TUGAS PERTEMUAN 14

STRUKTUR DATA

GRAPH BERARAH DAN TAK BERARAH

Disusun oleh:

Rama Pramudya Wibisana	**2022320019**
Fauzi Ikhsan Fajar Muzaqi	**2022320018**

PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

FAKULTAS INFORMATIKA

UNIVERSITAS BINA INSANI

BEKASI

2023

KATA PENGANTAR

Puji syukur alhamdulillah kami panjatkan kepada hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena telah melimpahkan rahmat-Nya berupa kesempatan dan pengetahuan sehingga makalah ini bisa selesai pada waktunya. Tujuan penulisan makalah ini adalah untuk menambah pengetahuan dalam pembelajaran matakuliah struktur data, khususnya pada materi Graph Berarah dan Tak Berarah.

Penulis mengharapkan tugas ini dapat memberikan pengalaman yang berguna baik bagi pembaca, yang tentunya akan menambah ilmu dan wawasan berfikir mahasiswa. Terima kasih juga kami ucapkan kepada teman-teman yang telah berkontribusi dengan memberikan ide-idenya sehingga makalah ini bisa disusun dengan baik dan rapi. Kami berharap semoga makalah ini bisa menambah pengetahuan para pembaca. Namun terlepas dari itu, kami memahami bahwa makalah ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kami sangat mengharapkan kritik serta saran yang bersifat membangun demi terciptanya makalah selanjutnya yang lebih baik lagi.

Penulis juga memohon maaf apabila dalam penulisan makalah ini terdapat kesalahan pengetikan dan kekeliruan sehingga membingungkan pembaca dalam memahami maksud penulis.

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Di era sekarang ini, penggunaan ilmu pengetahuan di dalam berbagai bidang telah menjadi tuntutan, bukan lagi hanya menjadi kebutuhan. Hal ini bisa kita lihat dalam pembangunan berbagai bidang. Misalkan saja dalam pembangunan yang berupa fisik, contohnya pembangunan rumah. Tentu saja menggunaka banyak sekali dari teori Matematika, dari pembuatan kerangka rumah sampai atapnya. Akan tetapi banyak pihak yang tidak menyadaribahwa hal itu sebuah implementasi dari teori Matematika. Teori graf merupakan topik yang banyak menapat perhatian dalam kajian Matematika Diskrit. Hal ini disebabkan karena model-modelnya sangat berguna baik dalam ilmu Matematika maupun dalam kehidupan manusia. Grap sangat erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari.Kegunaan graf sangat banyak. Umumnya digunakan untuk memodelkan suatu masalah sehingga menjadi lebih mudah, yaitu dengan cara mempresentasikan objek-objek

Dalam kehidupan sehari-hari,banyak persoalan yang dapat disimpulkan sebagai persoalan yang berhubungan dengan himpunan dan relasi binary,dimana logika dari persoalan tersebut sering kali dapat kita gambarkan dengan sebuah graf.

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objektersebut. Representasi dari graf adalah dgn menyatakanobjek sebagai noktah, bulatan atau titik,sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis.

B. Tujuan

Adapun tujuan dari makalah ini adalah :

- Untuk memahami dan mengerti konsep Graf Berarah dan Graf tak berarah.
- Memahai dan mengerti Representase Graf Berarah dan Tak Berarah dalam Matriks.
- Untuk memenuhi tugas mata kuliah matematika diskrit yang diberikan Bapak Dosen.

C. Manfaat

- Mengerti dan memahami konsep graf dan pengimplementasiannya dalam menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

BAB II
ISI

2.1 Definisi Graf

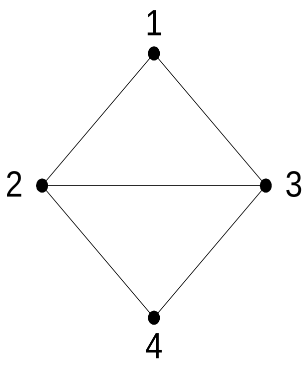
Graf G = (V, E), yang dalam hal ini:

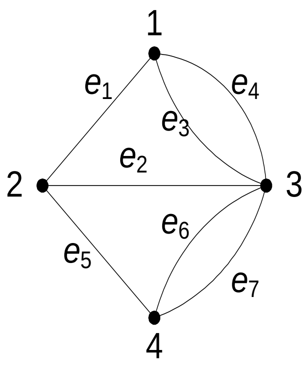
V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (vertices)

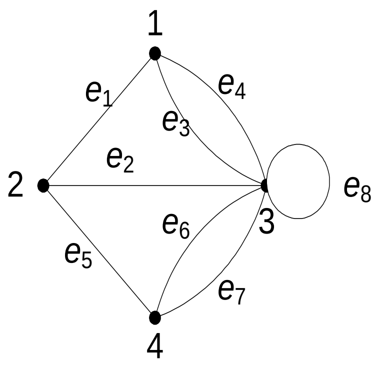
= { v1 , v2 , ... , vn }

E = himpunan sisi (edges)yang menghubungkan sepasang simpul

= {e1 ,e2 , ... , en }







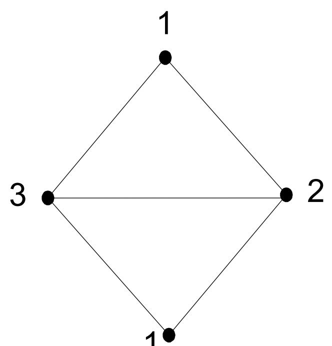
- Graf G1

  G_1 adalah graf dengan

  V = { 1, 2, 3, 4 }

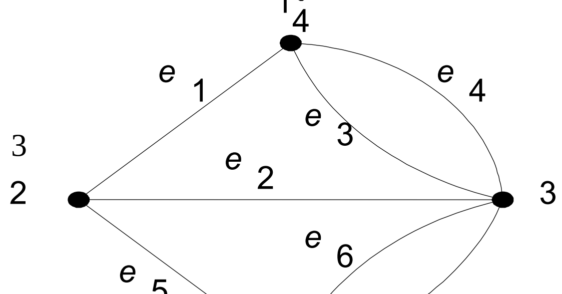
  E = { (1, 2), (1, 3), (2, 3),

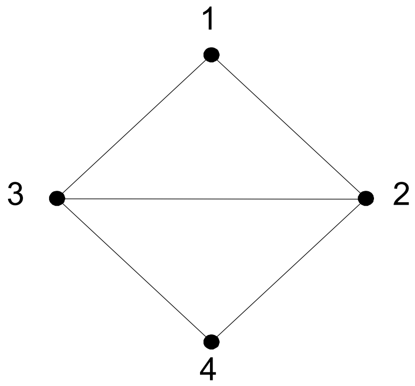
  (2, 4), (3, 4) }



- Graf G_2

  G_2 adalah graf dengan :





V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3),

(1, 3), (2, 4), (3, 4),

(3, 4) }

= { e1, e2, e3, e4, e5,

e6, e7}

Pada G_2, sisi e_3 = (1, 3) dan sisi e_4 = (1, 3) dinamakan **sisi-ganda** (multiple edges atau paralel edges) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

- Graf G3

G_3 adalah graf dengan

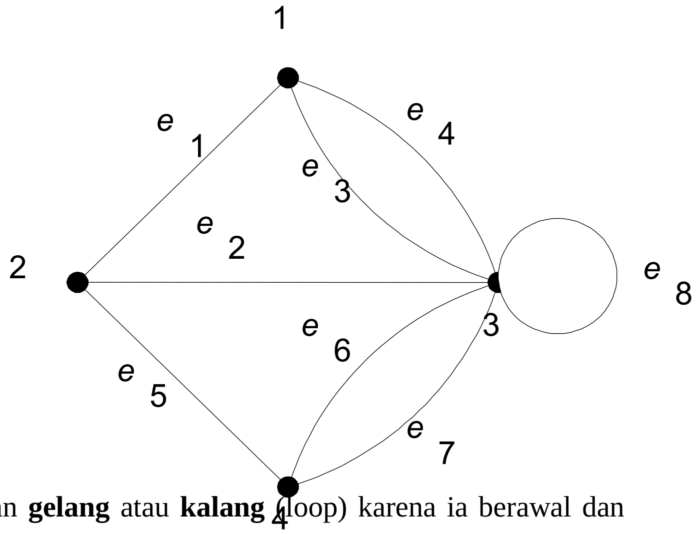
V = { 1, 2, 3, 4 }

E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3),

(1, 3), (2, 4), (3, 4),

(3, 4), (3, 3) }

= { e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8}



Pada G_3, sisi e_8 = (3, 3) dinamakan **gelang** atau **kalang** (loop) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

