Eliminación Gaussiana

José Ramón Pérez Navarro

October, 2019

0.1. Definición

Para que un esquema sea computacionalmente correcto, debe incluir rutinas para escalar la matriz y para realizar un pivoteo parcial durante la eliminacion. Estos refinamientos se presentan posteriormente en esta seccion. En este tratamiento simple se supone que todos los divisores son no nulos. Las ecuaciones por resolver son:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b2$$

$$..$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = bn$$

La primera ecuación se almacena para usarla después, y la variable x1 se elimina de las restantes n1 ecuaciones al restar un múltiplo apropiado de la primera ecuación de cada una de las otras ecuaciones. Se usa la siguiente notación para los coeficientes originales,

$$a_{ij} = a_{ij}, \quad (1, j = 1, 2, ..., n)$$

$$b_i = b_i, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Los nuevos coeficientes se encuentran al usar los multiplicadores

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad (i, j = 2, 3, ..., n)$$

Con ellos se forman los nuevos elementos, para la matriz A

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad {}_{(i=2,3,...,n),(j=1,2,...,n)}$$

y para el vector B:

$$b_i = b_i - m_{i1}b_i, \quad (i = 2, 3, ..., n)$$

Se puede observar que los elementos de la primera columna j=1, tienen los siguientes valores:

$$a_{i1} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$$

por lo que la primera variable x$_1$se ha eliminado de las últimas $n - 1$ ecuaciones. Si se ignoran el primer renglón y la primera columna, las ecuaciones restantes tienen la misma forma que mostrabamos al principio pero con un renglón y una columna menos. Si se repite el procedimiento previo $n1$ veces, la ecuación restante tendrá una sola incógnita y se puede resolver en forma directa. En cada etapa del proceso, cuando la variable x_k se va a eliminar, los multiplicadores son

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad (i = k + 1, k + 2, ..., n)$$

y los nuevos elementos formados son, para la matriz A

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}, \quad (i = k + 1, k + 2, ..., n), \quad (j = k, k + 1, ..., n)$$

y para el vector B

$$b_i = b_i - m_{ik} b_k, \quad (i = k + 1, k + 2, ..., n)$$

El resultado de este proceso de eliminacion es un conjunto triangular de ecuaciones dado por

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{nn}x_n = b_n$$

La ultima ecuación tiene la solución:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Este valor se puede sustituir en la ecuación anterior para obtener x$_{n-1}$,etc. Al resolver las ecuaciones hacia atrás, se pueden calcular los valores de todas las variables.

El método de eliminación gaussiana se basa en operaciones lineales entre ecuaciones; es decir, la multiplicación de un escalar por una ecuación, o la suma elemento a elemento de dos ecuaciones. Realizando estas dos operaciones de una forma ordenada, se llega a un sistema triangular superior, el cual se resuelve mediante una sustitución regresiva simple.
A continuación un programa en Matlab del método:

codigo

```
%  Programa para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando la técnica
%  eliminación gaussiana. clear all clc
% Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. A = [ 5 4 8 1 6; 9 5
% Vector de entradas del sistema de ecuaciones.  B = [9; 1; 2; 9; 1];
% Número de incógnitas del sistema de ecuaciones. N = rank(A);
% Proceso de eliminación gaussiana. for k = 1:N-1    for m = k+1:N        MT = -A(
% Multiplicadores.        A(m,:) = A(m,:) + MT*A(k,:);
% Modificación de la matriz A.        B(m)   = B(m)   + MT*B(k);
% Modificación del vector B.    end end
% Proceso de sustitución regresiva. x(N) = B(N)/A(N,N); for k = N-1:-1:1    ind =
   x(k) = 0;    for m = 1:ind        x(k) =  x(k) - A(k,k+m)*x(k+m);    end
```