3. Să se determine inversa matricei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ în două moduri.

Rezolvare

a) $\boxed{\text{metoda partiționării}}$

– blocurile pătratice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\det A = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$, rezultă că matricea pătratică A nu este inversabilă. De aceea, verificăm $\det D = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow$ matricea D este inversabilă și deci ne putem folosi de sistemul matriceal.

$$\begin{cases} X = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ Z = -D^{-1}CX \\ Y = -XBD^{-1} \\ T = D^{-1} - D^{-1}CY \end{cases}$$

Calculăm valorile lui X, Z, Y, T deoarece avem nevoie de o matrice S^{-1} (inversa matricei) care are următoarea formă:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

<u>Calcul X</u>

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = X$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad BD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BD^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - BD^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci, $X = (A - BD^{-1}C)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcul Z

$$Z = -D^{-1} \cdot C \cdot X$$

$$C \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot C\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = -D^{-1} \cdot C \cdot X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul y

$$y = -XBD^{-1}$$

$$BD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X\ BD^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = -XBD^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Calcul T</u>

$$T = D^{-1} - D^{-1}Cy$$

$$D^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot C \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$T = D^{-1} - D^{-1}Cy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Astfel, $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) metoda eliminării (Gauss)

- sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases}$$

adică: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Amplificăm prima ecuație cu $\frac{1}{2}$ și obținem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu (-3): $-3x_1 - 3x_2 - \frac{9}{2}x_3 = 1$ și o adunăm la a doua ecuație:

$$\cancel{-3x_1} \cancel{-3x_2} - \frac{9}{2}x_3 + \cancel{3x_1} + \cancel{3x_2} + 2x_3 =$$
$$= -\frac{5}{2}x_3$$

Obținem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{3}{2} x_3 = 1 \\ -\frac{5}{2} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu (-1): $-x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3$ și o adunăm la a treia: $-\cancel{x_1} - x_2 - \frac{3}{2} x_3 + \cancel{x_1} + 2x_2 = -\frac{3}{2} x_3 + x_2$

Avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{3}{2} x_3 = 1 \\ -\frac{5}{2} x_3 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} x_3 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim cu (-1) prima ecuație și o adunăm la a patra: $-\cancel{x_1} - \cancel{x_2} - \frac{3}{2} x_3 + \cancel{x_1} + \cancel{x_2} + x_3 = -\frac{3}{2} x_3 + x_3 = -\frac{1}{2} x_3$

Vom observa că avem contradicție:

$-\frac{5}{2} x_3 = -\frac{1}{2}$ ecuația a II-a

$-\frac{1}{2} x_3 = 0$ ecuația a IV-a

În concluzie, sistemul nu are soluții și deci inversa matricei nu se poate determina.

1. Arătați că următoarele submulțimi ale spațiului vectorial real $\mathbb{R}^3$ sunt subspații vectoriale:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\},$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}.$$

Rezolvare:

Pentru a vedea dacă V și U sunt subspații vectoriale, este nevoie să studiem forma elementelor din aceste submulțimi. Adică, ele reprezintă soluțiile sistemelor liniare:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \text{pentru } V$$

și

$$x_2 + x_3 = 0 \quad \text{pentru } U$$

Pentru V, avem matricea aferentă de rangul 1: $A = (1 \quad -2 \quad -3)$. De aici deducem că sistemul are o singură necunoscută principală x_1, iar celelalte două le notăm $x_2 = \alpha$, respectiv $x_3 = \beta$.

Astfel, calculăm x_1:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = 2\alpha + 3\beta$$

Deci $V = \{(2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta \mid \alpha, \beta \in R\}$

și se mai poate scrie:

$$V = \{(-2\alpha, 2\alpha, 0) + (3\beta, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in R\}$$

$$= \{\alpha(-2, 2, 0) + \beta(3, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in R\}.$$

Cu alte cuvinte, V are toate combinațiile liniare ale vectorilor $u = (-2, 2, 0)$ și $v = (3, 0, 1)$ adică V este subspațiu generat de vectorii $\{u, v\}$, deci $V \leq R^3$ (este subspațiu vectorial)

Pentru U matricea aferentă este tot de rang 1: $B = (0, 1, 1)$ și deci $x_3 = \beta$ pentru că x_1 nu este luat în calcul. Deci:

$$x_2 = -\beta$$

$$U = \{(-\beta, \beta \mid \beta \in R)\} \Rightarrow$$

$U = \{\beta(-1, 0, 1) \mid \beta \in R\} \Rightarrow$ U este subspațiu generat de vectorul $w = (-1, 0, 1)$.

2. Scrieți matricea generatoare pentru fiecare din subspațiile vectoriale V, U, $V \cap U$, $V + U$ unde V, U sunt date mai sus.

Rezolvare:

$V: \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$

$$x = \mathcal{L}^t \cdot X \Rightarrow \mathcal{L}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$U. \quad x_2 + x_3 = 0$

$$x = \mathcal{L}^t X \Rightarrow \mathcal{L}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Intersecția $V \cap U$ pentru:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$V \cap U = \{(0, 0)\}$

2. Scrieți matricea transformării $T: R^3 \to R^3$, $T(x) = (-x_1 + 3x_2 - x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3, -3x_1 + 3x_2 + x_3)$ în raport cu baza

$B' = \{ e_1' = (0, 1, 1), e_2' = (1, 0, 1), e_3' = (1, 1, 0) \}$.

Rezolvare.

$T(e_1') = (2, 4, 4)$

$0 + 3 - 1, \quad 0 + 5 - 1, \quad 0 + 3 + 1$

$T(e_2') = (-2, -4, -2)$

$-1 + 0 - 1, \quad -3 + 0 - 1, \quad -3 + 0 + 1$

$T(e_3') = (2, 2, 0)$

$-1 + 3 - 0, \quad -3 + 5 - 0, \quad -3 + 3 + 0$

$x e_1' + y \cdot e_2' + z e_3' = T(e_i') \quad i = \overline{1,3}$

Rezolvăm sistemele de ecuații cu metoda eliminării.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Continental The Future in Motion

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1L_2 + L_3 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$