Informatică ID
Chițu Raluca Ioana

PRIMA TEMĂ DE CONTROL

1. Exercițiul 3 din Tema de control de la finalul MIU 1, pg. 17

Enunț:

Fie funcțiile $f: A \to B$, $g: B \to C$. Demonstrați că dacă ambele funcții sunt injective, atunci și $g \circ f$ este injectivă. Arătați că dacă ambele funcții sunt surjective, atunci și $g \circ f$ este surjectivă.

Rezolvare:

a) Demonstrați că dacă ambele funcții sunt injective, atunci și $g \circ f$ este injectivă.

Fie x_1 și x_2 două elemente ale mulțimii A: $x_1, x_2 \in A$.

Dacă $f: A \to B$ este o funcție injectivă, atunci:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Fie y_1 și y_2 două elemente ale mulțimii B: $y_1, y_2 \in B$

Dacă $g: B \to C$ este o funcție injectivă, atunci:

$$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Compusa $g \circ f : A \to C$

$$g \circ f = g(f(x))$$

pentru $x = x_1$:

$$g \circ f((x_1)) = g(f(x_1))$$
$$g \circ f((x_2)) = g(f(x_2))$$

Din faptul că $f(x)$ este injectivă, rezultând $f(x_1) = f(x_2)$ și $g(y)$ este injectivă, rezultând $g(y_1) = g(y_2)$, ajungem la concluzia că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, unde $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$. Astfel spus, $g \circ f : A \to C$ este injectivă.

b) Arătați că dacă ambele funcții sunt surjective, atunci și $g \circ f$ este surjectivă.

Funcția $f : A \to B$ este surjectivă dacă pentru orice element $x \in A$ există un element $y \in B$ astfel încât:

$$f(x) = y$$

sau $Im\, f = B$.

Funcția $g : B \to C$ este surjectivă dacă pentru orice element $y \in B$ există un element $z \in C$ astfel încât:

$$g(y) = z \quad \text{sau} \quad Im\, g = C.$$

Pentru $g \circ f : A \to C$ avem:

$$g \circ f = g(f(x)) = z \in C$$

Astfel, pentru că $f : A \to B$ este surjectivă și $f(x) = y$ pentru orice $x \in A$ și $y \in B$, iar $g : B \to C$ este de asemenea surjectivă pentru orice $g(y) = z$ cu $y \in B$ și $z \in C$, ajungem la concluzia că și $g \circ f : A \to C$ este surjectivă: $g(f(x)) = z \Rightarrow g(y) = z$ iar $y \in B$.

2. Exercițiul 2 din Tema de control de la finalul M1 U3, pg 40.

Enunț:

Fie Σ un alfabet și $p, q, r \in \Sigma^*$ astfel încât $pq^2 = r^2p$, $l(p) = 19$, $l(r) = 3$. Arătați că $pq^n = r^np$ pentru orice număr natural n.

Rezolvare

În cazul $n = 0$ relația $pq^n = r^np$ devine $pq^0 = r^0p$. Cum $q^0 = r^0 = e$, rezultă că $pe = ep = p$. Deci $pq^n = r^np$ pentru $n = 0$.

Când $n = 1$ relația este: $pq = rp$ și o demonstrăm. Din enunțul problemei avem $pq^2 = r^2p$

Rezultă: $l(pq^2) = l(r^2p)$

$l(p) + 2l(q) = 2l(r) + l(p)$

$l(p) - l(p) + 2l(q) = 2l(r)$

$2l(q) = 2l(r) \Rightarrow l(q) = l(r) = 3$

$\Rightarrow r = a_1a_2a_3$

$pq^2 = r^2p$

$l(p) = 19$

$l(r^2) = 6 < 19 \Rightarrow pq^2 = r^2p \mid \cdot q^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \cdot q^4 = r^2 \underbrace{p \cdot q^2}_{r^2p} \Rightarrow pq^4 = r^2 \cdot r^2p \Rightarrow$

$\Rightarrow pq^4 = r^4 p$

$\ell(p) = 19$

$\ell(r^4) = 12 < 19$

$pq^4 = r^4 p \mid \cdot q^2 \Rightarrow pq^6 = r^4 \underbrace{pq^2}_{r^2 p} \Rightarrow$

