

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/294087915>

# DESCOMPOSICIÓN TEMPORAL PARALELIZABLE PARA PROBLEMAS IRREVERSIBLES.

Conference Paper · August 2015

CITATIONS

0

READS

30

1 author:



[Adrian Tato Omar Alvarez](#)

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

25 PUBLICATIONS 2 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



análisis numerico [View project](#)



ecuaciones diferenciales [View project](#)





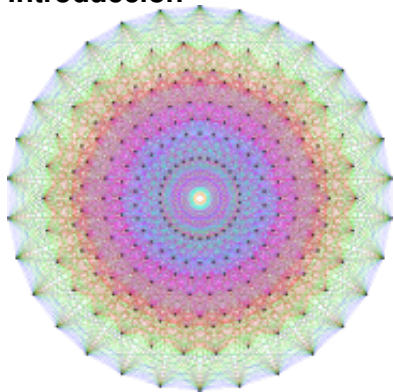
**ITBA 2015**  
Charlas del Doctorado

# **MÉTODOS AFINES**

**Adrián Alvarez**

**DESCOMPOSICIÓN TEMPORAL PARALELIZABLE PARA PROBLEMAS IRREVERSIBLES.**

# Introducción



$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t)\end{aligned}$$

# Ejemplos de fenómenos modelados por las ecuaciones estudiadas

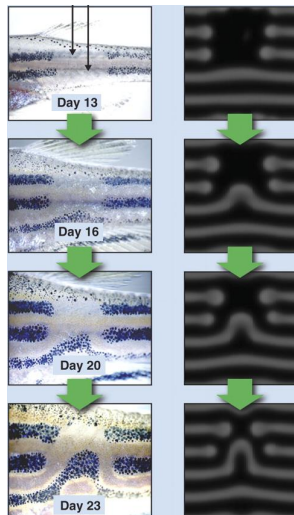
## Casos

- Estabilidad de patrones.
- Onda Solitaria en canales.
- Ola gigante.
- Fibras ópticas.

# Ejemplos de fenómenos modelados por las ecuaciones estudiadas

## Casos

- **Estabilidad de patrones.**
- Onda Solitaria en canales.
- Ola gigante.
- Fibras ópticas.



# Ejemplos de fenómenos modelados por las ecuaciones estudiadas

## Casos

- Estabilidad de patrones.
- Onda Solitaria en canales.
- Ola gigante.
- Fibras ópticas.



# Ejemplos de fenómenos modelados por las ecuaciones estudiadas

## Casos

- Estabilidad de patrones.
- Onda Solitaria en canales.
- Ola gigante.
- Fibras ópticas.





# Ejemplos de fenómenos modelados por las ecuaciones estudiadas

## Casos

- Estabilidad de patrones.
- Onda Solitaria en canales.
- Ola gigante.
- Fibras ópticas.



# Repaso de ecuaciones diferenciales

- Una EDO a 1º orden de evolución lineal es:  $u_t = \frac{du}{dt} = A.u$
- Integrando:  $\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^t A.dt$
- De este modo resulta que:

$$u(t) = e^{(t-t_0).A}.u(t_0) = \phi(t-t_0, u_0)$$

a esta expresión se la llama flujo.

- Pidiendo  $t - t_0 = h$  y  $u(t_0) = u_0$  con Taylor queda:

$$u(t) = e^{h.A}.u_0 = \left(I + h.A + \frac{h^2.A^2}{2} + \frac{h^3.A^3}{6}\right).u_0 + O(h^4)$$

## Repaso de ecuaciones diferenciales

- Una EDO a 1º orden de evolución lineal es:  $u_t = \frac{du}{dt} = A.u$
- Integrando:  $\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^t A.dt$
- De este modo resulta que:

$$u(t) = e^{(t-t_0).A}.u(t_0) = \phi(t - t_0, u_0)$$

a esta expresión se la llama flujo.

- Pidiendo  $t - t_0 = h$  y  $u(t_0) = u_0$  con Taylor queda:

$$u(t) = e^{h.A}.u_0 = \left(I + h.A + \frac{h^2.A^2}{2} + \frac{h^3.A^3}{6}\right).u_0 + O(h^4)$$

# Repaso de ecuaciones diferenciales

- Una EDO a 1º orden de evolución lineal es:  $u_t = \frac{du}{dt} = A.u$
- Integrando:  $\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^t A.dt$
- De este modo resulta que:

$$u(t) = e^{(t-t_0).A}.u(t_0) = \phi(t - t_0, u_0)$$

a esta expresión se la llama flujo.

- Pidiendo  $t - t_0 = h$  y  $u(t_0) = u_0$  con Taylor queda:

$$u(t) = e^{h.A}.u_0 = (I + h.A + \frac{h^2.A^2}{2} + \frac{h^3.A^3}{6}).u_0 + O(h^4)$$

# Repaso de ecuaciones diferenciales

- Una EDO a 1º orden de evolución lineal es:  $u_t = \frac{du}{dt} = A.u$
- Integrando:  $\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^t A.dt$
- De este modo resulta que:

$$u(t) = e^{(t-t_0).A}.u(t_0) = \phi(t - t_0, u_0)$$

a esta expresión se la llama flujo.

- Pidiendo  $t - t_0 = h$  y  $u(t_0) = u_0$  con Taylor queda:

$$u(t) = e^{h.A}.u_0 = (I + h.A + \frac{h^2.A^2}{2} + \frac{h^3.A^3}{6}).u_0 + O(h^4)$$

# Repaso de ecuaciones diferenciales

- Una EDO a 1º orden de evolución lineal es:  $u_t = \frac{du}{dt} = A.u$
- Integrando:  $\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_{t_0}^t A.dt$
- De este modo resulta que:

$$u(t) = e^{(t-t_0).A}.u(t_0) = \phi(t - t_0, u_0)$$

a esta expresión se la llama flujo.

- Pidiendo  $t - t_0 = h$  y  $u(t_0) = u_0$  con Taylor queda:

$$u(t) = e^{h.A}.u_0 = (I + h.A + \frac{h^2.A^2}{2} + \frac{h^3.A^3}{6}).u_0 + O(h^4)$$

# Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0 \cdot u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0 \cdot u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

## Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$



# Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

# Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

## Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

## Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

# Problemas abarcados

Técnica aplicable en problemas autónomos desacoplables de la forma:

$$u_t = A_0.u + A_1(u) \quad ; \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

- Con  $A_0$  un operador cerrado densamente definido en  $D(A_0) \subset H$ , un espacio de Hilbert, que genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo.
- Mas fácil, es un operador lineal, por ejemplo diferencial en el orden que sea o integral.
- El término no lineal  $A_1 : H \rightarrow H$  es una aplicación suave con  $A_1(0) = 0$ .
- Este método sirve en los casos que se pueden resolver fácilmente los problemas parciales, pues se aprovecha esto hallando soluciones aproximadas cada subproblema (1) aplicando en forma alternada los flujos parciales:

$$u_t = A_0.u, \quad y \quad u_t = A_1(u)$$

## Idea para ver que son los metodos numéricos de Splitting

A los flujos les pedimos que verifiquen:

$$\Phi_X^0 = \text{id}$$

$$\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s}$$

Dado que le pedimos lo no lineal, ser suave y que:  $A_1(0) = 0$  hay un intervalo muy chico donde para la composición vale:  $A_1(u) = A_1.u$

Con lo cual se puede obtener que:

$$u_t = \frac{du}{dt} = A_0.u + A_1(u) \approx (A_0 + A_1)(u)$$

A grandes rasgos se puede suponer , que con (1) se puede obtener el llamado *generador infinitesimal*, con el flujo:

$$u(t) = e^{h.(A_0+A_1)}.u_0$$

## Idea para ver que son los metodos numéricos de Splitting

A los flujos les pedimos que verifiquen:

- i.  $\Phi_X^0 = \text{id}$
- ii.  $\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s}$

Dado que le pedimos lo no lineal, ser suave y que:  $A_1(0) = 0$  hay un intervalo muy chico donde para la composición vale:  $A_1(u) = A_1.u$

Con lo cual se puede obtener que:

$$u_t = \frac{du}{dt} = A_0.u + A_1(u) \approx (A_0 + A_1)(u)$$

A grandes rasgos se puede suponer , que con (1) se puede obtener el llamado *generador infinitesimal*, con el flujo:

$$u(t) = e^{h.(A_0+A_1)}.u_0$$

# Idea para ver que son los metodos numéricos de Splitting

A los flujos les pedimos que verifiquen:

- i.  $\Phi_X^0 = \text{id}$
- ii.  $\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s}$

Dado que le pedimos lo no lineal, ser suave y que:  $A_1(0) = 0$  hay un intervalo muy chico donde para la composición vale:  $A_1(u) = A_1.u$

Con lo cual se puede obtener que:

$$u_t = \frac{du}{dt} = A_0.u + A_1(u) \approx (A_0 + A_1)(u)$$

A grandes rasgos se puede suponer, que con (1) se puede obtener el llamado *generador infinitesimal*, con el flujo:

$$u(t) = e^{h.(A_0+A_1)}.u_0$$



## Idea para ver que son los metodos numéricos de Splitting

A los flujos les pedimos que verifiquen:

- i.  $\Phi_X^0 = \text{id}$
- ii.  $\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s}$