2.2 JENIS-JENIS GRAF

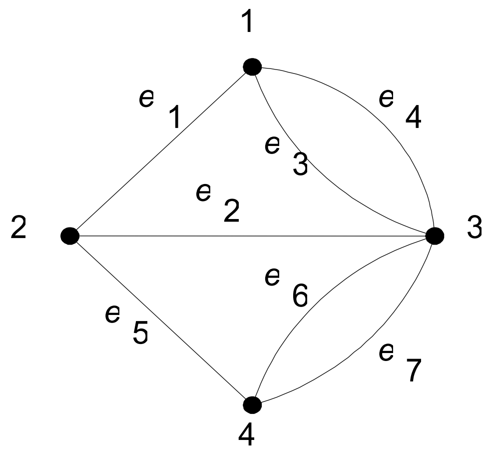
1. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

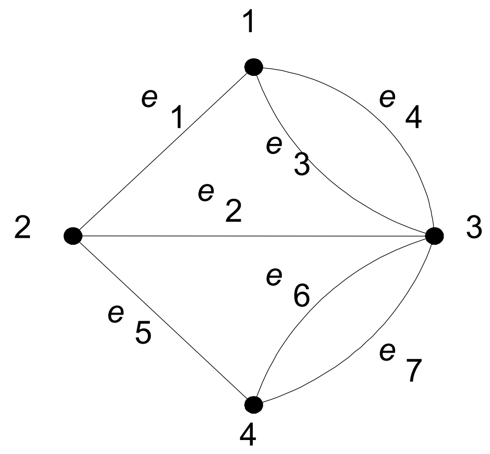
I. Graf sederhana (simple graf)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 adalah contoh graf sederhana

II. Graf tak-sederhana (unsimple-graf)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (unsimple graf). G_2 dan G_3 adalah contoh graf tak-sederhana .





2. Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

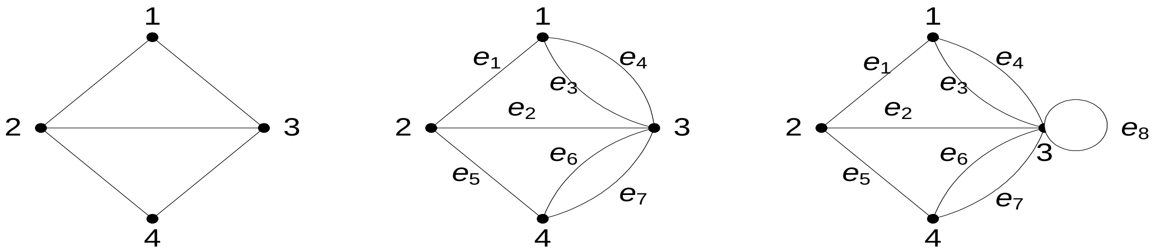
   I. **Graf berhingga** (limited graf)
   Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya, n, berhingga.

   II. **Graf tak-berhingga** (unlimited graf)
   Graf yang jumlah simpulnya, n, tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

3. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

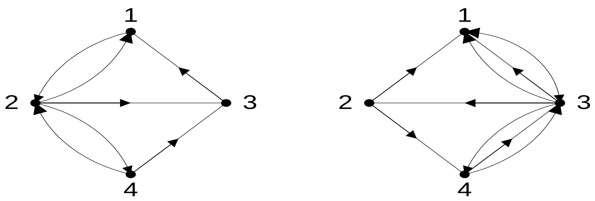
   I. **Graf tak-berarah** (undirected graf)

   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.
   Graf G_1, G_2, dan G_3 adalah graf tak-berarah



II. **Graf berarah** (*directed graf* atau *digraf*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.



(a) *G*4 (b) *G*5

2.3 GRAF LENGKAP

Definisi

Graf Lengkap (Complete Graf) dengan n titik (simbol K_n) adalah graf sederhana dengan n titik, di mana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis.

Teorema :

Banyaknya garis dalam suatu graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ buah

Bukti :

Misalkan G adalah suatu graf lengkap dengan n titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ambil sembarang titik (sebutlah v_1). Karena G merupakan graf lengkap, maka v_1 dihubungkan dengan (n-1) titik lainnya ($v_2, v_3, \ldots, v_n$). Jadi ada (n-1) buah garis.

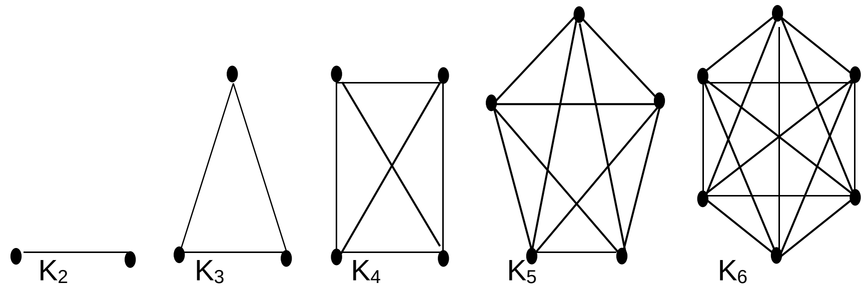
Selanjutnya, ambil sembarang titik kedua (sebutlah v_2). Karena G adalah graf lengkap, maka v_2 juga dihubungkan dengan semua titik sisanya ($v_1, v_3, \ldots, v_n$), sehingga ada (n-1) buah garis yang berhubungan dengan v_2. Salah satu garis tersebut menghubungkan v_2 dengan v_1. Garis ini sudah diperhitungkan pada waktu menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan v_1. Jadi, ada (n-2) garis yang belum diperhitungkan.

Proses dilanjutkan dengan menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan $v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}$ dan yang belum diperhitungkan sebelumnya. Banyak garis yang didapat berturut-turut adalah : (n-3), (n-4), ...,3,2,1.

Jadi secara keseluruhan terdapat (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 2 + 1 = $\frac{n(n-1)}{2}$ buah garis.

Contoh :
Gambarlah K_2, K_3, K_4, K_5, dan K_6 !

Penyelesaian :



Gambar 10

Kadang-kadang, titik-titik dalam suatu graf dapat dipecah menjadi 2 bagian, di mana titik-titik dalam satu bagian dihubungkan dengan titik-titik di bagian yang lain. Dengan demikian, graf terlihat seolah-olah "terpisah" menjadi 2 bagian.

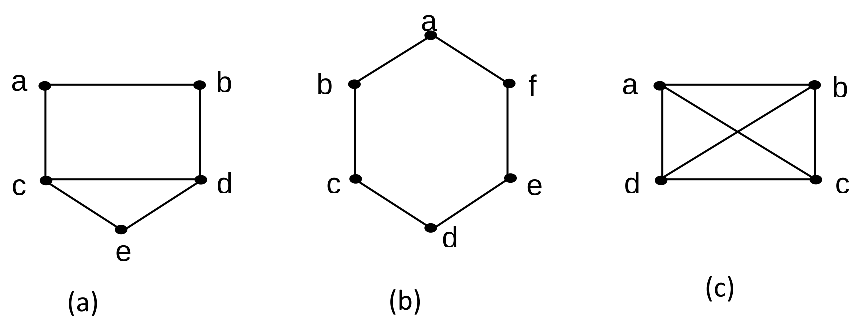
2.4 KOMPLEMEN GRAF

Definisi :
Komplemen suatu graf G (simbol $\overline{G}$) dengan n titik adalah suatu graf dengan :

1. Titik-titik $\overline{G}$ sama dengan titik-titik G. Jadi $V\left(\overline{G}\right) = V\left(G\right)$
2. Garis-garis $\overline{G}$ adalah komplemen garis-garis G terhadap Graf Lengkapnya (K_n)
   $E\left(\overline{G}\right) = E\left(K_n\right) - E\left(G\right)$

Titik-titik yang dihubungkan dengan garis dalam G tidak terhubung dalam $\overline{G}$. Sebaliknya, titik-titik yang tidak terhubung dalam G menjadi terhubung dalam $\overline{G}$.

