ISBN : 9781450393515. DOI : [10.1145/3531130.3533366](https://doi.org/10.1145/3531130.3533366). URL : <https://doi.org/10.1145/3531130.3533366>.
- [41] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. “Combining Nondeterminism, Probability, and Termination : Equational and Metric Reasoning”. In : *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. 2021, 1–14. DOI : [10.1109/LICS52264.2021.9470717](https://arxiv.org/abs/2012.00382). URL : <https://arxiv.org/abs/2012.00382>.
- [42] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. “Universal Quantitative Algebra for Fuzzy Relations and Generalised Metric Spaces”. In : *Logical Methods in Computer Science* Volume 20, Issue 4, 19 (2024). ISSN : 1860-5974. DOI : [10.46298/lmcs-20\(4:19\)2024](https://lmcs.episciences.org/12339). URL : <https://lmcs.episciences.org/12339>.
- [43] Eugenio MOGGI. “Notions of computation and monads”. In : *Information and Computation* 93.1 (1991). Selections from 1989 IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 55–92. ISSN : 0890-5401. DOI : [10.1016/0890-5401\(91\)90052-4](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540191900524). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540191900524>.
- [44] Roger PENROSE. “Applications of negative dimensional tensors”. In : *Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969)*. Academic Press, London-New York, 1971, p. 221-244.
- [45] PEPR IA. *SAIF – Systèmes d’IA Frugaux et Fiables : Proposition scientifique*. 2024. URL : https://www.pepr-ia.fr/wp-content/uploads/2024/03/SAIF_compressed.pdf.
- [46] Paolo PERRONE. “Markov categories and entropy”. English. In : *IEEE Trans. Inf. Theory* 70.3 (2024), p. 1671-1692. ISSN : 0018-9448. DOI : [10.1109/TIT.2023.3328825](https://doi.org/10.1109/TIT.2023.3328825).
- [47] Daniela PETRIŞAN et Ralph SARKIS. “Semialgebras and Weak Distributive Laws”. In : *Proceedings 37th Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics, MFPS 2021, Hybrid : Salzburg, Austria and Online, 30th August - 2nd September, 2021*. Sous la dir. d’Ana SOKOLOVA. T. 351. EPTCS. 2021, p. 218-241. DOI : [10.4204/EPTCS.351.14](https://doi.org/10.4204/EPTCS.351.14). URL : <https://doi.org/10.4204/EPTCS.351.14>.
- [48] Robin PIEDELEU et Fabio ZANASI. “A Finite Axiomatisation of Finite-State Automata Using String Diagrams”. In : *Logical Methods in Computer Science* Volume 19, Issue 1 (fév. 2023). DOI : [10.46298/lmcs-19\(1:13\)2023](https://lmcs.episciences.org/10963). URL : <https://lmcs.episciences.org/10963>.
- [49] Robin PIEDELEU et al. *A Complete Axiomatisation of Equivalence for Discrete Probabilistic Programming*. 2024. arXiv : [2408.14701 \[cs.LO\]](https://arxiv.org/abs/2408.14701). URL : <https://arxiv.org/abs/2408.14701>.
- [50] Boldizsár POÓR et al. “Completeness for arbitrary finite dimensions of ZXW-calculus, a unifying calculus”. In : *2023 38th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2023, p. 14. ISBN : 979-8-3503-3587-3.
- [51] Ralph SARKIS et Fabio ZANASI. *String Diagrams for Graded Monoidal Theories with an Application to Imprecise Probability*. 2025. arXiv : [2501.18404 \[math.CT\]](https://arxiv.org/abs/2501.18404). URL : <https://arxiv.org/abs/2501.18404>.
- [52] Dana SCOTT et Christopher STRACHEY. “Toward a Mathematical Semantics for Computer Languages”. In : *Proceedings of the Symposium on Computers and Automata*. T. 21. 1971.

- [53] Dan SHIEBLER, Bruno GAVRANOVIĆ et Paul WILSON. *Category Theory in Machine Learning*. 2021. arXiv : 2106.07032 [cs.LG]. URL : <https://arxiv.org/abs/2106.07032>.
- [54] Dario STEIN et al. *Graphical Quadratic Algebra*. 2024. arXiv : 2403.02284 [cs.LG]. URL : <https://arxiv.org/abs/2403.02284>.

5 Appendice

5.1 Rapport de Soutenance



Rapport de soutenance d'une thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Présentée par M. Ralph SARKIS, le 03/09/2024

Sur le sujet de thèse : Lifting Algebraic Reasoning to Generalized Metric Spaces

| Nom | Signature |
|-----------------------------|-----------|
| M. Jiri ADAMEK | |
| Mme Valeria VIGNUDELLI | |
| M. Matteo MIO | |
| Mme Christine TASSON | |
| M. Rory B.B LUCYSHYN-WRIGHT | |
| M. Plotkin GORDON | |

Ralph Sarkis a présenté ses travaux thèse en informatique théorique et plus précisément sur les questions de sémantique. Les questions quantitatives qu'il a abordées sont très actuelles avec de nombreuses applications par exemple en IA, en programmation probabiliste, etc.