Dado que le pedimos lo no lineal, ser suave y que:  $A_1(0) = 0$  hay un intervalo muy chico donde para la composición vale:  $A_1(u) = A_1.u$

Con lo cual se puede obtener que:

$$u_t = \frac{du}{dt} = A_0.u + A_1(u) \approx (A_0 + A_1)(u)$$

A grandes rasgos se puede suponer, que con (1) se puede obtener el llamado *generador infinitesimal*, con el flujo:

$$u(t) = e^{h.(A_0+A_1)}.u_0$$

## Idea para ver que son los metodos numéricos de Splitting

A los flujos les pedimos que verifiquen:

- i.  $\Phi_X^0 = \text{id}$
- ii.  $\Phi_X^t \circ \Phi_X^s = \Phi_X^{t+s}$

Dado que le pedimos lo no lineal, ser suave y que:  $A_1(0) = 0$  hay un intervalo muy chico donde para la composición vale:  $A_1(u) = A_1.u$

Con lo cual se puede obtener que:

$$u_t = \frac{du}{dt} = A_0.u + A_1(u) \approx (A_0 + A_1)(u)$$

A grandes rasgos se puede suponer , que con (1) se puede obtener el llamado *generador infinitesimal*, con el flujo:

$$u(t) = e^{h.(A_0+A_1)}.u_0$$

## Repaso de los métodos basados en esta idea

Gracias a la teoría de Lie, a un paso temporal  $h$ , lo podemos componer igualando los polinomios de Taylor de los integradores parciales, al del integrador general. Obteniendo una aproximación con un orden arbitrario:

### Casos más conocidos:

Usando las siguientes definiciones, para  $h$  el paso temporal de la integración numérica, llamamos  $q$  al orden del método. Es decir el mayor entero tal que el error local de truncamiento verifique:

$$\|\phi(h, u_0) - \Phi(h, u_0)\|_H \leq C(u_0) h^{q+1}$$

- $\Phi_{\text{LieTrotter}}(2h, u_0) = \Phi_1(h, \Phi_0(h, u_0)), q = 1$
- $\Phi_{\text{Strang}}(2h, u_0) = \Phi_0(h/2, \Phi_1(h, \Phi_0(h/2, u_0))), q = 2$
- $\Phi_{\text{Simplectico}}(2h)(u_0) = \Phi_1(b_m h) \circ \Phi_0(a_m h) \circ \cdots \circ \Phi_1(b_1 h) \circ \Phi_0(a_1 h)(u_0),$   
 $\sum a_i = \sum b_i = 1; q = 3, \dots$

## Repaso de los métodos basados en esta idea

Gracias a la teoría de Lie, a un paso temporal  $h$ , lo podemos componer igualando los polinomios de Taylor de los integradores parciales, al del integrador general. Obteniendo una aproximación con un orden arbitrario:

### Casos más conocidos:

Usando las siguientes definiciones, para  $h$  el paso temporal de la integración numérica, llamamos  $q$  al orden del método. Es decir el mayor entero tal que el error local de truncamiento verifique:

$$\|\phi(h, u_0) - \Phi(h, u_0)\|_H \leq C(u_0) h^{q+1}$$

- $\Phi_{\text{LieTrotter}}(2h, u_0) = \Phi_1(h, \Phi_0(h, u_0)), q = 1$
- $\Phi_{\text{Strang}}(2h, u_0) = \Phi_0(h/2, \Phi_1(h, \Phi_0(h/2, u_0))), q = 2$
- $\Phi_{\text{Simplético}}(2h)(u_0) = \Phi_1(b_m h) \circ \Phi_0(a_m h) \circ \cdots \circ \Phi_1(b_1 h) \circ \Phi_0(a_1 h)(u_0),$   
 $\sum a_i = \sum b_i = 1; q = 3, \dots$

H.F. TROTTER, On the product of semigroups of operators. Proc. Amer. Math. Soc. 10( 1959), 545-551

## Repaso de los métodos basados en esta idea

Gracias a la teoría de Lie, a un paso temporal  $h$ , lo podemos componer igualando los polinomios de Taylor de los integradores parciales, al del integrador general. Obteniendo una aproximación con un orden arbitrario:

### Casos más conocidos:

Usando las siguientes definiciones, para  $h$  el paso temporal de la integración numérica, llamamos  $q$  al orden del método. Es decir el mayor entero tal que el error local de truncamiento verifique:

$$\|\phi(h, u_0) - \Phi(h, u_0)\|_H \leq C(u_0) h^{q+1}$$

- $\Phi_{\text{LieTrotter}}(2h, u_0) = \Phi_1(h, \Phi_0(h, u_0)), q = 1$
- $\Phi_{\text{Strang}}(2h, u_0) = \Phi_0(h/2, \Phi_1(h, \Phi_0(h/2, u_0))), q = 2$
- $\Phi_{\text{Simplotico}}(2h)(u_0) = \Phi_1(b_m h) \circ \Phi_0(a_m h) \circ \dots \circ \Phi_1(b_1 h) \circ \Phi_0(a_1 h)(u_0),$   
 $\sum a_i = \sum b_i = 1; q = 3, \dots$

Strang G., 1963: Accurate partial difference methods II: Non Linear Problems. Numerische Math. 6 (1964) 37-46.

## Repaso de los métodos basados en esta idea

Gracias a la teoría de Lie, a un paso temporal  $h$ , lo podemos componer igualando los polinomios de Taylor de los integradores parciales, al del integrador general. Obteniendo una aproximación con un orden arbitrario:

### Casos más conocidos:

Usando las siguientes definiciones, para  $h$  el paso temporal de la integración numérica, llamamos  $q$  al orden del método. Es decir el mayor entero tal que el error local de truncamiento verifique:

$$\|\phi(h, u_0) - \Phi(h, u_0)\|_H \leq C(u_0) h^{q+1}$$

- $\Phi_{\text{LieTrotter}}(2h, u_0) = \Phi_1(h, \Phi_0(h, u_0)), q = 1$
- $\Phi_{\text{Strang}}(2h, u_0) = \Phi_0(h/2, \Phi_1(h, \Phi_0(h/2, u_0))), q = 2$
- $\Phi_{\text{Simplctico}}(2h)(u_0) = \Phi_1(b_m h) \circ \Phi_0(a_m h) \circ \dots \circ \Phi_1(b_1 h) \circ \Phi_0(a_1 h)(u_0),$   
 $\sum a_i = \sum b_i = 1; q = 3, \dots$

## Estrategia para la consistencia de los Métodos Afines

Notar :  $(A_0 + A_1)^2 = A_0^2 + A_0.A_1 + A_1.A_0 + A_1^2$ . buscamos la forma para el caso de 2º orden.

$$\Phi(u) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0) + \gamma_2 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0)$$

$$\text{i. } e^{h.A_0} e^{h.A_1}.u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + \frac{h^2.A_0.A_1}{2} + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

$$\text{ii. } e^{h.A_1} e^{h.A_0}.u_0 = (1 + h.(A_1 + A_0) + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + \frac{h^2.A_1.A_0}{2} + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

iii. Extrayendo a derecha, en  $O(h^3)$  valen las igualdades:

$$(\frac{1}{2}e^{h.A_0}e^{h.A_1} + \frac{1}{2}e^{h.A_1}e^{h.A_0}).u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0 + A_1)^2}{2}).u_0 = e^{h.(A_0 + A_1)}.u_0$$

### Idea de como tener Estabilidad

Si  $A$  tiene un espectro es muy grande tomando Euler resulta inestable. Si de algún modo ' $A < 0$ ' se puede ver como una exponencial decreciente de modo de poder garantizar estabilidad, por lo cual medimos:  $\lambda(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e^{At}\| - 1}{t}$ .

## Estrategia para la consistencia de los Métodos Afines

Notar :  $(A_0 + A_1)^2 = A_0^2 + A_0.A_1 + A_1.A_0 + A_1^2$ . buscamos la forma para el caso de 2º orden.

$$\Phi(u) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0) + \gamma_2 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0)$$

$$\text{i. } e^{h.A_0} e^{h.A_1}.u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + \frac{h^2.A_0.A_1}{2} + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

$$\text{ii. } e^{h.A_1} e^{h.A_0}.u_0 = (1 + h.(A_1 + A_0) + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + \frac{h^2.A_1.A_0}{2} + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

iii. Extrayendo a derecha, en  $O(h^3)$  valen las igualdades:

$$(\frac{1}{2}e^{h.A_0}e^{h.A_1} + \frac{1}{2}e^{h.A_1}e^{h.A_0}).u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0 + A_1)^2}{2}).u_0 = e^{h.(A_0 + A_1)}.u_0$$

### Idea de como tener Estabilidad

Si  $A$  tiene un espectro es muy grande tomando Euler resulta inestable. Si de algún modo ' $A < 0$ ' se puede ver como una exponencial decreciente de modo de poder garantizar estabilidad, por lo cual medimos:  $\lambda(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e^{At}\| - 1}{t}$ .



