Factorización LU

José Ramón Pérez Navarro

October, 2019

0.1. Definición

El esquema es una manera diferente de la eliminación gaussiana, aunque los esquemas son muy similares. Estos métodos se basan en una serie de multiplicadores que reducen la matriz a una forma triangular, seguida por el proceso de sustitución hacia adelante o progresiva, y hacia atrás o regresiva. El esquema supone que la descomposición triangular es teóricamente posible; es decir, que la matriz se puede expresar como el producto de dos matrices:

$$A = LU$$

donde U es una matriz triangular superior y L es una matriz triangular inferior. Una vez que estas matrices se han encontrado, el conjunto de ecuaciones se resuelve en dos etapas. Cada una de éstas implica la solución de un conjunto de ecuaciones con una matriz triangular. Esto es fácil de realizar mediante un proceso de sustitución progresiva o regresiva si se

encuentra un vector Y tal que LY = B y se resuelve por sustitución progresiva para encontrar el vector Y, después se usa el sistema de ecuaciones UX= Y y se resuelve por sustitución regresiva para encontrar la variable X, que es la incógnita buscada. El método se ilustra por medio de un conjunto de ecuaciones de dimensión 3. Aquí la matriz U es la matriz triangular superior que resulta al aplicar el proceso de Gauss, sin normalizar los pivotes. Así se deben encontrar los coeficientes de manera que:
Gráfica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Figura 1:

Los valores diagonales de L son iguales a 1, por tanto, el sistema de ecuaciones resultante es:

$\mathrm{L}_{21}u_{11} = a_{21}, \quad \therefore \quad L_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}$ (2o. renglon por la. columna)

$\mathrm{L}_{31}u_{11} = a_{31}, \quad \therefore \quad L_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}$ (3er. renglon por la. columna)

$\mathrm{L}_{31}u_{12} + L_{32}u_{22} = a_{32}, \quad \therefore \quad L_{32} = \dfrac{(a_{32} - L_{31}u_{12})}{u_{22}}$ (3er. Renglon por 1ra. columna)

Este algoritmo utiliza una cantidad de operaciones igual que el método de eliminación gaussiana. Por este motivo se recomienda este método para el uso general donde sea necesario algún método directo.
La solución del sistema de ecuaciones se obtiene basicamente mediante un proceso con una sustitución regresiva, y otra progresiva.

A continuación muestro un código para calcular por este método:

código

```
% Programa para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando la técnica d
% factorización LU. clear all clc
% Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. A = [ 9 3 3 0 1; 4 4
% Vector de entradas del sistema de ecuaciones.  B = [4; 0; 6; 8; 5];
% Número de incógnitas del sistema de ecuaciones. N = rank(A);
% Proceso de eliminación gaussiana para obtener U. U = A;
% Inicialmente se pone la matriz A en una matriz U. for k = 1:N-1    for m = k+1:N
% Multiplicadores.        U(m,:) = U(m,:) + MT*U(k,:);
% Modificación de la matriz U.    end end
% Proceso para obtener L. L = eye(N);
% Se pone una matriz unitaria en L. L(2:N,1) = A(2:N,1)/U(1,1);
% Se resuelve la primera columna. for k = 2:N-1    for m = k+1:N        MT = 0;
% Se realiza la sumatoria de los
% elementos conocidos.        end        L(m:N,k) = (A(m:N,k)-MT)./U(k,k);
% Se calcula la k-ésima columna de L.    end end
% Proceso de sustitución progresiva. y(1) = B(1);
```

```
% Se calcula el primer elemento del vector auxiliar y for k = 2:N    ind = k-1;
% Se calcula la sumatoria de los
% elementos conocidos.     end        y(k) = B(k)+y(k);
% Se calcula el k-ésimo elemento
% del vector auxiliar. end
% Proceso de sustitución regresiva. x(N) = y(N)/U(N,N);
% Se calcula la última variable. for k = N-1:-1:1 ind = N - k;    x(k) = 0;    for
% Se calcula la sumatoria de los
% elementos conocidos.    end        x(k) = (y(k)+x(k))/U(k,k);
% Se calcula la k-ésima variable. end
```