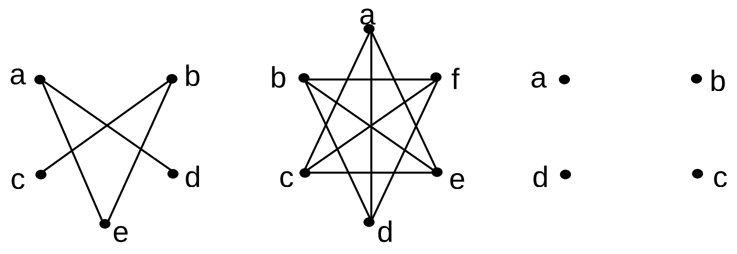
Contoh 7
Gambarlah komplemen graf G yang didefinisikan dalam Gambar 13 di bawah ini !



Gambar 13

Penyelesaian:

Titik-titik dalam $\overline{G}$ sama dengan titik-titik dalam G, sedangkan garis-garis dalam $\overline{G}$ adalah garis-garis yang tidak berada dalam G. Pada Gambar 14 (a), titik-titik yang tidak dihubungkan dengan garis dalam G adalah garis dengan titik ujung {a, d}, {a, e}, {b, c}, dan {b, e}. Maka graf $\overline{G}$ dapat digambarkan pada Gambar 14 (a). Secara analog, $\overline{G}$ Gambar 13 (b) dan 13 (c) dapat digambarkan pada Gambar 14 (b) dan (c).



(a) (b) (c)

Gambar 14

Perhatikan bahwa komplemen K_4 dalam soal (c) adalah graf tanpa garis di dalamnya. Secara umum, komplemen K_n adalah suatu graf dengan n titik dan tanpa garis.

Contoh

Misalkan G adalah suatu graf dengan n buah titik dan k buah garis. Berapa banyak garis dalam $\overline{G}$?

Penyelesaian:

Jumlah garis dalam $\overline{G}$ adalah jumlah garis dalam K_n dikurangi jumlah garis dalam G.

Menurut teorema 1, banyaknya garis dalam K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$, maka banyaknya garis dalam $\overline{G}$ adalah $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

Jika garis dalam G menunjukkan relasi tertentu, maka garis dalam $\overline{G}$ juga menunjukkan komplemen/ingkaran relasi tersebut. Sebagai contoh, andaikan titik-titik dalam G menyatakan karyawan-karyawan dalam suatu perusahaan dan garis-garis dalam G menyatakan relasi "dapat bekerja sama". Dua titik dalam G akan dihubungkan dengan garis jika keduanya dapat bekerja sama. Garis-garis dalam $\overline{G}$ menunjukkan ingkaran dari relasi tersebut. Dua titik dalam $\overline{G}$ dihubungkan dengan suatu garis jika kedua karyawan tidak dapat bekerja sama.

2.5 SUB GRAF

Konsep subgraf sama dengan konsep himpunan bagian. Dalam teori himpunan, himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian B bila dan hanya bila setiap anggota A merupakan anggota B. Karena graf merupakan himpunan yang terdiri dari titik dan garis maka **H dikatakan subgraf G** jika semua titik dan garis H juga merupakan titik dan garis dalam G.

Definisi
Misalkan G adalah suatu graf. Graf H dikatakan subgraf G bila dan hanya bila:

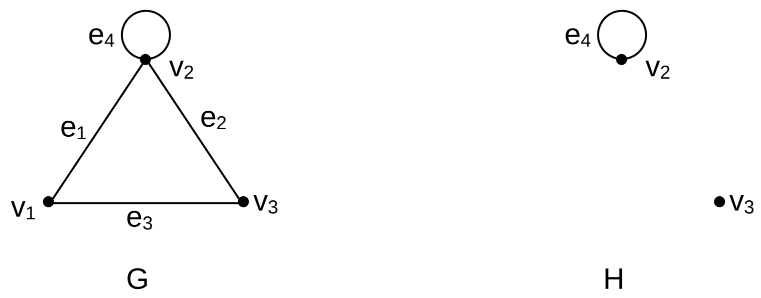
a. $V(H) \subseteq V(G)$
b. $E(H) \subseteq E(G)$
c. Setiap garis dalam H mempunyai titik ujung yang sama dengan garis tersebut dalam G

Dari definisi di atas, ada beberapa hal yang dapat diturunkan :

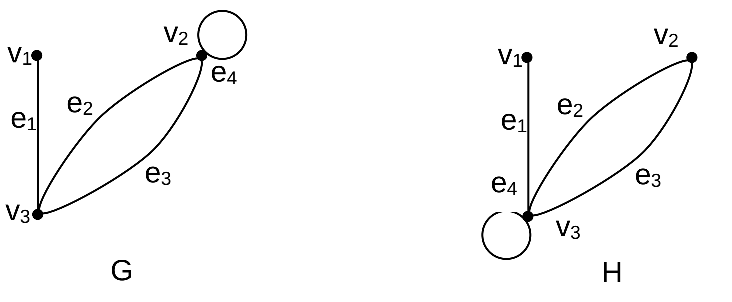
1. Sebuah titik dalam G merupakan subgraf G
2. Sebuah garis dalam G bersama-sama dengan titik-titik ujungnya merupakan subgraf G
3. Setiap graf merupakan subgraf dari dirinya sendiri
4. Dalam subgraf berlaku sifat transitif : Jika H adalah subgraf G dan G adalah subgraf K, maka H adalah subgraf K

Contoh
Dalam graf Gambar 15 (a) - (b) di bawah ini, apakah H merupakan subgraf G ?

a.



b.



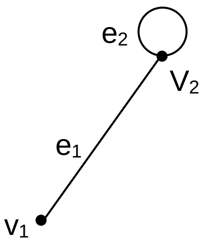
Penyelesaian:

a. V (H) = {v_2, v_3} dan V (G) = {v_1, v_2, v_3}, sehingga V (H) $\subseteq$ V (G). E(H) = {e_4} dan E(G) = {e_1, e_2, e_3, e_4} sehingga E(H) $\subseteq$ E(G). Garis e_4 di H merupakan loop pada v_2 dan garis e_4 juga merupakan loop pada v_2 di G. Maka H merupakan subgraf G.

a. H bukan merupakan subgraf G karena meskipun V(H) = V(G) = {v_1, v_2, v_3} dan E(H) = E(G) = {e_1, e_2, e_3, e_4}, tetapi garis e_4 dalam H tidak menghubungkan titik yang sama dengan garis e_4 dalam G. Dalam H, garis e_4 merupakan loop di v_3, sedangkan dalam G, garis e_4 merupakan loop dalam v_2.

Contoh

Gambarlah semua subgraf yang mungkin dibentuk dari graf G pada Gambar 16.

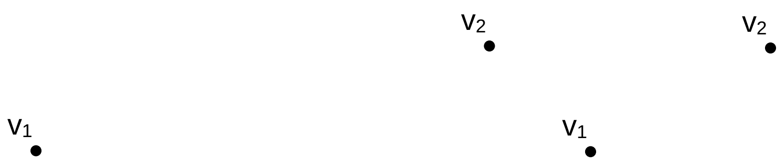


Gambar 16

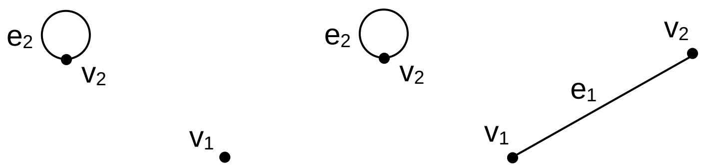
Penyelesaian:

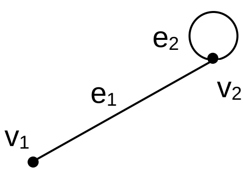
G terdiri dari 2 titik dan 2 garis. Subgraf G yang mungkin dibentuk terdiri dari 1 atau 2 titik dan 0, 1 atau 2 garis. Semua subgraf G yang mungkin dibuat dapat digambarkan pada Gambar 17.

Jumlah garis = 0



Jumlah garis = 1





Jumlah garis = 2

Gambar 17

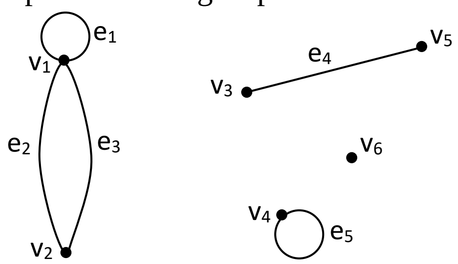
2.6 DERAJAT

Definisi

Misalkan v adalah titik dalam suatu Graf G. Derajat titik v (simbol d(v)) adalah jumlah garis yang berhubungan dengan titik v dan garis suatu loop dihitung dua kali. Derajat total G adalah jumlah derajat semua titik dalam G.