## Estrategia para la consistencia de los Métodos Afines

Notar :  $(A_0 + A_1)^2 = A_0^2 + A_0.A_1 + A_1.A_0 + A_1^2$ . buscamos la forma para el caso de 2º orden.

$$\Phi(u) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0) + \gamma_2 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0)$$

$$\text{i. } e^{h.A_0} e^{h.A_1}.u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + \frac{h^2.A_0.A_1}{2} + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

$$\text{ii. } e^{h.A_1} e^{h.A_0}.u_0 = (1 + h.(A_1 + A_0) + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + \frac{h^2.A_1.A_0}{2} + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + O(h^3)).u_0$$

iii. Extrayendo a derecha, en  $O(h^3)$  valen las igualdades:

$$(\frac{1}{2}e^{h.A_0}e^{h.A_1} + \frac{1}{2}e^{h.A_1}e^{h.A_0}).u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0 + A_1)^2}{2}).u_0 = e^{h.(A_0 + A_1)}.u_0$$

### Idea de como tener Estabilidad

Si  $A$  tiene un espectro es muy grande tomando Euler resulta inestable. Si de algún modo ' $A < 0$ ' se puede ver como una exponencial decreciente de modo de poder garantizar estabilidad, por lo cual medimos:  $\lambda(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e^{At}\| - 1}{t}$ .

## Estrategia para la consistencia de los Métodos Afines

Notar :  $(A_0 + A_1)^2 = A_0^2 + A_0.A_1 + A_1.A_0 + A_1^2$ . buscamos la forma para el caso de 2º orden.

$$\Phi(u) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0) + \gamma_2 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0)$$

- i.  $e^{h.A_0} e^{h.A_1}.u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + \frac{h^2.A_0.A_1}{2} + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + O(h^3)).u_0$
- ii.  $e^{h.A_1} e^{h.A_0}.u_0 = (1 + h.(A_1 + A_0) + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + \frac{h^2.A_1.A_0}{2} + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + O(h^3)).u_0$
- iii. Extrayendo a derecha, en  $O(h^3)$  valen las igualdades:

$$\left(\frac{1}{2}e^{h.A_0}e^{h.A_1} + \frac{1}{2}e^{h.A_1}e^{h.A_0}\right).u_0 = \left(1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0 + A_1)^2}{2}\right).u_0 = e^{h.(A_0 + A_1)}.u_0$$

### Idea de como tener Estabilidad

Si  $A$  tiene un espectro es muy grande tomando Euler resulta inestable. Si de algún modo ' $A < 0$ ' se puede ver como una exponencial decreciente de modo de poder garantizar estabilidad, por lo cual medimos:  $\lambda(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e^{At}\| - 1}{t}$ .

## Estrategia para la consistencia de los Métodos Afines

Notar :  $(A_0 + A_1)^2 = A_0^2 + A_0.A_1 + A_1.A_0 + A_1^2$ . buscamos la forma para el caso de 2º orden.

$$\Phi(u) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0) + \gamma_2 \Phi_1 \circ \Phi_0(u_0)$$

- i.  $e^{h.A_0} e^{h.A_1}.u_0 = (1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + \frac{h^2.A_0.A_1}{2} + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + O(h^3)).u_0$
- ii.  $e^{h.A_1} e^{h.A_0}.u_0 = (1 + h.(A_1 + A_0) + \frac{h^2.(A_1)^2}{2} + \frac{h^2.A_1.A_0}{2} + \frac{h^2.(A_0)^2}{2} + O(h^3)).u_0$
- iii. Extrayendo a derecha, en  $O(h^3)$  valen las igualdades:

$$\left(\frac{1}{2}e^{h.A_0}e^{h.A_1} + \frac{1}{2}e^{h.A_1}e^{h.A_0}\right).u_0 = \left(1 + h.(A_0 + A_1) + \frac{h^2.(A_0 + A_1)^2}{2}\right).u_0 = e^{h.(A_0 + A_1)}.u_0$$

### Idea de como tener Estabilidad

Si  $A$  tiene un espectro es muy grande tomando Euler resulta inestable. Si de algún modo ' $A < 0$ ' se puede ver como una exponencial decreciente de modo de poder garantizar estabilidad, por lo cual medimos:  $\lambda(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e^{At}\| - 1}{t}$ .

# Los Métodos Afines

## Métodos Afines

Dados los flujos  $\phi_j$  asociados a los problemas parciales, definimos las aplicaciones:

$$\phi^+(h) = \phi_1(h) \circ \phi_0(h), \phi^-(h) = \phi_0(h) \circ \phi_1(h)$$

$$\phi_m^\pm(h) = \phi^\pm(h) \circ \phi_{m-1}^\pm(h)$$

$$\Phi(h) = \sum_{m=1}^s \gamma_m \phi_m^\pm(h/m) \quad (\text{asimétrico}), \quad (2a)$$

$$\Phi(h) = \sum_{m=1}^s \gamma_m (\phi_m^+(h/m) + \phi_m^-(h/m)) \quad (\text{simétrico}). \quad (2b)$$

# La Familia de Métodos Afines

Bajo hipótesis apropiadas, los integradores dados por (2a) y (2b) son convergentes con orden  $q$  donde  $2n = q$ , si los coeficientes  $\gamma_m$  verifican respectivamente:

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s, \\ 0 &= \gamma_1 + 2^{-k}\gamma_2 + \cdots + s^{-k}\gamma_s, \quad 1 \leq k \leq q-1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s, \\ 0 &= \gamma_1 + 2^{-2k}\gamma_2 + \cdots + s^{-2k}\gamma_s, \quad 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned} \tag{4}$$

M.de Leo, C.S.F. de la Vega, D. Rial, High order methods for irreversible equations, enviado a SIAM J. Numer. Anal.

# La Familia de Métodos Afines

Bajo hipótesis apropiadas, los integradores dados por (2a) y (2b) son convergentes con orden  $q$  donde  $2n = q$ , si los coeficientes  $\gamma_m$  verifican respectivamente:

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s, \\ 0 &= \gamma_1 + 2^{-k}\gamma_2 + \cdots + s^{-k}\gamma_s, \quad 1 \leq k \leq q-1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s, \\ 0 &= \gamma_1 + 2^{-2k}\gamma_2 + \cdots + s^{-2k}\gamma_s, \quad 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned} \tag{4}$$

M.de Leo, C.S.F. de la Vega, D. Rial, High order methods for irreversible equations, enviado a SIAM J. Numer. Anal.

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden sin pasos negativos.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .



## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden sin pasos negativos.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
  - El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
  - El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
  - Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .



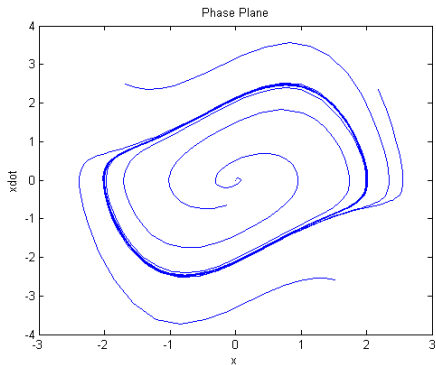
## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Breve Reseña

- Goldman (1996) probó que los métodos simplécticos de orden  $q > 2$  requieren algún paso negativo, impidiendo su aplicación a problemas irreversibles.
- Los métodos afines son de tipo **splitting**, convergentes de alto orden **sin pasos negativos**.
- El número de pasos totales de (2a) viene dado por  $S_T = 2 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .  
El número de pasos totales de (2b) viene dado por  $S_T = 4 \sum_{\gamma_m \neq 0} m$ .
- El sistema (3) tiene solución para  $s \geq q$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q$  con  $S_T = q(q+1)$ .  
El sistema (4) tiene solución para  $s \geq n$ , por lo tanto existen métodos de orden  $q = 2n$  con  $S_T = q(q/2 + 1)$ .
- Con lo cual los métodos (2) llevan mas pasos que los correspondientes simplécticos de orden 6 y 8 (8 y 16 pasos respectivamente) pero al ser paralelizables resultan comparables, aunque para los simplécticos surgidos de la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff elaborados por Yoshida (1990) de orden  $2n$  arbitrario, la cantidad es  $3^n$ .

## Algunos Casos Estudiados



## Sistemas de reacción–difusión oscilatorios

Los métodos simplécticos con orden  $q > 2$  requieren que algún paso sea negativo, lo que impide su aplicación a problemas irreversibles. Como ejemplo de estos, tenemos los sistemas de reacción–difusión:

$$\begin{aligned}v_t &= \nabla^2 v + (1 - r^2) v - (\omega_0 - \omega_1 r^2) w, \\w_t &= \nabla^2 w + (\omega_0 - \omega_1 r^2) v + (1 - r^2) w,\end{aligned}\tag{5}$$

donde  $r^2 = v^2 + w^2$ . Observemos que si  $u = v + iw$ , la ecuación (5) puede escribirse como

$$u_t = \nabla^2 u + (1 - |u|^2) u + i (\omega_0 - \omega_1 |u|^2) u.$$

El problema se puede descomponer como  $A_0 + A_1$ :

$$A_0(u) = \nabla^2 u, \quad A_1(u) = (1 - |u|^2) u + i (\omega_0 - \omega_1 |u|^2) u.$$

## flujos en reacción–difusión

**La parte no lineal**  $\phi_1$  está definido por

$$\phi_1(h, u_0) = u_0 e^h \left( 1 + (e^{2h} - 1) |u_0|^2 \right)^{-1/2} e^{i(\omega_0 h - \omega_1/2 \ln(1 + (e^{2h} - 1) |u_0|^2))}$$