$\Rightarrow pq^6 = r^4 r^2 p \Rightarrow pq^6 = r^6 p$

$\ell(p) = 19$

$\ell(r^6) = 18 < 19$

$pq^6 = r^6 p \mid \cdot q^2 \Rightarrow pq^8 = r^6 \underbrace{pq^2}_{r^2 p} \Rightarrow$

$\Rightarrow pq^8 = r^6 r^2 p \Rightarrow pq^8 = r^8 p$

$\ell(p) = 19$

$\ell(r^8) = 24 > 19$

Astfel, p reprezintă prefix de lungime 19 a lui r^8 și deci reprezintă primele 19 simboluri din r^8. Cum $r = a_1 a_2 a_3$ rezultă $p = r^6 a_1 a_2$.

Din $\left.\begin{array}{l} p = r^6 a_1 a_2 \\ pq^8 = r^8 p \end{array}\right| \Rightarrow r^6 a_1 a_2 q^8 = r^8 r^6 a_1 a_2$

$\Rightarrow r^6 a_1 a_2 q^8 = r^{14} a_1 a_2$

$r^6 a_1 a_2 q^8 = r^6 a_1 a_2 a_3 r^7 a_1 a_2$

$q^8 = a_3 (a_1 a_2 a_3)^{11} a_1 a_2$

$q^8 = (a_3 a_1 a_2)^8 \Rightarrow q = a_3 a_1 a_2$

Calculăm $\left.\begin{array}{l} pq = r^6 a_1 a_2 a_3 a_1 a_2 = r^7 a_1 a_2 \\ rp = r r^6 a_1 a_2 = r^7 a_1 a_2 \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow pq = rp$

Pentru a arăta că $pq^n = r^n p$ pentru orice $n \in N^*$, vom utiliza inducția matematică.

Astfel:

- primul pas: considerăm $n = 1$

Rezultă: $pq^1 = r^1 p \Rightarrow pq = rp$ (demonstrat anterior, deci adevărat)

- al doilea pas: considerăm $n = k+1$ și presupunem că pentru $n = k$ egalitatea este adevărată: $pq^k = r^k p$.

$n = k+1 \Rightarrow pq^{k+1} = r^{k+1} p$

Avem $pq^k = r^k p \mid \cdot q$

$$pq^k q = r^k \underbrace{pq}_{rp} \Rightarrow pq^{k+1} = r^k rp$$

$$\Rightarrow pq^{k+1} = r^{k+1} p$$

Astfel, pe baza principiului inducției matematice rezultă $pq^n = r^n p$ pentru orice $n \in N$.

3. Exercitiul 2 din Tema de control de la finalul 'M1U4, pg. 65.

Enunt:

Fie $f: \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20}$ definită prin $f(\hat{k}) = [4 \cdot k]$, pentru orice $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}$, unde am notat cu $[x]$ clasa de resturi modulo 20 a întregului x.

a) Arătați că f este corect definită, adică nu depinde de reprezentanți.

Rezolvare

Pentru a putea spune că f este corect definită, trebuie ca f să respecte definiția unei funcții și anume: fiecărui element din domeniu trebuie să îi corespundă un element unic în codomeniu.

Altfel spus $\hat{k} = \hat{y}$ în $\mathbb{Z}_{15} \Leftrightarrow k - y$ este multiplu de 15. Deci pentru orice $\hat{k} = \hat{y}$ în $\mathbb{Z}_{15}$ să se întâmple și $f(\hat{k}) = f(\hat{y})$ în $\mathbb{Z}_{20}$, adică $[4x] = [4y]$.

Condiție: $20 \mid 4(k-y)$ pentru orice $k - y = 15c$, $c \in \mathbb{Z}$.