Contoh

Tentukan derajat tiap-tiap titik dalam graf pada Gambar 18. Berapa derajat totalnya ?



Gambar 18

Penyelesaian :

$d(v_1) = 4$ karena garis yarag berhubungan dengan v_1 adalah e_2, e_3 dan loop e_1 yang dihitung dua kali

$d(v_2) = 2$ karena garis yang berhubungan dengan v_2 adalah e_2 dan e_3.

$d(v_3) = d(v_5) = 1$ karena garis yang berhubungan dengan v_3 dan v_5 adalah e_4

$d(v_4) = 2$ karena garis yarag berhubungan dengan v_4 adalah loop e_5 yang dihitung 2 kali.

$d(v_6) = 0$ karena tidak ada garis yang berhubungan dengan v_6.

Derajat total = $\sum_{i=1}^{6} d(v_i) = 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 0 = 10$

Teorema

Derajat total suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G adalah suatu graf.

Jika G tidak memiliki garis sama sekali berarti derajat totalnya = 0 yang merupakan bilangan genap, sehingga teorema terbukti.

Misalkan G mempunyai n buah titik v_1, v_2, ... , v_n (n > 0) dan k buah garis e_1, e_2, ... ,e_k (k>0). Ambil sembarang garis e_i. Misalkan garis e_i menghubungkan v_i dengan v_j. Maka e_i memberikan kontribusi masing-masing 1 ke penghitungan derajat v_i dan derajat v_j (hal ini juga benar jika $v_i = v_j$ karena derajat suatu loop dihitung 2 kali), sehingga e_i memberi kontribusi 2 ke penghitungan derajat total. Karena e_i dipilih sembarang, berarti semua garis dalam G memberi kontribusi 2 dalam penghitungan derajat total. Dengan kata lain, derajat total G = 2 kali jumlah garis dalam G. Karena jumlah garis dalam G merupakan bilangan bulat, berarti derajat total G merupakan bilangan genap.

Teorema

Dalam sembarang graf, jumlah titik yang berderajat ganjil adalah genap.
Bukti

Misalkan G suatu graf.

Jika G tidak mempunyai garis sama sekali berarti banyaknya titik yang berderajat ganjil = 0 yang merupakan bilangan genap sehingga teorema terbukti dengan sendirinya.

Misalkan G mempunyai n buah titik v_i, v_2, ... , v_n dan k buah garis e_1, e_2, ... , e_k.
Misalkan di antara k garis tersebut ada k_i buah garis yang berderajat ganjil dan
$k_2 = k - k_1$ buah garis yang berderajat genap.

$$\underbrace{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_k,}_{\substack{k_1 \textit{ garis yang} \\ \textit{berderajat ganjil}}} \qquad \underbrace{e_{k_1+1}, e_{k_1+2}, \ldots\ldots, e_k}_{\substack{(k-k_1) \textit{ garis yang} \\ \textit{berderajat genap}}}$$

Akan dibuktikan bahwa k_1 adalah bilangan genap.

Misalkan E adalah jumlah derajat semua titik yang berderajat genap, 0 adalah jumlah derajat semua titik yang berderajat ganjil, dan T adalah derajat total graf G.

Jika O = d(e_i) + d(e_2)+ ... + d(e_{k_1}).

dan E = d(e_{k_1+1})+ d(e_{k_1+2})+ ... + d(e_k).

maka T = E + O

Menurut Teorema 2, maka T adalah bilangan genap. Karena d(e_{k_1+1})+ d(e_{k_1+2})+ ... + d(e_k) masing-masing berderajat genap, maka E = d(e_{k_1+1})+ d(e_{k_1+2})+ ... + d(e_k) juga merupakan bilangan genap.

Dari relasi T = E + O, berarti O = T – E. Karena baik T maupun E merupakan bilangan-bilangan genap maka O = d(e_i) + d(e_2)+ ... + d(e_{k_1}) juga merupakan bilangan genap. Padahal menurut asumsi, d(e_1), d(e_2), ... ,d(e_{k_1}) masing-masing adalah bilangan ganjil. Jadi O (bilangan genap) merupakan jumlahan dari k_1 buah bilangan ganjil. Hal ini hanya bisa terjadi kalau k_1 adalah bilangan genap.

Terbukti bahwa k_1 (jumlah titik yang berderajat ganjil) merupakan bilangan genap.

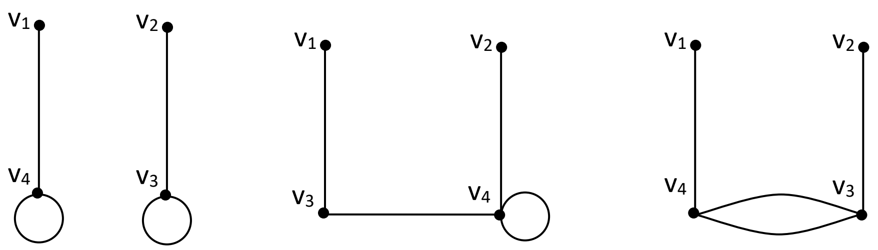
Contoh

Gambarlah graf dengan spesifikasi di bawah ini (jika ada).

a. Graf dengan 4 titik yang masing-masing berderajat 1,1, 2 dan 3.
b. Graf dengan 4 titik dengan masing-masing berderajat 1, 1, 3, dan 3.
c. Graf dengan 10 titik yang masing-masing berderajat 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, dan 6.
d. Graf sederhana dengan 4 titik yang masing-masing berderajat 1, 1, 3, dan 3.

Penyelesaian :

a. Derajat total = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 (ganjil). Menurut Teorema 2 maka tidak ada graf dengan derajat total ganjil.
b. Derajat total = 1 + 1 + 3 + 3 = 8 (genap). Jadi, ada graf dengan spesifikasi semacam itu. Beberapa di antaranya tampak pada Gambar 19.

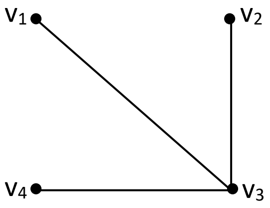


Gambar 19

c. Ada 3 titik yang berderajat ganjil (yaitu titik-titik yang berderajat 1, 1, dan 3). Menurut teorema 3, tidak mungkin ada graf dengan spesifikasi semacam itu. Pengecekan juga dapat dilakukan dengan menghitung derajat totalnya yang merupakan bilangan ganjil.
d. Derajat total = 1 + 1 + 3 + 3 = 8 (genap) sehingga mungkin buat graf dengan spesifikasi tersebut. Tetapi, graf yang dapat dibuat adalah graf secara umum (seperti soal (b)), dan bukan graf sederhana. Graf sederhana dengan spesifikasi

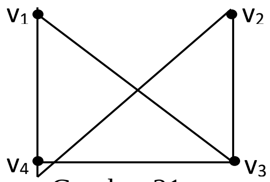
tersebut tidak mungkin dibuat. Hal ini dibuktikan dengan kontradiksi sebagai berikut :

Misalkan ada graf G dengan 4 titik, masing-masing v_1 dan v_2 yang berderajat 1, v_3 dan v_4 yang berderajat 3. karena v_3 berderajat 3 dan grafnya adalah graf sederhana (tidak boleh mengandung loop dan garis paralel), maka v_3 harus dihubungkan ke 3 titik yang lain (v_1, v_2, v_4). Hal tersebut dapat dilihat pada Gambar 20.



Gambar 20

v_4 juga mempunyai derajat 3, berarti v_4 juga harus dihubungkan dengan ketiga titik yang lain. Didapatkan graf Gambar 21.



Gambar 21

Akan tetapi, jika demikian halnya, v_1 dan v_2 mempunyai derajat 2, yang bertentangan dengan pengandaian mula-mula yang mengatakan bahwa v_1 dan v_2 berderajat 1. Dengan demikian, terbukti bahwa tidak ada graf dengan spesifikasi seperti ini.

2.7 PATH DAN SIRKUIT

Definisi 8

Misalkan G adalah suatu graf. Misalkan pula v dan w adalah 2 titik dalam G.