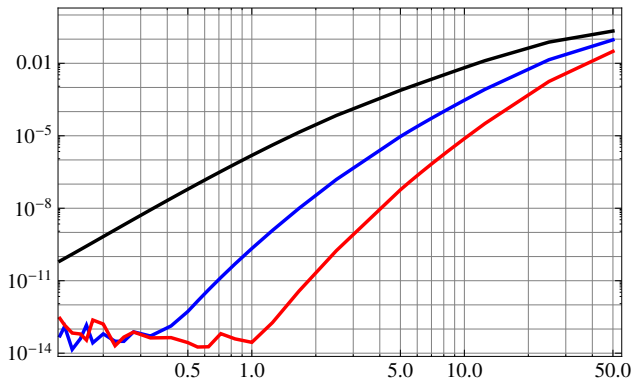
**La parte lineal** considerando soluciones  $L$ –periódicas, el flujo  $\phi_0$  se puede calcular aproximadamente usando transformada discreta de Fourier. Dado  $\eta$  un entero impar,  $\eta = 2l + 1$ , donde  $a = 2\pi/L$ ,  $\hat{U}_s$  es el coeficiente discreto de Fourier, consideramos:

$$(I_\eta u)(x) = \sum_{s=-l}^l \hat{U}_s e^{iasx}, \quad \hat{U}_s = \frac{1}{\eta} \sum_{r=0}^{\eta-1} u(Lr/\eta) e^{-i2\pi rs/\eta}.$$

Se prueba que existen soluciones estables si  $L > 2\pi (3 + 2\omega_1^2)^{1/2}$ , de la forma

$$\begin{aligned} v(x, t) &= r^* \cos(\theta_0 \pm ax + (\omega_0 - \omega_1 r^{*2}) t), \\ w(x, t) &= r^* \sin(\theta_0 \pm ax + (\omega_0 - \omega_1 r^{*2}) t), \end{aligned}$$

Donde vale que si  $r^* = L^{-1} (L^2 - 4\pi^2)^{1/2}$ , tomamos  $L = 4\pi$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 1/2$  y  $u_0 = r^* e^{iax}$ .



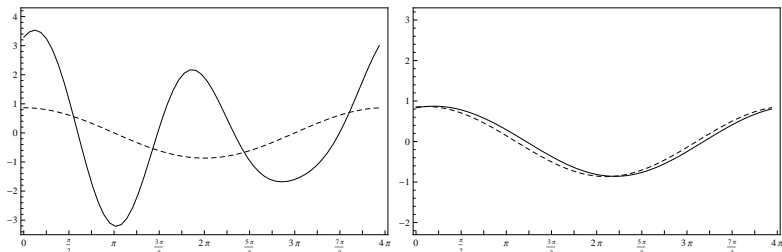
Error global de  $\Phi$  vs.  $h$  para  $q = 4, 6, 8$  para  $T = 10$

Las pendientes coinciden con el orden esperado hasta el punto donde los errores de redondeo dominan el error total.

Para analizar la estabilidad de las ondas planas, consideramos

$$\tilde{u}_0(x) = 0.8u_0(x) + 0.1 + 2.5e^{i2ax} - 0.8ie^{i3ax}$$

Vemos la evolución en el intervalo  $[0, 50]$  de  $\Phi(t, \tilde{u}_0)$  calculado con  $\eta = 63$  y  $h = 0.1$ , en línea de puntos graficamos  $\phi(t, u_0)$ .



## Ecuacion de Korteweg de Vries.

$$\begin{cases} u_t - \partial_x^3 u + 3\partial_x u^2 = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Se puede calcular usando transformada de Fourier:  $u_t \hat{u} - ik^3 \hat{u} + 3ik(\widehat{u^2}) = 0$

**El flujo lineal** Para  $u_t = u_{xxx}$  Será:

$$\partial_t \hat{u} = ik^3 \hat{u}$$

Se puede resolver en forma exacta.

**El flujo no lineal** Para  $u_t = -6u.u_x$  Será:

$$\partial_t \hat{u} = -3ik(\widehat{u^2})$$

Resuelta aproximadamente usando FFT.



Una evolución en 1 seg...

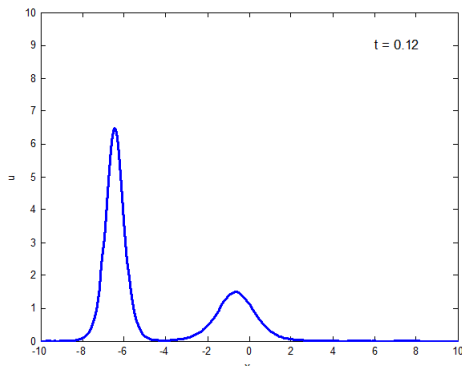
Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$

Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

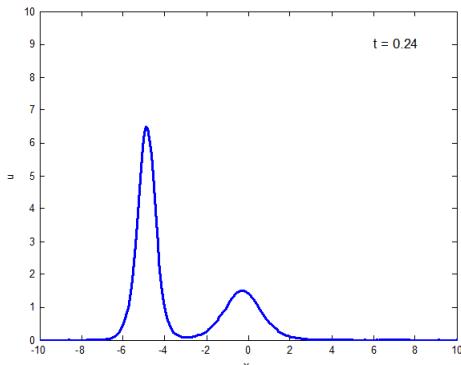
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

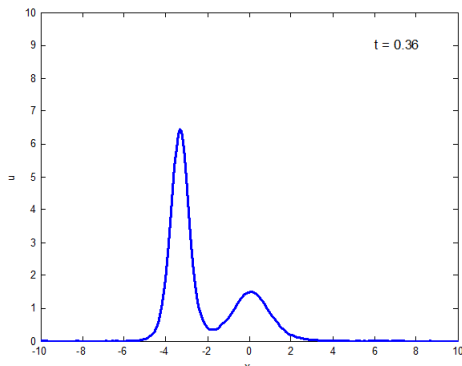
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

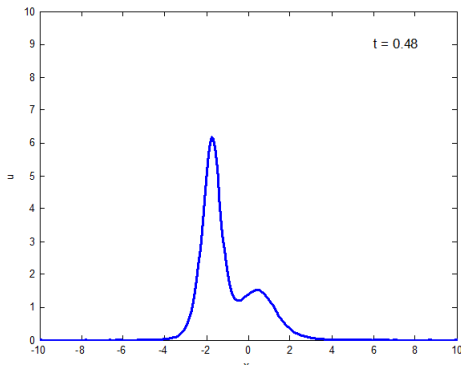
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

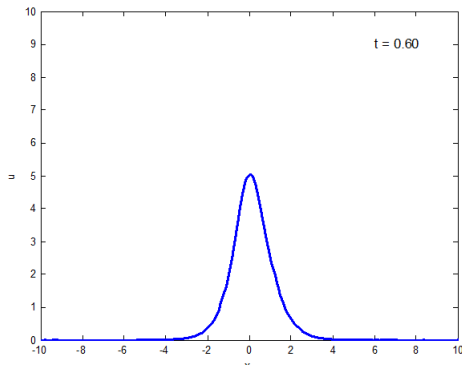
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

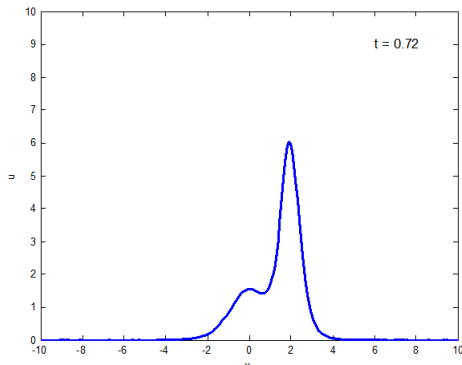
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solintones en la KdV con condicion inicial:

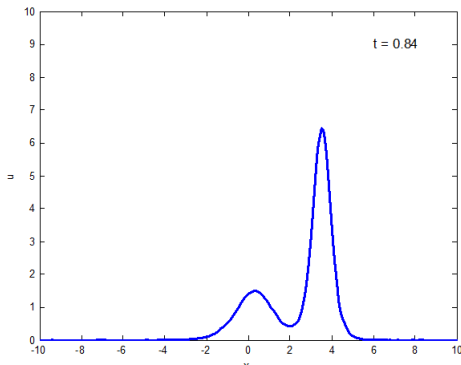
$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solitones en la KdV con condicion inicial:

$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$

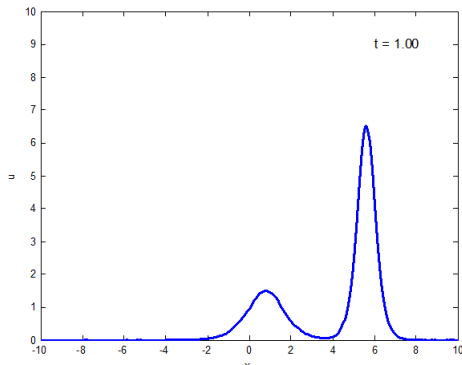




Una evolución en 1 seg...