Ses contributions étendent les travaux antérieurs de manière à la fois surprenante et très utile. Elles vont ainsi bien plus loin que les travaux précédents de Mardare, Panangaden et Plotkin sur les algèbres universelles quantitatives. Plus précisément, il a introduit une notion plus générale d'espaces métriques équipés d'opérations qui ne sont pas nécessairement contractantes. Il a de plus illustré sa théorie à l'aide de nouveaux exemples très intéressants.

Après avoir introduit les motivations de son travail de manière très claire, il a amené progressivement sa généralisation des algèbres universelles quantitatives. Son exposé était très clair, bien structuré et rythmé. Comme dans son manuscrit, il a pris soin de rendre son travail accessible. En partant d'exemples concrets et informatifs, il a amené progressivement leur théorie abstraite. Il a conclu avec des idées créatives et prometteuses pour ses travaux futurs. Le jury lui a ensuite posé des questions variées, techniques et générales. Ralph Sarkis a répondu avec précision, démontrant la profondeur et la pertinence de sa compréhension de son sujet et des domaines connexes.

Pour toutes ces raisons, le jury a décidé de donner à Ralph Sarkis le titre de docteur en informatique délivré par l'ENS Lyon.



Le président signe le rapport de soutenance, qui est contresigné par l'ensemble des membres du jury présents à la soutenance.

L'original signé de ce document doit être transmis au Bureau du 3ème cycle de l'ENS de Lyon - Bureau D2.209 - 15 parvis René-Descartes - BP 7000 - 69342 Lyon cedex 07.

5.2 Rapports de Thèse

5.2.1 Rapport de Jiří Adámek

Report on the Thesis of Ralph Sarkis

'Lifting Algebraic Reasoning to Generalized Metric Spaces'

The thesis is devoted to the theory of quantitative algebras, a topical area of theoretical computer science initiated by Mardare, Panangaden and Plotkin in [MPP16]-[MPP21]. Whereas these authors work with algebras acting on generalized metric spaces (and having non-expanding operations), the present thesis takes a much more general view: given a complete lattice L , it studies L -spaces, which are sets endowed with distances of pairs of elements that are members of L . The quantitative algebras of the present thesis are then algebras acting on L -spaces with non-expansive operations. The main contrast to metric spaces is the absence of any restriction on the distance function. Thus, important categories such as ordered algebras, quantitative algebras on pseudometric spaces etc. are included among the varieties of quantitative algebras in the sense of the present thesis. This is not a new idea: the thesis just makes another generalizing step in the direction taken by the preprint [MSV23] that the author and both of his thesis advisors have published on arXiv in 2023: there they just work with the lattice $L = [0, \infty]$ of extended real numbers, but refrain from the usual axioms on the metric.

More work is needed when dealing with L -spaces for more general complete lattices than just the extended real numbers. The author presents a detailed theory of varieties of algebras in this generality, proving that all the substantial results of [MSV23] have their natural analogy in the general setting. The thesis is carefully written, with a number of illustrating examples, I also have not spotted any misprints.

Some comments on the details of the thesis:

(1) The incredibly long proof of Theorem 3.48 (pp 93-105) is completely unnecessary. Here is a standard categorical argument:

The free algebra FX on an L -space (X, d) in $\mathbf{QAlg}(\Sigma)$ is easy to describe as the algebra of (classical) terms with the least distance function extending d and making the operations non-expanding. The category $\mathbf{QAlg}(\Sigma)$ is complete and has the factorization system (surjective morphism, isometric embedding). Its subcategory $\mathbf{QAlg}(\Sigma, \hat{E})$ is closed under products and isometric subobjects, thus it is reflective with surjective reflections ([AHS06], 16.8(3)). Therefore a free object $F'X$ in $\mathbf{QAlg}(\Sigma, \hat{E})$ is a quotient $e: FX \rightarrow F'X$ with e a surjective homomorphism. It is easy to prove for terms $s, t \in FX$ that e merges

them iff every algebra in $\mathbf{QAlg}(\Sigma, \hat{E})$ satisfies $(X, d) \vdash s = t$, and that $d(e(s), e(t)) \leq \varepsilon$ iff every algebra in $\mathbf{QAlg}(\Sigma, \hat{E})$ satisfies $(X, d) \vdash s =_\varepsilon t$. This proves 3.48.

(2) I miss a comparison with the work of Ford et al. [FMS21]. At some point the author remarks that the approach of op. cit. is more general than his, but does not explain the advantages of his, less general approach. In footnote 334 he claims that his quantitative equation 'differs slightly from [FMS21]'. This is a misunderstanding: his equation $X \vdash s =_\varepsilon t$ can be substituted by the Horn formula in which X is replaced by the conjunction of all $u =_\varepsilon v$ ranging over the pairs (u, v) of distance ε in X , which is how op. cit. treats equations. I consider the approach of [FMS21] not only more general, but also more natural than that of the thesis. This is just my personal view, but there is no discussion about this topic in the thesis.