$20 \mid 4 \cdot 15c \qquad 20 / 4$

b) Demonstrați că f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ și $(\mathbb{Z}_{20}, +)$

Rezolvare

$f(\hat{k}) = [4k]$ avem $\hat{k}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_{12}$

$f(\hat{k} + \hat{y}) = f(\widehat{k + y}) = [4(k+y)] =$

$= [4 \cdot k + 4 \cdot y] = [4 \cdot k] + [4 \cdot y] = f(\hat{k}) +$

$+ f(\hat{y})$

Astfel, putem spune că f este morfism ale grupuri $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ și $(\mathbb{Z}_{20}, +)$

c) Determinați $Ker(f)$ și $Im(f)$

Rezolvare

$Ker(f) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15} \mid f(\hat{k}) = [0]\} =$

$= \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15} \mid [4k] = [0]\} =$

$= \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15} \mid 20 \mid 4 \cdot k\} =$

$= \{\hat{0}, \hat{5}, \widehat{10}\}$

$Im(f) = \{[y] \in \mathbb{Z}_{20} \mid \exists\, \hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}, [y] = f(4\hat{k})\}$

$f(\hat{k}) = [0]$ pt (v) multiplii de 5.

$\Rightarrow [4k] = \begin{cases} [0] \text{ pt } k = 5z \\ [4] \text{ pt } k = 5z + 1 & \Rightarrow 4k = 20z + 4 \\ [8] \text{ pt } k = 5z + 2 & \Rightarrow 4k = 20z + 8 \\ [12] \text{ pt } k = 5z + 3 & \Rightarrow 4k = 20z + 12 \\ [16] \text{ pt } k = 5z + 4 & \Rightarrow 4k = 20z + 16 \end{cases}$

$Im f = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$

d) Este soluție are ecuația $f(x) = [7]$? Dar ecuația $f(x) = 12$? De ce?

Rezolvare

$f(x) = [7]$ nu are soluții deoarece elementul $[7]$ nu aparține imaginii funcției f.

$f(x) = [12]$ avem $k = 5\ell + 3 \Rightarrow \{\hat{3}, \hat{8}, \widehat{13}\}$

4. Exercițiul 4 din Tema de control de la finalul M1U6, pg. 96.

Enunt:

Determinați $\sigma^{2017}(5)$ pentru:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

calculând ordinul permutării σ.

Rezolvare

Orice permutare se descompune în produs de cicluri separate:

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \circ \sigma_m$$

Astfel, ordinul unei permutări îl reprezintă cel mai mic multiplu comun al ordinelor.

$$o(\sigma) = [o(\sigma_1), o(\sigma_2) \ldots o(\sigma_m)]$$

a) $\sigma_1 = \{1, 4\}$ $\quad 1 \rightleftarrows 4$ $\quad o(\sigma_1) = 2$

$\sigma_2 = \{2, 6, 5\}$ $\quad 2 \to 6 \to 5 \to 2$ $\quad o(\sigma_2) = 3$

$\sigma_3 = \{3, 7, 9, 8\}$ $\quad 3 \to 7 \to 9 \to 8 \to 3$ $\quad o(\sigma_3) = 4$

Deci cel mai mic multiplu este 12:

$$o[\sigma] = [3, 4, 2] = 12$$

Atunci, σ^{2017} poate fi descompus astfel:

$$\sigma^{2017} = \sigma^{12 \cdot 168} \cdot \sigma = (\sigma^{12})^{168} \cdot \sigma =$$
$$= e \cdot \sigma$$

$$\sigma^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{2017}(5) = 2$$

b)

$\sigma_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ $\qquad$ $1 \to 3$, $3 \to 5$, $5 \to 7$, $7 \to 1$ $\qquad$ $o(\sigma_1) = 4$

$\sigma_2 = \{2, 9, 4, 8, 6\}$ $\qquad$ $2 \to 9$, $9 \to 4$, $4 \to 8$, $8 \to 6$, $6 \to 2$ $\qquad$ $o(\sigma_2) = 5$

Deci cel mai multiplu este 20:

$$o[\sigma] = [4, 5] = 20$$

Atunci, σ^{2017} poate fi descompus astfel:

$$\sigma^{2017} = \sigma^{20 \cdot 100} \cdot \sigma^{17} = (\sigma^{20})^{100} \sigma^{17} =$$
$$= e \cdot \sigma^{17}$$

$$\sigma^{17} = (1, 3, 5, 7)^{16+1} (2, 9, 4, 8, 6)^{15+2}$$

$$\sigma^{17} = (1, 3, 5, 7)(2, 9, 4, 8, 6)^2$$

$$\sigma^{17} = (1,3,5,7)(2,4,6,9,8)$$

$$\sigma^{2017}(5) = 7$$

extra,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 9 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$