Vamos a estudiar soluciones a 2 Solitones en la KdV con condicion inicial:

$$u(x, 0) = 8 \operatorname{sech}^2(2(x + 8)) + 2 \operatorname{sech}^2((x + 1))$$



## Ejemplo EDO Elemental 2D

Costoso de resolver con métodos simplécticos, debido a que los valores del paso deben ser muy pequeños para que se pueda retroceder. Caso el sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 4u_2 - \tan(u_1), \\ \dot{u}_2 = -4u_1 - \tan(u_2). \end{cases}$$

Se descompone el flujo lineal, una rotación en sentido horario cuyas órbitas están indicadas en el gráfico por los círculos y las líneas que convergen al origen representan las trayectorias de las ecuaciones:  $\dot{u}_j = -\tan(u_j)$  cuya solución es:  $u_j(t) = \arcsin(e^{-t} \sin(u_{j,0}))$ . Se ve que la solución no está definida para  $t < \ln |\sin(u_{j,0})| \leq 0$ , lo que limita el valor de  $h$  para integradores simplécticos. Se muestra la solución exacta (Runge Kutta con paso muy pequeño) con datos iniciales  $(1, 3/2)$  para  $t \in [0, 2]$  y los puntos obtenidos con  $\Phi$  de orden 4 y paso  $h = 0.2$ , al simpléctico correspondiente habría que achicarle mucho el paso.

Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
con Lie Trotter

$$\Phi_{LT} = \Phi_0 \circ \Phi_1$$

- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$
- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$

Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
con Lie Trotter

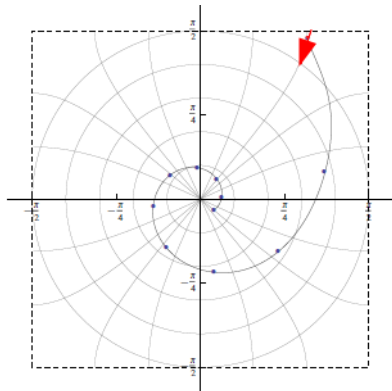
$$\Phi_{LT} = \Phi_0 \circ \Phi_1$$

● Flujo  $\Phi_1$

● Flujo  $\Phi_0$

● Flujo  $\Phi_1$

● Flujo  $\Phi_0$



Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
con Lie Trotter

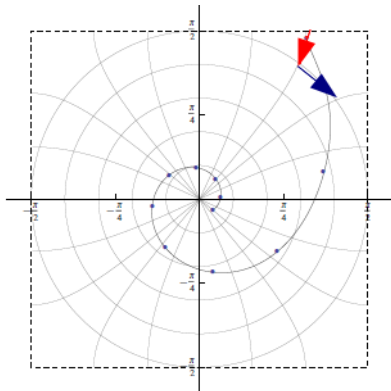
$$\Phi_{LT} = \Phi_0 \circ \Phi_1$$

● Flujo  $\Phi_1$

● Flujo  $\Phi_0$

● Flujo  $\Phi_1$

● Flujo  $\Phi_0$

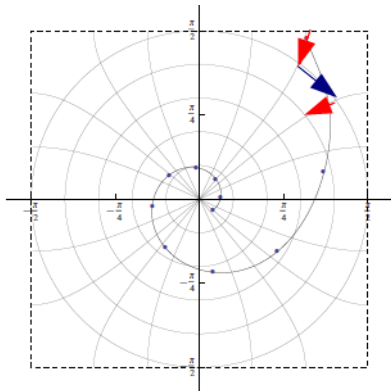


Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
con Lie Trotter

$$\Phi_{LT} = \Phi_0 \circ \Phi_1$$

- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$
- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$

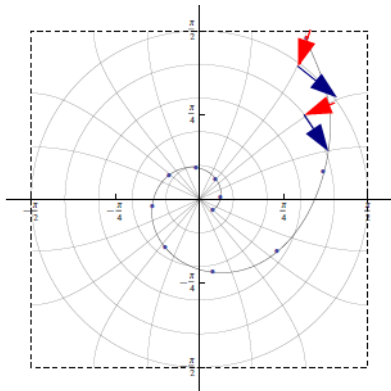


Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
con Lie Trotter

$$\Phi_{LT} = \Phi_0 \circ \Phi_1$$

- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$
- Flujo  $\Phi_1$
- Flujo  $\Phi_0$



Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
un Simpléctico de  
4º y un Afín de 2º  
orden.

- Neri
- Afín

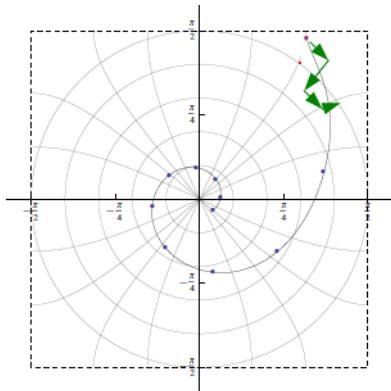


Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
un Simplético de  
 $4^{\circ}$  y un Afín de  $2^{\circ}$   
orden.

● Neri

● Afín

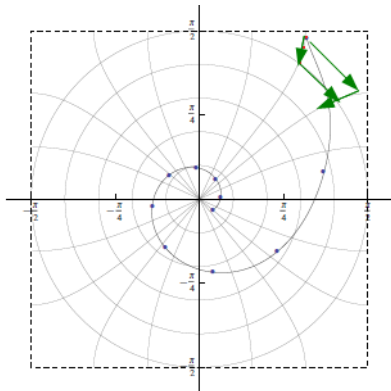


Para entender los métodos tipo splitting.

Solución obtenida  
un Simplético de  
 $4^{\circ}$  y un Afín de  $2^{\circ}$   
orden.

● Neri

● Afín



EDO 2D caso  $q = 4$ 

## EDO

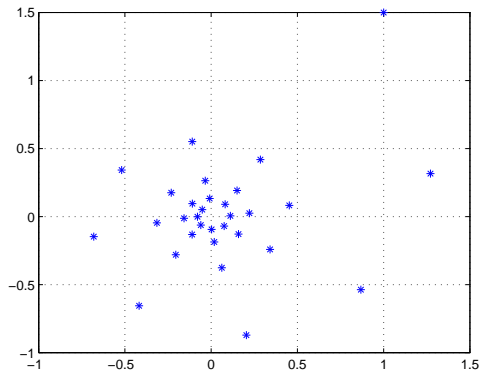
- Con Matlab  
 $S_p = 0,9513$
- Con MPI  
 $S_p = 1,1483$

EDO 2D caso  $q = 4$ 

## EDO

● Con Matlab  
 $S_p = 0,9513$

● Con MPI  
 $S_p = 1,1483$



EDO 2D caso  $q = 4$ 

## EDO

- Con Matlab

$$S_p = 0,9513$$

- Con MPI

$$S_p = 1,1483$$

The screenshot shows the Code::Blocks IDE with the following components:

- Management Panel:** Shows the project 'prueba\_EDO\_serial' and the file 'EDO\_serial\_Afin\_b.c'.
- Source Code:**

```

54 float x1=x; float y1=y;
55 float x2=x; float y2=y;
56 float x3=x; float y3=y;
57 float x4=x; float y4=y;
58
59 for (int i=0; i<80; i++)
60
61     gotoxy(40+20*x, 30+20*y);
62     printf("x");
63
64     Lineal(h, x1, y1); //
65     NoLineal(h, x1, y1); //
66
67     NoLineal(h, x2, y2); //
68     Lineal(h, x2, y2); //
69
70     NoLineal(h2, x3, y3); //
71     Lineal(h2, x3, y3); //
72     NoLineal(h2, x4, y4); //
73     Lineal(h2, x4, y4); //
74
75 
```
- Log & others:**

```

Compiling: C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines\EDO_serial_Afin_b.exe
Linking console executables C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines\EDO_serial_Afin_b.exe
Process terminated with status 0
0 errors, 0 warnings

Checking for existence: C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines\EDO_serial_Afin_b.exe
Executing: C:\Program Files (x86)\CodeBlocks\cb_console_runner.exe "C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines\EDO_serial_Afin_b.exe" (in C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines)

```
- Output Window:** Displays a grid of 'x' characters on a black background, representing the numerical solution of the EDO.
- Status Bar:** Shows the file path 'C:\Users\Tato\Dropbox\Curso Programación en Clusters-UNGS (2)\ejemplos\Metodos Afines\ WINDOWS-1257' and line/column information 'Line 2, Column 19'.

# Ecuación de Schrödinger cúbica.

Vamos a estudiar soluciones  $2\pi$ -periódicas de NLS.

$$\begin{cases} u_t = iu_{xx} + i2|u|^2 u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (6)$$

**El flujo lineal**  $\phi_0(h) = e^{ih\partial_x^2}$  se puede calcular aproximadamente usando transformada discreta de Fourier, donde  $\hat{U}_s$  es el coeficiente discreto de Fourier. Dado  $\eta$  un entero impar,  $\eta = 2l + 1$ , donde el número de operaciones requerido para realizar FFT es  $\eta \times \log(\eta)$  consideramos:

$$(I_\eta u)(x) = \sum_{s=-l}^l \hat{U}_s e^{isx}, \quad \hat{U}_s = \frac{1}{\eta} \sum_{r=0}^{\eta-1} U_r e^{-i2\pi rs/\eta} = \frac{1}{\eta} \sum_{r=0}^{\eta-1} u(2\pi r/\eta) e^{-i2\pi rs/\eta}.$$

**El flujo no lineal** tomamos la ecuación ordinaria (paramétrica en  $x$ )

$u_t = i2|u|^2 u$ , siendo que:  $\partial_t |u|^2 = 4\text{Re}(i|u|^4) = 0$ . De donde vale

$|u(x, t)|^2 = |u_0(x)|^2$  con lo cual el flujo está dado por  $\phi_1(h, u_0) = e^{i2h|u_0|^2} u_0$ .

Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x, t) = e^{i(x+t)} \psi(x - 2t)$

Comparaciones con:  
 $\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

- Error global vs  $h$
- Onda Solitaria  
con  $\tau = 20$
- Onda Solitaria  
con  $\tau = 40$
- Hamiltoniano  
 $H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$
- Carga  
 $\mathcal{Q}(u) = \|u\|_{L^2}^2$

Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x, t) = e^{i(x+t)} \psi(x - 2t)$

Comparaciones con:

$\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

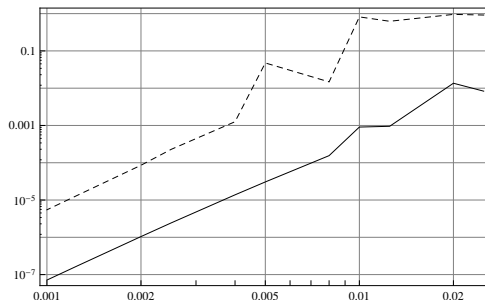
● Error global vs h

● Onda Solitaria  
con  $\tau = 20$

● Onda Solitaria  
con  $\tau = 40$

● Hamiltoniano  
 $H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$

● Carga  
 $\mathcal{Q}(u) = \|u\|_{L^2}^2$





Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x,t) = e^{i(x+t)} \psi(x-2t)$

Comparaciones con:

$\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

- Error global vs h

- Onda Solitaria  
con  $\tau = 20$

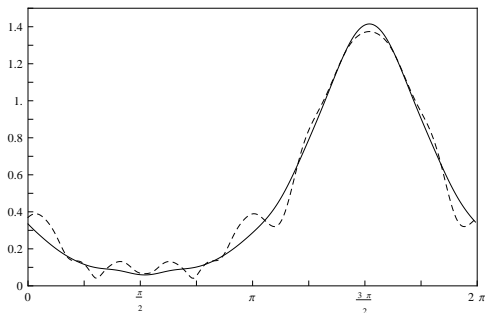
- Onda Solitaria  
con  $\tau = 40$

- Hamiltoniano

$$H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$$

- Carga

$$\mathcal{Q}(u) = \|u\|_{L^2}^2$$



Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x,t) = e^{i(x+t)} \psi(x-2t)$

Comparaciones con:

$\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

- Error global vs h

- Onda Solitaria  
con  $\tau = 20$

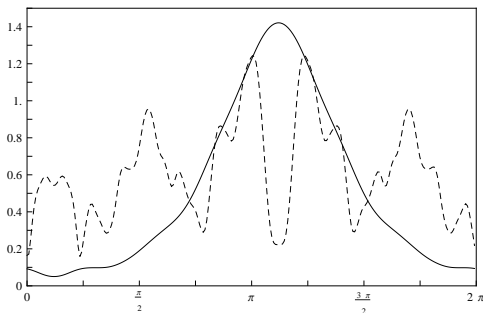
- Onda Solitaria  
con  $\tau = 40$

- Hamiltoniano

$$H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$$

- Carga

$$Q(u) = \|u\|_{L^2}^2$$



Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x,t) = e^{i(x+t)} \psi(x-2t)$

Comparaciones con:

$\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

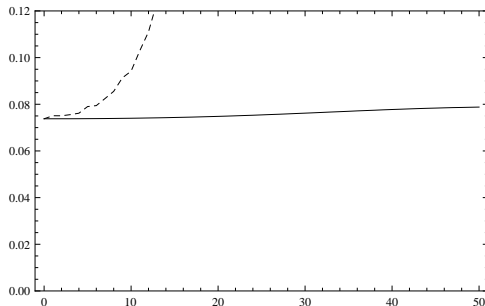
- Error global vs  $h$
- Onda Solitaria con  $\tau = 20$
- Onda Solitaria con  $\tau = 40$

• **Hamiltoniano**

$$H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$$

• Carga

$$\mathcal{Q}(u) = \|u\|_{L^2}^2$$



Para ilustrar  $\phi_{S,4}$  vs  $\phi_{A,4}$ .

Consideramos ondas solitarias de la forma:  $u(x, t) = e^{i(x+t)} \psi(x - 2t)$

Comparaciones con:

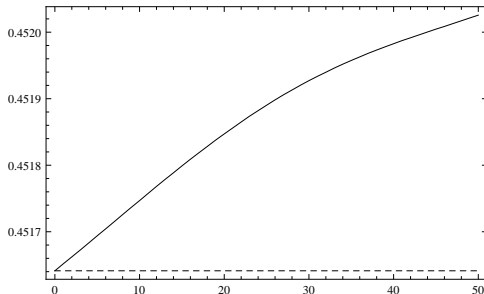
$\Phi_{A,4}(\tau h, u_0)$  y  $n = 50$

- Error global vs  $h$
- Onda Solitaria con  $\tau = 20$
- Onda Solitaria con  $\tau = 40$
- Hamiltoniano

$$H(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4$$

- Carga

$$Q(u) = \|u\|_{L^2}^2$$



## Ecuacion de Schrödinger Cubica 2D.

$$\begin{cases} u_t = i(u_{xx} + u_{yy} + |u|^2 \cdot u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

**El flujo lineal**  $\phi_0(h) = e^{ih\partial_x^2}$ ,  $X = (x, y)$ , calculado usando el algoritmo de Cooley y Tukey **FFT**, donde  $U_s$  es el coeficiente discreto de Fourier. Con  $\eta$  un entero, potencia de 2 optimizando la ejecución siendo de orden:  $O(\eta^2 \times \log(\eta))$ . Quedando:

$$\hat{U}_s(S) = \frac{1}{\eta^2} \sum_{r_1=0}^{\eta-1} \sum_{r_2=0}^{\eta-1} u(2\pi/\eta(r_1, r_2)) e^{-i2\pi/\eta(r_1 s_2 + r_2 s_1)}.$$

$$(I_\eta u)(X) = \sum_{s_1=-l}^l \sum_{s_2=-l}^l \hat{U}_s e^{iS \cdot X}$$

**El flujo no lineal** La edo (parametrica in  $X$ )  $u_t = i2|u|^2 u$ , donde:

$\partial_t |u|^2 = 4\text{Re} \left( i |u|^4 \right) = 0$ . Siendo  $|u(X, t)|^2 = |u_0(X)|^2$  quedando:

$$\phi_1(h, u_0) = e^{i2h|u_0|^2} u_0.$$

## Código Matlab para el caso $q = 4$ NLS 2D

[illegible]

NLS 2D caso  $q = 4$ 

$|U|$  en 50seg  
 $S_p = 1,2438$

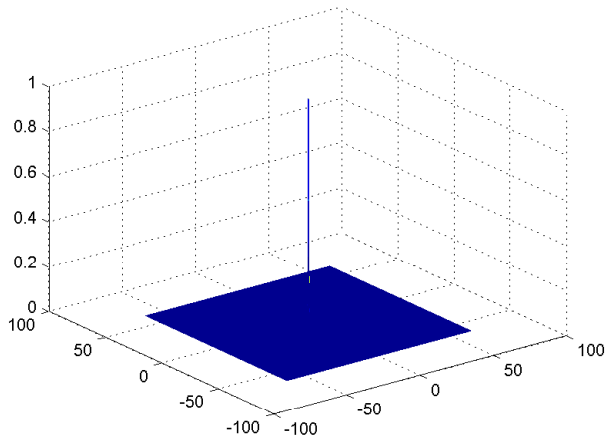
- Dirac  
aproximada
- Estado final

NLS 2D caso  $q = 4$ 

$|U|$  en 50seg  
 $S_p = 1,2438$

● Dirac  
aproximada

● Estado final



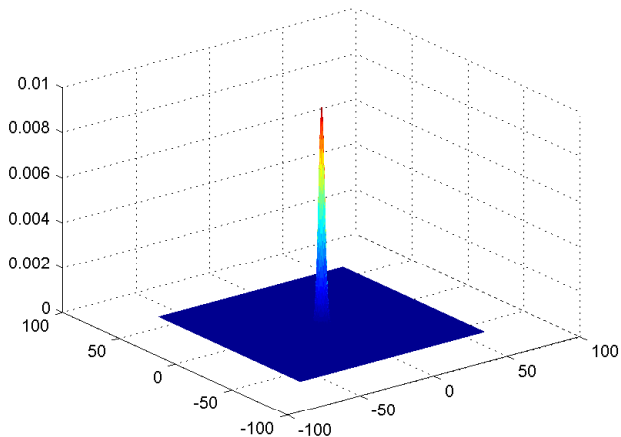


NLS 2D caso  $q = 4$ 

$|U|$  en 50seg  
 $S_p = 1,2438$

• Dirac  
aproximada

• Estado final



## Paralelización



## Mejoras para bajar el tiempo de cómputo

# Paralelización de estas aplicaciones

Según la **Ley de Amdahl**

Es el algoritmo el que decide la mejora de velocidad, el aumento del número de procesadores a partir de un valor no se refleja avances significativos.