Suatu Walk dari v ke w adalah barisan titik-titik berhubungan dan garis secara berselang-seling, diawali dari titik v dan diakhiri pada titik w.

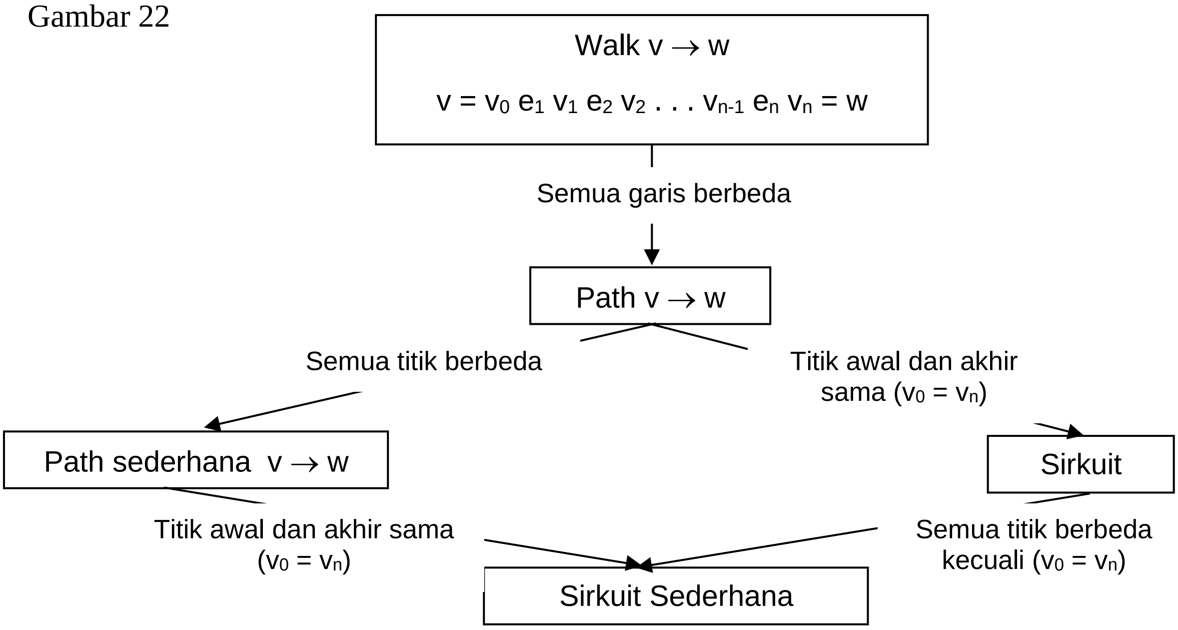
Walk dengan panjang n dari v ke w dituliskan sebagai berikut: v_0 e_i v_1 e_2 v_2, …, v_{n-1} e_n v_n dengan $v_0 = v$; $v_n = w$; v_{j-i} dan v_i adalah titik-titik ujung garis e_i.

Path dengan panjang n dari v ke w adalah walk dari v ke w yang semua garisnya berbeda. Path dari v ke w dituliskan sebagai $v = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots v_{n-1}\ e_n\ v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$.

Path sederhana dengan panjang n dari v ke w adalah Path dari v ke w yang semua titiknya berbeda. Path sederhana dari v ke w berbentuk $v = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ ...\ v_{n-1}\ e_n\ v_n = w$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$.

Sirkuit dengan panjang n adalah Path yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama. Sirkuit adalah path yang berbentuk $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ ...\ v_{n-1}\ e_n\ v_n$ dengan $v_0=v_n$.

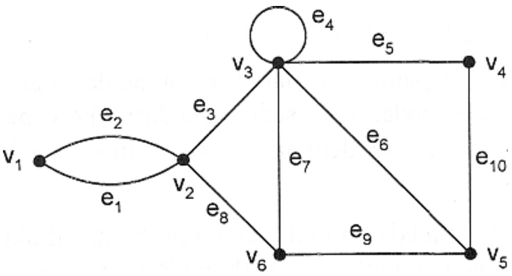
Sirkuit sederhana dengan panjang n adalah Sirkuit yang semua titiknya berbeda. Sirkuit sederhana berbentuk $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ ...\ v_{n-1}\ e_n\ v_n$ dengan $e_i \neq e_j$ untuk $i \neq j$ dan $v_k \neq v_m$ untuk $k \neq m$ kecuali $v_0 = v_n$. Definisi 8 dapat dirangkum dalam diagram Gambar 22



Gambar 22

Contoh

Tentukan mana di antara barisan titik dan garis pada Gambar 23 yang merupakan walk, path, path sederhana, sirkuit dan sirkuit sederhana.



Gambar 2

a. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
b. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_5\ v_3\ e_6\ v_5$
c. $v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4\ e_{10}\ v_5\ e_6\ v_3\ e_7\ v_6\ e_8\ v_2$
d. v_1

Penyelesaian :

a. Semua garis berbeda (e_1, e_3, e_4, dan e_5 masing-masing muncul sekali). Titik awal dan titik akhir tidak sama (titik awal = v_1 dan titik akhir v_4). Disimpulkan bahwa barisan tersebut merupakan Path dari v_1 ke v_4 dengan panjang 4.

b. Ada garis yang muncul lebih dari sekali, yaitu e_5 (muncul 2 kali) berarti barisan tersebut merupakan walk dari v_1 ke v_5 dengan panjang 5.

c. Semua garisnya berbeda. Ada titik berulang (v_3 muncul 2 kali). Titik awal dan akhirnya sama, yaitu v_2. berarti barisan tersebut merupakan sirkuit dengan panjang 6.

d. Karena barisan hanya memuat satu titik saja, berarti tidak ada garis yang sama. Barisan diawali dan diakhiri pada titik yang sama serta tidak mempunyai titik yang sama di antaranya. Maka disimpulkan bahwa barisan merupakan sirkuit sederhana (sering kali disebut sirkuit trivial).

Apabila tidak membingungkan, penulisan barisan dapat dipersingkat dengan cara menuliskan titiknya saja atau garisnya saja. Misalnya, contoh 13(b) dapat dituliskan sebagai e_1 e_3 e_5 e_5 e_6, contoh 13(c) dapat dituliskan sebagai v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2. Akan tetapi, contoh 13(a) tidak dapat dituliskan sebagai v_1 v_2 v_3 v_3 v_4 karena tidak jelas apakah walk dari v_1 ke v_2 melalui e_1 atau e_2.

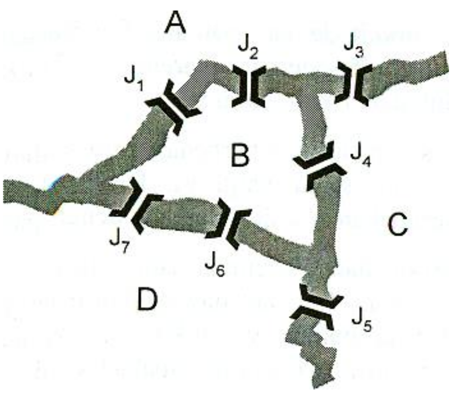
2.8 SIRKUIT EULER

Definisi :

Misalkan G adalah suatu graf. **Sirkuit Euler G** adalah sirkuit di mana setiap titik dalam G muncul **paling sedikit** sekali dan setiap garis dalam G muncul tepat satu kali.

Definisi di atas dibuat untuk mengenang ahli matematika Leonhard Euler yang berhasil memperkenalkan graf untuk memecahkan masalah 7 jembatan Konigsberg pada tahun 1736.

Kota Konigsberg dibangun pada pertemuan 2 cabang sungai Pregel. Kota tersebut terdiri dari sebuah pulau di tengah-tengah dan 7 jembatan yang mengelilinginya (lihat Gambar 24)

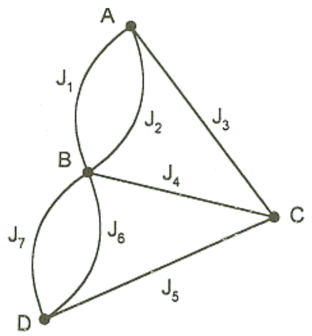


Gambar 24

J_1 ... J_7 adalah jembatan-jembatan yang menghubungkan ke 4 daerah (A...D).