(3) How is the logic presented on p. 107 related to that of Mardare et al.? The whole section 3.2 should be put in the context of their work.

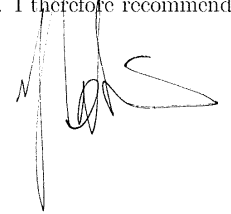
(4) Theorems 1.58 and 3.66 would be simplified by using the Beck theorem, what is the advantage of the longer proofs?

(5) The concepts of lifting a functor or a monad are well studied in the literature, references are missing in Definition 3.73. What purpose does the new concept 'mere lifting' have?

(6) I find the (very unusual) style of the author in which a large portion of the text is presented in 497 (!) footnotes unnecessarily hard for the reader.

Summary. The present thesis contains new results in a topical area. It extends results that Mr. Sarkis published with co-authors in prestigious conferences. It is carefully presented. I therefore recommend the viva examination to take place.

Profesor J. Adámek, PhD
Czech Technical University Prague and
Technical University of Braunschweig



5.2.2 Rapport de Gordon Plotkin

June 10, 2024

LABORATORY FOR FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

SCHOOL of INFORMATICS
Professor G. Plotkin, FRS, AAAS, FRSE, FACM
Informatics Forum
10 Crichton Street,
Edinburgh EH8 9AB
Telephone 0131 650 5158
E-mail gdp@ed.ac.uk

To whom it may concern

I write concerning the dissertation of

Mr. Ralph Sarkis

This thesis is in a tradition of quantitative equational logic started by Mardare, Panangaden, and myself. The idea there is to axiomatise algebraic structures over metric spaces (or complete metric spaces) replacing equality assertions $t = e$ by distance estimate assertions $t =_{\epsilon} u$, that the distance between t and u is less than, or equal to ϵ . It is further required that the operations respect the metric, i.e., that they are *non-expansive* in the jargon. This allowed the axiomatisation of several interesting metrics (e.g. Hausdorff or Kantorovich). However there are metrics that are not axiomatisable in this framework and there are quantitative structures other than metrics that are not covered (Mr. Sarkis gives examples.)

In his thesis Mr. Sarkis greatly generalises these ideas. He allows a general notion of quantitative binary relation, where particular such relations can be given by formulas of a certain equational character and they can take their values in any complete lattice, not just subsets of the reals. He additionally drops the non-expansiveness requirement. Despite the additional generality he is still able to show that free algebras exist and to give a complete equational proof system, generalising the case of metric spaces and non-expansive maps.

The thesis consists of five chapters: Introduction, Universal Algebra, Generalized Metric Spaces, Universal Quantitative Algebra, and Conclusion. As is normal, the introduction sets the scene and the motivation, discusses previous work (including Mr. Sarkis' own), and previews the content of the thesis, with additional motivation and further comparison

with previous work making the originality of the present work clear. The chapter Universal Algebra goes over standard ground perhaps with a somewhat original approach relying more on semantic than proof-theoretic means. At any rate, the main point of this chapter is to lay out a way through standard material that will later be followed in the more general quantitative setting.

The chapter Generalized Metric Spaces, as may be seen from its title considers generalized metric spaces which are, as I mentioned, relations valued in a complete lattice and specified in an equational way generalising signature-free equations of Mardare et al. (The equations use equality assertions $t = u$ and assertions $t =_{\epsilon} u$, where now ϵ is in the lattice.) Examples are given to show the wide variety of possibilities (for example, as well as metrics of one sort or another they also include partial orders, obtained by varying the lattice). Among other things it is shown that the relations are closed under products, subspaces but not homomorphic images.

The chapter Universal Quantitative Algebra as may also be expected, continues the previous chapter now concerning algebras equipped with a generalised metric. Free algebras are shown to exist, a complete equational system is presented (including an interesting example), and a lifting theorem proved giving a result how to lift liftable ordinary ("qualitative") algebras to the quantitative setting using quantitative axioms.

I note that the thesis builds on and extends two previous papers by Mr. Sarkis and others, one published in the prestigious LICS conference, and one to appear, particularly generalising from the unit interval to an arbitrary complete lattice and making available axiomatisable quantitative relations (his generalised metric spaces). Another joint paper, also published in LICS, gave a counterexample relevant to Chapter 3.4.

Mr. Sarkis' thesis is well and clearly written; it provides an original contribution and novel viewpoint to the field, generalising previous work in an unexpected and interesting way. I

am therefore satisfied with the dissertation and I recommend that the defence take place.

Yours Sincerely,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'G. Plotkin', with a stylized, flowing script.

Professor G. Plotkin

,