Se define el **Speed up** a:  $S_p = \frac{T_S}{T_T}$ , que en términos de Eficiencia se puede ver como:  $E_p = \frac{S_p}{p}$ . Tomando que:

$$T_T = T_S(1 - \alpha) + \alpha \frac{T_S}{p}; \alpha \in [0, 1]$$

Con lo que para la fracción paralelizada valdrá:

$$S_p \leq \frac{p}{p(1 - \alpha) + \alpha}$$

## Mejoras para bajar el tiempo de cómputo

## Paralelización de estas aplicaciones

Según la **Ley de Amdahl**

Es el algoritmo el que decide la mejora de velocidad, el aumento del número de procesadores a partir de un valor no se refleja avances significativos.

Se define el **Speed up** a:  $S_p = \frac{T_S}{T_T}$ , que en términos de Eficiencia se puede ver como:  $E_p = \frac{S_p}{p}$ . Tomando que:

$$T_T = T_S(1 - \alpha) + \alpha \frac{T_S}{p}; \alpha \in [0, 1]$$

Con lo que para la fracción paralelizada valdrá:

$$S_p \leq \frac{p}{p(1 - \alpha) + \alpha}$$

## Mejoras para bajar el tiempo de cómputo

# Paralelización de estas aplicaciones

Según la **Ley de Amdahl**

Es el algoritmo el que decide la mejora de velocidad, el aumento del número de procesadores a partir de un valor no se refleja avances significativos.

Se define el **Speed up** a:  $S_p = \frac{T_S}{T_T}$ , que en términos de Eficiencia se puede ver como:  $E_p = \frac{S_p}{p}$ . Tomando que:

$$T_T = T_S(1 - \alpha) + \alpha \frac{T_S}{p}; \alpha \in [0, 1]$$

Con lo que para la fracción paralelizada valdrá:

$$S_p \leq \frac{p}{p(1 - \alpha) + \alpha}$$

## Mejoras para bajar el tiempo de cómputo

# Paralelización de estas aplicaciones

Según la **Ley de Amdahl**

Es el algoritmo el que decide la mejora de velocidad, el aumento del número de procesadores a partir de un valor no se refleja avances significativos.

Se define el **Speed up** a:  $S_p = \frac{T_S}{T_T}$ , que en términos de Eficiencia se puede ver como:  $E_p = \frac{S_p}{p}$ . Tomando que:

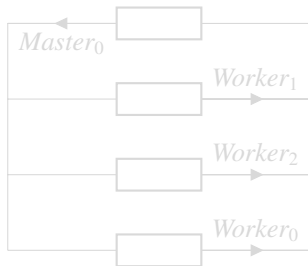
$$T_T = T_S(1 - \alpha) + \alpha \frac{T_S}{p}; \alpha \in [0, 1]$$

Con lo que para la fracción paralelizada valdrá:

$$S_p \leq \frac{p}{p(1 - \alpha) + \alpha}$$

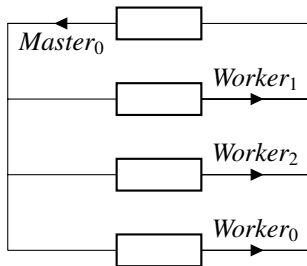
Implementación en casos  $q \geq 4$ 

Esta ejecución se implemento con **granularidad** media, usando una arquitectura de memoria distribuida mediante la interfaz que propone el estándar **MPI** con la técnica **Master Worker**, para mantener la sincronía y la escalabilidad de la aplicación. Esta tarea a gran escala requiere el uso de **Cluster** de computadoras, para lo cual contamos con el del Centro Atómico Constituyentes de la **CNEA**.



Implementación en casos  $q \geq 4$ 

Esta ejecución se implemento con **granularidad** media, usando una arquitectura de memoria distribuida mediante la interfaz que propone el estándar **MPI** con la técnica **Master Worker**, para mantener la sincronía y la escalabilidad de la aplicación. Esta tarea a gran escala requiere el uso de **Cluster** de computadoras, para lo cual contamos con el del Centro Atómico Constituyentes de la **CNEA**.

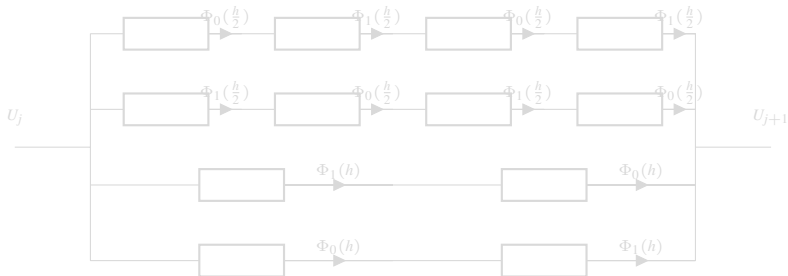




# Implementación en el caso $q = 4$ en la EDO y la NLS 2D

Codificados con la técnica **fork join**, con cada integrador en un bloque funcional. la corriente de datos va entrando con un  $U_j$  a cada **thread**, combinando linealmente la salida de los hilos para obtener el siguiente punto  $U_{j+1}$ .

$$U_{j+1} = \phi_{A,4}(U_j, 2h) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_2 \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j) + \gamma_3 \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_4 \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j)$$

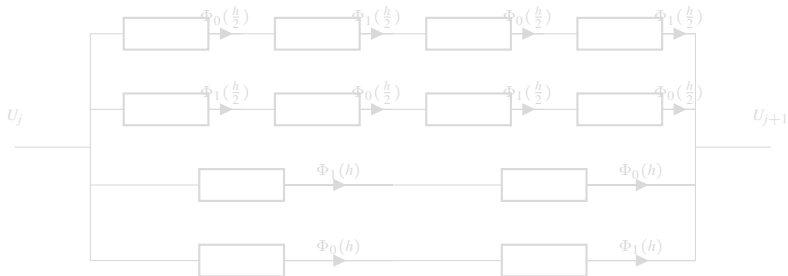


Para estos casos usamos un procesador personal **multicore** con un regular ancho de banda pues al estar todo en un mismo dispositivo se consiguió baja **latencia** para la **granularidad** propuesta en el esquema. Se usó el MPI propuesto por el software comercial **Matlab** con la intención de conseguir un pseudo código escalable a modo de croquis operativo y funcional para codificar en **C-MPI** necesario para poder operar con el cluster.

## Implementación en el caso $q = 4$ en la EDO y la NLS 2D

Codificados con la técnica **fork join**, con cada integrador en un bloque funcional. la corriente de datos va entrando con un  $U_j$  a cada **thread**, combinando linealmente la salida de los hilos para obtener el siguiente punto  $U_{j+1}$ .

$$U_{j+1} = \phi_{A,4}(U_j, 2h) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_2 \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j) + \gamma_3 \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_4 \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j)$$

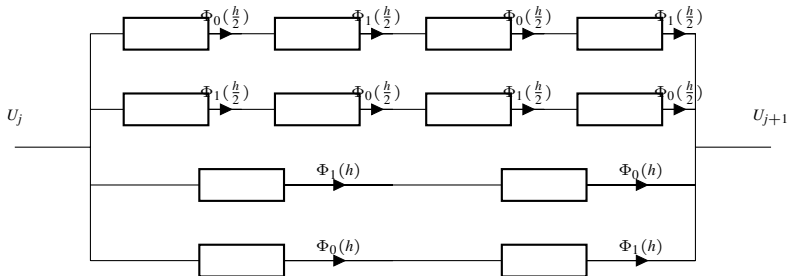


Para estos casos usamos un procesador personal **multicore** con un regular ancho de banda pues al estar todo en un mismo dispositivo se consiguió baja **latencia** para la **granularidad** propuesta en el esquema. Se usó el MPI propuesto por el software comercial **Matlab** con la intención de conseguir un pseudo código escalable a modo de croquis operativo y funcional para codificar en **C-MPI** necesario para poder operar con el cluster.

# Implementación en el caso $q = 4$ en la EDO y la NLS 2D

Codificados con la técnica **fork join**, con cada integrador en un bloque funcional. la corriente de datos va entrando con un  $U_j$  a cada **thread**, combinando linealmente la salida de los hilos para obtener el siguiente punto  $U_{j+1}$ .

$$U_{j+1} = \phi_{A,4}(U_j, 2h) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_2 \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j) + \gamma_3 \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_4 \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j)$$

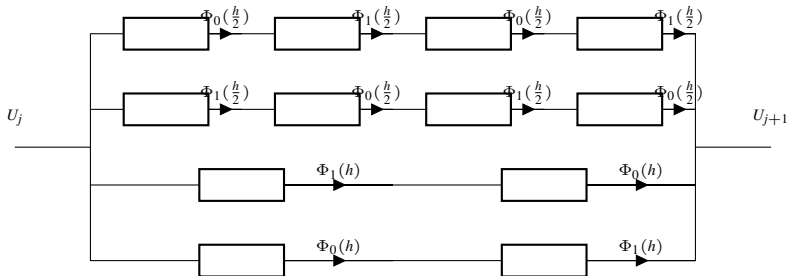


Para estos casos usamos un procesador personal **multicore** con un regular ancho de banda pues al estar todo en un mismo dispositivo se consiguió baja **latencia** para la **granularidad** propuesta en el esquema. Se usó el MPI propuesto por el software comercial **Matlab** con la intención de conseguir un pseudo código escalable a modo de croquis operativo y funcional para codificar en **C-MPI** necesario para poder operar con el cluster.