Masalahnya adalah : mungkinkah seseorang berjalan mengelilingi kota yang dimulai dan diakhiri pada tempat yang sama., dengan melintasi ketujuh jembatan masing-masing tepat satu kali?

Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler merepresentasikannya dalam graf. Titik-titik dalam graf menyatakan daerah-daerah, dan garis-garisnya menyatakan jembatan. Graf yang sesuai dengan masalah 7 jembatan Konigsberg tampak pada Gambar 25.



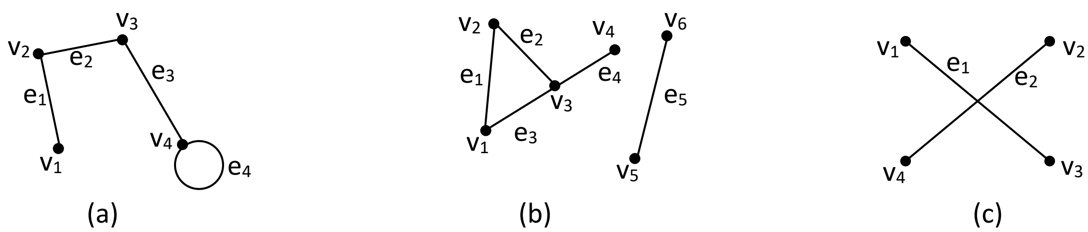
Gambar 25

2.9 GRAF TERHUBUNG DAN GRAF TAK TERHUBUNG

Definisi

Misalkan G adalah suatu graf
Dua titik v dan w dalam G dikatakan terhubung bila dan hanya bila ada walk dari v ke w
Graf G dikatakan terhubung bila dan hanya bila setiap 2 titik dalam G terhubung.
Graf G dikatakan tidak terhubung bila dan hanya bila ada 2 titik dalam G yang tidak terhubung.

Contoh
Manakah di antara graf pada Gambar 26 yang merupakan graf terhubung?



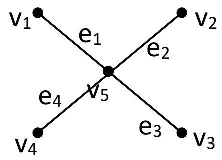
Gambar 26

Penyelesaian:

a. Graf terhubung

b. Graf tidak terhubung karena tidak ada walk dari v_5 ke v_4

c. Graf tidak terhubung karena tidak ada walk dari v_2 ke v_3. Hati-hati terhadap visualisasi graf yang tampaknya terhubung, padahal sebenarnya tidak. Perhatikan bahwa graf (c) berbeda dengan graf Gambar 27.



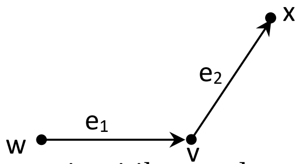
Gambar 27

Teorema
Misalkan G adalah graf terhubung.
G adalah sirkuit Euler bila dan hanya bila semua titik dalam G mempunyai derajat genap.

Bukti
Akan dibuktikan implikasi dari kiri ke kanan
Misalkan G adalah graf terhubung yang merupakan sirkuit Euler.
Ambil sembarang titik $v \in V(G)$. Karena G adalah sirkuit Euler, maka titik v harus dilalui (paling sedikit sekali) dalam perjalanan kelilingnya. Ini berarti ada garis (sebutlah e_1) dari titik lain (misalkan w) yang menuju ke v dalam perjalanannya.

G merupakan sirkuit Euler, sehingga perjalanan tidak boleh berhenti pada v. Jadi, setelah sampai pada titik v, perjalanan harus dilanjutkan dengan mengunjungi titik lain (misalnkan titik x). Dalam mengunjungi titik x, perjalanan harus melalui garis $e_2 \neq e_1$. (jikalau titik v adalah titik awal perjalanan, berarti titik x adalah titik pertama yang dikunjungi dalam perjalanan tersebut). Hal ini dilihat pada Gambar 28

Gambar 28



Jadi, setiap ada garis e_i yang menuju titik v dalam perjalanannya, garis yang berhubungan dengan v harus muncul berpasangan (masuk ke v dan keluar dari v). Akibatnya, derajat v merupakan kelipatan 2, atau derajat v adalah genap.

Karena v adalah titik sembarang dalam G maka berarti bahwa setiap titik dalam G mempunyai derajat genap.

Kontraposisi teorema di atas adalah:

“Jika ada titik dalam G yang berderajat ganjil, maka G bukanlah sirkuit Euler”.

Kenyataan digunakan untuk menyelidiki graf yang bukan sirkuit Euler.

Pada masalah 7 jembatan Konigsberg yang dinyatakan dalam graf pada Gambar 24, Titik A, B, C dan D mempunyai derajat ganjil sehingga menurut kontraposisi terorema 4, berarti grafnya bukanlah sirkuit Euler.

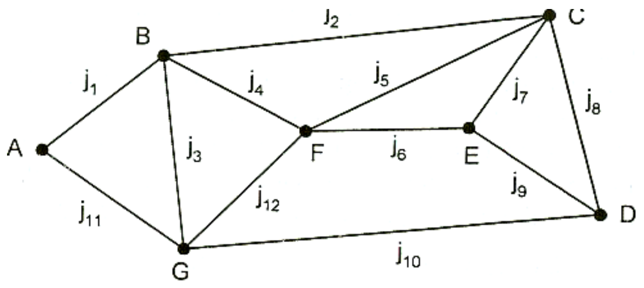
2.10 SIRKUIT HAMILTON

Definisi

Suatu graf terhubung G disebut Sirkuit Hamilton bila ada sirkuit yang mengunjungi setiap titiknya tepat satu kali (kecuali titik awal yang sama dengan titik akhimya).
Ada perbedaan sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton. Dalam sirkuit Euler, semua garis harus dilalui tepat satu kali, sedangkan semua titiknya boleh dikunjungi lebih dari satu kali. Sebaliknya, dalam sirkuit Hamilton semua titik harus dikunjungi tepat satu kali dan tidak harus melalui semua garisnya. Dalam sirkuit Euler, yang dipentingkan adalah garisnya. Sebaliknya dalam sirkuit Hamilton, yang dipentingkan adalah kunjungan pada titiknya.

Contoh

Gambar 31 menyatakan peta beberapa kota (A...G) beserta jalan-jalan yang menghubungkan kota-kota tersebut



Gambar 29

Seorang penjaja (salesman) hendak mengunjungi tiap kota masing-masing satu kali, dimulai dari kota A. Carilah jalan yang harus dilalui salesman tersebut.

Penyelesaian:

Masalah penjaja tersebut adalah mencari sirkuit Hamilton yang dimulai dari titik A. Dengan mencoba-coba, didapatkan beberapa jalur yang mungkin, misalnya: ABFECDGA, ABCFEDGA

Terlepas dari perbedaan antara sirkuit Euler dan Hamilton, terdapat perbedaan yang nyata tentang cara menentukan apakah suatu graf merupakan sirkuit Euler dan apakah suatu graf merupakan sirkuit Hamilton. Teorema 4 dengan jelas menentukan syarat-syarat agar suatu graf merupakan sirkuit Euler. Sebaliknya, tidak ada syarat-

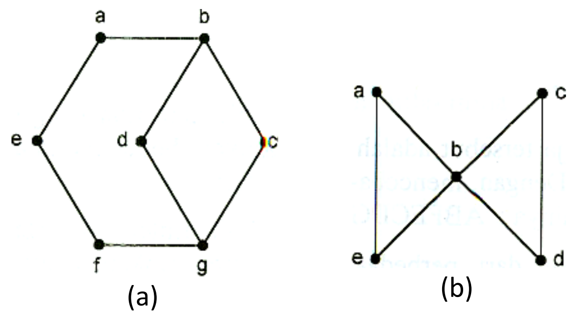
syarat yang pasti untuk menentukan apakah suatu graf merupakan sirkuit Hamilton. Hanya saja ada suatu petunjuk untuk menentukan bahwa suatu graf bukan suatu sirkuit Hamilton.

Jika G merupakan sirkuit Hamilton, maka G mempunyai subgraf H dengan sifat-sifat sebagai berikut :

1. H terhubung
2. H memuat semua titik G
3. H mempunyai jumlah garis yang sama dengan jumlah titiknya.
4. Setiap titik dalam H mempunyai derajat 2

Syarat (1) dan (2) jelas menurut definisi sirkuit Hamilton, yang mengharuskan mengunjungi semua titik dalam G. Syarat (4) ada sebagai akibat kunjungan semua titik yang hanya boleh dilakukan sekali. Selama kunjungan, di setiap titik pasti ada satu garis masuk dan satu garis keluar sehingga derajat setiap titik = 2. Karena dalam sirkuit Hamilton, setiap dua titik dihubungkan dengan tepat satu garis, maka jumlah garis sama dengan jumlah titiknya. Hal ini dinyatakan dalam syarat (3).
Jika salah satu dari ke-4 syarat tersebut tidak dipenuhi maka graf-nya bukanlah graf Hamilton.