## Implementación en el caso $q = 4$ en la EDO y la NLS 2D

Codificados con la técnica **fork join**, con cada integrador en un bloque funcional. la corriente de datos va entrando con un  $U_j$  a cada **thread**, combinando linealmente la salida de los hilos para obtener el siguiente punto  $U_{j+1}$ .

$$U_{j+1} = \phi_{A,4}(U_j, 2h) = \gamma_1 \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_2 \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j) + \gamma_3 \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0(U_j) + \gamma_4 \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \Phi_0 \circ \Phi_1(U_j)$$



Para estos casos usamos un procesador personal **multicore** con un regular ancho de banda pues al estar todo en un mismo dispositivo se consiguió baja **latencia** para la **granularidad** propuesta en el esquema. Se usó el MPI propuesto por el software comercial **Matlab** con la intención de conseguir un pseudo código escalable a modo de croquis operativo y funcional para codificar en **C-MPI** necesario para poder operar con el cluster.

## Por delante



Incorporación al grupo del Dr Ing Pablo Fierens del ITBA donde estamos por recibir una placa Tesla K40 de donación

### Características fundamentales Tesla K40

- Pico de rendimiento de operaciones en coma flotante de doble precisión 1.43 Tflops
- Pico de rendimiento de operaciones en coma flotante de precisión simple 4.29 Tflops
- Ancho de banda de memoria (ECC desactivada) 288 GBytes/s
- Cantidad de memoria (GDDR5) 12 GB
- Núcleos CUDA 2880



## Aplicacion con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2) ,$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar \omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t) , \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) d\mathbf{r}$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicacion con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular.

Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega\tau$ ,  $u = \hbar\omega\psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) \, dr = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\bar{u}v) \, dr$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.



## Aplicación con Descent Gradient

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose-Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega\tau$ ,  $u = \hbar\omega\psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) d\mathbf{r}$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2 u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicacion con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar\omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) \, dr = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) \, dr$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicación con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar\omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) \, dr = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) \, dr$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicación con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose-Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar\omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) \, dr = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Re}(\bar{u}v) \, dr$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicación con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar\omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) d\mathbf{r}$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

## Aplicacion con Desenso Gradiente

Vamos a aprovechar el método Afín en la búsqueda de soluciones estacionarias en un problema irreversible de evolución hamiltoniano mediante el método de descenso, el caso **Gross-Pitaevskii 2D**, que describe la dinámica de condensados de Bose–Einstein rotantes en dos dimensiones con un término que corresponde al momento angular de la rotación.

$$i\hbar\psi_\tau = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - \hbar\Omega L_z + N\mu_0 |\psi|^2 \right) \psi \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa atómica,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $N$  es el número de átomos en el condensado,  $\Omega$  es la velocidad angular del laser y  $V(\mathbf{r})$  es un potencial externo. El parámetro  $\mu_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  describe la interacción entre los átomos del condensado y  $L_z = -i(\xi\partial_\eta - \eta\partial_\xi)$  es la componente  $z$  del momento angular. Vamos a considerar el potencial

$$V(\xi, \eta) = \frac{m}{2}\omega^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

si tomamos las variables:

$\mathbf{r} = (x, y) = \sqrt{\hbar/(m\omega)} (\xi, \eta)$ ,  $t = \omega \tau$ ,  $u = \hbar\omega \psi$ , la ecuación se transforma en:

$$iu_t(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 - \alpha L_z + \beta |u(\mathbf{r}, t)|^2 \right) u(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

donde  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\alpha = \Omega/\omega$  y  $\beta = N\mu_0/(\hbar\omega)^3$ .

Considerando  $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ , con el producto interno  $(u, v)_H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{u}v + u\bar{v}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}(\bar{u}v) d\mathbf{r}$ , el hamiltoniano del problema es  $\mathcal{H}(u) = -\frac{1}{4}u\nabla^2 u + \frac{1}{4}ur^2u - \frac{\alpha}{2}uL_z u + \frac{\beta}{4}\|u\|_{L^4}^4$ .

Nuestro objetivo es encontrar el mínimo de  $\mathcal{H}$  para cada valor de  $\alpha$  y  $\beta$  y encontrar en cuales de estos valores las soluciones son o no radiales, de modo de detectar la aparición de vórtices.

En un trabajo Elliot Lieb, prueba una propiedad para un caso del problema de  $N$  cuerpos, con un resultado muy interesante.

El buscar el mínimo de energía a la ecuación GP 2D que viene a cuento de este problema:

Define a partir del hamiltoneano un operador energía  $E^{GP}(N, a)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E^{GP}(N, \frac{N}{a_1})}{N} = E^{GP}(1, a_1)$$

En síntesis el problema de  $N$  cuerpos en alguna medida un escalamiento del caso unitario.

En un trabajo Elliot Lieb, prueba una propiedad para un caso del problema de  $N$  cuerpos, con un resultado muy interesante.

El buscar el mínimo de energía a la ecuación GP 2D que viene a cuento de este problema:

Define a partir del hamiltoneano un operador energía  $E^{GP}(N, a)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E^{GP}(N, \frac{N}{a_1})}{N} = E^{GP}(1, a_1)$$

En síntesis el problema de  $N$  cuerpos en alguna medida un escalamiento del caso unitario.



En un trabajo Elliot Lieb, prueba una propiedad para un caso del problema de  $N$  cuerpos, con un resultado muy interesante.

El buscar el mínimo de energía a la ecuación GP 2D que viene a cuento de este problema:

Define a partir del hamiltoneano un operador energía  $E^{GP}(N, a)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E^{GP}(N, \frac{N}{a_1})}{N} = E^{GP}(1, a_1)$$

En síntesis el problema de  $N$  cuerpos en alguna medida un escalamiento del caso unitario.

En un trabajo Elliot Lieb, prueba una propiedad para un caso del problema de  $N$  cuerpos, con un resultado muy interesante.

El buscar el mínimo de energía a la ecuación GP 2D que viene a cuento de este problema:

Define a partir del hamiltoneano un operador energía  $E^{GP}(N, a)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E^{GP}(N, \frac{N}{a_1})}{N} = E^{GP}(1, a_1)$$

En síntesis el problema de  $N$  cuerpos en alguna medida un escalamiento del caso unitario.

En un trabajo Elliot Lieb, prueba una propiedad para un caso del problema de  $N$  cuerpos, con un resultado muy interesante.

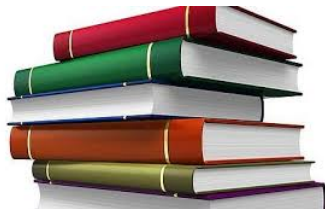
El buscar el mínimo de energía a la ecuación GP 2D que viene a cuento de este problema:

Define a partir del hamiltoneano un operador energía  $E^{GP}(N, a)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E^{GP}(N, \frac{N}{a_1})}{N} = E^{GP}(1, a_1)$$

En síntesis el problema de  $N$  cuerpos en alguna medida un escalamiento del caso unitario.

## Bibliografía



## Bibliografía

- W. Bao, Q. Du, and Y. Zhang, Dynamics of rotating Bose-Einstein condensates and its efficient and accurate numerical computation, SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), no. 3.
- W. Bao, H. Li, and Y. Zhang, Dynamics of rotating two-component Bose-Einstein condensates and its efficient computation, Phys. D 234 (2007), no. 1.
- W. Bao and J. Shen, A fourth-order time-splitting Laguerre-Hermite pseudospectral method for Bose-Einstein condensates, SIAM J. Sci. Comput. 6 (2005), 2010.
- W. Bao, H. Wang, and P. Markowich, Ground, symmetric and central vortex states in rotating Bose-Einstein condensates, Commun. Math. Sci. 3 (2005), no. 1.
- B. Bidegaray, C. Besse and S. Descombes, Order estimates in the time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002).
- T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes, vol. 10, AMS, Providence, Rhode Island, 2003.
- T. Cazenave and A. Haraux, Equations d'évolution avec non linéarité logarithmique, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 2 (1980), no. 1.
- Peter S. Pacheco, Parallel programming with MPI, (1997) by Morgan Kaufmann Publishers, Inc. San Francisco, California.
- Elliott Lieb, Robert Seiringer, and Jakob Yngvason, Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Energy Functional. Departments of Physics and Mathematics, Jadwin Hall, Princeton University, 1999 P. O. Box 708, Princeton, New Jersey 08544
- L. Gauckler, Convergence of a split-step Hermite method for the Gross-Pitaevskii equation, IMA J. Numer. Anal. 31 (2011), 396-415.
- H. Yoshida, Construction of higher order symplectic integrators, Phys. Lett. A 150 (1990), 262-268.
- F. Neri, Lie algebras and canonical integration, Department of Physics report, University of Maryland (1987).
- R. D. Ruth, A canonical integration technique, IEEE Transactions on Nuclear Science NS 30 (1983), no. 4, 2669-2671.
- M. de Leo, C.S.F. de la Vega, D. Rial, High order methods for irreversible equations, submitted to SIAM J. Numer. Anal.

¿Preguntas?  
Muchas Gracias



ITBA 2015 Puerto Madero

¿Preguntas?  
Muchas Gracias



ITBA 2015 Puerto Madero