Contoh
Buktikan bahwa graf Gambar 30 bukanlah sirkuit Hamilton



Gambar 30

Penyelesaian:

a. Misalkan graf G pada Gambar 30(a) adalah sirkuit Hamilton. Maka G mempunyai subgraf H dengan sifat:
   1. H memuat semua titik dalam G (ada 7 titik yaitu a, b, ... , g)
   2. Jumlah garis dalam H sama dengan jumlah titiknya, yaitu =7
   3. Semua garis dalam H berderajat 2.

Titik b berderajat 3 sehingga salah satu garisnya harus, dihilangkan. Demikian juga dengan titik g. Akibatnya, ada 2 garis yang harus dihilangkan dari G. Padahal jumlah garis dalam G adalah 8. Dengan penghilangan 2 garis tersebut maka jumlah garis dalam G adalah 6. Akibatnya tidak mungkin membuat subgraf H yang memuat 7 garis.

Jadi graf G pada Gambar 30(a) bukanlah sirkuit Hamilton.

b. Misalkan graf G pada Gambar 30(b) adalah sirkuit Hamilton. Dengan cara yang sama dengan penyelesaian (a), maka subgraf H yang terbentuk haruslah mempunyai jumlah garis = 5 (sesuai dengan jumlah titik) dan tiap titik haruslah berderajat = 2. Titik b berderajat 4 sehingga harus ada 2 garis yang dihilangkan. Akan tetapi, penghilangan satu garis saja akan menyebabkan suatu titik lain (a, c, d, atau e) berderajat 1 (ganjil). Jadi, tidak mungkin dibentuk subgraf H dengan sifat tersebut. Berarti graf pada Gambar 30(b) bukanlah sirkuit Hamilton.

2.11 Isomorfisma

Dalam geometri, dua gambar disebut kongruen jika keduanya mempunyai sifat-sifat geometri yang sama. Dengan cara yang sama, **dua graf disebut isomorfis** jika keduanya menunjukkan "bentuk" yang sama. Kedua graf hanya berbeda dalam hal pemberian label titik dan garisnya saja. Secara matematis, isomorfisma 2 graf didefinisikan dalam definisi 12.

Definisi

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan garis E(G).

G' adalah graf dengan himpunan titik V(G') dan himpunan garis E(G').

G isomorfis dengan G' bila dan hanya bila ada korespondensi satu-satu

$g : V(G) \to V(G')$ dan

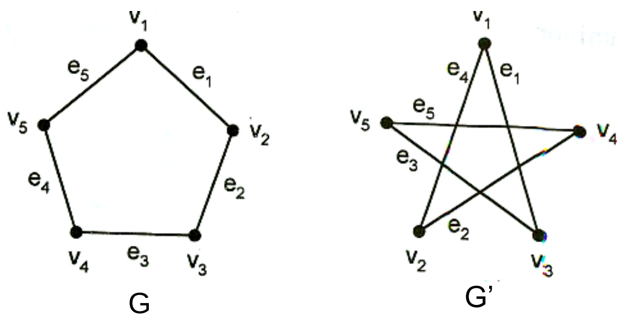
$h : E(G) \to E(G')$

Sedemikian hingga ($\forall$ v, w $\in$ V(G) dan e $\in$ E(G)). v dan w adalah titik-titik ujung e

$\Leftrightarrow$ g(v) dan g(w) adalah titik-titik ujung h(e).

Contoh

Tunjukkan bahwa graf G dan G' pada Gambar 31 adalah isomorfis

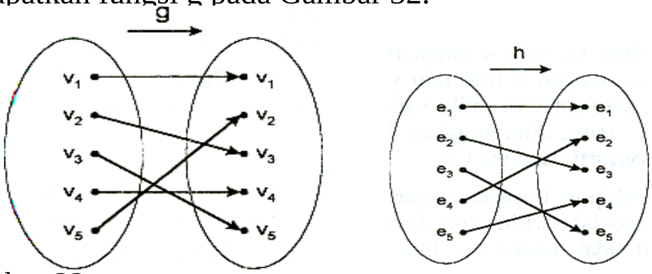


Gambar 31

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa G isomorfis dengan G', harus berusaha menemukan korespondensi satu-satu titik dan garis kedua graf.

Dalam G, v_1 berhubungan dengan v_2 dan v_5, sedangkan dalam G', v_1 berhubungan dengan v_3 dan v_2. Maka fungsi $g : G \rightarrow G'$ didefinisikan dengan $g(v_1) = v_1$; $g(v_2) = v_3$; $g(v_5) = v_2$. Cara yang sama dilakukan untuk semua semua titik. yang lain. Didapatkan fungsi g pada Gambar 32.



Gambar 32

$e_2 \in E(G)$ menghubungkan titik v_2 dan $v_3 \in G$. Fungsi g memetakan $v_2 \in G$ ke $v_3 \in G'$ dan memetakan $v_3 \in G$ ke $v_5 \in G'$. Dalam G', garis yang menghubungkan v_3 dan v_5 adalah $e_3 \in G'$. Jadi dalam pembuatan fungsi h, $e_2 \in G$ dikawankan dengan $e_3 \in G'$. Hal yang sama juga dilakukan pada semua titik yang lain. Hingga saat ini belum ada teori yang dapat dipakai untuk menentukan apakah dua graf G dan G' isomorfis. Akan tetapi, jika G dan G' isomorfis, maka terdapat beberapa hal yang pasti dipenuhi:

1. jumlah titik G = jumlah titik G'
2. jumlah garis G = jumlah garis G'
3. jumlah garis dengan derajat tertentu dalam G dan G' sama.

Masalahnya, implikasi tersebut tidak berlaku 2 arah. Ada 2 graf yang memenuhi ketiga syarat tersebut, tetapi keduanya tidak isomorfis. Sebagai contoh adalah graf G dan G' pada Gambar 33.

Gambar 33

Dalam G, satu-satunya titik yang berderajat 3 adalah titik x. Titik x dihubungkan dengan 2 titik lain yang berderajat 1 (titik y dan z). Sebaliknya, dalam G', satu-satunya titik yang berderajat 3 adalah v. Satu-satunya titik berderajat 1 yang dihubungkan dengan v hanyalah titik w, sehingga G tidak mungkin isomorfis dengan G'. Meskipun implikasi syarat isomorfis hanya berlaku satu arah, paling tidak kontraposisi dari implikasi tersebut bisa dipakai untuk menentukan bahwa 2 buah graf tidak isomorfis. Jika salah satu dari ketiga syarat tidak dipenuhi, maka graf G dan G' tidak isomorfis.

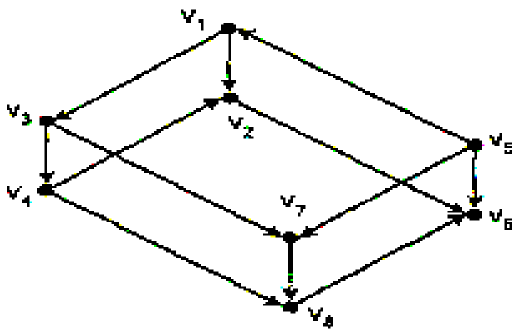
2.12 PATH BEARAH DAN SIRKUIT BERARAH.

Pengertian walk, path, sirkuit dalam graf berarah sama dengan walk, path dan sirkuit dalam graf tak berarah. Hanya saja dalam graf berarah, perjalanan yang dilakukan harus mengikuti arah garis. Untuk membedakan dengan graf tak berarah, maka walk, path dan sirkuit dalam graf berarah disebut walk berarah, path berarah dan sirkuit berarah.

Suatu graf berarah yang tidak memuat sirkuit berarah disebut Asklik.

Contoh

Tentukan path berarah terpendek dari titik v_5 ke titik v_2 pada graf berarah Gambar 34.



Gambar 34

Penyelesaian:

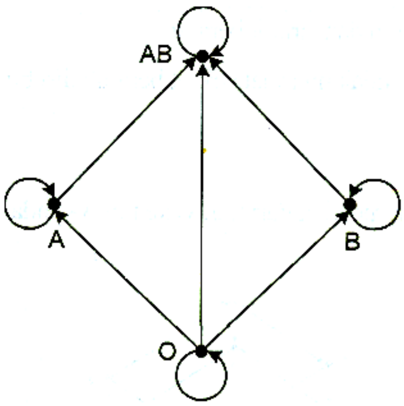
Ada beberapa path berarah dari v_5 ke v_2 yang dapat dilakukan, misalnya: v_5 v_1 v_3 v_4 v_2, v_5 v_1 v_2, . . . Yang terpendek adalah v_5 v_1 v_2 dengan panjang = 2.

Contoh

Ada 4 macam golongan darah, masing-nasing A, B, AB dan O. Dan gol O dapat diberikan ke semua golongan. Darah golongan A dan B dapat diberikan ke golongannya sendiri atau ke golongan AB. Darah golongan A hanya dapat diberikan pada pasien dengan golongan AB. Gambarlah graf berarah untuk menyatakan keadaan tersebut. Anggaplah garis dari v_i ke v_j menyatakan bahwa darah dari v_i dapat diberikan pada v_j. Apakah graf-nya Asiklik?

Penyelesaian:

Graf berarah pada Gambar 35 menyatakan keadaan transfusi darah yang mungkin dilakukan. Tampak bahwa dalam graf berarah tersebut tidak ada sirkuit berarah sehingga graf-nya Asiklik.



Gambar 35

2.13 GRAF BERARAH TERHUBUNG

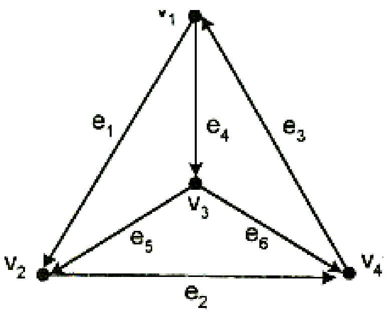
Suatu graf tak berarah disebut terhubung jika ada walk yang menghubungkan setiap 2 titiknya. Pengertian ini berlaku juga bagi graf berarah. Berdasarkan arah garisnya, dalam graf berarah dikenal 2 jenis keterhubungan, yaitu **terhubung kuat dan terhubung lemah.**

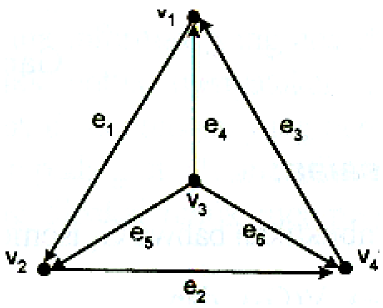
Definisi

Misalkan G adalah suatu graf berarah dan v,w adalah sembarang 2 titik dalam G.
G disebut terhubung kuat jika ada path berarah dari v ke w.

G disebut terhubung lemah, jika G tidak terhubung kuat, tetapi graf tak berarah yang bersesuaian dengan G terhubung.

Contoh
Manakah di antara graf-graf pada Gambar 36 yang terhubung kuat dan terhubung lemah?





Gambar 36

Penyelesaian:

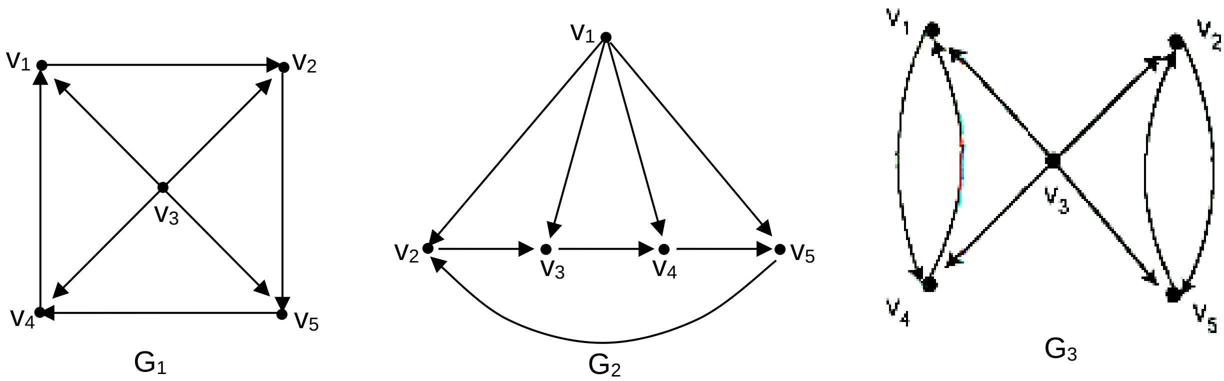
Dalam G_1, setiap 2 titik dapat dihubungkan dengan path berarah. Maka graf berarah G_1 adalah graf terhubung kuat.

Sebaliknya dalam G_2, tidak ada path berarah yang menghubungkan v_4 ke v_3. Akan tetapi, jika semua arah garis dihilangkan (sehingga G_2 menjadi graf tidak berarah), maka G_2 merupakan graf yang terhubung. Jadi G_2 merupakan graf terhubung lemah.

2.14 ISOMORFISMA DALAM GRAF BERARAH

Pengertian isomorfisma dalam graf berarah sama dengan isomorfisma pada graf tak berarah. Hanya saja pada isomorfisma graf berarah, korespondensi dibuat dengan memperhatikan arah garis.

Contoh 22
Tunjukkan bahwa graf G_1 pada Gambar 37 isomorfis dengan G_2, sedangkan G_3 tidak isomorfis dengan G_1.



Gambar 37

Penyelesaian:
Untuk membuktikan bahwa G_1 isomorfis dengan G_2, maka harus dibuat fungsi

$g : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dan
$h : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$
yang mempertahankan titik-titik ujung serta arah garis

Dalam G_1, ada 4 garis yang keluar dari v_3. Titik yang mempunyai sifat seperti itu dalam G_2 adalah titik v=1. Maka dibuat fungsi g sedemikian hingga

$g(v_3) = v_1$; $g(v_1) = v_2$; $g(v_2) = v_3$; $g(v_5) = v_4$ dan $g(v_4) = v_5$

fungsi h adalah sebagai berikut :

$h((v_1, v_2)) = (v_2, v_3)$; $h((v_2, v_5)) = (v_3, v_4)$
$h((v_5, v_4)) = (v_4, v_5)$; $h((v_4, v_1)) = (v_5, v_2)$
$h((v_3, v_1)) = (v_1, v_2)$; $h((v_3, v_2)) = (v_1, v_3)$
$h((v_3, v_5)) = (v_1, v_4)$; $h((v_3, v_4)) = (v_1, v_5)$

Karena fungsi g dan h dapat dibuat, maka G_1 isomorfis dengan G_2.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa G_3 tidak isomorfis dengan G_1

Dalam G_3, ada garis (v_1, v_4) dan (v_4, v_1). Jika G_1 isomorfis dengan G_3, maka harus ada fungsi $h : G_3 \rightarrow G_1$ sedemikian hingga $h(v_1, v_4)$ dan $h(v_4, v_1)$ merupakan garis-garis dalam G_1 (dengan kata lain, ada titik v_i dan v_j dalam G_1 sedemikian hingga ada garis dari v_1 ke v_j dan dari v_j ke v_i). Dalam G_1 tidak ada garis seperti itu. Maka G_3 tidak isomorfis dengan G_1.

BAB III
PENUTUP

Kesimpulan

- Graf tak berarah (undirected graph) adalah graf yang sisinya yang tidak mempunyai orientasi arah sedangkan graf berarah (directed graph) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi.
- Graf terbagi menjadi beberapa bagian baik berdasarkan ada atau tidaknya sisa ganda dan gelang, orientasi arah dan jumlah simpul.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 1977. *Graph Theory With Applications*. London: The Macmillan Press LTD.

Buckley, F. & Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. New-Jersey:

Carson Education, Inc.

Kusumah, Y.S., M.Sc., Ph.D.. 1997. *Matematika Diskrit*. Bandung: IKIP Bandung Press.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Rosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.

http://yuliecce.wordpress..com/2012/01/20/pengertian-graf(Online.(diunduh pada tanggal 24 Mei 2015)